

6. *Minsky M. L.* Steps towards artificial intelligence // Proceedings of the Institute of Radio Engineers. — 1961. — Vol. 49. — P. 8-30 (Reprinted in: Computers and Thought (E. A. Feigenbaum and J. Feldman, eds.). — New York: McGraw-Hill. — 1963. — P. 406—450).
7. *Minsky M. L., Papert S. A.* Perceptrons. — Cambridge, MA: MIT Press, 1969. — 263 p.
8. *Fodor J. A., Pylyshyn Z. W.* Connectionism and cognitive architecture: a critical analysis // Cognition. — 1988. — Vol. 28. — P. 3—72.
9. *Newell A.* Physical symbol systems // Cognitive Science. — 1980. — No. 4. — P. 135—183.
10. *Pylyshyn Z. W.* Cognition and computation: Issues in the foundations of cognitive science // Behavioral and Brain Sciences. — 1980. — No. 3:1. — P. 154—169.
11. *Newell A., Simon H. A.* Human Problem Solving. — Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1972. — 920 p.
12. *Churchland P. M., Churchland P. S.* Could a Machine Think? // Scientific American. — 1990. — Jan. — № 262. — P. 32—37.
13. *Матвійчук А. В.* Моделювання та аналіз економічних систем на підґрунті теорії нечіткої логіки: Дис. ... докт. екон. наук: 08.00.11. — К., 2008. — 470 с.

УДК 330.4:519.86

**В. К. Галіцин**, д-р екон. наук,  
Київський національний економічний університет,  
**С. В. Устенко**, д-р екон. наук,  
Український фінансово-економічний інститут

## **РОЗВИТОК НАУКОМІСТКИХ ПІДПРИЄМСТВ УКРАЇНИ: МОДЕЛІ І МЕТОДИ**

*АНОТАЦІЯ.* Запропоновано динамічну модель оптимального економічного розвитку наукомісткого підприємства. Проведено чисельне моделювання задачі оптимального розподілу капіталовкладень та інвестицій в процесі функціонування та розвитку наукомісткого підприємства. Отримано структуру оптимальних траєкторій фондоозброєності динамічної системи наукомісткого підприємства. Доведено існування магістралі для динамічної моделі, яка може бути використана в різних наукомістких галузях України.

*SUMMARY.* The dynamic model of optimal economical development of science intensive enterprise has been proposed. The numerical modeling of the task of optimal allocation of capital investments and funds to the process of functioning and development of science intensive enterprise has been conducted. The structure of optimal path of fund supplies of the dynamic model of the science intensive enterprise has been received. The existence of trunk line for the

*dynamic model which can be used in different science intensive industries of Ukraine has been proved.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА. НМП — наукомістке підприємство, НМПР — наукомістка продукція, НМВ — наукомістке виробництво, наукомістка галузь, ВС — виробнича система, ВФ — виробнича функція.*

Підвищення конкурентоспроможності виробничих систем (ВС) за рахунок її технологічного переозброєння й підйому наукомістких галузей виробництва, що створюють високу додану вартість — одна з найбільш актуальних проблем української економіки. Тому виникає гостра необхідність в одержанні підприємствами доступу до передових технологій. Одним зі шляхів розв'язання цієї проблеми є опора на власний науково-технологічний потенціал. Такий спосіб найбільш перспективний, він активізує наявний потенціал і сприяє інноваційної активності вітчизняних підприємств.

Досвід передових країн світу, показує, що ВС у формі корпоративних об'єднань, формує в сучасній економіці попит та пропозицію на ринку, визначає умови ціноутворення, реалізує великі програми капіталовкладень. Тільки ВС під силу здійснення значних НДДКР, глобальне впровадження у виробництво нововведень. Тому структуру сучасної ринкової економіки представляють великі ВС, які стають національною гордістю найбільш розвинених країн світу. Сьогодні два принципових моменти визначають провідне місце корпоративних структур у національних інноваційних системах розвинених держав: 1) масштаби використовуваних ресурсів і масштаби отриманих результатів; 2) економічна відповідальність за створення й комерційну реалізацію науково-технологічних досягнень [1].

Шістнадцятирічний досвід економічного розвитку України показує, що підтримувати конкурентоспроможність підприємств методами валютної, податкової, бюджетної політики й інших макроекономічних важелів тривалий час не можна, тому єдиним стратегічно можливим шляхом розвитку є перехід до економічного зростання на інноваційній основі. Разом з тим сьогодні в країні склалася ситуація, що не дозволяє впроваджувати інноваційну модель розвитку економіки. Одна із основних причин цього — відсутність джерел фінансування для інноваційної діяльності ВС.

Питома вага інноваційної продукції в загальному обсязі промислового виробництва, за даними Держкомстату, становить менше 7 %. Головною причиною гальмування інноваційної діяльності є низький попит на інновації. Можливий розвиток в Україні цілого ряду високотехнологічних галузей, таких як літакобудуван-

ня, ракетно-космічна галузь, суднобудування, машинобудування, виробництво бронетанкової техніки, окремі напрямки приладобудування, агропромисловий комплекс. Високою є інноваційна активність таких наукомістких підприємств (НМП), як АНТК ім. О.К. Антонова, ЗМКБ «Прогрес», ВАТ «Мотор Січ», Новокраматорський та Південний машинобудівні заводи, НВО ім. Фрунзе, завод ім. В.О. Малишева. Але зараз близько 80 % фінансування інновацій у виробництві здійснюється за рахунок власних коштів окремих підприємств.

Перспективним у цьому плані є залучення корпоративного сектора економіки України до фінансування науково-технологічної й інноваційної діяльності. Так, в Україні процес по створенню інтеграційних корпоративних структур розпочався в авіабудівельній галузі [2]. На початку 2007 р. Кабінет міністрів України створив державний авіабудівельний концерн «Авіація України» із десяти підприємств: АНТК ім. О.К. Антонова, Київський державний авіаційний завод «Авіант», ДП «Харківське державне авіаційне виробниче підприємство», ДП «Завод № 410 цивільної авіації» та ін. Також корпоративні відношення встановлюються між підприємствами, які виробляють двигуни для літаків. Наприклад, ЗМКБ «Прогрес» та ВАТ «Мотор Січ» створили корпорацію «Івченко».

Проблема здійснення інвестиційної діяльності стала однією з найактуальніших у процесі реформування економіки. Пошук і мобілізація джерела інвестування, з одного боку, та реалізація програм інвестування, з іншого, стали актуальними в усіх галузях економічної діяльності. Для здійснення виробничої діяльності НМП, у першу чергу, необхідні сучасні основні засоби. Стан та ефективність використання основних засобів безпосередньо впливає на виконання виробничої програми підприємства та можливість отримання прибутку. Тому питання ефективності процесів функціонування та розвитку НМП набувають актуальності.

Необхідні кардинальні зміни державної кредитної політики, введення ефективних механізмів і стимулів для залучення інвестицій, розробка моделей функціонування та розвитку НМП.

### ***Динамічна модель оптимального економічного розвитку наукомісткого підприємства***

**Загальна постановка задачі.** Розглядається керуюча система (НМП), стан якої в кожний момент часу задається вектором фа-

зових координат (параметрів)  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Поводженням даної системи можна керувати за допомогою параметрів  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ , де  $u \in U$ ,  $U$  — область припустимих значень керуючих параметрів. Динаміка системи описується системою диференціальних рівнянь  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Якщо задано припустиме керування  $u = u(t)$ , то система диференціальних рівнянь набуває вигляду  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u(t))$ . Мета керування полягає в тому, щоб функціонал від фазової і керуючої траєкторій прийняв найбільше (найменше) значення, тобто:

$$\max_0^T \int_0^T f_0(x(t), u(t), t) dt = \int_0^T f_0(x^*(t), u^*(t), t) dt. \quad (1)$$

При цьому  $u^*(t)$  — оптимальне керування, тоді фазова траєкторія  $x^*(t)$  буде оптимальною фазовою траєкторією.

Для розв'язання задачі (1) вводяться спряжені змінні  $\lambda_0, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$  й будується функція Понтрягіна [3]

$$H(\psi, x, u, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u, t) - \lambda_0 f_0(x, u, t). \quad (2)$$

Нехай  $M(\psi, x, t) = \max_U H(\psi(t), x(t), u^*(t), t)$  є гамільтоніан. Тоді необхідною умовою оптимальності керування відповідно до принципу максимуму Понтрягіна стосовно до задачі (1) є виконання рівності  $M(\psi, x, t) = H(\psi(t), x(t), u^*(t), t)$  та в кінцевій момент часу  $\psi(T) \geq 0$ ,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_0 \psi_i(T) (x_i(T) - x_i^T) = 0,$$

де  $x_i^T$  — деякий заданий вектор, причому спряжені змінні задовольняють системі диференціальних рівнянь  $\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial x_i}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

**Задача оптимального керування** розподілом капіталовкладень, трудових ресурсів, первісних та вторинних ресурсів НМП.

У роботі [4] розглянута модель функціонування НМП на прикладі літакобудівної галузі. Основу НМП складають модулі [4]: ресурсний (Р-модуль), науково-виробничий (НВ-модуль), виробничий (В-модуль) і ремонтно-сервісний (РС-модуль) (рис.1). Базовим модулем у НМП є Н-модуль, який націлений на проектування та розробку наукомісткої продукції (НМПР). До складу регулюючих елементів динамічної системи відноситься центр регулювання (ЦР). В якості керуючого параметру  $u(\cdot)$  в моделі функціонування НМП розглядається споживання  $c(t)$ , яке досягає максимального значення в деякій стаціонарній точці  $k^*$  за рахунок визначення в заданий момент часу оптимальних коефіцієнтів регулювання інвестицій  $\alpha_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 4$  в  $i$ -модулі НМП (рис. 1). На проміжку часу  $t$  періоду  $T$  система буде знаходитись у стаціонарному стані  $k^*$  (стаціонарна траєкторія), яка задовольняє умові  $c(t) \geq c_0 > 0$ , де  $c_0$  — гранично припустимий нижній рівень питомого споживання НМП.

Тоді на інтервалі  $T$  питома споживання набуде значення

$$C(t) = \int_0^T c(t) dt, \quad (3)$$

де  $c(t) = (1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i) \Pi(k)$ .

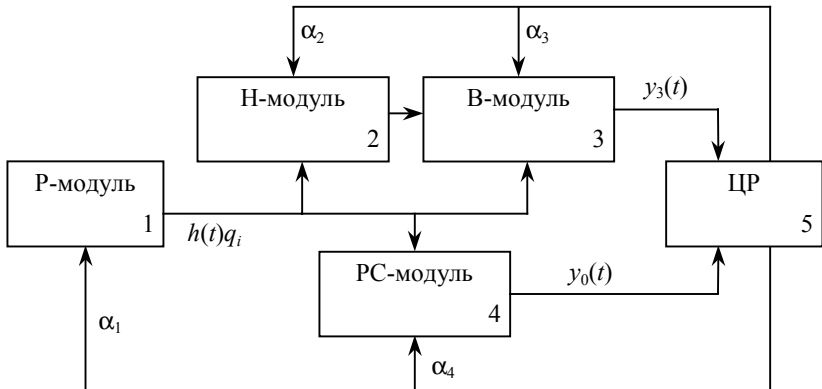


Рис. 1. Структурна схема функціонування динамічної системи

Задача ЦР (рис. 1), як органу керування у даному випадку процесом інвестування  $\bar{\alpha}$ , для досягнення максимальної корисності НМП від отриманого чистого прибутку набуває вигляду:

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(c(t)) dt \rightarrow \max, \quad (4)$$

де  $\delta$  — параметр дисконтування, за рахунок якого майбутня корисність зводиться до теперішнього часу;  $U(c(t))$  — функція корисності від отриманого НМП чистого прибутку.

Потрібно врахувати, що функція корисності  $U(c(t))$  — додатна зростаюча функція з спадаючою граничною корисністю, тобто це строго ввігнута монотонно зростаюча функція, яка має такі властивості:

$$U(c(t)) > 0, U'(c(t)) > 0, U''(c(t)) < 0, \lim_{c \rightarrow 0} U'(c(t)) = \infty, \\ \lim_{c \rightarrow \infty} U'(c(t)) = 0.$$

Тоді модель оптимального економічного розвитку НМП набуває вигляду:

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(c(t)) dt, \quad (5)$$

$$\dot{k}_i(t) = \alpha_i \Pi(h(t), k_1(t), k_2(t), k_3(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t), q_2, q_3) - \mu_i k_i(t), \\ i = 1, \dots, 4, y_0(t) - f_0(h(t), k_1(t), l_1(t), k_4(t), l_4(t), q_4) = 0, \\ c(t) \geq 0.$$

В моделі (5) функціонал є інтегралом розвитку НМП, коли підприємство, вкладаючи інвестиції — рентабельне. Керуючим параметром є чистий прибуток  $c(t)$ . Фазовими параметрами є фондоозброєність  $\bar{k}(t)$ , трудові  $\bar{l}(t)$  та первісні (сировинні)  $h(t)$  ресурси,  $q_i$  — параметри регулювання ресурсів (долі),  $\mu_i$  — коефіцієнти амортизації. Розв'язком даної задачі є оптимальні траєкторії  $\bar{k}^*(t)$ ,  $\bar{l}^*(t)$ ,  $h^*(t)$ , для яких досягається максимальний розвиток НМП при виробництві НМПР.

Розглянемо випадок, коли у виразі (5)  $U(c(t)) = c(t)$ , тоді динамічна модель оптимального економічного розвитку НМП має вигляд:

$$c(k_0, k^*, \alpha) = (1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i(t)) \Pi(k(t)) \rightarrow \max \quad (6)$$

для системи

$$\dot{k} = \alpha\Pi(k) - Mk, \quad (7)$$

з краєвими умовами на інтервалі розвитку  $[0, T]$ :  $k(0) = k_0$ ,  $k(T) = k1$ , стаціонарним станом  $k(t) = k^*$  на проміжку часу  $t$  інтервалу  $T$  та з фазовим обмеженням

$$f_0(k) \geq y_0, \quad (8)$$

де  $\alpha$  — вектор доль інвестицій,  $\Pi(k) = p_1 f(k) - B$  — прибуток,  $B$  — витрати,  $p_1$  — ціна одиниці НМПП,  $M$  — діагональна матриця коефіцієнтів амортизації  $\mu_i$ ,  $k$  — вектор фондоозброєності,  $f(k)$  — агрегована виробнича функція (ВФ) для  $P$ -,  $H$ - та  $B$ -модулів,  $f_0(k)$  — агрегована ВФ для  $P$  — та  $PC$  — модулів,  $y_0$  — мінімально-необхідний рівень ремонтно-сервісного обслуговування. Вважається, що коли  $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$ , то увесь прибуток іде на інвестиції і чистого прибутку немає, тобто  $c(t) = (1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i)\Pi(k) = 0$ . При  $\sum_{i=1}^4 \alpha_i < 1$ ,  $c(t) > 0$  чистий прибуток є і виробництво рентабельне.

Задача полягає в тому, щоб з початкової точки фондоозброєності  $k_0$  вийти на стаціонарну траєкторію, коли зберігається оптимальність  $k = k^*$ , а в кінці інтервалу перейти в кінцеву точку розвитку  $k1$ . У даному випадку мова буде йти про використання якісних методів досягнення оптимальних траєкторій. Як зазначено в літературі [3, 5—9] при аналізі секторних моделей до їхнього числа можна віднести магістральну теорію, методи досягнення стаціонарних точок, які засновані на принципах Лагранжа і максимуму Понтрягіна та теорії оптимального керування.

### **Чисельне моделювання динамічної моделі оптимального керування економічним розвитком наукомісткого підприємства**

**Задача оптимального керування інвестиціями.** Для чисельного моделювання оптимальних траєкторій проводимо дискретизацію задачі (6, 7, 8). Для цього інтервал  $[0, T]$  розбиваємо на  $N$

рівних частин і вважаємо управління на кожному інтервалі (кроці)  $h = \frac{T}{N}$  сталим, тобто  $u^n = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n, \alpha_4^n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ . Тоді динамічну систему (7) можна замінити за методом Ейлера різницеvim наближенням:

$$k^{n+1} = k^n + h(u^n \Pi(k^n) - M k^n), \quad (9)$$

а цільову функцію (6) за методом трапецій замінити сумою:

$$c(k_0, k^*, u) = h \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i^n\right) \frac{\Pi(k^n) + \Pi(k^{n+1})}{2}. \quad (10)$$

За допомогою програмного пакету Mathcad 2001 Professional проводилась максимізація функції (10) по керуванню  $u^n = u^0, u^1, \dots, u^{N-1}$ , за умов  $k(0) = k_0$ ,  $k(T) = k_1$  та фазовому обмеженні  $f_0(k^n) \geq y_0$ . Розглянемо деякі характерні приклади динамічної системи НМП.

**Приклад 1.** Нехай ВФ і-х модулів НМП задаються функціями Кобба—Дугласа:

$$F(k) := A \cdot \prod_{i=0}^3 (k_i)^{a_i}, \quad a := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A := 1, \quad F_0(k) := A_0 \cdot (k_0)^{a_0} \cdot (k_3)^{a_3},$$

$a_0 := 0.2$ ,  $a_3 := 0.4$ ,  $A_0 := 1$ ,  $y_0 := 2$  з початковими значеннями фондоозброєності  $k_0 = (5, 1, 1, 4)$ , інтервалом  $T := 100$  та кількістю точок моделювання  $N := 10$  динамічної системи (6, 7, 8).

Початкові значення фондоозброєності модулів є умовно-відносними. В даному прикладі можна стверджувати, що фондоозброєність у 1-му та 4-му модулі (Р- та РС-модулі) НМП у 5—4 разів вища, ніж в 2-му та 3-му (НВ- та В-модулі), що потребує додаткових інвестицій у ці модулі. Цей приклад є типовим на стадіях проектування та виготовлення нової НМПР.

Отримані таблиці керування  $PP := \text{Maximize}(C1, U)$ ,  $PPP := \text{submatrix}(PP, 0, N-2, 0, 3)$ , таблиця фондоозброєності  $z := KK(PP, k_0)$ :



$$PPP = \begin{pmatrix} 0.249 & 0.176 & 0.254 & 0.322 \\ 0.230 & 0.228 & 0.311 & 0.231 \\ 0.207 & 0.247 & 0.330 & 0.167 \\ 0.176 & 0.209 & 0.314 & 0.142 \\ 0.176 & 0.211 & 0.315 & 0.142 \\ 0.175 & 0.209 & 0.314 & 0.142 \\ 0.176 & 0.209 & 0.314 & 0.142 \\ 0.176 & 0.210 & 0.315 & 0.142 \\ 0.122 & 0.074 & 0.268 & 0.170 \end{pmatrix}$$

$$KK(PP, k_0) =$$

	0	1	2	3
0	5.000	1.000	1.000	4.000
1	2.674	1.887	1.726	3.459
2	3.162	3.130	2.557	3.181
3	3.663	4.364	3.271	2.956
4	3.656	4.354	3.262	2.958
5	3.666	4.379	3.278	2.955
6	3.658	4.364	3.270	2.958
7	3.657	4.359	3.273	2.958
8	3.659	4.361	3.273	2.957
9	2.544	1.541	2.303	3.546

де по вертикалі задані  $i=0, 1, 2, 3$  модулі, а по горизонталі — кроки моделювання; розраховані також оптимальні значення коефіцієнтів  $\alpha^* = \alpha_i = (0,176, 0,210, 0,315, 0,142)$ , а їх сума визначається матрицями  $ppp_n = \sum_{j=0}^3 PP_{n,j}$ ,  $ppp1 := \text{submatrix}(ppp, 0, N-2, 0, 0)$ , фазові обмеження задані нерівністю  $FFO(U) \geq y_0$ ,

$$FFO(PP) =$$

	0
0	2.402
1	2.000
2	2.000
3	2.000
4	2.000
5	2.000
6	2.000
7	2.000
8	2.000
9	2.000

$$\cdot$$

$$ppp1 =$$

1.000
1.000
0.951
0.841
0.844
0.841
0.842
0.842
0.635

стаціонарний стан системи дорівнює

$$k^* = kk_i = (3,660, 4,363, 3,272, 2,957).$$

На рис. 1, рис. 2 показані результати моделювання оптимальних траєкторій керування коефіцієнтами інвестицій  $PP_{n,i} = \alpha_i$  та фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  при заданих вище початкових значеннях динамічної системи.

$n := 0.. N - 2$

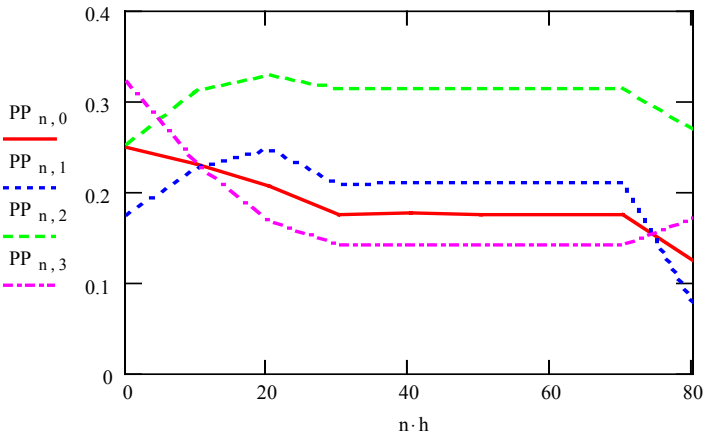


Рис. 1. Результат моделювання траєкторій керування  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100, N = 10, k_0 = (5, 1, 1, 4)$  та незаданій кінцевій точці траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T)$

$n := 0.. N - 1$

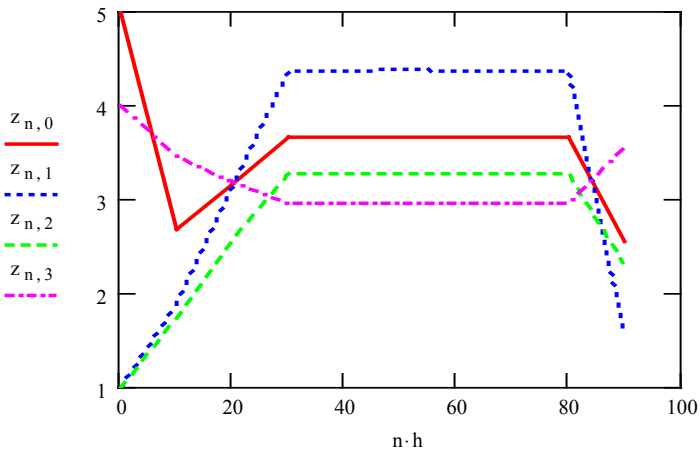


Рис. 2. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100, N = 10, k_0 = (5, 1, 1, 4)$  та незаданій кінцевій точці траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T)$

Моделювання системи показало, що можна визначити три зони керування:

- початкова, де згідно динаміки траєкторій керування інвестиціями  $PP_{n,i} = \alpha_i$  у відповідні  $i$ -і модулі йде або нарощування фондоозброєності цих модулів  $Z_{n,i} = k_i$ , або споживання отриманого чистого прибутку (кроки 0, 1, 2 таблиці  $KK(PP, k0)$ );

- середня (магістральна), де керування досягає оптимальних значень коефіцієнтів  $\alpha^* = \alpha_i = (0,176; 0,210; 0,315; 0,142)$ , а фондоозброєність — оптимального стаціонарного стану  $k^* = kk_i = (3,660, 4,363, 3,272, 2,957)$  (кроки 3—8 таблиці  $KK(PP, k0)$ );

- кінцева, яка при невизначеності кінцевої точки траєкторії розвитку системи (крок 9 таблиці  $KK(PP, k0)$ ), (фактично вже після того, як система досягла оптимального стану і пробула в ньому певний період) дозволяє собі витратити кошти з чистого прибутку на споживання.

Фазове обмеження (8)  $FF(0) \geq y_0$  системи витримано в таблиці  $FF0(PP)$  при заданому значенні  $y_0 = 2$ . На 0-му кроці (таблиця  $FF0(PP)$ ) фондоозброєність системи  $f_0 > y_0$  перевищує заданий мінімальний рівень ремонтно-сервісного обслуговування, а з 1-го по 9-й кроки системи він повністю відповідає необхідному рівню обсягів ремонтно-сервісного обслуговування  $f_0 = y_0$ .

Таблиця  $ppp1$  показує, що  $ppp1 = ppp_n = \sum_{j=0}^3 PP_{n,j} = \sum_{j=0}^3 \alpha_{n,j}$  на 0-му і 1-му кроці увесь чистий прибуток йде тільки на інвестиції  $\sum_{j=0}^3 \alpha_{n,j} = 1$ , потім він зменшується і з 3-го по 8-й крок динамічна система ефективно функціонує витрачаючи чистий прибуток частково на інвестиції і частково на споживання, на 9-му кроці інвестиції відсутні, а йде тільки споживання (за винятком РС-модулю).

В прикладі 1 задамо кінцеву точку траєкторії системи  $k1 = k_i(T)$ , значення якої будуть співпадати зі стаціонарним станом системи  $k^* = kk_i = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$ , в програмі це кінцеве значення визначено як  $K1(PP) = k1$ .

При чисельному моделюванні динамічної системи отримані позитивні результати. Це визначається тим, що магістраль по-

довжується до кінцевої точки системи  $k1$ . У даному випадку результати моделювання системи мають дві зони керування: початкову та магістральну.

Результати моделювання системи дали такі дані:

$$PPP = \begin{pmatrix} 0.249 & 0.176 & 0.254 & 0.322 \\ 0.229 & 0.228 & 0.311 & 0.231 \\ 0.207 & 0.246 & 0.330 & 0.167 \\ 0.176 & 0.210 & 0.315 & 0.142 \\ 0.176 & 0.209 & 0.314 & 0.142 \\ 0.176 & 0.210 & 0.315 & 0.142 \\ 0.176 & 0.210 & 0.314 & 0.142 \\ 0.176 & 0.209 & 0.314 & 0.142 \\ 0.176 & 0.210 & 0.314 & 0.142 \end{pmatrix},$$

$$KK(PP, k0) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5.000 & 1.000 & 1.000 & 4.000 \\ 2.673 & 1.887 & 1.727 & 3.460 \\ 3.156 & 3.134 & 2.556 & 3.184 \\ 3.657 & 4.356 & 3.275 & 2.958 \\ 3.666 & 4.375 & 3.278 & 2.955 \\ 3.658 & 4.355 & 3.273 & 2.958 \\ 3.664 & 4.368 & 3.278 & 2.955 \\ 3.663 & 4.365 & 3.274 & 2.956 \\ 3.660 & 4.360 & 3.274 & 2.957 \\ 3.660 & 4.363 & 3.272 & 2.957 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$FF0(PP) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2.402 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \\ 2.000 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$K1(PP) = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 3.660 \\ 4.363 \\ 3.272 \\ 2.957 \end{pmatrix}, & ppp1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 0.950 \\ 0.843 \\ 0.841 \\ 0.843 \\ 0.842 \\ 0.842 \\ 0.842 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Результати моделювання динамічної системи при різних значеннях параметрів  $T$  та  $N$  ( $h = \frac{T}{N}$ ) показують зменшення похибки при збільшенні параметру  $N$ , особливо в початковій та кінцевій зонах керування системою, які обумовлені використанням методу трапецій (10). На рис. 5, рис. 6 надано графіки системи при значеннях  $T = 100, N = 20$ .

$n := 0.. N - 2$

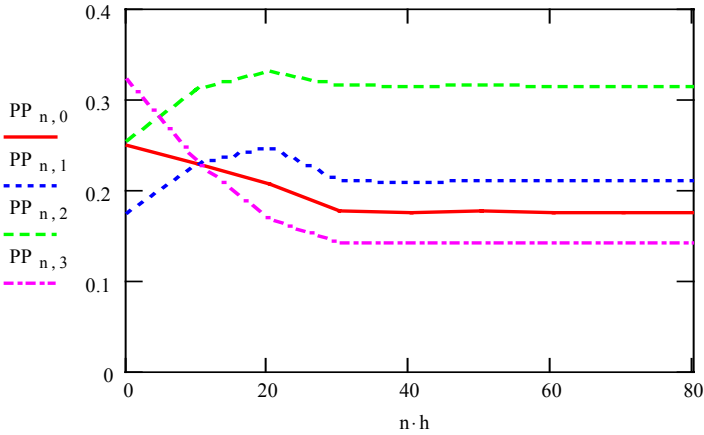


Рис. 3. Результат моделювання траєкторій управління  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100, N = 10, k_0 = (5, 1, 1, 4)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$

$n := 0.. N - 1$

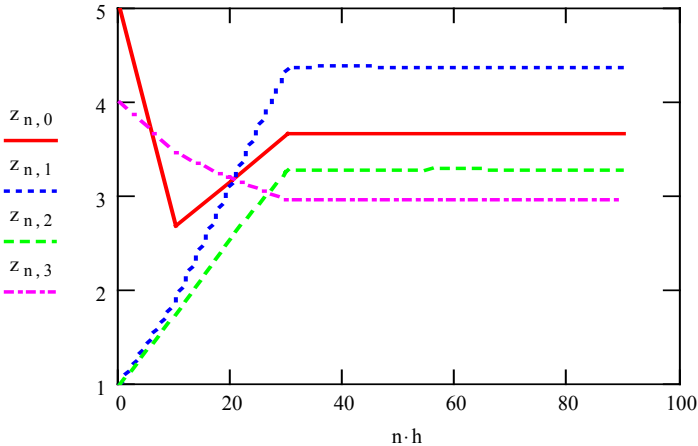


Рис. 4. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при  $T = 100, N = 10, k_0 = (5, 1, 1, 4)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$

$n := 0.. N - 2$

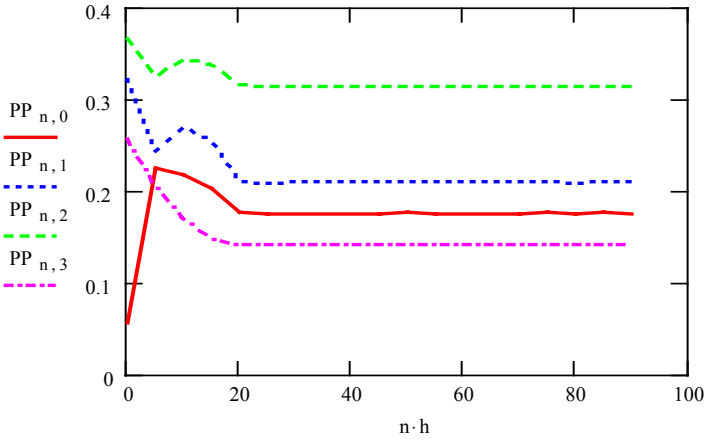


Рис. 5. Результат моделювання траєкторій управління  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи  $k_0 = (5, 1, 1, 4)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$   
 $n := 0.. N - 1$

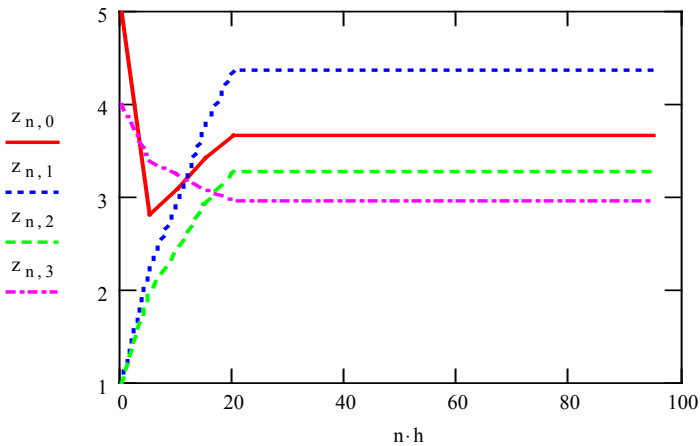


Рис. 6. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100, N = 20, k_0 = (5, 1, 1, 4)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$

**Приклад 2.** ВФ  $i$ -х модулів НМП задаються по аналогії з прикладом 1 функціями Кобба-Дугласа, вагові коефіцієнти дорівнюють  $A=2$  у функції  $F(k)$  і  $A0=2$  — функції  $F0(k)$ . Початкове значення фондоозброєності системи  $k_0 = (5, 4, 1, 1)$ , інтервал  $T := 100$  та кількість точок моделювання  $N := 10$  динамічної системи залишаємо без зміни. Кінцева точка розвитку системи становить  $k1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2.957)$ .

Даний процес функціонування динамічної системи характерний для НМВ, коли проводиться проектування нової НМПР. Після виготовлення досвідного НМПР, його випробування та сертифікації потрібно розпочати процес серійної розробки НМПР, тому потрібні інвестиції в 3-й, а потім і в 4-й модулі (В- та РС-модулі).

Отримані такі результати моделювання динамічної системи:

$$PPP = \begin{pmatrix} 0.209 & 0.402 & 0.376 & 0.013 \\ 0.141 & 0.277 & 0.338 & 0.004 \\ 0.102 & 0.203 & 0.303 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.103 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.103 & 0.202 & 0.302 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.034 & 0.040 & 0.182 & 0.027 \end{pmatrix},$$

$$KK(PP, k_0) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 5.000 & 4.000 & 1.000 & 1.000 \\ \hline 1 & 6.269 & 12.062 & 10.268 & 0.399 \\ \hline 2 & 11.103 & 21.738 & 16.296 & 0.300 \\ \hline 3 & 11.006 & 21.851 & 16.329 & 0.301 \\ \hline 4 & 11.040 & 21.756 & 16.336 & 0.301 \\ \hline 5 & 11.064 & 21.749 & 16.289 & 0.301 \\ \hline 6 & 11.063 & 21.742 & 16.305 & 0.301 \\ \hline 7 & 11.033 & 21.781 & 16.315 & 0.301 \\ \hline 8 & 11.021 & 21.794 & 16.328 & 0.301 \\ \hline 9 & 3.660 & 4.363 & 3.272 & 2.957 \\ \hline \end{array},$$

$$FF0(PP) = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 2.759 \\ \hline 1 & 2.000 \\ \hline 2 & 2.000 \\ \hline 3 & 2.000 \\ \hline 4 & 2.000 \\ \hline 5 & 2.000 \\ \hline 6 & 2.000 \\ \hline 7 & 2.000 \\ \hline 8 & 2.000 \\ \hline 9 & 4.000 \\ \hline \end{array},$$

$$K1(PP) = \begin{pmatrix} 3.660 \\ 4.363 \\ 3.272 \\ 2.957 \end{pmatrix},$$

$$ppp1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.760 \\ 0.610 \\ 0.610 \\ 0.610 \\ 0.610 \\ 0.610 \\ 0.610 \\ 0.610 \\ 0.284 \end{pmatrix}.$$

$n := 0.. N - 2$

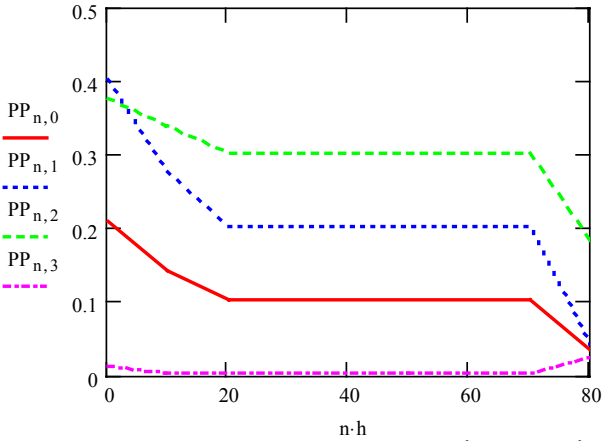


Рис. 7. Результат моделювання траєкторій управління  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100$ ,  $N = 10$ ,  $k_0 = (5, 4, 1, 1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$   
 $n := 0.. N - 1$

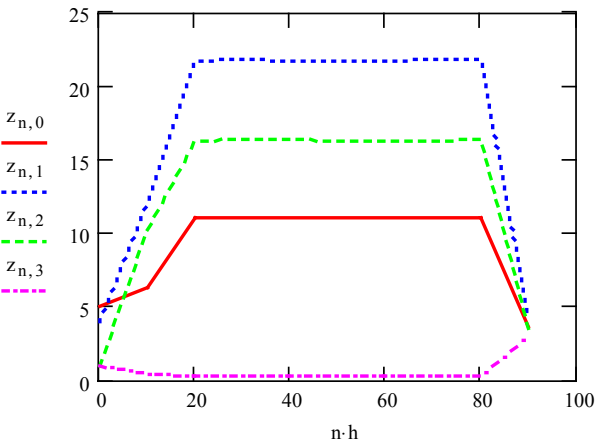


Рис. 8. Результат моделювання траєкторій фондоозбреності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100$ ,  $N = 10$ ,  $k_0 = (5,4,1,1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (3.660, 4.363, 3.272, 2.957)$



У даному випадку спостерігається також три зони керування динамічної системи: початкова, магістральна та кінцева. Але враховуючи те, що вагові коефіцієнти ВФ змінені, система виходить на нову магістраль з іншими оптимальними коефіцієнтами інвестицій  $\alpha^* = \alpha_i = (0,102; 0,202, 0,298, 0,003)$  та стаціонарним станом системи  $k^* = kk_i = (11.894, 21.472, 15.849, 0.303)$ , де значний час там перебуває (кроки 2-8 таблиці  $KK(PP, k_0)$ ), а потім виходить на кінцеву точку системи  $k1 = k_i(T) = (3,660, 4,363, 3,272, 2,957)$ .

**Приклад 3.** Приклад аналогічний прикладу 2, але змінені початкові значення фондоозброєності системи  $k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та кінцева точка розвитку системи —  $k1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$ . Таким чином, в даному прикладі системі, яка в НВ — модулю закінчила проектування та у В-модулю розпочала серійне виготовлення НМПР, потрібно суттєво збільшити серійний випуск продукції (в 10 разів), а також одночасно активізувати ремонтно-сервісну роботу системи (також в 10 разів) та на даному етапі зменшити науково-виробничу діяльність (в 2,5 рази).

Враховуючи те, що ВФ залишилися без зміни система виходить на ту ж саму магістраль, що і в прикладі 2 ( $\alpha^* = \alpha_i = (0,102, 0,202, 0,298, 0,003)$ ),  $k^* = kk_i = (11,894; 21,472, 15,849; 0,303)$ ), але кінцева траєкторія виходить на іншу, більш потужну, задану точку розвитку системи  $K1(PP) = k1$ , де  $k1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$ .

Отримані такі результати:

$$PPP = \begin{pmatrix} 0.197 & 0.385 & 0.409 & 0.009 \\ 0.122 & 0.240 & 0.320 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.102 & 0.201 & 0.302 & 0.003 \\ 0.103 & 0.204 & 0.304 & 0.003 \\ 0.102 & 0.200 & 0.303 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.303 & 0.003 \\ 0.046 & 0.019 & 0.522 & 0.093 \end{pmatrix}, \quad KK(PP, k_0) = \begin{table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;">
	0	1	2	3
0	1.000	5.000	4.000	1.000
1	8.057	15.733	12.684	0.352
2	11.020	21.761	16.322	0.301
3	11.029	21.771	16.316	0.301
4	11.007	21.741	16.297	0.301
5	10.960	21.643	16.243	0.302
6	11.074	21.884	16.389	0.300
7	11.015	21.658	16.347	0.301
8	11.029	21.773	16.305	0.301
9	5.000	2.000	40.000	10.000
 ,$$

$$\text{FFQ(PP)} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 2.000 \\ \hline 1 & 2.000 \\ \hline 2 & 2.000 \\ \hline 3 & 2.000 \\ \hline 4 & 2.000 \\ \hline 5 & 2.000 \\ \hline 6 & 2.000 \\ \hline 7 & 2.000 \\ \hline 8 & 2.000 \\ \hline 9 & 6.931 \\ \hline \end{array}, \quad \text{K1(PP)} = \begin{pmatrix} 5.000 \\ 2.000 \\ 40.000 \\ 10.000 \end{pmatrix}, \quad \text{ppp1} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.685 \\ 0.610 \\ 0.609 \\ 0.608 \\ 0.613 \\ 0.608 \\ 0.610 \\ 0.680 \end{pmatrix}.$$

$n := 0.. N - 2$

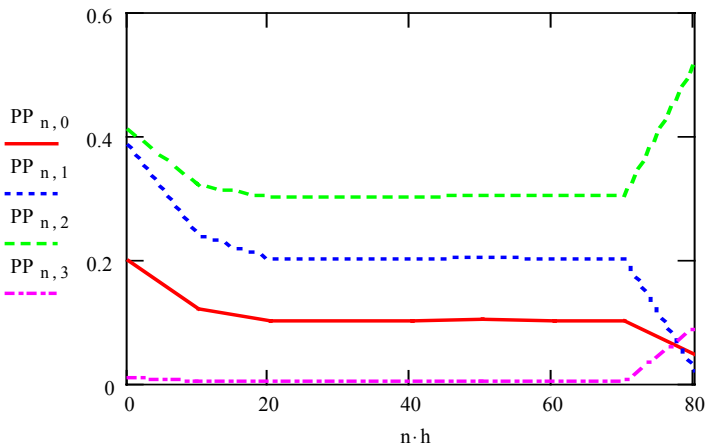


Рис. 9. Результат моделювання траєкторій управління  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100$ ,  $N = 10$ ,  $k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та заданій кінцевій точці траєкторії розвитку  $k1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$

$$n := 0..N - 1$$

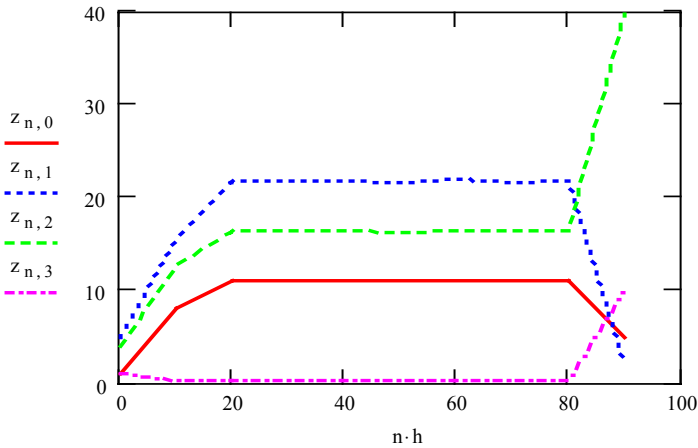


Рис. 10. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при значеннях

$T = 100$ ,  $N = 10$ ,  $k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$

**Приклад 4.** НМП може одночасно виконувати декілька НМВ процесів, а також різні виробничі та маркетингові програми. В даному прикладі початкову точку оставимо без змін  $k_0 = (1, 5, 4, 1)$ , а кінцеву суттєво змінимо —  $k_1 = k_i(T) = (30, 60, 40, 15)$ . В кінці періоду  $T$  ( $T := 100$ ,  $N := 10$ ) потрібно в багато разів збільшити фондоозброєність НВ- та В-модулів та одночасно накопичити ресурсний потенціал Р-модулю і виконувати ремонтно-сервісне обслуговування вже виготовленої продукції. ВФ модулів НМП залишимо без змін, тому динамічна система вийде на оптимальні магістральні значення по інвестиціям та фондоозброєності, як і в попередніх прикладах ( $\alpha^* = \alpha_i = (0,102; 0,202; 0,298; 0,003)$ ,  $k^* = kk_i = (11,894; 21,472; 15,849; 0,303)$ ).

Моделювання динамічної системи дало такі результати:

$$PPP = \begin{pmatrix} 0.197 & 0.385 & 0.409 & 0.009 \\ 0.121 & 0.239 & 0.320 & 0.003 \\ 0.102 & 0.202 & 0.302 & 0.003 \\ 0.103 & 0.205 & 0.304 & 0.003 \\ 0.066 & 0.129 & 0.258 & 0.003 \\ 0.199 & 0.396 & 0.402 & 0.003 \\ 0.137 & 0.273 & 0.347 & 0.002 \\ 0.200 & 0.398 & 0.401 & 0.001 \\ 0.169 & 0.337 & 0.410 & 0.084 \end{pmatrix}$$

$$KK(PP, k0) =$$

	0	1	2	3
0	1.000	5.000	4.000	1.000
1	8.027	15.729	12.717	0.353
2	10.981	21.673	16.260	0.302
3	10.950	21.672	16.231	0.302
4	11.073	22.028	16.484	0.301
5	7.198	14.000	11.506	0.373
6	16.908	33.646	22.649	0.243
7	18.594	37.039	24.373	0.232
8	28.493	56.899	32.853	0.187
9	30.000	60.000	40.000	15.000

$$FF0(PP) =$$

	0
0	2.000
1	2.000
2	2.000
3	2.000
4	2.000
5	2.000
6	2.000
7	2.000
8	2.000
9	11.665

$$K1(PP) = \begin{pmatrix} 30.000 \\ 60.000 \\ 40.000 \\ 15.000 \end{pmatrix}$$

$$ppp1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.683 \\ 0.608 \\ 0.615 \\ 0.457 \\ 1.000 \\ 0.758 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

$n := 0.. N - 2$

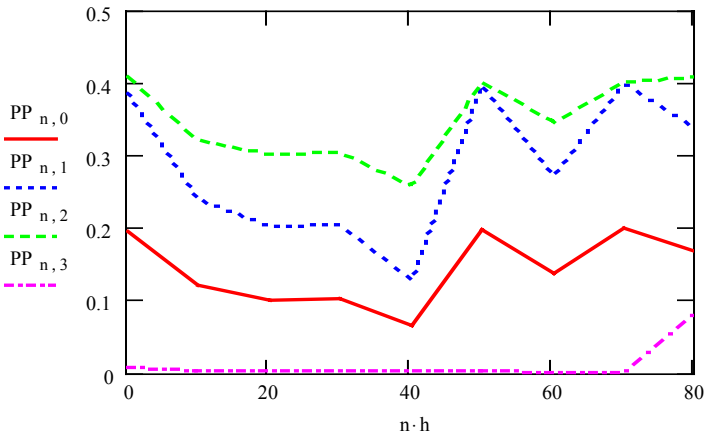


Рис. 11. Результат моделювання траєкторій управління  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100, N = 10, k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (30, 60, 40, 15)$   
 $n := 0.. N - 1$

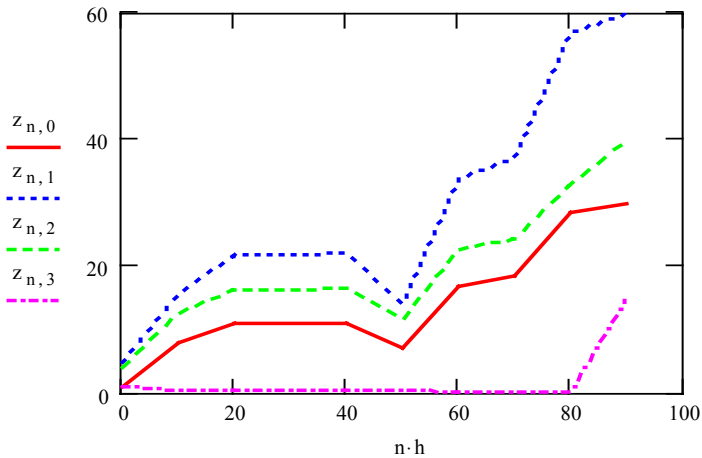


Рис. 12. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100, N = 10, k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (30, 60, 40, 15)$

Система (рис. 11, рис. 12, таблиця  $KK(PP, k_0)$ ), як і в попередніх прикладах, має три зони керування: початкову (0,1 кроки), магістральну (2—4 кроки), кінцеву (5—9 кроки). В порівнянні з попередніми прикладами та результатами кінцева зона керування збільшена, тобто системі потрібно раніше вийти з магістралі і в кінцевому періоді часу досягти більш потужну точку розвитку.

Подібний випадок характерний для динамічних систем, коли на протязі періоду розвитку систем  $T$  може змінюватися технологія виробництва. Наприклад, у процесі розвитку системи будуть використовуватися нові унікальні ресурси для виробництва агрегованого продукту або в кінці періоду потрібно «думати» про нову виробничу програму для випуску нової НМПП. В обох випадках системі потрібно вийти з магістралі і досягти кінцевої точки розвитку  $k_1$ . Кінцева точка розвитку динамічної системи може бути початком нової магістралі. Слід також зауважити, що для наукомісткого виробництва (НМВ) певний періоду  $T$  системи складає, як правило, декілька років від початку проектування і до серійного випуску НМПП. Тому імовірність зміни технології НМВ залишається високою.

На рис. 13, рис. 14 наведені графіки моделювання динамічної системи з тими ж характеристиками на інтервалі  $T := 100$ ,  $N := 30$ .

$$n := 0.. N - 2$$

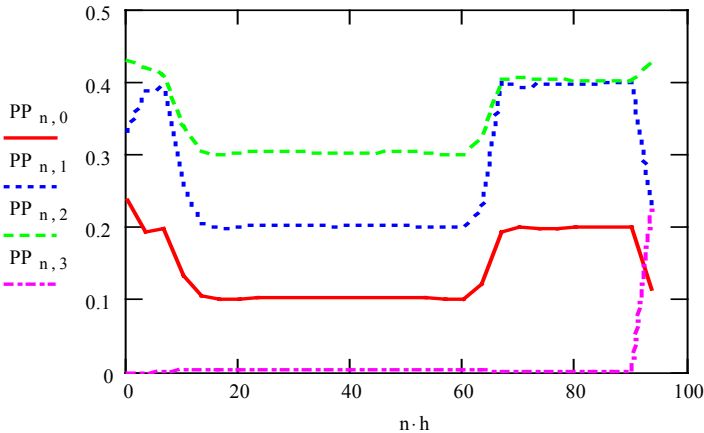


Рис. 13. Результат моделювання траєкторій управління  $PP_{n,i} = \alpha_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100$ ,  $N = 30$ ,  $k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (30, 60, 40, 15)$

$$n := 0.. N - 1$$

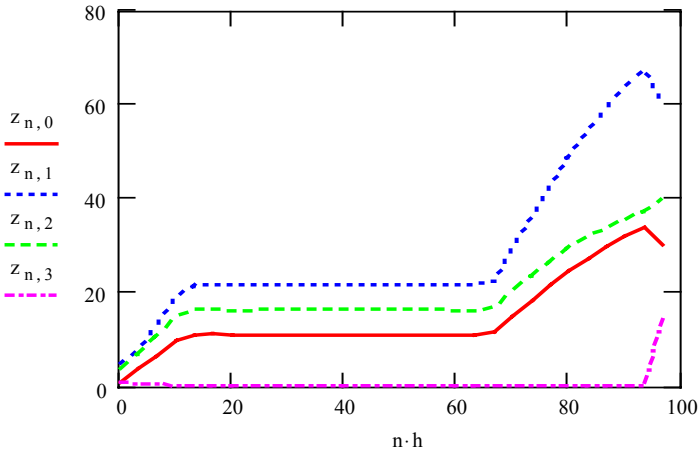


Рис. 14. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності  $Z_{n,i} = k_i$  динамічної системи при значеннях  $T = 100$ ,  $N = 30$ ,  $k_0 = (1, 5, 4, 1)$  та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку  $k_1 = k_i(T) = (30, 60, 40, 15)$

Значення таблиць  $PPP$ ,  $KK(PP, k_0)$ ,  $ppp1$  по прикладу 4 для  $T := 100$ ,  $N := 30$ . наведені нижче. Система теж має три основні зони керування. Так, по таблиці інвестицій  $PPP$  видно, що магістраль проходить з 4-го по 18-й кроки, а допоміжна — з 21-го по 27-й кроки. З таблиці  $ppp1 = ppp_n = \sum_{j=0}^3 \alpha_{n,j}$  видно, що з 0-го по 2-й та з 20-го по 28-й кроки увесь чистий прибуток іде тільки на інвестиції ( $\sum_{j=0}^3 \alpha_{n,j} = 1$ ). Всі інші кроки  $\sum_{j=0}^3 \alpha_{n,j} < 1$  є або перехідними (3-й, 19-й кроки), або стійкими ((4-18)-і — «магістральні» кроки) з точки зору інвестування та споживання.

	0	1	2	3
0	0.238	0.333	0.429	0.000
1	0.193	0.387	0.420	0.000
2	0.197	0.391	0.410	0.001
3	0.134	0.256	0.336	0.003
4	0.106	0.205	0.305	0.003
5	0.100	0.199	0.300	0.003
6	0.101	0.201	0.302	0.003
7	0.103	0.203	0.304	0.003
8	0.103	0.203	0.304	0.003
9	0.103	0.202	0.304	0.003
10	0.103	0.201	0.303	0.003
11	0.102	0.201	0.303	0.003
12	0.102	0.202	0.302	0.003
13	0.102	0.202	0.303	0.003
14	0.103	0.203	0.303	0.003
15	0.103	0.203	0.303	0.003
16	0.102	0.201	0.302	0.003
17	0.100	0.200	0.300	0.003
18	0.101	0.200	0.300	0.003
19	0.122	0.223	0.323	0.003
20	0.193	0.402	0.404	0.002
21	0.201	0.391	0.406	0.001
22	0.199	0.397	0.403	0.001
23	0.199	0.397	0.403	0.001
24	0.199	0.397	0.402	0.001
25	0.200	0.398	0.402	0.001
26	0.199	0.398	0.401	0.001
27	0.200	0.398	0.401	0.001
28	0.114	0.230	0.426	0.230

PPP=

■



	0
0	1.000
1	1.000
2	1.000
3	0.729
4	0.618
5	0.602
6	0.607
7	0.612
8	0.613
9	0.612
10	0.610
11	0.609
12	0.609
13	0.610
14	0.612
15	0.612
16	0.608
17	0.603
18	0.603
19	0.670
20	1.000
21	1.000
22	1.000
23	1.000
24	1.000
25	1.000
26	1.000
27	1.000
28	1.000

ppp1 =

$$(\alpha^* = \alpha_i = (0,102; 0,202; 0,298; 0,003) ,$$

$$k^* = kk_i = (11,894; 21,472; 15,849; 0,303) ).$$

Результати моделювання траєкторій управління  $u^n = u^0, u^1, \dots, u^{N-1}$  (інвестицій) та фондоозброєності  $k^n$  показують, що:

1. Модель динамічної системи (6, 7, 8) має три зони керування: початкову, магістральну та кінцеву. Після завершення перехідного процесу система перебуває в стаціонарному стані оптимального розвитку, що характеризується сталістю питомих показників по фондоозброєності при різних значеннях періоду моделювання  $T$  та кількості рівних частин  $N$ . Кінцева частина керування призначена для виходу в задану точку системи.

2. Інвестиції розподіляються в  $i$ -ті модулі НМП у відповідних пропорціях у перехідному процесі моделі, які забезпечують в подальшому вихід на магістральну траєкторію оптимального розподілу фондоозброєності та споживання по кожному  $i$ -му модулю НМП на постійному рівні  $k^*, \alpha^*$  при різних початкових значеннях фондоозброєності  $k(0) = k_0$  (рис.1—14).

3. Деякі скачкообразні розбіжності по фондоозброєності системи можна пояснити похибкою методу.

### **Існування оптимальної стаціонарної траєкторії**

Розглядається задача

$$c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) = \int_0^T (1 - v(t)) \Pi(k(t)) dt \rightarrow \max, \quad (11)$$

$$\dot{k}_i = \alpha_i(t) \Pi(k(t)) - \mu_i k_i(t),$$

$$f_0(k(t)) \geq y_0, \quad k(0) = x, \quad k(T) = y, \quad v(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(t) \leq 1, \quad \alpha_i(t) \geq 0.$$

Інтеграл виразу (11) зручно представити у вигляді:

$$\begin{aligned} c(x, y, k(t), \alpha(t), T) &= \int_0^T \Pi(k(t)) dt - \int_0^T v(t) \Pi(k(t)) dt = \\ &= \left( \begin{array}{l} \alpha_i(t) \Pi(k(t)) = \dot{k}_i(t) + \mu_i k_i(t) \\ v(t) \Pi(k(t)) = \sum_{i=1}^4 \dot{k}_i(t) + \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t) \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \Pi(k(t))dt - \int_0^T [\sum_{i=1}^4 \dot{k}_i(t) + \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)]dt = \\
&= \int_0^T \Pi(k(t))dt - \int_0^T \sum_{i=1}^4 \dot{k}_i(t)dt - \int_0^T \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)dt = \\
&= \int_0^T \Pi(k(t))dt - \sum_{i=1}^4 k_i(t) \Big|_0^T - \int_0^T \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)dt = \\
&= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)]dt - \sum_{i=1}^4 [k_i(T) - k_i(0)] = \\
&= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)]dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i),
\end{aligned}$$

тоді

$$c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) = \int_0^T \Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t) dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i). \quad (12)$$

Позначимо

$$\Omega = \sup_{\substack{k \geq 0 \\ f_0(k) \geq y_0}} [\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i]. \quad (13)$$

Тоді  $\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i \leq \Omega \quad \forall k \geq 0$ . Тому:

$$\begin{aligned}
c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) &= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)]dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) \leq \\
&\leq \int_0^T \Omega dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) = \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i).
\end{aligned} \quad (14)$$

Отже маємо нерівність:

$$c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot)) \leq \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i). \quad (15)$$

Метою задачі керування є максимізація функції  $c$ . З нерівності (15) випливає, що якщо існує таке керування  $\alpha(t)$ , при якому виконується в (15) рівність, то можна довести, що це керування і буде оптимальним.

## Магістральні властивості оптимальних траєкторій

Аналіз результатів чисельного моделювання показав, що структура оптимальної траєкторії при великих  $T$  має наступний вигляд: оптимальна траєкторія на першому етапі  $t \in [0, t_1]$  співпадає з оптимальною траєкторією задачі найшвидшого попадання на магістраль  $k^*$ , на другому етапі — рух по магістралі і потім, на третьому етапі, теж оптимальна траєкторія, яка співпадає з траєкторією задачі швидкодії при переході системи з магістралі  $k^*$  на заплановану точку  $k_1$ .

Сформулюємо і доведемо відповідне твердження. Для цього необхідно сформулювати припущення, яке формалізує поняття «велике значення  $T$ ».

**Припущення 1.** Точки  $x, y$  та  $T$  (рис. 15) такі, що:

а)  $\exists \alpha^1(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)) :$

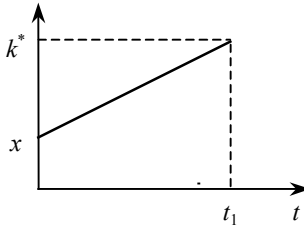


Рис. 15, а)

$$k(0) = x, \quad k(t_1) = k^*.$$

Точка  $k^*$  досяжна з точки  $x$  за час  $t_1$ ;

б)  $\exists \alpha^2(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)) :$

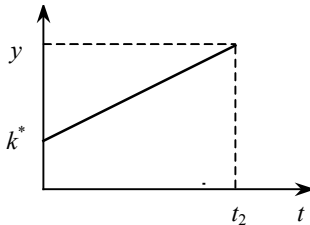


Рис. 15, б)

$$k(0) = k^*, \quad k(t_2) = y.$$

Точка  $y$  досяжна з точки  $k^*$  за час  $t_2$ ;

В)  $t_1 + t_2 < T$ .

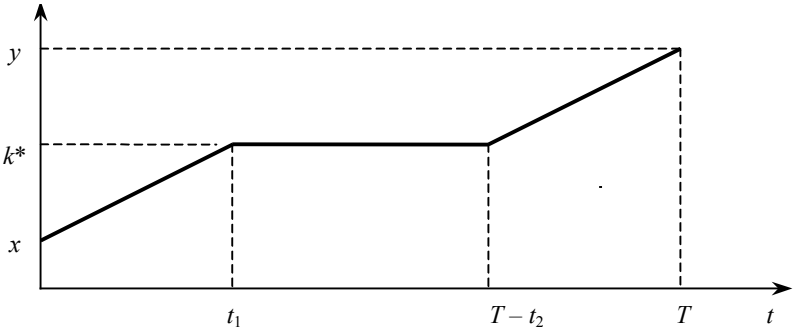


Рис. 15, в) Графічна інтерпретація припущення

Нехай

$$K(x, y, T) = \sup_{\alpha} c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T),$$

$$\Omega = \sup_k [\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i] = \Pi(k^*) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i^*,$$

$$\alpha_i^* = \frac{\mu_i k_i^*}{\Pi(k^*)} \text{ (розділ 4.3.2).}$$

Магістральні властивості оптимальних траєкторій впливають з наступної теореми.

**Теорема.** Нехай справедливе *Припущення 1*, тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(x, y, T)}{\Omega T} = 1. \quad (16)$$

Оскільки значення  $\Omega T$  є значенням функціоналу  $c(\cdot)$  на магiстралi, то рiвнiсть (16) означає, що будь яка оптимальна траєкторія при великих значеннях  $T$  як завгодно близька до стаціонарної траєкторії  $k^*$ , тобто магiстралi.

**Доведення теореми.**

Нехай  $t_1 = t_{\min}^1$  і  $t_2 = t_{\min}^2$  — мінімальні значення часу,  $\alpha^1(t)$  — керування, яке відповідає  $t_1$ , а  $\alpha^2(t)$  —  $t_2$ . Розглянемо керування вигляду:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^1(t) \quad \forall t \in [0, t_{\min}^1], \\ \alpha^* \quad \forall t \in [t_{\min}^1, T - t_{\min}^2], \\ \alpha^2(t) \quad \forall t \in [T - t_{\min}^2, T], \end{cases} \quad (17)$$

де  $\alpha_i^* = \frac{\mu_i k_i^*}{\Pi(k^*)}$ , а  $k_i(t)$  — відповідний розв'язок системи диференціальних рівнянь (11) для керування (17).

Керування  $\alpha(t)$  (17) є допустимим, тому що  $k(0) = x$ ,  $k(T) = y$ . Нехай  $\alpha^0(t)$  — оптимальне керування в задачі (11), тоді  $K(x, y, T) = c(x, y, k(t), \alpha^0(t), T)$ .

З нерівності (14) випливає, що  $K(x, y, T) \leq \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)$ . З іншої сторони маємо  $K(x, y, T) \geq c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T)$ . Використовуючи вираз (12) величину  $c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T)$  запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) &= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) = \\ &= \int_0^{t_{\min}^1} [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt + \int_{t_{\min}^1}^{T-t_{\min}^2} [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt + \\ &+ \int_{T-t_{\min}^2}^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt - \\ &- \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) = c_1 + \Omega(T - t_{\min}^1 - t_{\min}^2) + c_2 - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i), \end{aligned}$$

$$\text{де } c_1 = \int_0^{t_{\min}^1} [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt, \quad c_2 = \int_{T-t_{\min}^2}^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt.$$

Отже маємо нерівності

$$c_1 + \Omega(T - t_{\min}^1 - t_{\min}^2) + c_2 - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) \leq K(x, y, T) \leq \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i).$$

Поділивши останню нерівність на  $\Omega T$  отримаємо:

$$\frac{c_1 + c_2 - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)}{\Omega T} - \frac{t_{\min}^1 + t_{\min}^2}{T} + 1 \leq \frac{K(x, y, T)}{\Omega T} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)}{\Omega T}. \quad (18)$$

Переходячи до границі при  $T \rightarrow \infty$ , отримуємо:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(x, y, T)}{\Omega T} = 1,$$

що і потрібно було довести.

### **Висновки:**

1. Запропонована динамічна модель оптимального економічного розвитку наукомісткого підприємства. У загальному вигляді в динамічній моделі (5) функціонал є інтегралом розвитку НМП, коли підприємство, вкладаючи інвестиції, — рентабельне. Керуючим параметром є розподіл інвестицій  $\bar{\alpha}(t)$ . Фазовими параметрами є фондоозброєність  $\bar{k}(t)$ , трудові  $\bar{l}(t)$ , первісні (сировинні)  $h(t)$ . Розв'язком даної задачі є оптимальні траєкторії  $\bar{k}^*(t)$ ,  $\bar{l}^*(t)$ ,  $h^*(t)$ , для яких досягається максимальний розвиток НМП при виробництві наукомісткої продукції.

2. В роботі проведено чисельне моделювання динамічної моделі оптимального керування економічним розвитком НМП та аналіз системи оптимального керування інвестиціями. В результаті чисельного моделювання отримано структуру оптимальних траєкторій фондоозброєності динамічної системи НМП. Найважливішою властивістю оптимальних траєкторій є їх магістральний характер при великих значеннях інтервалу розвитку системи. Результати моделювання показують, що існують три зони керування: початкова, магістральна (стаціонарна) та кінцева. З економічної точки зору динамічна система НМП у початковій та кінцевій зонах керування нарощує виробничий потенціал, а в магістральній зоні — зберігає оптимальний розподіл інвестицій та споживання в багатомодульній структурі НМП. При цьому на магістралі фондоозброєність має постійний рівень  $k^*$  при оптимальних інвестиціях  $\alpha^*$ . В загальному випадку в магістральній зоні можна досягти оптимального розподілу ресурсного потенціалу  $R^*$ . Як показали чисельні результати моделювання динамічної системи в початковій та кінцевій зонах керування, як правило, потрібні значні інвестиції. Вони вкладаються для оптимізації виробничої програми НМП при розробці нової НМПП. Тому важливо якнайшвидше досягти магістралі, потім тривалий час у ній знаходитись і потім, якомога швидше, вийти на кінцеву точку розвитку системи.

3. Доведено існування магістралі для моделі (6, 7, 8). Таким чином, процес розвитку НМП можна розбити на три умовних частини: початковий — коли потрібно за мінімальний час вийти на магістраль (при цьому вкладаються, як правило, найбільші інвес-

тиції, а споживання — мінімальне); стаціонарний (магістраль) — ефективна робота НМП на великому інтервалі часу за рахунок використання стратегії оптимального перерозподілу ресурсів (інвестиції та споживання помірні) [4]; кінцевий — вихід на кінцеву точку розвитку (також вкладаються великі інвестиції, а споживання — мінімальне).

4. ВС у формі корпоративних об'єднань на початку свого становлення (розвитку) мають неоднакові економічні характеристики, тому потребують додаткових організаційно-методологічних компетенцій (заходів) та інвестицій для здійснення процесу розвитку і управління. Багатомодульність структури НМП дозволяє маніпулювати коефіцієнтами інвестицій  $\alpha_i$  залежно від обсягів отриманого чистого прибутку, програми розробки НМПР, їхньої кількості та властивостей подальшої експлуатації та сервісно-ремонтних робіт.

### **Література**

1. Федулова Л. Проблемы управления наукоемким производственным предприятием в Украине // Журнал «Директор». — К.: Інститут економіки и прогнозування Национальной академии наук Украины, 2006 г., <http://www.director.by>

2. Галіцин В. К., Букрєєва Л. А., Устенко С. В. Створення національного науково-виробничого об'єднання в умовах трансформаційної економіки // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Міжвідомчий науковий збірник. Вип. 73 / Відп. ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2006. — С. 21—33.

3. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.

4. Устенко С. В. Модель функціонування інтеграційної виробничої системи // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Збірник наукових праць. Вип. 75. / Відп. ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2007. — С. 160—180.

5. Колемаєв В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.

6. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 198 с.

7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. — М.: Айрис-пресс, 2002. — 576 с.

8. Тихомиров В. М. Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления. — М.: Изд. Моск. универ-та, 1982. — 107 с.

9. Тихомиров В. М., Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.