

Щекань Н.П.,

асистент кафедри вищої математики,
ДВНЗ «Київський національний
економічний університет
ім. Вадима Гетьмана»

Shchekan N.P.,

assistant of Mathematics Department,
SHEE «Kyiv National Economic University
named after Vadym Hetman»

ГЕОМЕТРИЧНІ ТА АЛГЕБРАІЧНІ ФРАКТАЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ ОБРОБКИ І АНАЛІЗУ ПОТОКІВ ДАНИХ

GEOMETRICAL AND ALGEBRAIC FRACTAL METHODS IN INFORMATION TECHNOLOGIES OF DATA FLOW TREATMENT AND ANALYSIS

Анотація. У статті приведено приклади фрактальної геометрії, як справжньої революції у математичному описі природи, що дає можливість описати світ набагато зрозуміліше, ніж це робить традиційна математика або фізика. У статті проаналізовано генезис фракталів та розвитку фрактальної геометрії як прикладної науки. Показано, що фрактальні структури є формою і наслідком процесу самоорганізації в праві, а їх основними характерними ознаками є: самоподібність структур, сформованих на різних рівнях (у різних масштабах); пов'язаність та «укладеність» структур; наявність єдиного механізму формування структур на різних рівнях, що породжується єдиною системоутворювальною закономірністю; об'єктивний характер указанного механізму, що реалізовується через діяльність людей, але визначається об'єктивними умовами незалежно від їх волі. Розглянуто стохастичні фрактали, при утворенні яких утворюються випадково змінюються які-небудь його параметри і утворюються об'єкти дуже схожі на природні — асиметричні дерева, порізані берегові лінії тощо. Відповідно фрактальна сітка забезпечить вищий рівень захисту документів. Показано, що використання методу побудови фракталів для захисту документів є перспективним. Під час використання зображень фракталів з великою кількістю ітерацій, найменші частини є настільки дрібними, що відтворити їх за допомогою звичайного копіювання — неможливо.

Описано фрактальні методи в інформаційних технологіях обробки і аналізу великих потоків даних на основі логічних схем когнітивної аналітики розкодування прихованої в них інформації. Приведено приклади геометричних фракталів. Показано, що у комп'ютерній графіці фрактали прискорюють створення зображень, забезпечуючи стиснення зображення, причому побудова такого фрактального зображення відбувається за деяким алгоритмом або шляхом автоматичної генерації зображень, використовуючи обчислення за певними формулами. Побудова фрактального зображення відбувається за деяким алгоритмом або шляхом автоматичної генерації зображень, використовуючи обчислення за певними формулами. Зміна значень вхідних даних в алгоритмах або коефіцієнтів у формулах приводить до модифікації цих зображень.

Ключові слова: фрактал, фрактальна розмірність, стохастичні фрактали, алгебраїчні фрактали, геометричні фрактали.

Annotation. The article gives examples of fractal geometry as a real revolution in the mathematical description of nature, which makes it possible to describe the world much more clearly than traditional mathematics or physics does. The article analyzes the genesis of fractals and the development of fractal geometry as an applied science. It is shown that fractal structures are a form and a consequence of the process of self-organization in the right, and their main characteristic features are: self-similarity of structures formed at different levels (on different scales); connectivity and "enclosure" of structures; the existence of a single mechanism for the formation of structures at different levels, generated by a single system-forming law; the objective nature of this mechanism, which is realized through the activities of people, but determined by objective conditions, regardless of their will. Stochastic fractals are considered, in the formation of which some random parameters change and objects are created that are very similar to natural ones — asymmetric trees, trench lines, etc. Accordingly, the fractal grid will provide a higher level of protection of documents. It is shown that using the method of constructing fractals for document protection is promising. When using fractal images with a lot of iterations, the smallest parts are so small that they can not be reproduced using ordinary copying.

The fractal methods in information processing technologies and analysis of large data streams are described on the basis of logical schemes of cognitive analytics of decoding hidden information in them. Examples of geometric fractals are given. It is shown that in computer graphics, fractals accelerate the creation of images, providing compression of the image, and the construction of such a fractal image occurs by some algorithm or by automatic generation of images, using the calculation of certain formulas. The construction of a fractal image occurs by some algorithm or by automatic generation of images, using calculations according to certain formulas. Changing the values of input data in algorithms or coefficients in formulas results in the modification of these images.

Keywords: fractal, fractaldimension, stochasticfractals, algebraicfractals, geometricfractals.

Актуальність проблеми. Фрактальна геометрія — це справжня революція в математичному описі природи. З її допомогою можна описати світ набагато зрозуміліше, ніж це робить традиційна математика або фізика. Візьмемо, наприклад, броунівський рух. Здавалося б, у випадковому переміщенні частинок пилу, зважених у воді, панує цілковитий хаос. Проте і тут присутня фрактальна геометрія. Безладний броунівський рух має частотну характеристику, яку можна використовувати для прогнозування явищ з великим числом статистичних даних. Фрактали широко застосовуються в біології. Вчені, вивчаючи судинну систему, з'ясували, що її частини можна представити у вигляді фракталів. Пізніше вони виявили, що здорові кровоносні зв'язки та ракові пухлини мають різну фрактальну структуру. Це може допомогти виявити ракові пухлини на ранніх стадіях. Фрактали широко використовують в дизайні одягу. Фрактальна геометрія знаходить своє застосування в образотворчому мистецтві (фрактальний ім-

пресіонізм). Гучні свого часу картини Джексона Поллака є яскравим тому прикладом. Одним з художників, які використовували фрактали у своїй творчості, був і Кацусіко Хокусай. Наприклад, на його картині «Велика хвиля в Канагаві» гребні великих хвиль складаються з множини менших хвиль. Досить часто можна побачити фрактали в архітектурі. Індустрія кіно за допомогою фракталів здійснила справжній прорив. Структури, схожі на фрактали, можна виявити в оточуючій нас природі: межі хмар, межі морських узбереж, зимові візерунки на склі, кровоносна система серцевого м'язу, кореневі системи дерев, листя папороті, капуста броколі, деякі види квітів тощо.

Фрактальні методи в інформаційних технологіях обробки і аналізу великих потоків астрономічних даних на основі логічних схем когнітивної аналітики розкодування прихованої в них інформації, — є перспективною і унікальною парадигмою в області розробки інформаційних технологій нового покоління для широкого класу завдань не тільки сучасної астрономії. Потoki даних астрономічних спостережень можна обробляти, використовуючи різні процеси і методи теорії фракталів і генетичних даних як для отримання сукупностей і популяцій вибіркового даних, так і для їх аналізу. Ці методи і процеси відображають і визначають особливості одержуваних оцінок фрактальних заходів і розмірностей, а також область застосування висновків, які можна зробити на основі цих даних. У цьому випадку використовуються два типи вибіркового — генетична і статистична. Статистична вибіркoвість пов'язана з визначенням просторових масштабів решітки, а генетична — з розподілом інформації і об'єктів на вузлах цієї решітки. Варто зазначити фрактальний аналіз електронної кримінальної процесуальної інформації, що є ключовим елементом електронного процесуального контролю — принципово нової для юридичної науки технології автоматичного виявлення порушень кримінального процесуального законодавства. Фрактальні структури є формою і наслідком процесу самоорганізації в праві, а їх основними характерними ознаками слід уважати:

- самоподібність структур, сформованих на різних рівнях (у різних масштабах); пов'язаність та «укладеність» структур;

- наявність єдиного механізму формування структур на різних рівнях, що породжується єдиною системоутворювальною закономірністю;

- об'єктивний характер указанного механізму, що реалізовується через діяльність людей, але визначається об'єктивними умовами незалежно від їх волі.

Фрактальний характер властивий не тільки об'єктам, а й процесам. Наприклад, броунівський рух, еволюція живих організмів, реплікація ДНК тощо. Самоорганізаційні процеси утворення самоподібних соціальних структур притаманні мистецтву, релігії, розподілу праці, конвеєрному виробництву, мережевому маркетингу, курсу валют, державному управлінню, корупції тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Поняття фрактал було запропоноване Бенуа Мандельбротом, який уперше відмітив фрактальну природу нашого світу і стверджував, що «...природа демонструє нам не просто більш високий ступінь, а зовсім інший ступінь складності. Число різноманітних масштабів довжин у структурах завжди нескінченне. Існування цих структур кидає нам виклик у вигляді важкої задачі вивчення тих форм, що Евклід відкинув як безформенні». Саме ці слова надихнули на дослідження способів відображення різноманітних природних явищ і просто об'єктів через незвичні для нас форми, які породжує фрактальна геометрія. Мандельброт опублікував наукові праці, присвячені вивченню «фрактальній геометрії» або «геометрії природи», в яких розбивав, на перший погляд, випадкові, математичні форми на складові елементи, що виявилися при ближчому розгляді повторюваними. Відкриття Мандельброта дало вагомий позитивний наслідок у розвитку фізики, астрономії, біології. У роботах Мандельброта використані наукові результати інших учених, які працювали в період 1875–1925 роки в цій області (Пуанкаре, Фату, Жюліа, Кантор, Кох, Леві, Хаусдорф та інші) [1]. Проте за браком сучасної комп'ютерної графіки у них забракло засобів відобразити красу багатьох із відкритих ними об'єктів. Кольорові малюнки допоміг виконати вченому Річард Фос [2]. Завдяки ним і виник такий інтерес до фракталів. З появою цієї книги почався бурний розвиток фрактальної геометрії. Фрактали знайшли майже у всіх природних явищах і процесах. Термін “фрактал” походить від латинського “fractus” і перекладається як «розбитий, дроблений, зламаний», «що сформований з фрагментів». Частина фрактала містить інформацію про увесь фрактал. Фрактальна геометрія — це спосіб відображення складних об'єктів. Застосування фракталів присутнє у комп'ютерній науці — це фрактальне стиснення даних [3].

У 1984 році вчені Бременського університету Х.О. Пайтген і П.Х. Ріхтер організують публічну виставку, яка мала грандіозний успіх. Виставка включала виконані в лабораторії комп'ютерної графіки картини, слайди, відеофільми фракталів. Щоб пояснити публіці суть цих картин, вони випустили брошуру

«Гармонія хаосу і порядку», а потім каталог німецькою та англійською мовами, який розійшовся за кілька місяців. У 1986 році вийшла в світ їх книга «Краса фракталів». Над вивченням фракталів працював також норвезький фізик Енс Федер. У своїй книзі «Фрактали» він дає ясне і просте викладення математичних властивостей фракталів, описує приклади застосування фракталів у гідродинаміці, океанології, гідрології та ін. Крім того, приводить методи комп'ютерної графіки [4].

Фрактал являє собою складну геометричну фігуру, яка складена з кількох нескінченної послідовності частин, кожна з яких подібна всій фігурі цілком, і повторюється при збільшенні масштабу. Галілео Галілей у 1623 році писав: "Вся наука записана у цій великій книзі, — я маю на увазі Всесвіт, — що завжди відкрита для нас, але яку неможливо зрозуміти, не навчившись розуміти мову, на якій вона написана, а написана вона на мові математики, і її літерами є трикутники, кола і інші геометричні фігури, без яких людині не можливо розібрати жодного її слова; без них вона подібна блукаючому в п'ятмі...". Структура фрактала на всіх шкалах є нетривіальною. Якщо ми розглянемо невеличкий фрагмент регулярної фігури (коло, еліпс) в дуже великому масштабі, він буде схожий на фрагмент прямої. А коли ми збільшуємо або зменшуємо масштаб перегляду фракталів, то їх вигляд не змінюється. Ступінь «порізаності», «зламаності», «хвилястості» фрактала може бути виміряне числом, яке називається фрактальна розмірність. З допомогою фрактальної розмірності можна порівнювати фрактали між собою. Вона збільшується із зростанням «порізаності», «зламаності», «хвилястості» об'єкта, тоді як топологічна розмірність не враховує всі зміни, які відбуваються з лінією чи поверхнею. Головна особливість фракталів, що їх розмірність є дробовим числом. Поняття фрактальної розмірності було введено Феліксом Хаусдорфом і Абрамом Безіковичем [5]. Відтепер вона заслужено носить імена своїх відкривачів — «розмірність Хаусдорфа–Безіковича». Фелікс Хаусдорф (трапляється варіант прізвища Гаусдорф) (1868–1942), — німецький математик, вважається одним з основоположників сучасної топології [6]. Абрам Самойлович Безікович (1891–1970) — британський математик. 1934 року А. Безікович був обраний членом Королівського наукового товариства. Серед відзнак Безіковича, зокрема, премія Д. Адамса Кембриджського університету (1930), медаль О. Де Моргана Лондонського математичного товариства (1950), медаль імені Дж. Сільвестра (1952) [7]. Мандельбротом у його книзі «Фрактальна геометрія природи» дається таке визачення :

«Фракталом називається множина, розмірність Хаусдорфа–Безіковича, для якої строго більше її топологічної розмірності» [8, 10].

Фрактал характеризується розмірністю Хаусдорфа D . Розмірність Хаусдорфа–Безіковича D — це міра розбивки об'єкта E на частини розміром r з наступним підрахунком числа $N(r)$ частин, що покривають досліджуваний об'єкт [9]:

$$D = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r)}{\log \left(\frac{1}{r} \right)}, \quad (1)$$

де N — кількість відрізків, r — довжина відрізка.

Зауважимо, що наприклад, форма антени у вигляді кривої фрактала дозволяє істотно зменшити її геометричні розміри. Натан Коен вивів теорему, яка доводить, що для створення широко-смугової антени досить надати їй форму самоподобної фрактальної кривої.

Метою роботи є проведення дослідження генезису фракталів і розвитку фрактальної геометрії як прикладної науки. Описати фрактальні методи в інформаційних технологіях обробки і аналізу великих потоків даних на основі логічних схем когнітивної аналітики розкодування прихованої в них інформації.

Викладення основного матеріалу дослідження. Алгебраїчні фрактали отримують за допомогою нелінійних процесів в n -мірних просторах. На сьогоднішній момент найбільш вивченими є двувимірні процеси. Як відомо, нелінійні динамічні системи володіють кількома стійкими станами. Кожне стійкий стан володіє певною областю початкових станів, з яких система обов'язково потрапить в розглянутий кінцевий стан. З цього випливає, що фазовий простір системи розбивається на області тяжіння певного стану. Таким чином, якщо фазовим є двувимірний простір, то фарбуючи області тяжіння різними кольорами, можна отримати колірний фазовий портрет цієї системи. Зміна алгоритму вибору кольору, дозволяє отримувати складні фрактальні візерунки з неймовірними кольоровими візерунками, що надало можливість за допомогою примітивних алгоритмів породжувати дуже складні нетривіальні структури.

У двовимірному випадку їх отримують з допомогою ламаної (або площини у тривимірному випадку), яка називається генератором. За один крок алгоритму кожний із відрізків замінюється

на ломану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї процедури утворюється геометричний фрактал. До геометричних фракталів відноситься сніжинка Коха, множина Кантора, килим Серпінського, трикутник Серпінського, крива Пеано, крива дракона, Т-Квадрат і губка Менгера та інші.

Фрактали цього класу найбільш наочні, тому що вони володіють самоподібністю, яка не змінюється при зміні масштабу. Цей тип отримуть шляхом простих геометричних перетворень, а саме — за допомогою деякої ламаної, що називається генератором. Кожний з відрізків, що складає ламану, замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повтору цієї процедури отримують геометричний фрактал.

Прикладом геометричних фракталів є трикутник Серпінського (рис. 1). Фрактал, який назвали трикутником Серпінського, був запропонований польським математиком Вацлавом Серпінським : $N = 3$; $r = \frac{1}{2}$; $D = 1,585$ [7].

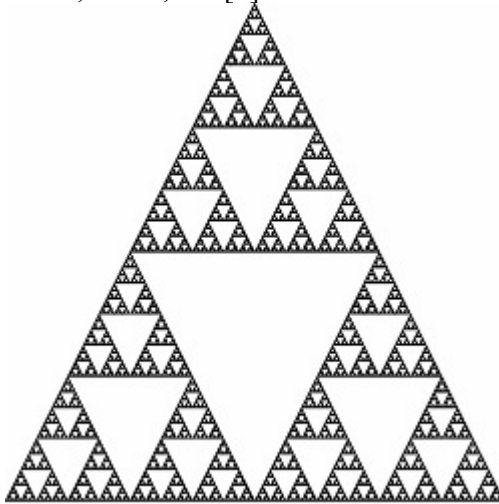


Рис. 1 Трикутник Серпінського

Ще одним відомим класом фракталів є стохастичні фрактали — це фрактали, при утворенні яких утворюються випадково змінюються які-небудь його параметри. При цьому утворюються об'єкти дуже схожі на природні — асиметричні дерева, порізані берегові лінії тощо. Приведемо приклади стохастичних фракталів:

— траєкторія броунівського руху на площині і в просторі;

— межа траєкторії броунівського руху на площині. У 2001 році Лоулер, Шрамм і Вернер довели припущення Мандельброта про те, що її розмірність дорівнює $4/3$;

— еволюції Шрамм–Лёвнера — конформно-інваріантні фрактальні криві, що виникають у критичних двовимірних моделях статистичної механіки;

— різні види рандомізованих фракталів, тобто фракталів, отриманих за допомогою рекурсивної процедури, в яку на кожному кроці введений випадковий параметр. Плазма — приклад використання такого фрактала в комп'ютерній графіці.

Природні об'єкти часто мають фрактальну форму. Для їх моделювання можуть застосовуватися стохастичні (випадкові) фрактали.

Двомірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфа місцевості і поверхні моря. Приведемо приклад парадоксу геометричних фракталів: якщо берегова лінія Великобританії вимірюється відрізками по 100 км, то її довжина становить приблизно 2 800 км. Якщо використовуються відрізки по 50 км, то довжина дорівнює приблизно 3 400 км, що на 600 км більше.

У статті Мандельброта «Фрактальна геометрія природи» йдеться про експеримент, який поставив Льюїс Річардсон (Lewis Fry Richardson) — математик, фізик і метеоролог. Одним з напрямків його досліджень була спроба знайти математичний опис причин і ймовірності виникнення збройного конфлікту між двома країнами. У числі параметрів, які він враховував, була протяжність спільного кордону двох ворогуючих країн. Коли він збирав дані для численних експериментів, то виявив, що в різних джерелах дані про спільному кордоні Іспанії та Португалії сильно відрізняються. Це наштовхнуло його на таке відкриття: довжина кордонів країни залежить від лінійки, якою ми їх вимірюємо. Чим менше масштаб, тим довше виходить межа. Це відбувається через те, що при більшому збільшенні стає можливим враховувати все нові і нові вигини берега, які раніше ігнорувалися через грубості вимірювань. І якщо при кожному збільшенні масштабу будуть відкриватися раніше не враховані вигини ліній, то вийде, що довжина кордонів нескінченна! Правда, насправді цього не відбувається — у точності наших вимірювань є кінцевий межа. Цей парадокс називається ефектом Річардсона (Richardson effect) [6, 8].

Парадокс берегової лінії — суперечливе спостереження в географічних науках, пов'язане з неможливістю точно визначити довжину лінії узбережжя через її фракталоподобних властивос-

тей. На рис. 2 представлено берегову лінію узбережжя Норвегії, причому сітка зроблена з кроком 50 км.

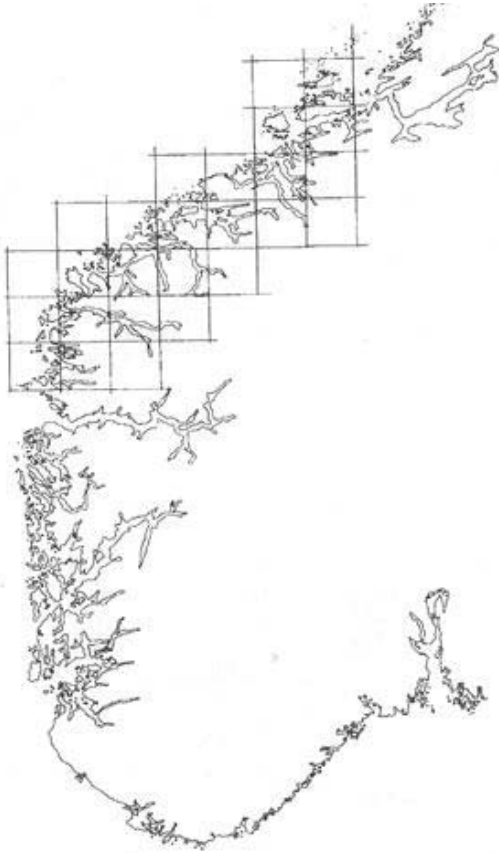


Рис. 2. Фрактальна геометрія узбережжя Норвегії

Поняття довжини походить від Евклідовому відстані. У Евклідовій геометрії пряма лінія являє собою найкоротша відстань між двома точками. Геодезична лінія на поверхні сфери, звана великим колом, вимірюється уздовж кривої, яка лежить в площині, що містить кінцеві точки шляху і центр сфери. Довжина кривої обчислюється складніше [4,7]. При використанні лінійки довжину кривої можна приблизно обчислити, підсумовуючи довжини відрізків, що з'єднують точки (рис. 3).



Рис.3. Апроксимація обчислення берегової лінії

Фрактальна крива, яку описав шведський математик Хельге фон Кох за такими параметрами: $N = 4$; $r = 0,333$; $D = 1,26$. Три копії кривої Коха, побудовані на сторонах правильного трикутника, утворюють замкнену криву, так звану сніжинку Коха [3].

Крива Коха задається такою системою ітераційних функцій. Контур сніжинки Коха складається з відрізків однакової довжини, нахилених під кутом 0° , 60° і 120° по відношенню до горизонтальної осі x . Якщо позначити їх відповідно 1, 2 і 3, то сніжинка будь-якого порядку буде складатися з наступних один за одним трійок — 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3 .. і т. Д. Кожен з цих трьох типів відрізків може прикріплятися до попереднього одним або іншим кінцем. З урахуванням цієї обставини можна вважати, що контур сніжинки складається з відрізків шести типів. Позначимо їх 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Таким чином, ми отримуємо можливість кодувати контур будь-якого порядку за допомогою 6 цифр (рис. 4). Отже, побудова такого геометричного фракталу починається з відрізка-ініціатора, далі відбувається побудова генератора і безпосередня побудова фракталу згідно певного правила [5, 6, 9]. Ще один геометричний фрактал, названий фракталом Мінковського, запропонував німецький математик Герман Мінковський. Генератор складається з восьми рівних частин. Коефіцієнт подібності — $1/4$. Отже, обчислюється величина D : $N = 8$; $r = 1/4$; $D = 1,5$. Змінюючи лише деякі характеристики, можна створити величезну кількість різноманітних фігур.

Аналогічно можна здійснювати побудову інших геометричних фракталів. Фрактал є складною фігурою, але застосування цього методу допомагає зробити його структуру ще складнішою. Відповідно фрактальна сітка забезпечить вищий рівень захисту документів. Вважається, що використання методу побудови фракталів для захисту документів є перспективним. Під час використання зображень фракталів з великою кількістю ітерацій,

найменші частини є настільки дрібними, що відтворити їх за допомогою звичайного копіювання — неможливо.

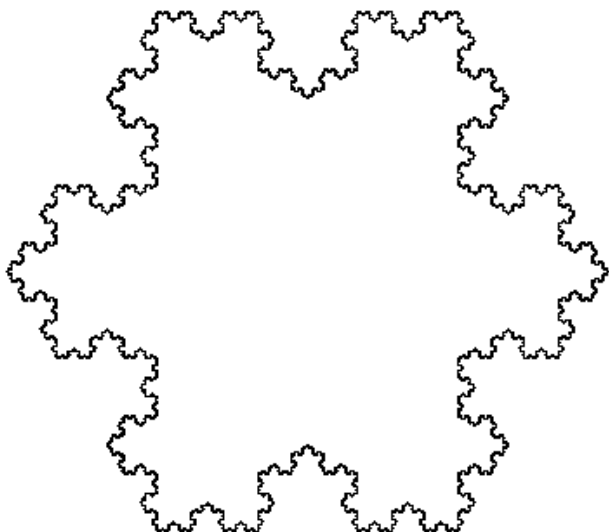


Рис.4. Сніжинка Коха

Тобто можна стверджувати, що фрактальна сітка може забезпечувати три ступені захисту завдяки:

1) складності фрактального візерунку, відтворення якого вимагає значної кількості часу, кваліфікованих кадрів, що відповідно призводить до підвищення собівартості підробки;

2) використанню спеціальних способів друку, при яких відсутні розриви фрактальних елементів і накладання фарб навіть на найдрібніших елементах сітки;

3) фрактальна сітка є елементом захисту завдяки дрібним елементам і тонким лініям, що розташовані близько одна до одної.

Таким чином створено інформаційну технологію захисту документів. Суть цієї технології полягає у розробленні елементів поліграфічного захисту, а саме: захисних сіток на основі геометричних фракталів.

Як і векторна, фрактальна графіка відноситься до розряду "обчислюваних", але відрізняється від неї тим, що ніякі об'єкти в пам'яті комп'ютера не зберігається. При цьому фрактал стає об'єктом, що володіє нескінченною складністю, що дозволяє розг-

лянути стільки ж своїх предметів поблизу, як і здалеку. У комп'ютерній графіці фрактали прискорюють створення зображень, при цьому вони забезпечують стиснення зображення. Побудова фрактального зображення відбувається за деяким алгоритмом або шляхом автоматичної генерації зображень, використовуючи обчислення за певними формулами. Зміна значень вхідних даних в алгоритмах або коефіцієнтів у формулах приводить до модифікації цих зображень. Фрактальну графіку часто використовують для графічного подання даних при моделюванні деяких процесів, для автоматичної генерації абстрактних або реалістичних зображень, у розважальних програмах. Безперечною перевагою фрактальної графіки є те, що у файлі фрактального малюнка зберігаються тільки алгоритми та формули. Тому розміри цих файлів значно менші, ніж файлів малюнків векторної і растрової графіки.

Існують спеціальні пакети для проведення фрактального аналізу, такі як FracLab, FRACTAN.

Для моделювання фракталів застосовують програмування Python з пакетами NumPy, SciPy та Matplotlib. Також використовується комплексне середовище Enthought Canopy для аналізу і візуалізації результатів. Enthought Canopy використовує понад 150 бібліотек, до яких входять NumPy та Matplotlib. Ці пакети застосовуються і для фрактальної розмірності часового ряду.

Наприклад, у класичній теорії аналізу часових рядів біржових даних та інвестування в цінні папери не використовуються інструменти теорії хаосу, а використовується фрактальний аналіз в процесі відбору акцій до інвестиційного портфелю як доповнення до класичного технічного аналізу. Одним з найпопулярніших методів оцінювання фрактальної розмірності є варіаційний метод, узагальненням якого є сегментно-варіаційний метод. Фрактальна розмірність часового ряду вимірює, наскільки порізанним є часовий ряд. Згідно з очікуванням пряма лінія повинна мати фрактальну розмірність 1, рівну її евклідовій розмірності. Фрактальна розмірність випадкового часового ряду складає 1,50. Один ранній метод обчислення фрактальної розмірності передбачає покриття кривої колами радіусу. Розраховують кількість кіл необхідних для покриття кривої, а потім збільшують радіус. При цьому кількість кіл змінюється таким чином:

$$N(2r)^d = 1, \quad (2)$$

де N — кількість кіл; r — радіус; d — фрактальна розмірність.

Фрактальна розмірність може бути вирішена як нахил графіка в логарифмічному масштабі по обох осях. Для часового ряду можна збільшити радіус як приріст часу і розрахувати кількість кіл необхідних для покриття всього часового ряду як функцію приросту часу. Таким чином, фрактальна розмірність часового ряду є функцією зміни масштабу в часі.

Візьмемо до уваги низку випадкових змінних протяжності 100 з розкладом у площині $[0, 1]$, генерованих за допомогою комп'ютера.

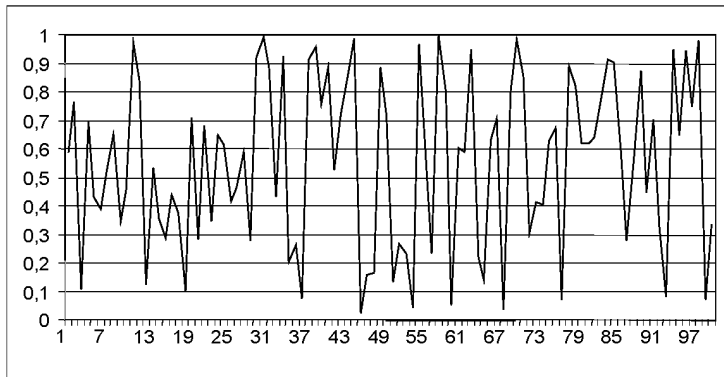


Рис. 5. Діаграма ряду

Оцінка величини фрактальної розмірності для ряду, діаграму якого представлено на рис. 5, дала значення 1,778. Багатократні комп'ютерні ітерації дали натомість середнє значення для цього типу рядів — 1,775. Це значення може бути точкою відліку при порівнянні випадкових рядів з не випадковими, а також величини ламаності.

Таким чином, теорія фракталів демонструє якісний новий підхід у моделюванні економіки.

Висновки. Фрактал — геометрична фігура, що складена з кількох частин, кожна з яких подібна до усієї фігури у цілому. Нині фрактали знаходять широке застосування в різних областях інформаційних технологій: стиснення зображень; комп'ютерна графіка; кластерний аналіз; нейронні мережі; криптографія; фінанси; музика. Основа методу фрактального кодування — це виявлення подібних ділянок в зображенні. Математична модель, яка використовується при фрактальному стисненні зображень, називається системою ітегрованих функцій. незважаючи на те, що виконані в останні роки роботи дозволили значно зменшити

час кодування, актуальним залишається проведення досліджень з підвищення швидкості стиснення зображень цим методом.

Література

1. *Киппхан Г.* Энциклопедия по печатным средствам информации. Технологии и способы производства / Пер. с нем. — М.: МГУП, 2003. — 1280 с.
2. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. — 256 с.
3. *Мандельброт Б.* Фрактальна геометрія природи / Бенуа Мандельброт. — М. : Інститут комп'ютерних досліджень. — 2002. — 656 с.
4. *Корнійчук О. Е.* GRAN-ілюстрація та прогнози обчислення еколого-економічної моделі / О. Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання. — Київ : Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2007. — Вип. 5 (12). — С. 131–136.
5. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах / Р. Кроновер. — М.: Техносфера, 2006. — 488 с.
6. Фрактальный анализ процессов, структур и сигналов / Под ред. Р.Э. Пашенко. — Харьков : ЭкоПерспектива, 2006. — 348 с.
7. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков / Э. Петерс. — М.: Интернет-Трейдинг, 2004. — 286 с.
8. *Дербенцев В. Д.* Синергетичні та економіфізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем / В. Д. Дербенцев, О. А. Сердюк, В. М. Соловійов, О. Д. Шарাপов. — Черкаси : Брама-Україна, 2010. — 287 с.
9. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии / С. Уэлстид. — М.: Триумф, 2003. — 320 с.
10. *Бейбалаев В.Д.* Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Махачкала, 2009. — 18 с. 3. *Мокрый В.Ю.* Учебный модуль «Методы, алгоритмы и технологии сжатия данных»: [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://sites.google.com/site/szatieinformacii/>.
11. *Дубовиков М.М.* Индекс вариации и его приложение к анализу фрактальных структур // М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко. Научный альманах «Гордон», изд-во «Поматур», М. 2005.

References

1. *Kippkhan H.* Entsyklopedyia po pechatnym sredstvam ynformatsyy. Tekhnolohyyu y sposoby proyzvodstva / Perevod s nemetskoho — М.: МНУР, 2003. — 1280 s. 2. *Mandel'brot B.* Fraktaly, sluchaj y fynansy / B. Mandel'brot. — Moskva-Yzhevsk: Rehuliarnaia y khaotycheskaia dynamyka, 2004. — 256 s.

2. Mandel'brot B. Fraktal'na heometriia pryrody / Benua Mandel'brot. — Moskva : Instytut komp'uternykh doslidzhen'. — 2002. — 656 s.
3. Kornijchuk O. E. GRAN–ilustratsiia ta prohnozni obchyslennia ekoloho-ekonomichnoi modeli / O. E. Kornijchuk // Naukovyj chasopys NPU im. M.P. Drahomanova. Ser. № 2. Komp'uterno oriientovani systemy navchannia. — Kyiv : Natsional'nyj ped. un-t im. M. P. Drahomanova, 2007. — Vyp. 5 (12). — S. 131-136.
4. Kronover R. Fraktaly y khaos v dynamycheskykh systemakh. / R.Kronover. — M.: Tekhnosfera, 2006. — 488 s.
5. Fraktal'nyj analiz protsessov, struktur y syhnalov / Pod red. R.E. Paschenko. — Khar'kov : EkoPerspektyva, 2006. — 348 s.
6. Peters E. Fraktal'nyj analiz fynansovykh rynkov / E. Peters. — M.: Ynternet-Trejdynh, 2004. — 286 s.
7. Derbentsev V. D. Synerhetychni ta ekonofizychni metody doslidzhennia dynamichnykh ta strukturnykh kharakterystyk ekonomichnykh system / V. D. Derbentsev, O. A. Serdiuk, V. M. Solovjov, O. D. Sharapov.— Cherkasy : Brama-Ukraina, 2010. — 287 s.
8. Uelstyd S. Fraktaly y vejlety dlia szhatyia yzobrazhenyj v dejstvyy / S. Uelstyd. — M.: Tryumf, 2003. — 320 s.
9. Bejbalaev V.D. Matematycheskye modely neravnovesnykh protsessov v sredakh s fraktal'noj strukturoj : avtoref. dys. ... kand. fiz.-mat. nauk. — Makhachkala, 2009. — 18 s. 3. Mokryj V.Yu. Uchebnyj modul' «Metody, alhorytmy y tekhnolohyy szhatyia dannykh»: [Elektronnyj resurs] — Rezhym dostupu: <https://sites.google.com/site/szatieinformacii/>.
10. Dubovykov M.M. Yndeks varyatsyy y eho prylozhenye k analyzu fraktal'nykh struktur // M.M. Dubovykov, N.V. Starchenko. Nauchnyj al'manakh «Hordon», yzd-vo «Pomatur», M. 2005.

Статтю подано до редакції 12.10.2018 р.