УДК 517.9: 330.42

***О. І. Неня**, канд. ф.-м. наук,*
*ст. викладач, кафедра вищої математики,*
*ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»*

# ДОСЛІДЖЕННЯ ГЛОБАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ МОДЕЛІ АДАПТАЦІЇ РИНКОВОЇ ЦІНИ

Розглянуто нелінійна модель адаптації ринкової ціни, яка описуються різницевим рівняннямРіккера з запізненням. Досліджено проблему побудови області глобальної стійкості рівняння Ріккера.

В публикации рассматривается нелинейная модель адаптации рыночной цены, которае описывается разностным уравнением Риккера с запаздыванием. Исследуется проблема построения областы глобальной устойчивости уравнения Риккера.

In article considered non-linear model of the market price, which is described by the Ricker difference equation with delay. We study the problem of constructing the global stability of the equation Ricker.

***Ключові слова***: динамічна система, різницеве рівняння з запізненням, глобальна стійкість, асимптотична поведінка.

***Ключевые слова***: динамическая система, разностное уравнение с запаздыванием, глобальная устойчивость, асимптотическое поведение.

***Keywords***: dynamical system, delay difference equation, global stability, asymptotic behavior.

***Постановка задачі***. Розглянемо ринок товару, який описується функціями попиту $Q^D = f(P)$ і пропозиції $Q^S = g(P)$. Нехай для цих функцій існує єдина точка ринкової рівноваги, тобто рівняння

$$f(P) = g(P) \tag{1}$$

має єдиний розв'язок $P^*$.

Нехай у результаті певних дій ринок вийшов зі стану рівноваги, тобто ціна відхилилась від рівноважної ціни $P^*$. Якщо з часом ринок повертається в стан рівноваги в точку $E(Q^*, P^*)$, $Q^* = f(P^*) = g(P^*)$, або з часом ціна $P$ наближається до значення $P^*$, то рівновага ринку називається стійкою, інакше нестійкою. Властивість стійкості можна сформулювати наступним чином: *стан ринкової рівноваги стійкий, якщо при відхиленні в початковий момент часу $t = t_0$ ціни $P_0$ від рівноважної $P^*$, значення ціни $P_t$ збігаються до $P^*$ при $t \to \infty$.*

Зрозуміло, що питання про стійкість або нестійкість рівноваги можна досліджувати лише за допомогою динамічних моделей ринку.

Проблема стійкості або стабільності ринкової рівноваги має важливе економічне значення. Якщо ринкова рівновага стійка лише під дією своїх внутрішніх чинників, тобто за рахунок саморегуляції, то це означає, що додаткове зовнішнє регулювання ринка не є доцільним. Якщо ж рівновага нестійка, то регулювання ринку стає вкрай необхідним. С формальної точки зору утримування ринку в умовах рівноваги означає асимптотичну стійкість точки рівноваги динамічної моделі ринку.

Розглянемо динамічну модель ринку деякого товару. Нехай обсяг попиту $Q_t^D$ в довільний момент часу залежить від рівня ціни $P_t$, тобто

$$Q_t^D = f(P_t). \tag{2}$$

Пропозиція $Q_t^S$ реагує на зміну ціни з деяким запізненням $k$ і залежить від рівня ціни в період $P_{t-k}$, тобто

$$Q_t^S = g(P_{t-k}). \tag{3}$$

Запізнення можна інтерпритувати як необхідність для виробника визначати в момент часу $t-k$ обсяг пропозиції наступного періоду, вважаючи, що ціна періоду $t-k$ збережеться і в момент часу $t$.

Нехай поточний попит дорівнює поточній пропозиції $Q_t^D = Q_t^S$, тобто

$$f(P_t) = g(P_{t-k}). \tag{4}$$

Як один із варіантів побудови моделі можна взяти лінійні функції попиту та пропозиції $f(P) = a' - b'P$, $g(P) = c + dP$, $b' > 0, d > 0,$ та отримати наступне лінійне різницеве рівняння з запізненням

$$P_t = \frac{a'-c}{b'} - \frac{d}{b'} P_{t-k}. \tag{5}$$

Але якщо, навідміну від рівняння (4), динаміку ціни описати наступним рівнянням

$$P_{t+1} = P_t\left(q + \exp\left[\alpha\left(Q_{t-k}^D - Q_t^S\right)\right]\right), \tag{6}$$

де $\alpha > 0$ — параметр адаптації, $q \in [0;1)$ — параметр, що характеризує постійну зміну ціни незалежно від попиту та пропозиції, а функції потиту та пропозиції залишити лінійними

$$Q_t^D = a' - b'P_t = Q^* - b'\left(P_t - P^*\right),$$
$$Q_t^S = c + dP_{t-k} = Q^* + d\left(P_{t-k} - P^*\right),$$

де

$$P^* = \frac{a'-c}{b'+d}, \quad Q^* = a' - b'P^* = c + dP^*,$$

тоді рівняння (6) набуде вигляду

$$P_{t+1} = P_t\left(q + \exp\left[-\alpha\left(b'+d\right)\left(P_{t-k} - P^*\right)\right]\right). \tag{7}$$

При $\gamma = \exp\left[\alpha\left(b'+d\right)P^*\right]$, $x_t = \alpha\left(b'+d\right)P_t$ рівняння (7) матиме вигляд

$$x_{t+1} = x_t\left(q + \gamma \exp\left(-x_{t-k}\right)\right). \tag{8}$$

Рівняння (8) називається рівнянням Ріккера і виникає в математичній біології для опису циклічних коливань чисельності популяції.

Задача даної публікації полягає в дослідженні умов глобальної стійкості нерухомої точки моделі адаптації ринкової ціни, яка описується рівнянням Ріккера (8).

***Допоміжні результати***. *Розглянемо нелінійне різницеве рівняння з запізненням*

$$x_{n+1} = x_n + f_n\left(x_n, \ldots, x_{n-k}\right), \tag{9}$$

де $n \in \mathrm{Z}$, $x_n \in R$. Нелінійні функції $f_n : R^{k+1} \to R$ задовольняють умови (H):

1) Припустимо, що функції $f_n$ задовольняють наступну умову:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z_j, \ldots, z_{j-k}) = \infty$$

для кожної послідовності $\{z_j\}$, яка має ненульову границю на нескінченності.

2) Існують числа $a < 0$, $b < 0$ такі, що $a\mathsf{M}(\phi) \le f(n, \phi) \le -b\mathsf{M}(-\phi)$ для всіх $\phi \in R^{k+1}$, де функціонал $\mathsf{M}: R^{k+1} \to R_+$, $\mathsf{M}(z) = \max_i\{0, z_i\}$, $z = \left(z_0, \ldots, z_k\right)$.

Відмітимо, що різницеве рівняння з запізненням Рікера (див.[4]) можна звести до рівняння виду (9).

**Означення 1.** Розв'язком рівняння (9) з початковою умовою

$$x_i = \varphi_i,\ i = -k,...,0, \tag{10}$$

є послідовність $\{x_n\}$, яка означена для всіх $n \ge -k$, задовольняє початкову умову (10) і рівняння (9) при $n = 0,1,...$.

Очевидно, що розв'язок $\{x_n\}$ існує для всіх $n \ge 0$ і може бути побудований послідовно.

**Означення 2.** Розв'язок $\{x_n\} = x^*$ різницевого рівняння

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), n = 0,1,... \tag{11}$$

називається нерухомим розв'язком (нерухомою точкою), якщо він задовольняє рівняння $G(x^*) = x^*$, де $G(x) = g(x,x,...,x), (x,x,...,x) \in R^{k+1}$.

**Означення 3.** (див. [8]) Нерухомий розв'язок $\{x_n\} = x^*$ різницевого рівняння (11) називається стійким, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ і $n_0 > 0$ існує $\delta(\varepsilon, n_0) > 0$ таке, що якщо $\left\| x_{n_0} - x^* \right\| < \delta$, тоді $| x_n - x^* | < \varepsilon$ для всіх $n \ge n_0$.

**Означення 4.** (див.[8]) Нерухомий розв'язок $x^*$ рівняння (9) є глобальним атрактором, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ для кожної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє рівняння (9).

**Означення 5.** (див. [8]) Нерухомий розв'язок $x^*$ рівняння (9) називається локально асимтотично стійким, якщо він стійкий і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ для кожної послідовності $\{x_n\}$, що має початкові умови достатньо близькі до $x^*$.

**Означення 6.** Нерухомий розв'язок $x^*$ рівняння (9) називається глобально стійким, якщо він стійкий і є глобальним атрактором.

**Основні результати.**

**Теорема 1.** Нехай функції $f_n$ задовольняють умови (H). Тоді кожний розв'язок $\{x_n\}$ рівняння (9) прямує до 0 і задовольняє нерівність

$$\max_{j=n-k,n} | x_j | \le \Gamma \lambda^{n-s} \max_{j=s-k,s} | x_j |, \quad n \ge s,\ \ \lambda \in (0,1),\ \Gamma > 0, \tag{12}$$

якщо

$$\min_{s=0,...,k} \Omega_a(s,k,a,b) > -1 \text{ та } \min_{s=0,...,k} \Omega_b(s,k,a,b) > -1, \tag{13}$$

де

$$\Omega_a(s,k,a,b) = 1 + a(2s+1) + a^2 \frac{s(s+1)}{2} - a(k-s)\left(1 + b(k+s+1) + b^2 \frac{s(s+1)}{2}\right)$$
$$\Omega_b(s,k,a,b) = 1 + b(2s+1) + b^2 \frac{s(s+1)}{2} - b(k-s)\left(1 + a(k+s+1) + a^2 \frac{s(s+1)}{2}\right).$$

*Доведення.*

Розглянемо рівняння (9) з параметрами $a,b,k$, які задовольняють (13). Для цих параметрів існує таке $\gamma \in (0,1)$, що $\gamma > \max\{ab(k+1)^2, -\delta\}$, де $\delta = \min\limits_{a,b}\left( \min\limits_{s=0,...,k} \Omega_a(s,k,a,b), \min\limits_{s=0,...,k} \Omega_b(s,k,a,b) \right)$.

Спочатку доведемо, що для кожного розв'язку $\{x_n\}$ рівняння (9) виконується нерівність

$$| x_n | \le \gamma \max_{s\in\{\tau-k,...,\tau+3k\}} | x_s |\ , \qquad n > \tau + 3k. \tag{14}$$

Припустимо, що нерівність (14) не виконується. Тоді існує розв'язок $\{x_n\}$ такий, що для деякого $\tau_* > \tau + 3k$ маємо

$$\left|x_{\tau_*}\right| > \gamma \cdot M = \gamma \max_{s\in\{\tau-k,\dots,\tau+3k\}} \left|x_s\right|. \qquad (15)$$

Нехай $\tau_*$ — це перша зліва точка з цією властивістю, і для визначеності припустимо $x_{\tau_*} < -\gamma M < 0$. Доведемо, що існує такий інтервал $\Delta = \{\alpha,\dots,\beta\}$, що $\tau_* \in \Delta, \tau_* - \alpha \le k+1, x_\alpha \ge 0, x_\beta \ge 0$, і $x_n < 0$ для $n \in \{\alpha+1,\dots,\beta-1\}$. Нехай навпаки, $x_n < 0$ для всіх $n \in \{\tau_* - k - 1,\dots,\tau_* - 1\}$. Тоді за умовою (H)

$$x_{\tau_*} = x_{\tau_*-1} + f_{\tau_*-1}(\phi_{\tau_*-1}) > x_{\tau_*-1},$$

що суперечить припущенню. Найменше $n > \tau_*$ таке, що $x_n \ge 0$ приймаємо за $\beta$. Якщо такого $n$ немає, то $x_n < 0$ для всіх $n > \alpha$. Тоді $f_n(\phi_n) \ge 0$ і $x_{n+1} = x_n + f_n(\phi_n) \ge x_n$. Тому існує таке число $A \le 0$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$ Якщо $A < 0$, то згідно умови (H) для всіх $n > n_1$ виконується

$$x_n = x_{n_1} + \sum_{s=n_1}^{n-1} f_s(\phi_s) \to +\infty.$$

Маємо притиріччя щодо вибору числа $A.$ Отже $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\beta = +\infty.$

Нехай $ab(k+1)^2 \le 1$.

За нашим припущенням $-\gamma M > \min\limits_{n\in\Delta} x_n = x_\xi$, де $\xi$ – найменше ціле число, яке має цю властивість. Візьмемо $\alpha' \in \{\xi - k - 1,\dots,\xi - 1\}$, для якого $0 \le x_{\alpha'} = \mathrm{M}(\phi_{\xi-1})$ та $\alpha'' \in \{\xi - 3k - 2,\dots,\xi - 2k - 2\}$ для якого $x_{\alpha''} \le 0$. Тоді

$$-\gamma M > x_\xi = x_{\alpha'} + \sum_{s=\alpha'}^{\xi-1} f_s(\phi_s) \ge x_{\alpha'} + a\sum_{s=\alpha'}^{\xi-1} \mathrm{M}(\phi_s) \ge \ge x_{\alpha'} + a(\xi - \alpha')x_{\alpha'-k} \ge a(k+1)x_{\alpha'-k}$$

та

$$x_{\alpha'-k} = x_{\alpha''} + \sum_{s=\alpha''}^{\alpha''-k-1} f_s(\phi_s) \le x_{\alpha''} - (\alpha' - \alpha'' - k)bM \le -(k+1)bM$$

тому $-\gamma M > x_\xi \ge -ab(k+1)^2 M$, що суперечить вибору числа $\gamma.$

Нехай $ab(k+1)^2 \ge 1$.

З нерівності

$$x_{\alpha'} = x_{\alpha'-1} + f_{\alpha'-1}(x_{\alpha'-1},\dots,x_{\alpha'-k-1}) \ge x_{\alpha'-1} + aM$$

отримуємо оцінку $x_{\alpha'-1} \le x_{\alpha'} - aM = z_{\alpha'-1}$. Аналогічно

$$x_{\alpha'-l} \le x_{\alpha'} - alM = z_{\alpha'-l}. \qquad (16)$$

При $l = 0$ покладемо $z_{\alpha'} = x_{\alpha'}$. Позначимо через $s \in \{0,\dots,k\}$ таке ціле число, що $z_{\alpha'-s} \le M$ і $z_{\alpha'-s-1} > M$ (виконання другої нерівності вимагається тільки при $s < k$). Тоді при $s \ge 1$

$$M(1 + a(s+1)) \le x_{\alpha'} \le M(1 + as). \qquad (17)$$

Враховуючи (16), оцінимо $x_\xi$ :

$$0 > -\gamma M > x_\xi = x_{\alpha'} + \sum_{j=\alpha'}^{\xi-1} f_j(\phi_j) \ge x_{\alpha'} + a\sum_{j=\alpha'}^{\xi-1} \mathrm{M}(\phi_j) \ge$$
$$\ge x_{\alpha'} + a\sum_{l=s+1}^{k} x_{\alpha'-l} + \sum_{l=0}^{s} a(x_{\alpha'} - alM) =$$
$$= x_{\alpha'}(1 + a(s+1)) - a^2 M \sum_{l=0}^{s} l + a(k-s)x_{\alpha'-k} .$$

Проробимо аналогічні дії, щоб отримати нерівності типу (16) і (17).

З нерівності $x_{\alpha''} = x_{\alpha''-1} + f_{\alpha''-1}(x_{\alpha''-1},...,x_{\alpha''-k-1}) \le x_{\alpha''-1} - bM$ отримуємо оцінку $x_{\alpha''-1} \ge x_{\alpha''} + bM = z_{\alpha''-1}$. Аналогічно $x_{\alpha''-l} \ge x_{\alpha''} + blM = z_{\alpha''-l}$. При $l = 0$ покладемо $z_{\alpha''} = x_{\alpha''}$. Позначимо через $s \in \{0,\ldots,k\}$ таке ціле число, що $z_{\alpha''-s} \ge -M$ і $z_{\alpha''-s-1} < -M$ . Тоді при $s \ge 1$ маємо нерівність

$$-M(1 + bs) \le x_{\alpha''} \le -M(1 + b(s+1)) . \tag{18}$$

Оцінимо $x_{\alpha'-k}$ :

$$x_{\alpha'-k} = x_{\alpha''} + \sum_{j=\alpha''}^{\alpha'-k-1} f_j(\phi_j) \le x_{\alpha''} + b\sum_{j=\alpha''}^{\alpha'-k-1} \mathrm{M}(\phi_j) \le$$
$$\le x_{\alpha''} + b\sum_{l=s+1}^{k} x_{\alpha''-l} + \sum_{l=0}^{s} b(x_{\alpha''} + blM) =$$
$$= x_{\alpha''}(1 + b(s+1)) + b^2 M \sum_{l=0}^{s} l - b(k-s)M =$$
$$= x_{\alpha''}(1 + b(s+1)) + b^2 M \frac{s(s+1)}{2} - b(k-s)M .$$

Тоді

$$0 > -\gamma M > x_\xi \ge x_{\alpha'}(1 + a(s+1)) - a^2 M \sum_{l=0}^{s} l + a(k-s)x_{\alpha'-k} \ge$$
$$\ge x_{\alpha'}(1 + a(s+1)) - a^2 M \frac{s(s+1)}{2} + a(k-s)\times$$
$$\times\left( x_{\alpha''}(1 + b(s+1)) + b^2 M \frac{s(s+1)}{2} - b(k-s)M \right) = S(s,M).$$

Умова $ab(k+1)^2 \ge 1$ завжди виконується при $1 + a(s+1) < 0$ та $1 + b(s+1) < 0$ тому враховуючи оцінки (17), (18) маємо

$$S(s,M) \ge M\left(1 + a(2s+1) + a^2 \frac{s(s+1)}{2} - a(k-s)\left(1 + b(k+s+1) + b^2 \frac{s(s+1)}{2}\right)\right) =$$
$$= M\Omega_a(s,k,a,b) .$$

Звідки $0 > -\gamma M > x_\xi \ge S(s,M) \ge M\Omega_a(s,k,a,b)$, що суперечить вибору числа $\gamma$, а отже і припущенню про невиконання нерівності (14).

Аналогічно, якщо припустити, що $\gamma M < \max_{n\in\Delta} x_n = x_\xi$, отримаємо оцінку

$$0 < \gamma M < \max_{n\in\Delta} x_n = x_\xi \le M\Omega_b(s,k,a,b) =$$
$$= M\left(1 + b(2s+1) + b^2 \frac{s(s+1)}{2} - b(k-s)\left(1 + a(k+s+1) + a^2 \frac{s(s+1)}{2}\right)\right),$$

що також суперечить вибору числа $\gamma$ і припущенню про невиконання нерівності (14).

Справедливість оцінки (12) показано в публікації [7].
Теорему доведено.
Розглянемо рівняння Ріккера (8)

$$x_{n+1} = x_n\left(q + \gamma \exp\left(-x_{n-k}\right)\right),\ n \in Z\ ,$$

де $q \in [0;1)$, $\gamma > 1$. Точка $x^* = \ln\left(\dfrac{\gamma}{1-q}\right) > 0$ є єдиною нерухомою точкою рівняння (8). За допомогою теореми 1 отримаємо умову глобальної симптиточної стійкості даного рівняння. Для цього підстановкою $y_n = -\ln\left(\dfrac{x_n}{x^*}\right)$ перетворимо рівняння (8) в рівняння виду (9):

$$y_{n+1} = y_n + f\left(y_{n-k}\right), \tag{19}$$

де $f(y) = -\ln\left(q + \gamma \exp\left(-x^* \exp\left(-y\right)\right)\right)$.

**Теорема 2.** Якщо функція $f$ задовольняє умови (Н), то кожний розв’язок рівняння (19) прямує до 0

1) при $\gamma > (1-q)\exp(1/q)$ якщо виконується нерівність (13) з параметрами $b = f'(0) = -(1-q)\ln\dfrac{\gamma}{1-q}$, $a = -W\left(\dfrac{\gamma}{qe}\right)$,

2) при $1 < \gamma < (1-q)\exp(1/q)$ якщо виконується нерівність (13) з параметрами

$$a = f'(0) = -(1-q)\ln\frac{\gamma}{1-q}\ ,\ b = -W\left(\frac{\gamma}{qe}\right),$$

де $W(x)$ — функція Ламберта, яка визначається як обернена до функції $y(w) = w\exp(w)$.

*Доведення.*

Нехай $\gamma > (1-q)\exp(1/q)$. Знайдемо таке число $a < 0$ при якому функція $f(y)$ задовольняє умови (Н) при $y > 0$. Введемо в розгляд фунцію $g(y) = ay - f(y)$ та знайдемо таке значення $a$ при якому рівняння $g(y) = 0$ має єдиний розв’язок в точці $y = 0$. Це має місце коли функція $g(y)$ не має точок екстремуму, а саме є спадною, тобто $g'(y) < 0$, що є справедливим при виконанні нерівності $-1 - \dfrac{t}{a} < \dfrac{q}{\gamma}\exp\left(t\right)$, де $t = x^* \exp\left(-y\right)$.

Позначимо $h(t) = \dfrac{q}{\gamma}\exp\left(t\right) + \dfrac{t}{a} + 1$ — відстань від функції експоненти $y = \dfrac{q}{\gamma}\exp(t)$ до прямої $y = -1 - \dfrac{t}{a}$, тоді дана відстань є мінімальною в точці $t = \ln\left(-\dfrac{\gamma}{qa}\right)$ і невід’ємною при виконанні нерівності $\dfrac{\exp\left(a\right)}{a} \geq -\dfrac{qe}{\gamma}$, звідки можна отримати граничне значення числа $a$ при якому виконуються умови (Н), яке можна представити таким чином $a = -W\left(\dfrac{\gamma}{qe}\right)$.

Доведемо, що при $b = f'(0) = -(1-q)\ln\dfrac{\gamma}{1-q}$ виконується друга частина умови (Н). Очевидно, що функція $g(y) = -(1-q)\ln\dfrac{\gamma}{1-q}y$ є дотичною до функції $f(y)$ в точці $y = 0$, для виконання умови (Н) достатньо показати, що функції $g(y)$ та $f(y)$ не мають точок перетину при $y < 0$. А це в свою чергу виконується коли функція $f(y)$ має єдину точку перегину $y_0 > 0$, що завжди виконується при $\gamma > (1-q)\exp(1/q)$.

Варіант коли $1 < \gamma < (1-q)\exp(1/q)$ доводиться аналогічно. Далі застосувавши теорему 1 отримаємо умову глобальної асимптотичної стійкості рівняння Ріккера (9).

Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Умови теореми 2 справедливі до рівняння моделі адаптації ринкової ціни (8) при $\gamma = \exp[\alpha(a'-c)]$.

Нарешті побудуємо область стійкості моделі адаптації ринкової ціни рівняння Ріккера (8) при $k = 3$. Нерівність (13) виконується при $s = 1$.

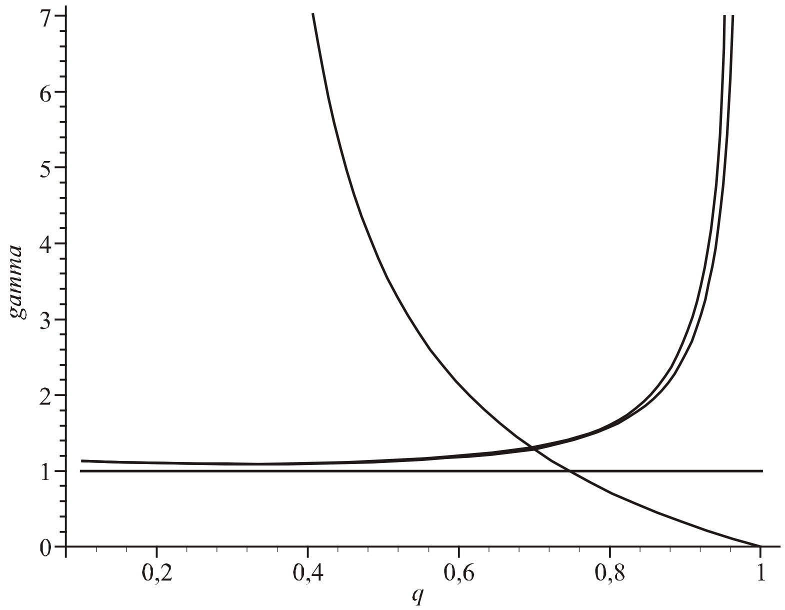


Рис. 1: Область глобальної стійкості рівняння Ріккера в координатах $(q;\gamma)$

На рис. 1 зображено пряму $\gamma = 1$, над якою лежить область стійкості, лінію $\gamma = (1-q)\exp(1/q)$, яка поділяє криві лінії $\Omega_a(s,k,a,b) = -1$, $\Omega_b(s,k,a,b) = -1$, що обмежують область глобальної стійкості.

**Зауваження 2.** Використовуючи позначення $\gamma = \exp[\alpha(b'+d)P^*]$ рівняння моделі ділового циклу (7) для нерухомої точки $\overline{P} = P^* - \dfrac{\ln(1-q)}{\alpha(b'+d)}$, де $P^* = \dfrac{a'-c}{b'+d}$ з умов теореми 2 отримуємо умови глобальної стійкості рівняння (7).

***Висновки***. У статті розглянуто динамічну модель адаптації ринкової ціни, побудовано різницеве рівняння з запізненням – рівняння Ріккера, яке описує дану модель. Побудовано умову та область глобальної стійкості нерухомої точки даного рівняння, що дозволяє передбачати поведінку динамічної моделі при всіх можливих параметрах, що описують дану модель.

### *Література*

1. *Дыхта В. А.* Динамические системы в экономике. Введение в анализ одномерных моделей: Учебное пособие. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2003. — 178 с.

2. *Васенкова Е. К., Волкова Е. С., Шандра И. Г.* Математика для экономистов. Дифференциальные и разностные уравнения: Курс лекций. — М.: Финансовая академия, 2003. — 116 с.

3. *Романко В. К.* Разностные уравнения: Учебное пособие. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. — 112 с.

4. *Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Global stability in discrete population models with delayed-density dependence// Mathem. Biosciences. — 2006. — 199. — P. 26—37.

5. *Неня О. І.* Про глобальну стійкість одного нелінійного різницевого рівняння // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9. — № 4. — С. 525—534.

6. *Неня О. І., Ткаченко В. І., Трофимчук С. І.* Про точні умови глобальної стійкості різницевого рівняння, яке задовольняє умову Йорка // Український математичний журнал. — 2008. — Т. 60. — №1. — С. 73—80.

7. *Неня О. І., Ткаченко В. І., Трофимчук С. І.* Про глобальну стійкість одного нелінійного рівняння // Нелінійні коливання. — 2004. — 7. №4 — P. 487—494.

8. *Kocic V. L., Ladas G.* Global asymptotic behaviour of nonlinear difference equations of higher order with applications. — Dordrecht: Kluwer Acad., 1993. — 228 p.

УДК 519.86

***В. В. Вітлінський**, д-р екон. наук, проф.,*
*завідувач кафедри,*
***О. В. Піскунова**, канд. техн. наук,*
*доцент, кафедра економіко-математичного моделювання,*
*ДВНЗ «Київський національний економічний*
*університет імені Вадима Гетьмана»*

# МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ РОЗВИТКОМ МАЛОГО ПІДПРИЄМНИЦТВА

Представлено концепцію моделювання функціонування малих підприємств в умовах невизначеності ринкового середовища та розвитку малого підприємництва в регіонах України з метою підвищення ефективності управління розвитком малого бізнесу державними та місцевими органами влади

Представлена концепция моделирования функционирования малых предприятий в условиях неопределенности рыночной среды и развития малого предпринимательства в регионах Украины с целью повышения эффективности управления развитием малого бизнеса государственными и местными органами власти

The concept of modeling of small enterprise operation in conditions of market environment and small business development for the purpose of increase of small business development management effectiveness is submitted in the article.

***Ключові слова***: управління розвитком малого підприємництва, мале підприємство, моделювання, невизначеність, системна парадигма, системні характеристики, раціональні очікування, адаптивні очікування

***Ключевые слова***: управление развитием малого предпринимательства, малое предприятие, моделирование, неопределенность, системная парадигма, системные характеристики, рациональные ожидания, адаптивные ожидания

***Key words***: management of small business development, small enterprise, modelling, indeterminacy, system paradigm, system characteristics, adaptive expectations, rational expectations

***Постановка проблеми***. Розвиток малого підприємництва в Україні має стати важливим фактором піднесення ефективності вітчизняної економіки. Водночас, цей сектор економіки є вразливим до дії несприятливих факторів, він потребує продуманої та гнучкої державної підтримки, Підтримка малого підприємництва здійснюється майже в усіх країнах світу, як у розвинутих, так і тих, що розвиваються. В Україні правові засади державної підтримки суб'єктів малого підприємництва визначено Законом України «Про державну підтримку малого підприємництва», а конкретні дії щодо його реалізації — Законом України «Про Національну програму сприяння розвитку малого підприємництва в Україні». Основними напрямками Програми є удосконалення нормативно-правової бази у сфері підприємницької діяльності; державна регуляторна політика у сфері господарської діяльності; фінансово-кредитна та інвестиційна підтримка малого підприємництва; створення інфраструктури розвитку малого підприємництва. Крім того, в усіх регіонах