

**О. О. Бондаренко**, аспірантка,  
ДВНЗ «Київський національний економічний  
університет імені Вадима Гетьмана»

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ОЦІНКИ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ФОНДОВИХ ІНДЕКСІВ СВІТОВИХ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ**

*АНОТАЦІЯ. У статті запропоновано методуку оптимізації параметрів моделей оцінки волатильності світових фінансових ринків, побудованих за допомогою кубічних ермітових сплайнів як альтернативного методу моделювання нестационарних економічних процесів. Також на основі порівняльного аналізу результатів моделювання доведено доцільність застосування сплайн-функцій для прогнозування базових показників, що характеризують діяльність світових фінансових ринків.*

*ANNOTATION. The method of optimization of parameters of volatility models for world financial markets, built by cube hermitean splines as alternative method of design of economic transients is applied in the article. The comparative analysis of results is executed with models, got on the fixed net of knots, and built on the basis of standard method of estimation of conditional heteroscedasticity.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: фондовий індекс, волатильність, автокореляція, умовна гетероскедастичність, кубічний ермітів сплайн, непараметричний критерій інверсій, метод покоординатного пошуку, адекватність.*

Завдання оцінювання і прогнозування волатильності представляють значний інтерес у різних додатках економіки і фінансів. Дослідження моделей визначення волатильності актуальні у зв'язку з нестабільною ситуацією на світових фінансових ринках.

Дослідження і роботи багатьох учених виявили, що фінансові часові ряди володіють специфічними особливостями, врахувати які здатні лише певні економетричні моделі. Одним з інструментів оцінювання мінливої волатильності є економетричні моделі умовної гетероскедастичності (ARCH, autoregressive conditional heteroscedasticity) [1], узагальненої авторегресійної умовної гетероскедастичності (GARCH, generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) [2] і різні їх модифікації. Термін «умовна» означає явну залежність від минулої послідовності спостережень.

Процес побудови моделі GARCH, як показано в [3], складається з двох основних етапів.

*Етап 1.* Виявлення ознак умовної гетероскедастичності в аналізованому часовому ряді  $\{x_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ . Даний етап включає наступні кроки.

1. Побудова найкращої моделі для часового ряду  $\{x_t\}$  ( $t = 1, 2 \dots$ ) в класі регресійних моделей і отримання часового ряду залишків  $\{\varepsilon_t\}$  для побудованої моделі.

2. Аналіз автокореляційної функції і  $Q$ -статистик Льюнга-Бокса для залишків  $\{\varepsilon_t\}$  і квадратів залишків  $\{\varepsilon_t^2\}$ . Нульова гіпотеза згідно з  $Q$ -статистикою припускає відсутність автокореляції у показниках. Свідомством на користь моделі GARCH є ситуація, коли часовий ряд залишків  $\{\varepsilon_t\}$  виявляється «білим шумом», а часовий ряд квадратів залишків  $\{\varepsilon_t^2\}$  — відмінним від «білого шуму» стаціонарним процесом.

3. Використання тесту Енгла для перевірки наявності GARCH-ефектів (тобто гетероскедастичності) у часовому ряду квадратів залишків  $\{\varepsilon_t^2\}$ . Нульова гіпотеза припускає, що часовий ряд є випадковою послідовністю, розподіленою за Гаусом (тобто не існує ніяких ARCH-ефектів). Якщо ознаки умовної гетероскедастичності виявлені, то виконується другий етап.

*Етап 2.* Побудова моделі GARCH, тобто оцінювання параметрів і тестування адекватності побудованої моделі.

Згідно з наведеним алгоритмом у роботі за допомогою стандартних функцій MATLAB було виконано побудову GARCH-моделей для оцінки волатильностей фінансових індексів Німеччини (індекс DAX), Америки (індекс Доу-Джонса), Росії (індекс РТС) та України (індекс ПФТС).

Для отриманих рядів залишків побудовано автокореляційні функції разом з нижніми та верхніми границями довірчих інтервалів їх середньоквадратичних відхилень, зображені на рис. 1.

Як видно з рисунка, для рядів залишків фондових індексів Німеччини та США значення автокореляційних функцій не перевищують межі довірчих інтервалів, незалежні між собою і зі збільшенням часового лагу наближаються до нуля. Тобто, дані показники є близькими до «білого шуму».

Далі було розраховано значення автокореляційних функцій для квадратів залишків динамічних рядів фондових індексів (рис. 2).

Аналізуючи графіки на рис. 2, варто зазначити, що значення автокореляційних функцій перевищують верхню межу довірчих інтервалів і зберігають «пам'ять» до 12-го лагу. Тобто, ряди квадратів залишків володіють властивостями відмінного від «білого шуму» стаціонарного процесу.

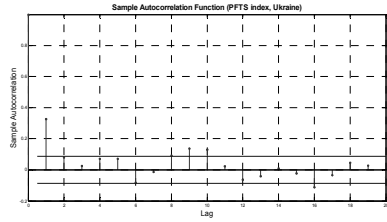
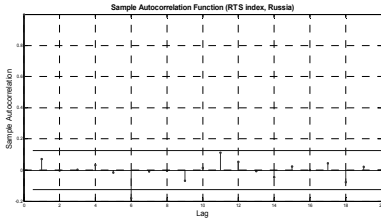
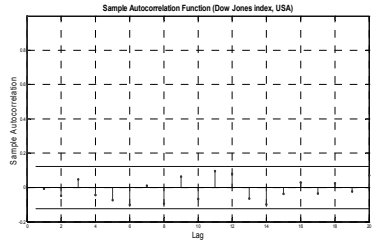
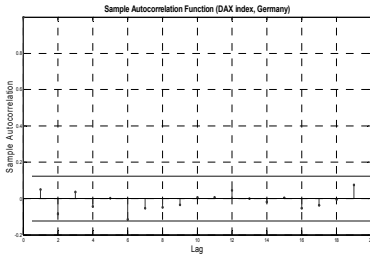


Рис. 1. Автокореляційні функції для рядів залишків фондових індексів різних країн

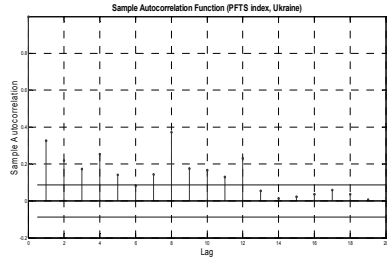
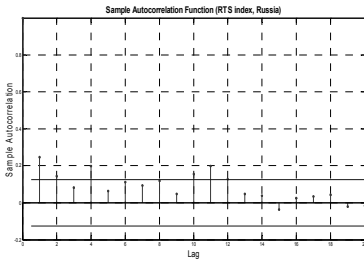
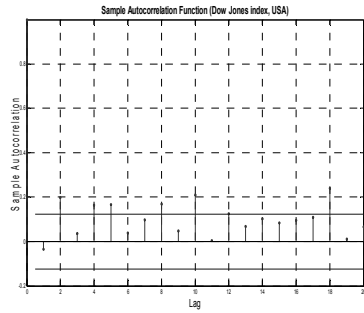
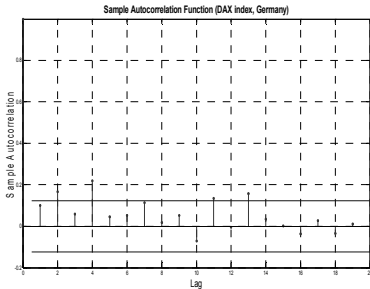


Рис. 2. Автокореляційні функції для рядів квадратів залишків фондових індексів різних країн

Наступним кроком попереднього аналізу вхідних даних було проведення тестів Льюнга-Бокса та Енгла. Результати тестування наведені в табл. 1.

Таблиця 1

**ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЇВ ТЕСТУ ЛЬОНГА-БОКСА ТА ЕНГЛА  
ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ GARCH-ЕФЕКТІВ У ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ**

| Довжина автокореляційного лагу, днів | Значення статистичної гіпотези | Фактичне значення критерію | Критичне значення критерію |
|--------------------------------------|--------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1                                    | 2                              | 3                          | 4                          |
| Тест Льюнга-Бокса                    |                                |                            |                            |
| DAX, Німеччина                       |                                |                            |                            |
| 10                                   | 1                              | 30.8538                    | 18.3070                    |
| 15                                   | 1                              | 43.0900                    | 24.9958                    |
| 20                                   | 1                              | 44.1499                    | 31.4104                    |
| Dow Jones, США                       |                                |                            |                            |
| 10                                   | 1                              | 49.4235                    | 18.3070                    |
| 15                                   | 1                              | 60.1840                    | 24.9958                    |
| 20                                   | 1                              | 83.7830                    | 31.4104                    |
| RTS, Росія                           |                                |                            |                            |
| 10                                   | 1                              | 49.7477                    | 18.3070                    |
| 15                                   | 1                              | 65.9869                    | 24.9958                    |
| 20                                   | 1                              | 67.1851                    | 31.4104                    |
| PFTS, Україна                        |                                |                            |                            |
| 10                                   | 1                              | 261.3197                   | 18.3070                    |
| 15                                   | 1                              | 300.7903                   | 24.9958                    |
| 20                                   | 1                              | 304.4079                   | 31.4104                    |
| Тест Енгла                           |                                |                            |                            |
| DAX, Німеччина                       |                                |                            |                            |
| 10                                   | 0                              | 11.5367                    | 18.3070                    |
| 15                                   | 0                              | 20.7182                    | 24.9958                    |
| 20                                   | 0                              | 9.0450                     | 31.4104                    |

Закінчення табл. 1

| 1              | 2 | 3        | 4       |
|----------------|---|----------|---------|
| Dow Jones, США |   |          |         |
| 10             | 1 | 91.3534  | 18.3070 |
| 15             | 1 | 70.3661  | 24.9958 |
| 20             | 1 | 108.8504 | 31.4104 |
| RTS, Росія     |   |          |         |
| 10             | 1 | 44.5409  | 18.3070 |
| 15             | 0 | 6.0733   | 24.9958 |
| 20             | 0 | 5.0864   | 31.4104 |
| PFTS, Україна  |   |          |         |
| 10             | 1 | 117.8970 | 18.3070 |
| 15             | 1 | 117.2319 | 24.9958 |
| 20             | 1 | 149.5608 | 31.4104 |

Результати тестування свідчать про те, що в усіх рядах квадратів залишків присутнє явище автокореляції, і майже для всіх індексів, окрім DAX, Німеччина, характерним є наявність гетероскедастичності.

Попередній аналіз рядів даних вказує на доцільність застосування інструментарію GARCH для моделювання волатильності фондових індексів.

Використана модель, параметри якої були розраховані — GARCH(1,1), має наступний вигляд:

$$y_t = C + \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = k + G_1 \sigma_{t-1}^2 + A_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (2)$$

де:  $y_t$  — модельований ряд залишків;

$C$  — константа;

$\varepsilon_t$  — похибки з некорельованим білим шумом;

$\sigma_t^2$  — розраховані значення варіації;

$\sigma_{t-1}^2$  — розраховані значення варіації для попереднього періоду;

$\varepsilon_{t-1}^2$  — квадрати збурень за попередній період [4].

У результаті були отримані моделі з такими параметрами:

— DAX, Німеччина:

$$Y_t = 3.1857 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 531.69 + 0.78099\sigma_{t-1}^2 + 0.11467\varepsilon_{t-1}^2$$

— Dow Jones, США:

$$Y_t = 0.57373 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 31.425 + 0.91339\sigma_{t-1}^2 + 0.059876\varepsilon_{t-1}^2$$

— RTS, Росія:

$$Y_t = 1.2222 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 28.473 + 0.85863\sigma_{t-1}^2 + 0.091444\varepsilon_{t-1}^2$$

— PFTS, Україна:

$$Y_t = -0.38762 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 4.6104 + 0.81212\sigma_{t-1}^2 + 0.16933\varepsilon_{t-1}^2$$

Для аналізу адекватності моделі GARCH використовують критерії, що перевіряють наявність автокореляції в рядах, де присутні елементи і авторегресії, і ковзаючої середньої. Це може бути, зокрема, тест Льюнга-Бокса [3]. Він дозволяє перевірити стандартизовані залишки, розраховані по моделі GARCH і залишки в рівнянні умовного математичного очікування.

Якщо модель GARCH досить добре визначена, то стандартизовані залишки будуть незалежні і нормально розподілені. Результати аналізу наведено в табл. 2.

Таблиця 2

**ЗНАЧЕННЯ КРИТЕРІЇВ ТЕСТУ ЛЬОНГА-БОКСА  
ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ АДЕКВАТНОСТІ ПОБУДОВАНИХ GARCH-МОДЕЛЕЙ**

| Довжина автокореляційного лагу, днів | Значення статистичної гіпотези | Фактичне значення Q-статистики | Критичне значення Q-статистики |
|--------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1                                    | 2                              | 3                              | 4                              |
| DAX, Німеччина                       |                                |                                |                                |
| 10                                   | 0                              | 8.6708                         | 18.3070                        |
| 15                                   | 0                              | 17.6334                        | 24.9958                        |
| 20                                   | 0                              | 20.8304                        | 31.4104                        |

Закінчення табл. 2

| 1              | 2 | 3       | 4       |
|----------------|---|---------|---------|
| Dow Jones, США |   |         |         |
| 10             | 0 | 9.3289  | 18.3070 |
| 15             | 0 | 10.4436 | 24.9958 |
| 20             | 0 | 20.3703 | 31.4104 |
| RTS, Росія     |   |         |         |
| 10             | 0 | 5.7037  | 18.3070 |
| 15             | 0 | 7.9632  | 24.9958 |
| 20             | 0 | 9.7679  | 31.4104 |
| PFTS, Україна  |   |         |         |
| 10             | 1 | 27.5650 | 18.3070 |
| 15             | 1 | 30.0547 | 24.9958 |
| 20             | 1 | 35.6129 | 31.4104 |

З таблиці видно, що для всіх індексів, окрім PFTS, підтверджується нульова гіпотеза про відсутність автокореляції в рядах залишків, тобто моделі адекватно описують вхідний процес.

Як було показано в роботі [5], GARCH-моделям властиві певні недоліки, яких позбавлені аналітичні сплайн-функції. Отримані попередні результати моделювання волатильності фінансових показників за допомогою ермітових сплайнів різних порядків дозволяють зробити висновки про їх переваги порівняно зі стандартною GARCH-методологією.

Кількість і розташування вузлів сплайна істотно впливають на якість моделі. Метод найменших квадратів (МНК) дозволяє для фіксованої сітки вузлів знайти оптимальні значення сплайна у вузлах (у разі ермітового сплайна). Якщо якість моделі не задовільна, то для сплайна відбувається ділення відрізка на фрагменти. Тут виникають питання з положенням точок розбиття і їх оптимальною кількістю. Саме складнощі з визначенням вдалого розміщення вузлів є істотним чинником, стримуючим застосування МНК з моделями сплайнів.

Для підвищення якості отриманих раніше сплайн-моделей волатильності фінансових показників з фіксованою сіткою вузлів [5] необхідно виконати оптимізацію розташування вузлів даної

сітки. Це можливо зробити за допомогою методики, запропонованої в [6]. Оптимізація проводиться на основі використання двох процедур:

- послідовної побудови сплайна з розстановкою вузлів і контролем залишків на випадковість за непараметричним критерієм інверсій;

- послідовної оптимізації положення внутрішніх вузлових точок методом покоординатної оптимізації [6].

Методика реалізована в програмному середовищі MATLAB. Спочатку було виконано послідовну побудову сплайнів, вузли розміщено з інтервалом у 10 точок, після чого методом одномірного градієнтного спуску було знайдено положення вузла між двома сусідніми, яке дає оптимальне значення обраних критеріїв.

У результаті обчислення сплайнів для оцінки волатильностей фондових індексів Америки (індекс Доу-Джонса), Німеччини (індекс DAX), Росії (індекс РТС) та України (індекс ПФТС) отримано графіки, наведені на рис. 3.

Як видно з рисунків, на графіках відображаються ряди входних даних, оптимізовані функції сплайнів та їх довірчі інтервали. Оскільки при знаходженні параметрів моделей використовується стандартна процедура МНК, то модельні значення можуть набувати від'ємних значень. Це не відповідає природі показника дисперсії. Для позбавлення від цього недоліку при розрахунку параметрів моделі необхідно:

- використовувати МНК з обмеженнями, в яких враховується умова невід'ємності;

- побудову довірчих інтервалів проводити з використанням розподілу  $\chi^2$ , оскільки він відповідає квадратам відхилень, і на його основі будується односторонній довірчий інтервал.

Далі було виконано порівняння кубічних ермітових сплайнів з фіксованою та оптимізованою сіткою вузлів, а також з функціями GARCH та фактичними показниками дисперсій відхилень (волатильності) фінансових показників (рис. 4).

Як видно з рис. 4, оптимізовані сплайни дають більш згладжені результати порівняно зі звичаними кубічними ермітовими сплайнами, в той час як GARCH-моделі, як було показано і в попередніх дослідженнях [5], демонструють більш завищені результати, особливо на проміжках, де відбуваються різкі коливання фактичних показників і переходи від «сплесків» волатильностей до періодів стабільності.



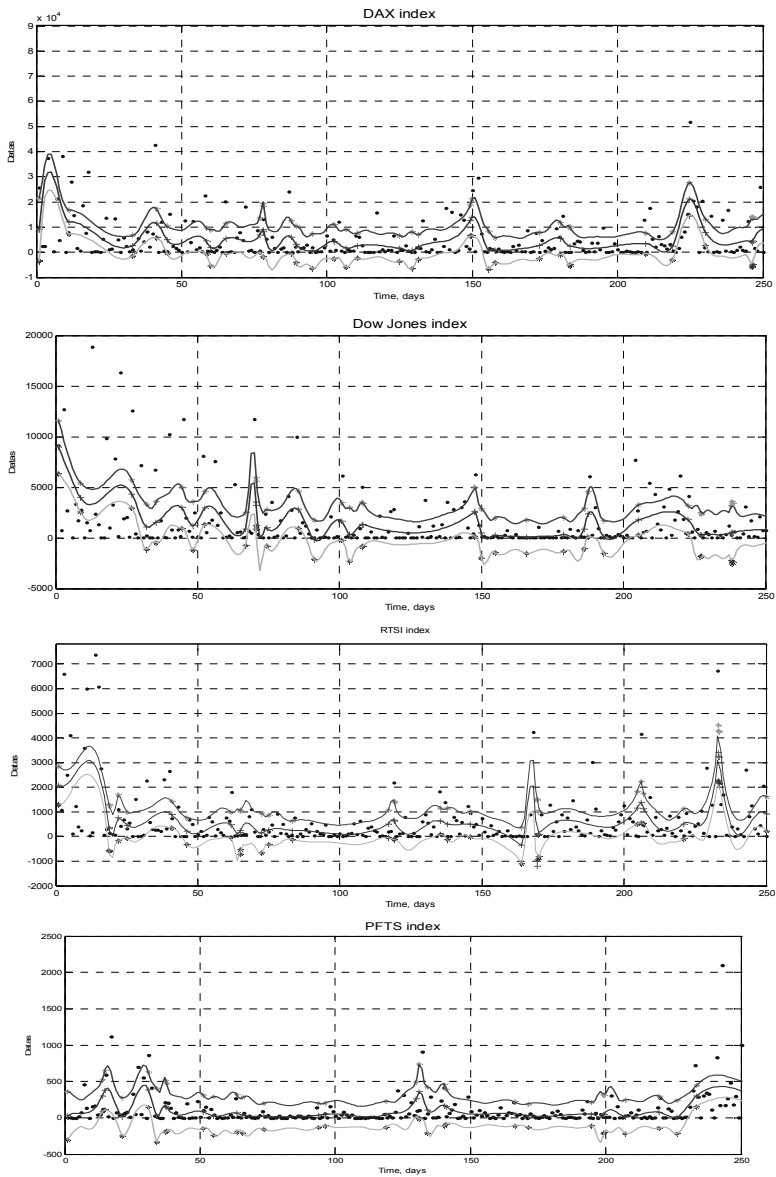


Рис. 3. Результати побудови та оптимізації кубічних ермітових сплайнів для волатильностей досліджуваних фінансових показників

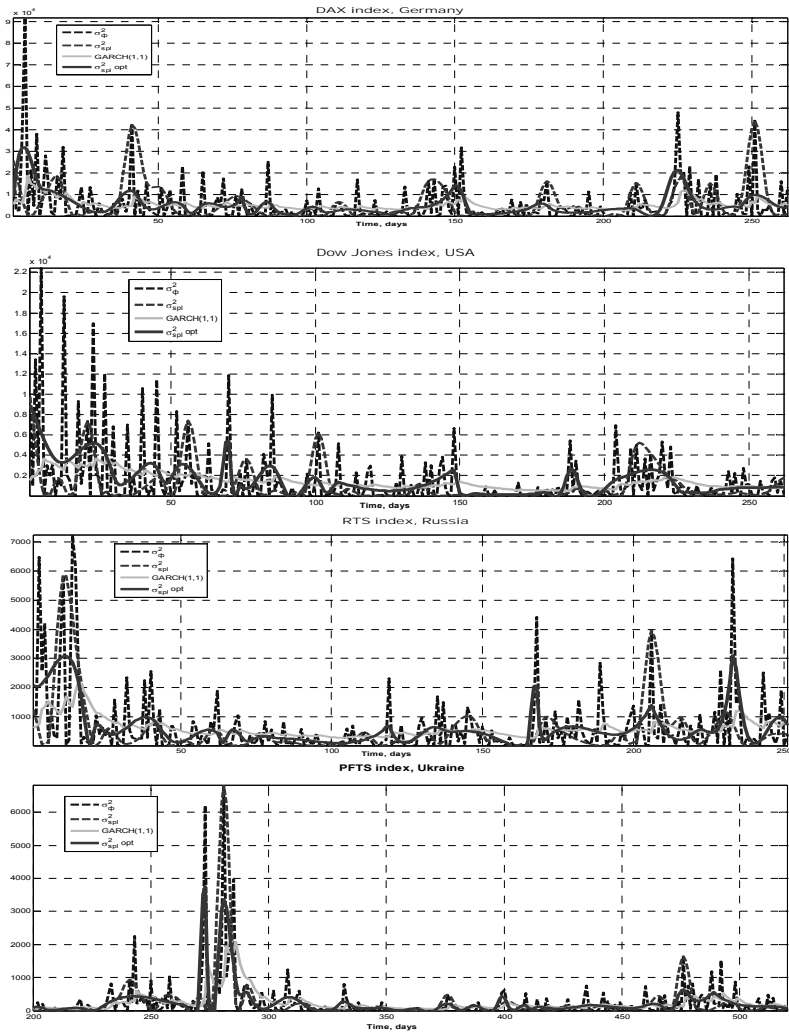


Рис. 4. Порівняння результатів моделювання сплайнів і GARCH для обраних фінансових показників

Важливе значення має частота розташування вузлів сплайнів: при збільшенні їх кількості отримуємо модель, більш наближену до фактичних даних, і навпаки, при їх зменшенні отримуємо більш згладжену функцію, що дозволяє виявити основну тенденцію зміни дисперсії відхилень.

Отже, за рахунок залучення до аналізу фінансових ринків сплайн-апарату можна вдосконалити процеси аналітичного дослідження і прогнозування фінансово-економічних процесів.

У подальшому постає задача моделювання та аналізу GARCH-процесів за допомогою сплайн-функцій з використанням методу найменших квадратів з обмеженнями, а також з доповненням сплайнової моделі авторегресійною складовою.

### **Література**

1. Engle R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation // *Econometrica*. 1982. V. 50. Pp. 987—1008.
2. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1986. V. 31. No. 3. Pp. 307 — 327.
3. Малюгин В. И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа: Учеб. пособие. — М.: Дело, 2003. — 320 с.
4. Box, G. E. P., G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1994.
5. Шелевицький І.В., Кононенко В.В., Бондаренко О.О. Порівняльний аналіз застосування сплайнів і GARCH-моделей для дослідження показників волатильності. // *Луганськ: Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*, № 2 (156) частина 1, 2011. — С. 34—40.
6. Шелевицький І. В. Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми / Під ред. Шутка М. О.— Кривий Ріг: Європейський університет, 2002. — 304 с.
7. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. *Прикладная статистика и основы эконометрики*. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 1022 с.

Стаття надійшла до редакції 24.05.2012 р.

УДК 330.4+519.86

**Т. К. Узаков,**

Кримський інженерно-педагогічний університет

### **РОЗРОБКА МЕХАНІЗМУ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТІЙКОГО МАКРОЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ**

**АНОТАЦІЯ.** На основі ендогенної моделі зростання з невідновлюваними природними ресурсами в статті досліджено можливість інноваційного і споживчого зростання в умовах вільного ринку. Показано, що стійке зростання протягом тривалого часу може здійснюватися через вплив науково-дослідного сектора (НДС) на темп економічного зростання, визначене як результат зростання продуктивності праці і підвищення ефективності виробництва, внаслідок чого відбувається перерозподіл ресурсів в економіці та їх найбільш ефективно використання.