

УДК 519.8

**О. О. Мельник**, канд. фіз.-мат. наук,  
старший викладач кафедри вищої математики.  
**Т. В. Блудова** д-р екон. наук,  
професор кафедри вищої математики,  
ДВНЗ «Київський національний економічний  
університет імені Вадима Гетьмана»

## ОБЕРНЕНІ ФУНКЦІЇ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У статті розглянуто відомі в економіці функції оберненої залежності: функція Енгеля, закон грошового обігу, закон Оукена, крива Філіпса, крива освоєння. Розглянуто функцію комплексної змінної вигляду закону Парето. Представлено поверхні дійсної, уявної частин та аргументу функції комплексної змінної, що може інтерпретувати закон Парето.

В статье рассмотрены известные в экономике функции обратной зависимости: функция Энгеля, закон денежного обращения, закон Оукена, кривая Филипса, кривая освоения. Рассмотрена функция комплексной переменной вида закона Парето. Представленные поверхности действительной, мнимой частей и аргумента функции комплексного переменного, что может интерпретировать закон Парето.

The article considers the certain reverse dependence functions in economy: Engel's function, the law of money circulation, Okun's law, Phillip's curve, the curve of the development. The function of complex variable presented in the form of Pareto's law was considered. The surfaces of the actual and the imaginary parts and the argument of complex variable function was presented, what the law of Pareto can interpret.

**Ключові слова:** Функція Енгеля, закон грошового обігу, закон Оукена, крива Філіпса, крива освоєння, функція комплексної змінної.

**Ключевые слова:** Функція Енгеля, закон денежного обращения, закон Оукена, кривая Филипса, кривая освоения, функция комплексной переменной.

**Key words:** Function of Engel, law of money circulation, Okun's law, Phillips curve, mastering curve, The function of complex variable.

**Постановка проблеми.** В даний час економічний аналіз використовується на всіх підприємствах, які прагнуть зробити свою роботу ефективною. Одними з найрозвиненіших методів економічного аналізу є економіко-математичні методи, чия інструментальна база в основному розвивається по шляху вдосконалення існуючих методів і моделей. Нові напрями розвитку інструментальної бази економічного аналізу з'являються достатньо рідко. Одним з таких напрямів виступає теорія функцій комплексних змінних, яка широко використовується в природно-наукових дисциплінах, але мало використовується в гуманітарних науках, у тому числі і в економіці. Тому актуальним є питання розширення інструментальної бази економічного аналізу за допомогою економіко-математичного моделювання за рахунок використання елементів теорії функцій комплексних змінних.

**Аналіз основних джерел.** З розвитком теорії комплексних чисел почала розвиватись теорія функцій комплексної змінної, основи її закладено у XVII ст. в основному працями Л. Ейлера. Подальший її розвиток зв'язаний з працями О. Коші, Б. Рімана (1826—1866), К. Вейерштрасса.

Значний внесок у розвиток теорії функцій комплексної змінної і її застосування зробили російські математики І. І. Сомов (1815—1876), Ю. В. Сохоцький (1842—

1927), М. Є. Жуковський (1847—1921), М. Я. Сонін (1815—1876), С. В. Ковалевська (1850—1891), С. А. Чаплигін (1869—1942), В. І. Смірнов (1887—1974), І. І. Привалов (1891—1941), М. І. Мухелішвілі (1891—1976), М. О. Лаврентьев (1900—1980), Г. М. Голузін (1906—1952), М. В. Келдиш (1911—1978), Д. Є. Меньшов (1892—1988) та ін.

Фундаментальні дослідження в розвитку теорії аналітичних функцій здійснили українські математики М. В. Остроградський (1802—1862), М. С. Ващенко-Захарченко (1825—1912), В. П. Єрмаков (1845—1922), Б. Я. Букреев (1859—1962), С. Н. Бернштейн (1890—1968), Ю. Д. Соколов (1896—1971), О. С. Смогоржевський (1896—1969), Й. З. Штокало (1897—1987), М. П. Кравчук (1892—1942), Н. І. Ахієзер (1901—1980), М. М. Боголюбов (1909—1992), В. А. Зморевич (1909—1994), Г. М. Положій (1914—1968), П. Ф. Фільчаков (1916—1978), М. Г. Крейн, В. К. Дзядик, М. О. Давидов, Н. О. Пахарєва, Н. О. Вірченко, І. І. Ляшко, В. С. Чемерис, В. І. Лаврик, Л. С. Дундученко, Н. І. Нагнибіда та ін.

**Постановка задачі.** В оберненій залежності перебувають, наприклад, рівень зайнятості працездатного населення та рівень мінімальної зарплати. Прикладом являється функція Енгеля, що описує загальні витрати на споживання в залежності від доходу населення.

Відомо, що попит — це кількість продукту, яку готові купувати покупці за певною ціною упродовж певного проміжку часу. Між величиною попиту і ціною існує обернена залежність.

Закон грошового обігу, що визначає необхідність маси купівельних і платіжних засобів для обігу протягом даного періоду, задається рівнянням:

$$M = \frac{\sum PQ - \sum K + \sum \Pi - \sum ВП}{V}, \quad (1)$$

де  $M$  — об'єктивно необхідна маса грошей;  $\sum PQ$  — сума цін товарів, що реалізуються за певний період;  $\sum K$  — сума продажів товарів і послуг у кредит;  $\sum \Pi$  — загальна сума платежів, строк оплати яких настав;  $\sum ВП$  — сума платежів, що погашаються шляхом взаємного зарахування боргів;  $V$  — швидкість обігу грошової одиниці за рік.

При прискоренні швидкості обігу грошей в економіці, їх стає менше, тобто спостерігається обернена залежність.

А. Оукен сформулював закон, відповідно до якого між рівнем безробіття і реальним обсягом валового внутрішнього продукту існує обернена залежність: зниження безробіття на один 1 % щодо його природного рівня дає додатковий приріст реального ВВП приблизно на 2—2,5 % і навпаки. Число 2 або 2,5 носить назву коефіцієнта Оукена. Закон Оукена показує взаємозв'язок використання трудового потенціалу країни і віддачі залучених ресурсів (ефективності виробництва).

Обернену залежність представляють собою криві байдужості — це лінії рівної корисності, всі точки яких показують множину наборів комбінацій двох благ, що забезпечують один і той же рівень корисності.

Так як і криві байдужості, ізокванти (лінії рівного випуску) відображають альтернативні варіанти споживчого вибору благ, які забезпечують певний рівень корисності та альтернативні варіанти комбінацій витрат факторів для виробництва певного обсягу продукції

Крива Філіпса — графік оберненої залежності між середнім рівнем інфляції в країні і рівнем безробіття. О. У. Філіпс показав зв'язок між рівнем безробіття і темпами росту середньої заробітної плати. Безробіття високе, коли заробітна платня зростає повільніше, і безробіття падає, коли заробітна платня зростає швидше. Високий рівень інфляції зазвичай супроводжується низьким рівнем безробіття і навпаки. У короткостроковому періоді економічна політика, спрямована на швидке зниження рівня безробіття, призводитиме до прискорення інфляції.

Крива освоєння, крива досвіду, крива навчання — співвідношення між зростанням досвіду робітників та зменшенням вартості праці (рис.) була описана в 1936 р.

Т. П. Райтом. Зараз експерти погоджуються, що ефект досвіду — це результат дії багатьох факторів, не тільки набуття робітниками певних навичок. Це може бути результатом дії і таких факторів, як підбір інструментів і обладнання, дизайну виробу, аналізу виробничих методів та інших зусиль, затрачених ще до запуску виробничого процесу. Важливим фактором є також діяльність керівництва підприємства — поліпшення планування виробничого процесу, удосконалення робочих графіків, підвищення контролю за виробничими процесами тощо. Проте ступінь освоєння виробу залежить насамперед від кількості виготовлених виробів з початку виробництва. Існує певна кореляційна залежність між порядковим номером виробу та його трудомісткістю. Аналогічна залежність існує між номерами виробів і собівартістю. Ця залежність визначається формулами:

$$T_{p_i} = T_{p_1} N_i^{-b}; C_i = C_1 N_i^{-b}, \quad (2)$$

де  $T_{p_i}$ ,  $C_i$  — собівартість і трудомісткість  $i$ -го виробу з моменту початку випуску виробів;  $T_{p_1}$ ,  $C_1$  — собівартість і трудомісткість  $i$ -го виробу (трудомісткість у момент початку освоєння);  $N_i$  — номер виробу з початку випуску;  $b$  — показник ступеня.

Показник ступеня характеризує крутизну кривої освоєння. Величина  $b$  досить вузько обмежена (0,25—0,45) (рис. 1).

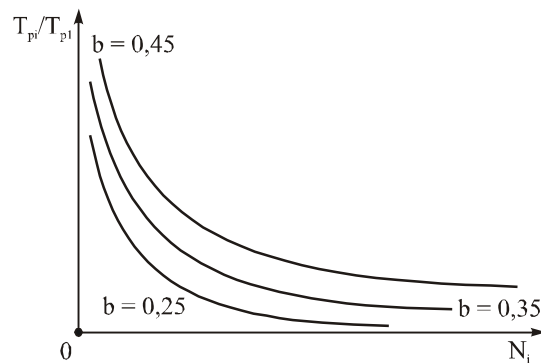


Рис. 1. Залежність трудомісткості від обсягу випуску при різних характеристиках кривих освоєння

Знаючи перспективи зміни обсягу виробництва продукції під час освоєння випуску, працівникам планового відділу буде легше прийняти правильне рішення про необхідну кількість робітників. Криві освоєння дають змогу кількісно розрахувати прогнозовані майбутні поліпшення у виробничому процесі.

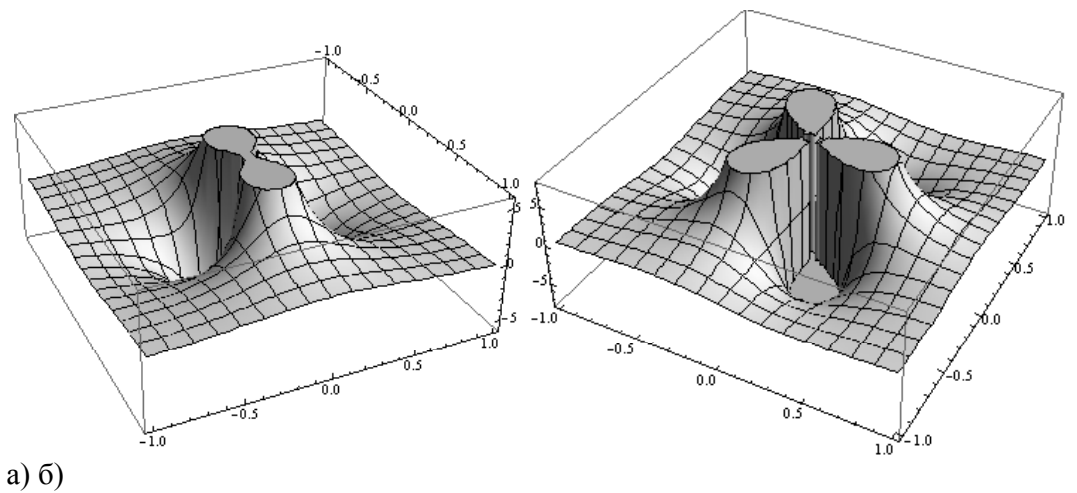
Особливий інтерес представляє закон Парето. Число  $y$  осіб, котрі мають прибуток не менш як  $x$ , можна визначити за формулою:  $y = \frac{a}{x^n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Лінії, які за-

дані рівняннями  $y = \frac{a}{x^n}$ ,  $a \neq 0$ ,  $n > 0$ , називаються лініями гіперболічного типу.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо функцію комплексної змінної вигляду закону Парето:

$$z = \frac{1}{(x + iy)^n}. \quad (3)$$

На рис. 2 представлено поверхні дійсної частини функції при різних значеннях  $n$ .

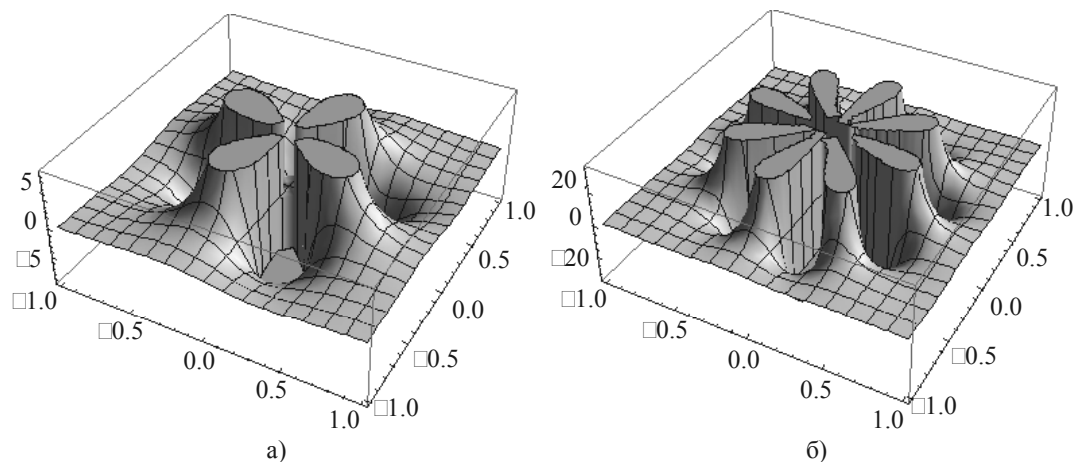


а) б)

Рис. 2. Поверхня функції  $z = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(x+iy)^n} \right\}$ ,  $x \in [-1;1]$ ,  $y \in [-1;1]$  при значеннях  $n$ :

а)  $n = 2$ ; б)  $n = 3$ .

На рис. 3 представлено поверхні уявної частини функції при різних значеннях  $n$ .



а) б)

Рис. 3. Поверхня функції  $z = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{(x+iy)^n} \right\}$ ,  $x \in [-1;1]$ ,  $y \in [-1;1]$  при значеннях  $n$ :

а)  $n = 4$ ; б)  $n = 8$ .

Закон Парето достатньо точно описує розподіл великих прибутків, але не справджується для низьких. У 1897 р. італійський економіст Вільфредо Парето вивів формулу, яка описує розподіл багатств у світі. 80/20: 80 % багатств у світі розподілені між 20 % населення. Далі стали помічати що ця формула діє в багатьох областях, наприклад, 80 % населення планети живе на 20 % землі. Ця формула — закон Парето — який говорить приблизно про наступне: 80 % результату виходить з 20 % використовуваних дій. Стосовно, скажімо, до мережевого бізнесу, це означає, що всього лише 20 % вибраних вами завдань або дій, на які ви витрачаєте свій час, створять 80 % потрібних вам результатів.

Аналітично знайдемо множину ліній комплексної площини  $Z$ , заданих рівнянням:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(K+iL)} \right\} = c, \quad c = \text{const} \in R \quad (4)$$

Дістанемо:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(K+iL)} = \frac{K-iL}{K^2+L^2}, \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{K}{K^2+L^2} = c, \quad (5)$$

$$c(K^2+L^2) = K \Rightarrow (K+c)^2 + L^2 = c^2$$

Множина ліній (5) є кола з центрами на осі  $\operatorname{Re} z$ , які дотикаються до осі  $Oy$  у точці  $z = 0$ . Ці кола являються лініями рівня поверхні:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(K+iL)} \right\}, K \in [-1,1], L \in [-1,1], \quad (7)$$

зображеної на рис. 4 з різних ракурсів споглядання.

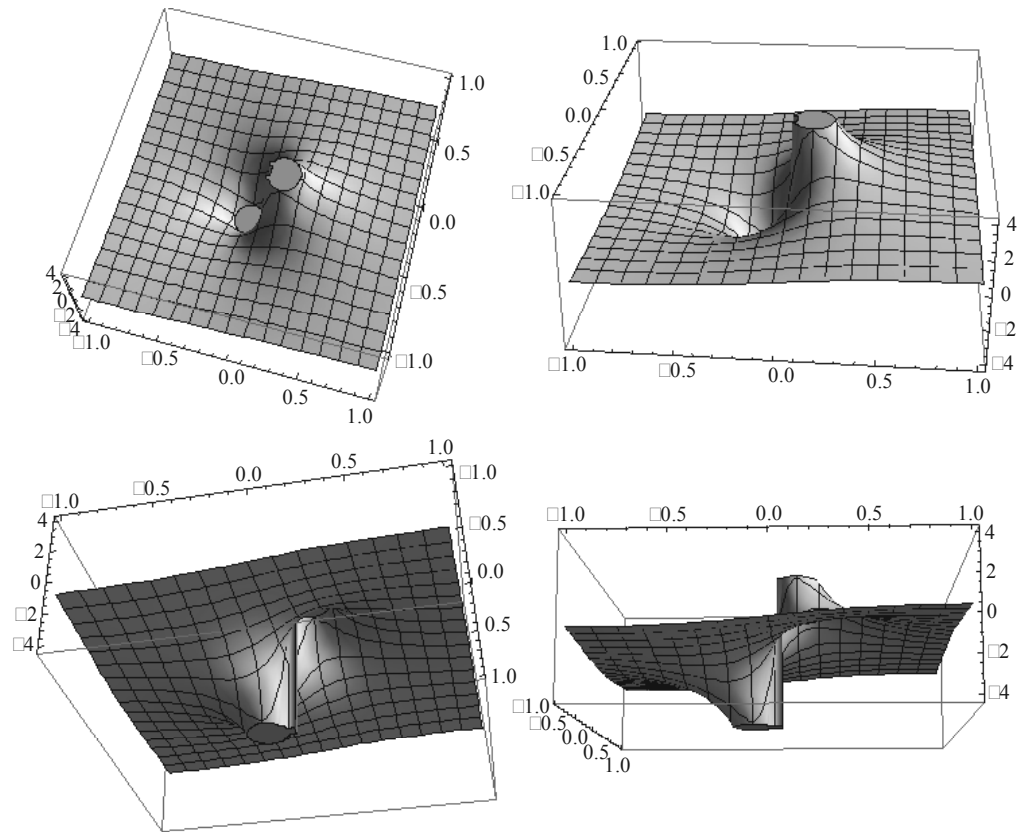


Рис. 4. Зображення поверхні, заданою формулою (7) з різних точок споглядання

На рис. 5 приведено зображення поверхні аргументу функції:

$$\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \operatorname{Arg} \frac{1}{(K+iL)}, K \in [-1,1], L \in [-1,1]. \quad (8)$$

Інтерпретація функцій комплексних змінних зовсім не обмежується приведеними вище прикладами, адже існують і інші види функцій комплексних змінних: показникова, логарифмічна, тригонометрична та ін.

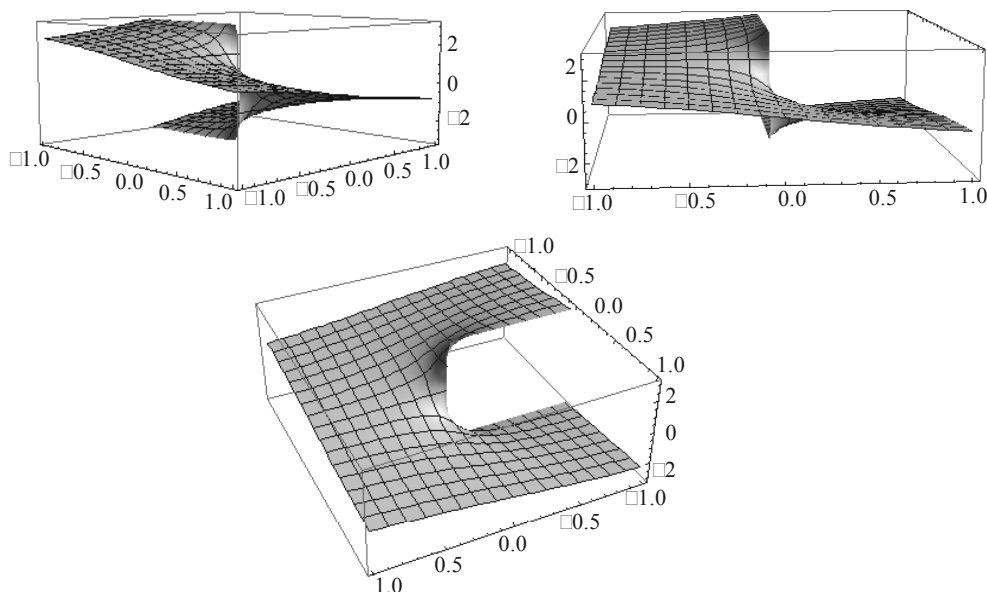


Рис. 5. Зображення поверхні, заданою формулою (8) з різних точок споглядання

**Висновки.** В економіці криві обернених функції застосовуються при вивченні взаємозв'язку між рівнем інфляції і рівнем безробіття (крива Філіпса), при аналізі уподобань споживача (крива байдужості), при вивченні факторів виробництва, які можуть бути використані для певного обсягу продукції (ізокванта), для вивчення закону розподілу прибутків (закон Парето), ринків збуту, для розв'язку задачі про розподіл зон економічного впливу.

Можна зробити висновки, що представлення основних економічних функцій у вигляді функцій комплексного змінного можливе і необхідне, що розкриває нові можливості економіко-математичного моделювання економічних процесів та систем.

При побудові поверхонь використовувався пакет програм Математика 8 представляє ряд нових функцій: масштабування, 2D і 3D графіки та гістограми, нові можливості для застосування текстур на поверхні і регіонів, поліпшення дискретних ділянок. Ілюстрація ідеї або коментування графіків з використанням вдосконалених інструментів для малювання проводиться за допомогою CUDA (англ. *Compute Unified Device Architecture*) — технології GPGPU (англ. *General-purpose computing on Graphics Processing Units*), що дозволяє програмістам реалізовувати мовою програмування C алгоритми, що виконуватимуться на графічних процесорах Geforce восьмого покоління і старше (Geforce 8 Series, Geforce 9 Series, Geforce 200 Series), Nvidia Quadro і Tesla компанії Nvidia. Технологія CUDA — це середовище розробки на C, яка дозволяє програмістам і розробникам писати програмне забезпечення для вирішення складних обчислювальних завдань за менший час завдяки багатоядерній обчислювальній потужності графічних процесорів. Простіше кажучи, графічна підсистема комп'ютера з підтримкою CUDA може бути використана, як обчислювальна.

### Література

1. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биограф.слов.справ.: 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Рад.школа, 1987. — 656 с.
2. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел. — М.: Просвещение, 1975. — 158 с.

3. А. Нивен. Числа рациональные и иррациональные. — М.: Мир, 1966. — 196 с.
4. Блудова Т. В., Мартиненко В. С. Теорія функцій комплексного змінного. — К. Прогрес, 2000. — 472 с.
5. <http://www.wolfram.com/mathematica/>
6. <http://www.wolframalpha.com/>
7. Светульников И. С. Обратные производственные функции комплексного переменного / Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Вып. № 15 / Под ред. Д. В. Соколова и В. П. Чернова. — СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. — С. 88—93.
8. Светульников С. Г., Светульников И. С. Производственные функции комплексных переменных: Экономико-математическое моделирование производственной динамики. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 136 с.

УДК 330:51(0758)+519.86

**Ю. В. Коляда,**  
докторант кафедри економіко-математичного моделювання  
ДВНЗ «Київський національний економічний  
університет імені Вадима Гетьмана»

## МОДЕЛЮВАННЯ АДАПТИВНИХ МЕХАНІЗМІВ І ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ

Розкривається сутність адаптивної нелінійної економіки, сформульовано поняття адаптивного економічного механізму. Означено ключові концепти адаптивного економіко-математичного моделювання динаміки, а саме: адаптивна економіко-математична модель; адаптивні методологія і методика. Наголошується, що на всіх етапах моделювання має здійснюватися гнучке (апостеріорного характеру) використання наявних інструментів і засобів, відмовляючись від жорстких структур (конфігурацій).

Раскрывается сущность адаптивной нелинейной экономики, сформулировано понятие адаптивного экономического механизма. Означены ключевые концепты адаптивного экономико-математического моделирования динамики, а именно: адаптивная экономико-математическая модель; адаптивные методология и методика. Отмечается, что на всех этапах моделирования должно осуществляться гибкое (апостериорного характера) использование имеющихся инструментов и средств, отказываясь от жестких структур (конфигураций).

Essence of adaptive nonlinear economy opens up the concept of adaptive economic mechanism is formulated. Marked key concepts mathematical design of adaptive economic dynamics, namely: adaptive economic mathematical model; methodology and the method is adaptive. It is marked that on all stages of the design must be carried out by the flexible (a posteriori character), the use of the present instrument and facilities, renouncing the hard structures (configurations).

**Ключові слова:** адаптивні; економіка; економічний механізм; математичне моделювання; методологія і методика.

**Keywords:** Adaptive; the economy; economic mechanism; mathematical design; methodology and method.

**Ключевые слова:** Адаптивные; экономика; экономический механизм; математическое моделирование; методология и методика.

**Вступ.** Нинішньому етапу розвитку теоретичної економіки характерне запозичення підходів і постулатів природничих наук, відмовляючись від попередніх своїх базових понять та ідей лінійного економічного мислення. Крім парадигми системності і нелінійності сучасна економічна думка долучає тезу адаптивності. Пізнання адаптивних економічних механізмів, по-перше, проливає світло на сутність того,