

## Література

1. Узаков Т. К. Моделювання економічного зростання АР Крим з урахуванням людського капіталу/ Т. К. Узаков// Культура народів Причорномор'я. — 2010. — С. 187—189.
2. *Bovenberg A. L. and Smulders S.* Environmental Quality and Pollution-augmenting Technological Change in a Two-sector Endogenous Growth Model/ A. L. Bovenberg, S. Smulders // *Journal of Public Economics*. — 1995. — 57. — P. 369—391.
3. *Dasgupta P. S. and Heal G. M.* The Optimal Depletion of Exhaustible Resources/ P. S. Dasgupta, G. M. Heal // *Review of Economic Studies*. — 1974. — 41. — P. 3—28.
4. *De la Croix D. and Doepke M.* Inequality and Growth, Why Differential Fertility Matters/ D. De la Croix, M. Doepke // *American Economic Review*. — 2003. — 93. — P. 1091—1113.
5. *Romer P. M.* Endogenous Technical Change/ P. M. Romer // *Journal of Political Economy*. — 1990. — 98 — pp. 71—102.
6. *Scholz C. M. and Ziemes G.* Exhaustible Resources, Monopolistic Competition, and Endogenous Growth/ C. M. Scholz, G. Ziemes // *Environmental and Resource Economics*. — 1999. — 13 — P. 169—185.
7. *Solow R. M.* Intergenerational Equity and Exhaustible Resources/ R. M. Solow // *Review of Economic Studies*. — 1974. — 41. — P. 29—45.
8. *Stiglitz J. E.* Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Growth Paths/ J. E. Stiglitz // *Review of Economic Studies*. — 1974. — 41. — P. 123—137.

Стаття надійшла до редакції 08.06.2012 р.

УДК 001.893.54

**Д. О. Рзаєв**, старш. викладач,  
ДВНЗ «Київський національний економічний  
університет імені Вадима Гетьмана»,  
**С. А. Рзаєва**, канд. техн. наук, доцент,  
Київський національний  
торговельно-економічний університет

### МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

АНОТАЦІЯ. У статті розглянуто питання ефективного формування та управління інвестиційним портфелем, оптимізації портфеля цінних паперів, формування такого портфеля цінних паперів, який би відповідає вимогам підприємств як за прибутками, так і за ризиком, та при цьому достатньою мірою був диверсифікований. Застосовувана задача опти-

мізації зводиться до вибору такої структури портфеля, при якій ризик портфеля не перевищує заданого значення, а доходність портфеля є максимальною.

*ANNOTATION. The article deals with the efficient formation and departments-ing investment portfolio optimization portfolio, making maca-ing a portfolio that meets the requirements of businesses both in profits and the risk, and thus was sufficiently diversified. The used optimization problem is to choose such a structure the portfolio in which the risk of the portfolio does not exceed a specified value and returns of the portfolio is maximal.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: інвестиційний портфель, цінні папери, ризик, ризик оптимізація портфеля цінних паперів, максимальна доходність, мінімальний ризик, задача оптимізації, модель Марковіца, модель Шарпа, доходність одичного портфеля, залишковий ризик.*

Ефективне формування та управління інвестиційним портфелем як сукупністю активів підприємства є однією з головних проблем у сучасній теорії інвестицій.

Управління портфелем передбачає планування, аналіз і регулювання його складу для досягнення інвестиційних цілей. Інвестиційними цілями можуть бути визначені: висока дохідність, безпека вкладень (низький рівень ризику), ліквідність активів.

Портфель, який відповідає цілям інвестора, називається збалансованим. Тобто, збалансований портфель — це портфель, при формуванні якого досягається оптимальне поєднання інвестиційних характеристик активів у часі.

Інвестиційна стратегія формування портфеля активів може бути розділена за напрямками:

- якість умов інвестування;
- фінансові характеристики об'єкта інвестування;
- терміни інвестування (коротко, середньо та довгострокові);
- регіони розміщення вкладень залежать від регіональної кон'юнктури та умов інвестування (вільні економічні зони).

Для вкладень у цінні папери умови інвестування означають характер їх обігу на фондовому ринку та умови випуску.

Оцінка умов емісії цінних паперів передбачає: вивчення цілей та умов випуску, періодичність виплати дивідендів, оцінки випущеного виду цінного папера з огляду дохідності та ризикованості, кількість емісій та їх результати, склад власників тощо. Умови інвестування визначаються станом відповідного об'єкта інвестування, динамікою доходів та ризику, чинними законодавчими пільгами та обмеженнями (що визначають інвестиційний клімат), загальноекономічним станом, враховуючи такі фактори, як фази економічних циклів і рівень інфляції.

Кожний цінний папір характеризується доходністю та ризиком. Під ризиком розуміється ймовірність неотримання очікува-

ного прибутку чи навіть часткову або повну втрату коштів, які вкладені в цінні папери.

Ризик прийнято розділяти на ринковий, тобто єдиний для всіх цінних паперів, який неможливо уникнути, та індивідуальний — притаманний конкретному цінному паперу. Кожне підприємство, яке бажає розмістити вільні кошти на фондовому ринку, має свою шкалу оцінки ризику та прибутку. Високий прибуток для одного підприємства може здатися низьким для іншого. Якщо одні надають перевагу ризику з низьким прибутком, то інші — погоджуються на великий ризик з очікуванням великого прибутку.

Метою оптимізації портфеля цінних паперів є формування такого портфеля цінних паперів, який би відповідав вимогам підприємств як за прибутками, так і за ризиком, та при цьому достатньою мірою був диверсифікований.

Сформуємо задачу оптимізації: нехай доходність портфеля з  $N$  цінних паперів  $R_p$  та його ризикованість  $\sigma_p$  визначається функціями:

$$R_p = \{W_i, \sigma_i, r_i\}, i = 1 \dots N;$$

$$\sigma_p = \{W_i, R_i, \sigma_i, r_i\}, i = 1 \dots N,$$

де  $W_i$  — процентна частка цінних паперів портфеля;

$\sigma_i$  — деяка характеристика ризику даного цінного паперу, звичайно це середнє квадратичне відхилення доходності цінних паперів;

$r_i$  — доходність цінних паперів.

При розв'язуванні задачі необхідно урахувати наступні натуральні обмеження:

☞ сума усіх акцій (у відсотках) складає 100 %:

$$W_1 + W_2 + K + W_i + K + W_n = 1;$$

☞ кількість акцій не може бути від'ємною:

$$W_i = 0.$$

Розв'язуванням задачі є певна цільова структура портфеля, представлена набором значень ( $W_1, W_2, \dots, W_N$ ). Ідеальна постановка задачі оптимізації портфеля (1) — отримати максимальну доходність при мінімальному ризику:

$$\begin{cases} R_p \rightarrow \max; \\ \sigma_p \rightarrow \min; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Але така задача некоректна, тобто не має однозначного рішення. Ідеальний результат недосяжний, як і все ідеальне. Виходом з положення є введення критичних обмежень.

Перший варіант — задатися певною максимально допустимою величиною ризику  $\sigma_{req}$ . Тоді задача оптимізації зводиться до вибору такої структури портфеля, при якій ризик портфеля не перевищує заданого значення, а доходність портфеля є максимальною. Така задача надалі буде називатися *прямою задачею* (2):

$$\begin{cases} R_p \rightarrow \max; \\ \sigma_p \leq \sigma_{req}; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Другий варіант — задається певною мінімально допустимою величиною доходності. В цьому випадку задача оптимізації зводиться до вибору такої структури портфеля, прибуток якого вищий або ж дорівнює заданому значенню, а ризик мінімальний (формула 3):

$$\begin{cases} R_p \geq R_{req}; \\ \sigma_p \rightarrow \min; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язавши пряму і обернену задачі з оптимізації портфеля з  $N$  цінних паперів підприємство отримає дані — скільки та які цінні папери необхідно придбати, щоб сформувати портфель, який (по міркам підприємства) має достатньо високу доходність при допустимому ризику.

При спробі розв'язати пряму або обернену задачу виникає запитання: яким чином визначаються характеристики портфеля (доходність та ризик). На сьогоднішній день найбільш розповсюджені дві моделі визначення характеристик портфеля: модель Марковіца та модель Шарпа. Обидві моделі створені і успішно працюють в умовах, що склалися у відносно стабільних західних фондових ринків. На жаль, до їх числа український фондовий ринок поки що не входить. Через це була розпочата спроба створити модель, яка здатна успішно функціонувати в умовах фондового ринку, що формується, розвивається та реорганізується, яким є фондовий ринок України. Створена модель отримала назву Квазі-Шарп (подібна до моделі Шарпа). Дану модель і буде розглянуто.

### Модель Квазі-Шарпа

Як зазначалося раніше, модель Марковіца та Шарпа були створені та успішно працюють в умовах західних фондових ринків, яким притаманні стабільність і порівняна прогнозованість. У країнах з перехідною економікою фондові ринки перебувають на етапі становлення і розвитку. Відбувається постійна реорганізація. Фондовий ринок України не є винятком. У таких умовах застосування моделей Марковіца і Шарпа приводить до похибок, пов'язаних із нестабільністю котирування цінних паперів та фондового ринку в цілому.

З огляду на це було зроблено спробу розробити нову модель розрахунку характеристик фондового портфеля, яка може ефективно працювати в умовах сучасного фондового ринку України. Модель одержала назву Квазі-Шарп, оскільки деякими своїми рисами подібна до моделі Шарпа.

Модель Квазі-Шарп ґрунтується на взаємозв'язку доходності кожного цінного папера з деякого набору  $N$  цінних паперів з доходністю одиничного портфеля з цих паперів.

Основні припущення моделі Квазі-Шарп полягають у наступному:

- за характеристику доходності цінного папера береться математичне очікування доходності;
- під одиничним портфелем цінних паперів слід розуміти портфель, що складається з усіх цінних паперів, що розглядаються, взятих у рівній пропорції;
- взаємозв'язок доходності цінного папера і доходності одиничного портфеля описується лінійною функцією
- під ризиком цінного папера слід розуміти ступінь залежності змін доходності цінного папера від змін доходності одиничного портфеля;
- вважається, що дані минулих періодів, використані при розрахунку доходності та ризику, відображають повною мірою майбутнє значення доходності.

За моделлю Квазі-Шарп доходність цінного папера (формула 4) пов'язується з доходністю одиничного портфеля функцією лінійної регресії вигляду:

$$R_i = \bar{R}_i + \beta_i \cdot (R_{sp} - \bar{R}_{sp}), \quad (4)$$

де  $R_i$  — доходність цінного паперу;

$R_{sp}$  — доходність одиничного портфеля;

$\beta_i$  — коефіцієнт регресії;

$\bar{R}_i$  — середня доходність цінного папера за минулі періоди;

$\bar{R}_{sp}$  — середня доходність одиничного портфеля за минулі періоди.

Коефіцієнт  $\beta$  характеризує ступінь залежності доходності цінного папера від доходності одиничного портфеля. Чим вищий  $\beta$ , тим сильніше залежить доходність цінного папера від коливань доходності одиничного портфеля, тобто від коливань доходності решти цінних паперів, що входять в одиничний портфель. Коефіцієнт  $\beta$  називають  $\beta$ -ризиком, але його трактування має відміну від трактування однойменного показника в моделі Шарпа.

Як і в моделі Шарпа, в моделі Квазі-Шарп існує ризик того, що поцінована доходність цінного папера не належатиме вибудованій лінії регресії. Цей ризик називається залишковим ризиком. Залишковий ризик характеризує ступінь розбросу значень доходності цінного папера навколо лінії регресії. Залишковий ризик  $i$ -го цінного папера позначають  $\beta_{ei}$ .

Загальний ризик вкладень у даний цінний папір складається з  $\beta$ -ризик, тобто ризику зниження доходності при падінні доходності одиничного портфеля, і залишкового ризику  $\beta_{ei}$ , тобто ризику зниження доходності при падінні доходності одиничного портфеля і залишкового ризику  $\beta_{ei}$ , тобто ризику зниження доходності і невідповідності лінії регресії.

За моделлю Квазі-Шарп доходність портфеля цінних паперів — це середньозважена доходностей цінних паперів, що його складають:

$$R_p = \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i \cdot W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i),$$

де  $R_{sp}$  — очікувана доходність одиничного портфеля.

Ризик портфеля цінних паперів визначається за формулою:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_{ei}^2 \cdot W_i^2)},$$

де  $\sigma_{sp}$  — ризикованість одиничного портфеля.

З використанням моделі Квазі-Шарп для розрахунку характеристик портфеля пряма задача набуває вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i \cdot W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i) \rightarrow \max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_{ei}^2 \cdot W_i^2)} \leq \sigma_{req}; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases}$$

Відповідно, обернена задача має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i \cdot W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i) \geq R_{req}; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N (\beta_i \cdot W_i)^2 \cdot \sigma_{sp}^2 + \sum_{i=1}^N (\sigma_{ei}^2 \cdot W_i^2)} \rightarrow \min; \\ W_i \geq 0; \\ \sum W_i = 1. \end{cases}$$

При практичному застосуванні моделі Квазі-Шарп для оптимізації фондового портфеля використовуються наступні формули.

За доходність одиничного портфеля у період  $t$  (формула 5) береться середнє значення доходності цінних паперів, що його складають, за цей же період:

$$R_{sp}^t = \frac{\sum_{i=1}^N R_i^t}{N}, \quad (5)$$

де  $R_{sp}^t$  — доходність одиничного портфеля в період  $t$ ;

$R_i^t$  — доходність  $i$ -го цінного папера за період  $t$ .

Середня доходність цінного папера за минулі періоди:

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^T R_i^t}{T},$$

де  $R_{it}$  — доходність цінного папера за період  $t$ ;

$T$  — кількість періодів часу, що розглядається.

Середня доходність одиничного портфеля за минулі періоди:

$$\bar{R}_{sp} = \frac{\sum_{t=1}^T R_{sp}^t}{T},$$

Коефіцієнт  $\beta$  цінного папера розраховується за формулою:

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^T [(R_i^t - \bar{R}_i) \cdot (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})]}{\sum_{t=1}^T (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp})^2},$$

Залишковий ризик цінного паперу розраховується за формулою:

$$\sigma_{ei} = \frac{\sum_{t=1}^T \left( R_i^t - \bar{R}_i - \beta_i \cdot (R_{sp}^t - \bar{R}_{sp}) \right)^2}{T},$$

Ризикованість одиничного портфеля обчислюється формулою:

$$\sigma_{sp} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T \left( R_{sp}^t - \bar{R}_{sp} \right)^2}{T}}.$$

Ризик і доход різних цінних паперів різні. Як правило, цінні папери, яким притаманні ризик, дають невеликий прибуток, а цінні папери, які можуть дати більший доход, характеризуються більшим ризиком. Вкладаючи грошові кошти в різні цінні папери, формуючи портфель цінних паперів, можливо практично до нуля знизити індивідуальний ризик: якщо по одним цінним паперам буде низький доход (збиток), то інші це компенсують. Чим більше цінних паперів знаходиться в портфелі, тобто чим більше він диверсифікований, тим менший індивідуальний ризик.

### **Література**

1. *Белз О.* Економічна оцінка ефективності інвестиційних проектів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. екон. — 2004. — Вип. 33. — С. 184—192.
2. *Дегтярева Ю.В.* Методы выбора инновационных проектов // Проблемы повышения эффективности функционирования предприятий различных форм собственности. / НАН України. Ін-т економіки пром-сти. — Донецьк, 2006. — С. 263—270.
3. *Дорошенко Т.В.* Сутність інвестицій як економічної категорії // Фінанси України. — 2000. — № 11.
4. *Макарова И. В.* Учет риска при оценке эффективности реальных инвестиций // Економіка: проблеми теорії та практики. Вип. 211. Т. 4. — Дніпропетровськ.: ДНУ, 2006. — С. 991.
5. *Пересада А.А.* Управління інвестиційним процесом. — К.: Лібра, 2002. — 471 с.
6. *Цигилик І.І., Кропельницька С.О., Білий М.М., Мозіль О.І.* Аналіз і розробка інвестиційних проектів: Навчальний посібник. — К.: Центр навчальної літератури, 2005. — 160 с.

Стаття надійшла до редакції 08.06.2012 р.