УДК 62-50+681.511

Ю. В. Коляда, доц.
кафедри економіко-математичних методів,
КНЕУ імені Вадима Гетьмана

АЛГОРИТМ СТІЙКОСТІ ТА ОЦІНКИ ЯКОСТІ ДИСКРЕТНОЇ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Описується простий, ефективний і надійний алгоритм встановлення стійкості дискретної математичної моделі. Також вказано спосіб обчислення інших важливих чинників, що характеризують явище стійкості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стійкість, число коливань, час встановлення стійкості.

В аналізі і моделюванні різноманітних економічних проблем суттєво використовуються [1] методи дискретної математики, які органічно відповідають соціально-економічній природі досліджуваних задач, досить складних та надзвичайно великих, що з'являються на всіх рівнях структури господарської діяльності.

Глибоке проникнення в сутність досліджуваних проблем, аналіз і розуміння характерних рис, внутрішніх взаємозв'язків, їх взаємовпливу, реакція на зовнішні показники можливе з-за умови існування адекватного математичного інструментарію, спроможного враховувати варіативний характер компонентів математичної моделі. Зазначене притаманне економіці перехідного періоду. Очевидно, що належний математичний апарат має бути простим і дієвим, перш за все доступним гуманітарію, зокрема економісту. Зрозуміло також, що йдеться про стійкість процесів, встановлення їх характерних рис, числово індикатувати, притаманних перехідній економіці. Доцільно це робити за допомогою математичного моделювання, виконуючи етап так званого «м'якого моделювання», яким передбачається якомога повне, глибоке дослідження стійкості розв'язків математичної моделі. Стандартно [1] стійкість економіко-математичної моделі (її розв'язків) вивчається із застосуванням класичних критеріїв, які визнаються достатньо громіздкими і не досить ефективними, особливо з ростом розмірності моделі.

Останнім часом спостерігається [2] тенденція просякнення результатів технічних наук в гуманітарну сферу, зокрема економічну, деякі задачі котрої допускають пряме(безпосереднє) використання, а подекуди значно доповнюють, розширюють горизонт подальшого економічного бачення. Саме в цьому проявляється велич і могутність економіко-математичного моделювання, бо одними і тими математичними моделями описуються реалії об’єктивної дійсності — явищ, процесів часто досить віддалених один від одного.

В даній статті виписано найбільш раціональний серед відомих алгоритм прямого дослідження стійкості дискретної лінійної системи, вважаючи відомим її характеристичний поліном. Також наводяться оцінки інших чинників процесу стійкості. Поза увагою не лишилось явище запізнення, властиве економіці.

Відповідно до теорії [3] для асимптотичної стійкості дискретної лінійної стаціонарної системи необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}(\omega)d\omega = n\,, \tag{1}$$

де підінтегральна функція будується на підґрунті характеристичного рівняння системи

$$P(S)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot S^{n-k}\,, \tag{2}$$

являючись дійсною частиною відношення похідної полінома (2) і його самого

$$R(\omega)=\mathrm{Re}\frac{P'(e^{i\omega})}{P(e^{i\omega})}\,.$$

Практично для встановлення стійкості спочатку обчислюється підінтегральна функція $R(\omega)$ за формулою

$$R(\omega)=\frac{UV'-VU'}{U^2+V^2}\,, \tag{3}$$

де величини $U=\sum_{m=0}^{n}a_m\cos(n-m)\omega..i..V=\sum_{m=0}^{n-1}a_m\cdot\sin(n-m)\omega$ та їх похідні відповідно

$$U'=-\sum_{m=0}^{n-1}a_m(n-m)\cdot\sin(n-m)\omega; V'=\sum_{m=0}^{n-1}a_m(n-m)\cdot\cos(n-m)\omega,$$

причому n-степінь характеристичного рівняння, a_m ($m = 0, ...n - - 1, n$) — його коефіцієнти.

Потім, після побудови виразу (3), обчислюється визначений інтеграл (1), що легко здійснюється на комп'ютері відомими пакетами математичних програм, наприклад Mathcad тощо.

Інші чинники процесу стійкості та їх оцінки набувають вигляду [3]:

— мажорантне число коливань перехідного процесу при досягненні режиму стійкості

$$N \le \max_{\omega}[\omega \cdot R(\omega)],$$

причому ступінь коливності підсилюється із ростом максимуму функції $R(\omega)$ і збільшення віддалі його від вісі ординат;

— час регулювання (встановлення стійкості)

$$\tau \le \lambda \cdot \max_{\omega} R(\omega), \text{ де } \lambda \in [3; 5];$$

— настання першого екстремуму перехідного процесу

$$\tau_{\max} \approx \frac{\pi}{\Omega},$$

де Ω — стаціонарна точка глобального максимуму функції $\omega \cdot R(\omega)$;

— час перерегулювання

$$\sigma \le \exp[(-\pi / \Omega) \cdot \max_{\omega} R(\omega)];$$

— ступінь стійкості

$$\alpha = \min_{\omega} R^{-1}(\omega).$$

Привертає увагу супутній характер обчислень.

В економіці добре відомі запізнення (лаги) процесів. Для лінійних дискретних стаціонарних систем з-за наявності лагів характеристичний квазіполіном записується

$$P(S) = A(S) + B(S) \cdot e^{-s\tau},$$

де степінь многочлена $A(S)$ перевищує аналогічний показник полінома $B(S)$.

Критерій (1) зберігає свою силу, але в структурі функції $R(\omega)$ відповідні величини набувають вигляду:

$$U = U_a + U_b \cos \omega\tau - V_b \sin \omega\tau;$$
$$V = V_a + V_b \sin \omega\tau - V_b \cos \omega\tau;$$
$$U' = U'_a + (U'_b - \tau V_b) \cos \omega\tau - (V'_b + \tau U_b) \sin \omega\tau;$$
$$V' = V'_a + (U'_b - \tau V_b) \sin \omega\tau + (V'_b + \tau U_b) \cos \omega\tau,$$

де величини $U_a = \operatorname{Re} A(i\omega)$ та $U_b = \operatorname{Re} B(i\omega)$ відповідно є дійсні частини комплекснозначних функцій; $V_a = I_m A(i\omega)$ та $V_b = I_m B(i\omega)$ відповідно уявні частини згадуваних вже комплексно значних функцій.

Оцінки якості модельованої системи із запізненням приймають вигляд:

— час регулювання

$$t_p \le \lambda \max\nolimits_\omega [R(\omega) + \frac{\pi}{2}];$$

— число коливань перехідного процесу оцінюється нерівністю

$$N \le \max\nolimits_\omega [\omega R(\omega) + \omega \cdot \frac{\pi}{2}]$$

— час першого максимуму перехідного процесу приблизно обчислюється $t_{\max} \approx \frac{\pi}{\Omega}$, де $\mathbf{\Omega}$ — стаціонарна точка глобального максимуму функції $\omega[R(\omega) + \frac{\pi}{2}]$;

— перерегулювання можна оцінити співвідношенням $\sigma \le \exp\left[\left(-\frac{\pi}{\Omega}\right) \cdot \max\nolimits_\omega R(\omega) + \frac{\pi}{2}\right]$.

Таким чином, побудова графіка тільки одної функції $R(\omega)$ однієї змінної дає майже вичерпну інформацію про стан лінійної дискретної системи як з запізненням так і без нього. Результат надзвичайно важливий з методологічної точки зору, враховуючи збереження структури алгоритму, функції $R(\omega)$ та стереотипність дій і більше того, зважаючи на рівень математичної підготовки економістів. Побудова графіка функції однієї змінної, пошук екстремумів — на сьогодні опрацьовані належним чином комп'ютерні процедури, тому параметри оцінок затухання і коливності легко знаходяться, без особливих або принципового характеру труднощів.

Отже, незалежно від типу економіко-математичної моделі (неперервної [4], дискретної чи з лагом) дослідження стійкості її розв'язків здійснюється за єдиним підходом – побудовою однакової структури функції $R(\omega)$, але різних видів її складових U і V та похідних U' і V', причому потрібні вирази виписані для кожного типу моделі.

Запозичено з теорії систем автоматичного регулювання і долучено до практики моделювання економіки важливі поняття, що характеризують стійкість, розкриваючи повний її зміст, також доповнюючи інколи уявлення про економічну стабілізацію, її характер.

Література

1. *Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Пер. с англ. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 496 с.
2. *Вітлінський В. В., Коляда Ю. В.* Адаптивні економіко-математичні моделі / Тези доповідей 10 Всеукр. наук.-метод. конф. «Проблеми економічної кібернетики». 15—17 вересня 2005 р. м. Київ-Донецьк: ТОВ «АПЕКС», 2005 р. — С. 105—107.
3. *Мелкумян Д. О.* Анализ систем методам логарифмической производной. — М.: Энергоиздат, 1981. — 112 с.
4. *Коляда Ю. В.* До питання стійкості цін на ринку товарів / Формування ринкової економіки: Зб. наук. праць. — К.: КНЕУ, 2006. — Вип. 15. — С. 323—327.

Стаття надійшла до редакції 08.12.2006