

*А.В. Сірош,
Д. Є. Семьонов*, старший викладач,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФОНДОВОГО РИНКУ

АНОТАЦІЯ. У статті пропонуються сучасні методи дослідження складних фінансово-економічних систем. Аналізується застосування мультифрактального аналізу до дослідження динаміки світового фондового ринку на прикладі фондових індексів США, Європи, Австралії та України.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Фінансово-економічні системи, мультифрактальний аналіз, скейлінг, часовий ряд, спектр, сингулярність.

ANNOTATION. The article offers modern methods of complex financial and economic systems. The application of multifractal analysis to study the dynamics of the global stock market is analyzed, for example stock indexes of USA, Europe, Australia and Ukraine.

KEYWORDS. Financial and economic systems, multifractal analysis, scaling, time series, spectrum singularity.

Вступ

У сучасних умовах спостерігаються кризові явища в економіці. Тому виникає необхідність у дослідженні передкризових станів системи. Останнім часом суттєво змінилась поведінка складних систем. Вони характеризуються емерджентними властивостями, здатністю до самоорганізації, наявністю не рівноважних станів, в яких система під впливом незначних збурень може принципово змінювати свою поведінку або структуру, режим функціонування тощо.

Також не можна не відмітити, що складі системи можуть існувати в режимі хаотичної динаміки. Такі системи надто чутливі до початкових умов, що принципово обмежує горизонт прогнозування динаміки систем, які знаходяться в не рівноважному стані. Одним із перспективних поглядів є дослідження стану системи на підставі сучасних методів аналізу часових рядів. Таких, як R/S — аналіз, вейвлет аналіз, стандартний аналіз флуктуацій, аналіз детрендових флуктуацій (АДФ), мультифрактальний аналіз та ін.

У даній статті використовуються методи мультифрактального аналізу часових рядів, які досліджувались у багатьох роботах, зокрема [1—7] та ін.

Основні результати

Методи дослідження. Багато економічних (біологічних, медичних тощо) об'єктів не демонструють простої монофрактальної скейлінгової поведінки, що може бути визначена одним коефіцієнтом. У деяких випадках існує кросовер (crossover) на часових шкалах s_x , що відділяє моделі з різною поведінкою, наприклад, довгочасові кореляції на малих масштабах часу $s \ll s_x$ та кореляції іншого виду чи некорельовану поведінку на більших масштабах $s \gg s_x$. У деяких випадках поведінка скейлінга ще більш складна, і існують різні значення коефіцієнтів скейлінга для різних частин послідовності (наприклад, для першої та другої половини послідовності). Трапляються ще складніші випадки, коли розглядаються накладені одна на одну множини із різною фрактальністю. Для таких випадків необхідно обчислювати множини коефіцієнтів скейлінга для повного опису поведінки об'єкта. Тоді застосовується мультифрактальний аналіз детрендованих флуктуацій.

У загальному випадку процедура мультифрактального АДФ (МФ-АДФ) складається із п'яти кроків. Перші три кроки, по суті, ідентичні процедурі стандартного АДФ.

Нехай є послідовність x_k довжини N , що не має великої кількості нульових значень (compact support).

Крок 1. Визначається профіль (накопичення):

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x}), i = \overline{1 \dots N}.$$

Віднімання середнього \bar{x} є необов'язковим, оскільки може бути виконане пізніше детрендуванням на третьому кроці

Крок 2. Профіль Y_i розбивається на $N_s = \text{int}(N/s)$ сегментів (підпослідовностей) однакової довжини s , що не перекриваються. Оскільки загальна довжина послідовності N часто не ділиться націло на s , залишок у кінці послідовності, що є меншим за ширину вікна, відкидається. Для врахування відкинутої частини і використання, таким чином, усіх елементів послідовності, вищевказана процедура повторюється також, починаючи з кінця послідовності. Таким чином, разом буде отримано підпослідовностей.

Крок 3. Для кожної із $2N_s$ підпослідовностей обчислюється локальний тренд методом найменших квадратів. Потім визначається відхилення

$$F^2(v,s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y((v-1)s+i) - y_v(i))^2$$

для кожного сегмента $v, v = \overline{1 \dots N}$.

$$F^2(v,s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y(N - (v - N_s)s + i) - y_v(i))^2$$

для кожного $F^2(v,s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y(N - (v - N_s)s + i) - y_v(i))^2$. Тут $Y_v(t)$ є інтерполюючий поліном на сегменті v . Для інтерполяції використовуються лінійні, квадратичні, кубічні поліноми чи поліноми вищого порядку (відповідні методи називаються АДФ1, АДФ2, АДФ3 і т.д.). Оскільки детрендування часового ряду відбувається відніманням значень полінома від реальних значень ряду, АДФ різних порядків відповідно відрізняються у своїх можливостях по вилученню тренду в ряді. У (МФ-)АДФ m ((МФ-)АДФ m -го порядку) вилучаються тренди профілю порядку m (або відповідно порядку $(m-1)$ для вихідного часового ряду). Таким чином порівняння результатів роботи АДФ різних порядків використовується для отримання типу тренду у вихідному часовому ряді.

Крок 4. Знаходиться середнє по всіх підпоследовностях для отримання функції флуктуацій q -го порядку:

$$F_i(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} (F^2(s, v))^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

де, взагалі кажучи, значення змінної q може бути довільним за виключенням нульового. Для $q = 2$ отримується стандартний метод АДФ. При розгляді питання, як впливає часова шкала s при різних значеннях q на узагальнену залежність $Fq(S)$ від q . Для цього необхідно повторити кроки 2—4 для різних часових масштабів s . Цілком зрозуміло, що $Fq(S)$ буде збільшуватись із збільшенням q . Звичайно, $Fq(S)$ залежить також від порядку методу АДФ m . Згідно з побудовою, $Fq(S)$ визначене лише для значень $s \geq m + 2$.

Крок 5. Визначається скейлінгова поведінка функції флуктуацій шляхом аналізу у подвійному логарифмічному масштабі залежності $Fq(S)$ від q . Якщо послідовність x_i має довгочасові кореляції, $Fq(S)$ збільшується із збільшенням s згідно степеневому закону.

$$F_q(s) \cong s^{h(q)}.$$

Взагалі, коефіцієнт $h(q)$ повинен залежати від q . Для стаціонарних часових рядів, $h(q)$ ідентичний коефіцієнту Херста. Таким чином, функцію $h(q)$ можна назвати узагальненим коефіцієнтом Херста. Для монофракทัลної часової послідовності $h(q)$ залежить від q , таким чином скейлінгова поведінка відхилень $F_2(v,s)$ однакова на всіх сегментах v і процедура усереднення дасть однакові значення скейлінгового коефіцієнта для всіх сегментів послідовності. Лише у випадку, коли масштаби малих і великих флуктуацій відрізняються, буде помітною залежність $h(q)$ від q : якщо розглядати додатні значення q , сегменти v з великими значеннями $F_s^2(v,s)$ (наприклад, великі відхилення від відповідних інтерполяційних поліномів) будуть домінувати у середньому значенні $F_q(s)$. Таким чином, для додатних значень q $h(q)$ описує скейлінгову поведінку сегментів із великими флуктуаціями. Зазвичай великі флуктуації характеризуються меншими скейлінговими коефіцієнтами $h(q)$ для мультифрактальних рядів. Навпаки, для від'ємних значень q сегменти v з малими відхиленнями $F_s^2(s)$ будуть домінувати у середньому значенні $F_q(s)$. q . Таким чином, для від'ємних значень q $h(q)$ описує скейлінгову поведінку сегментів з малими флуктуаціями, що зазвичай характеризуються більшим скейлінговим коефіцієнтом. Однак, метод МФ-АДФ може визначати лише додатні узагальнені коефіцієнти Херста $h(q)$, і стає неточним для сильно антикорельованих сигналів, коли $h(q)$ близьке до нуля. В таких випадках використовується модифікований МФ-АДФ-аналіз. Більш простим шляхом для аналізу подібних даних може служити інтегрування часового ряду перед виконанням МФ-АДФ процедури (знаходження накопичень). Звідси, просте знаходження суми у (3.43), що описує профіль початкових даних, замінюється подвійним знаходженням суми:

$$\tilde{Y}(i) = \sum_{k=1}^i (Y(k) - \tilde{Y}).$$

Після цього виконується процедура МФ-АДФ, описана вище, внаслідок чого отримується узагальнена функція флуктуацій.

$$\tilde{F}_q(s) \cong s^{\tilde{h}(q)} = s^{h(q)+1}.$$

Таким чином, скейлінгова поведінка може бути точно визначена навіть у випадку, коли $h(q)$, близьке до нуля (проте більше за -1) для деяких значень q . Зауважимо, що $F_q(S)/s$ відповідає

$F_q(s)$. Якщо на кожному кроці не віднімається середнє значення, така сума, більш за все, дасть квадратичний тренд у профілі $Y_V(t)$. У цьому випадку необхідно використовувати, щонайменше, МФ-АДФ другого порядку для вилучення такого штучного тренду.

Експериментальні дані

Для порівняння мультифрактальних властивостей візьмемо три фондові індекси:

- S&P 500 — фондовий індекс, у корзину якого включено 500 вибраних акціонерних компаній *США*, що мають найбільшу капіталізацію;
- FTSE 100 — провідний індекс Британської фондової біржі (лондонський біржовий індекс). Вважається одним з найвпливовіших біржових індикаторів у *Європі*;
- S&P/ASX 200 — індекс провідної *Австралійської* фондової біржі (англ. Australian Securities Exchange, ASX);
- UX (UX-індекс, Індекс *Української* біржі) — український фондовий індекс за даними торгів Української біржі.

Для перших трьох (світових) індексів аналізувались дані за період з 2005 по 2012 рр., для UX — з 2008—2012 рр. (пов'язано з часом існування самого індексу).

Дослідження проводились інструментальними засобами середовища комп'ютерної математики MATLAB.

Аналіз результатів моделювання

1) Аналіз індексу S&P 500

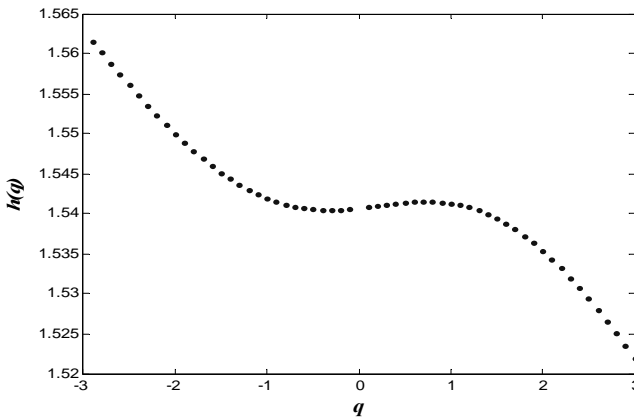


Рис. 1. Розрахунок скейлінгового коефіцієнта $h(q)$ індексу S&P 500

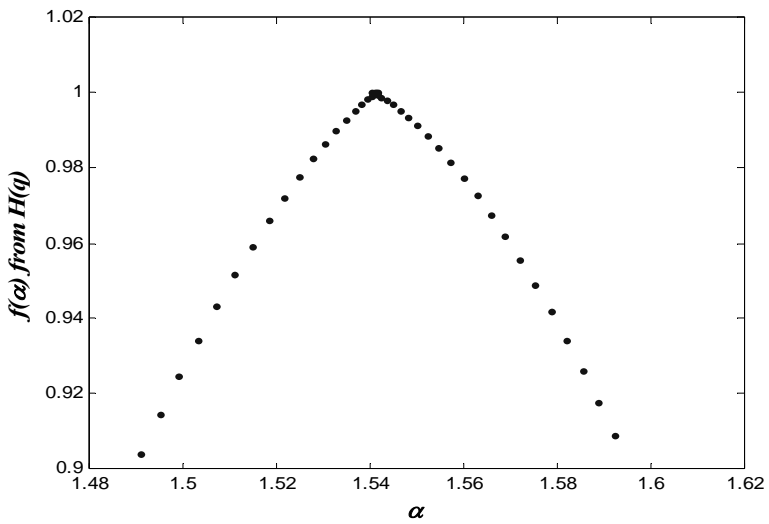


Рис. 2. Розрахунок спектра сингулярності $f(\alpha)$ індексу S&P 500

2) Аналіз індексу FTSE 100.

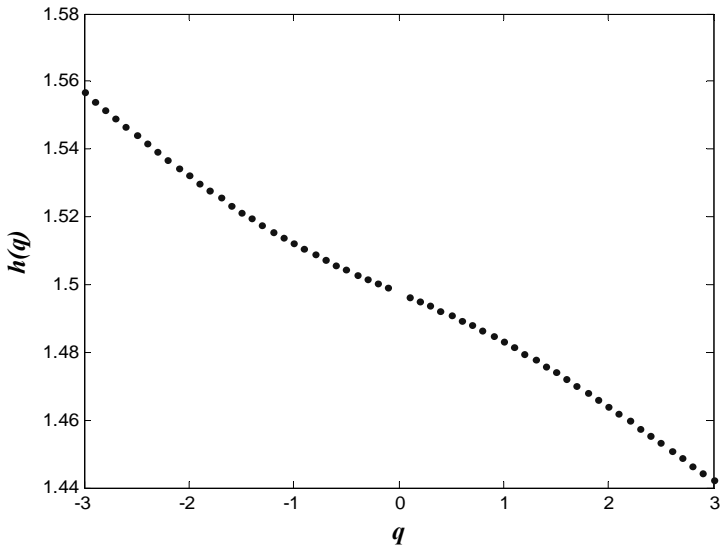


Рис. 3. Розрахунок скейлінгового коефіцієнта $h(q)$ індексу FTSE 100

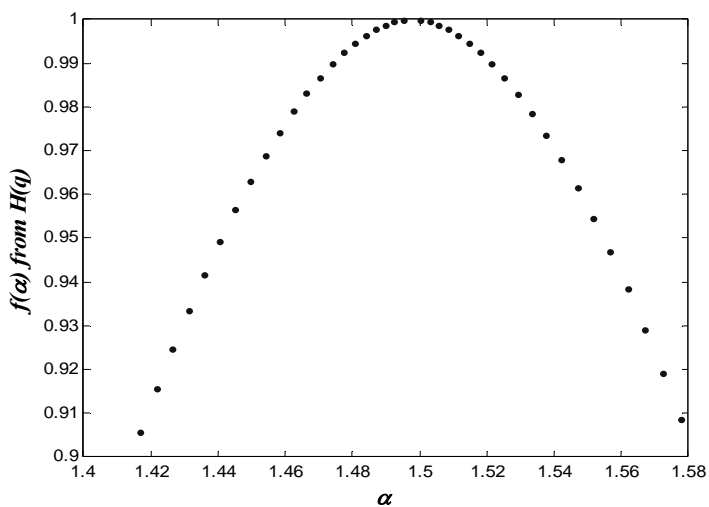


Рис. 4. Розрахунок спектра сингулярності $f(\alpha)$ індексу FTSE 100

3) Аналіз індексу S&P/ASX 200.

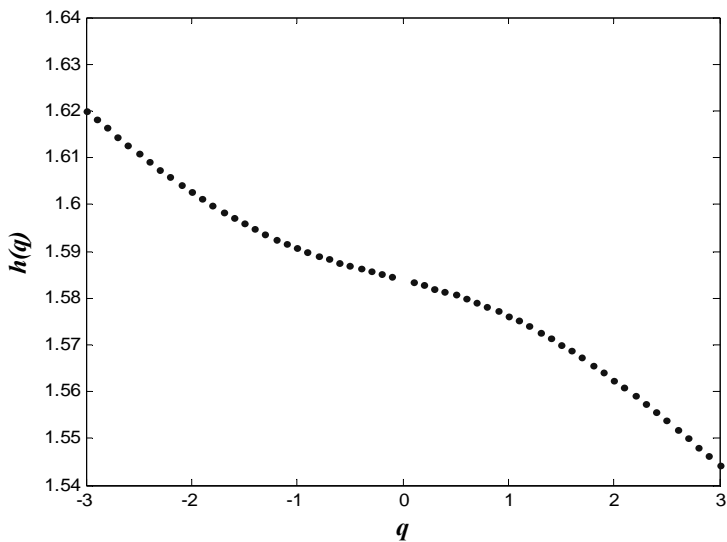


Рис. 5. Розрахунок скейлінгового коефіцієнта $h(q)$ індексу S&P/ASX 200

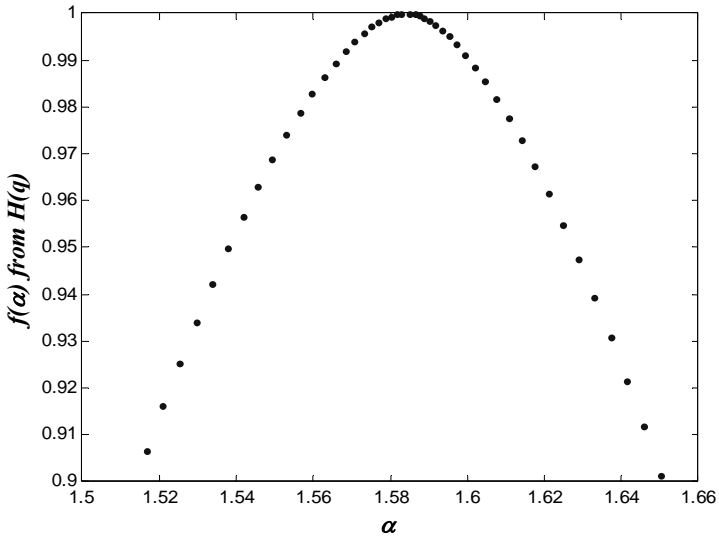


Рис. 6 Розрахунок спектра сингулярності $f(\alpha)$ індексу S&P/ASX 200

4) Аналіз індексу UX.

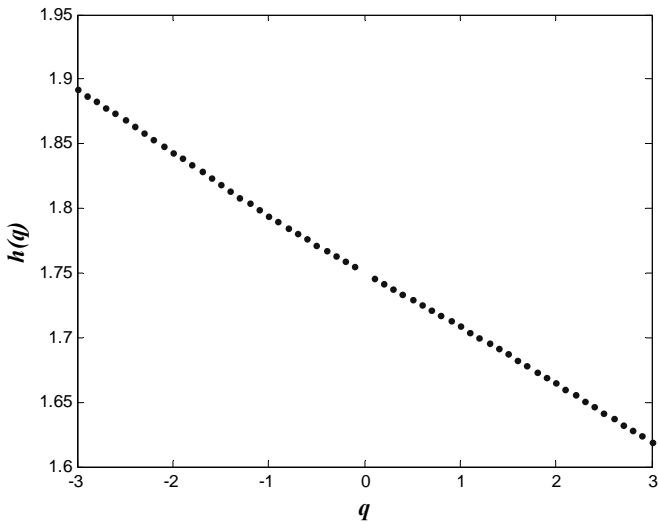


Рис. 7. Розрахунок скейлінгового коефіцієнта $h(q)$ індексу UX.

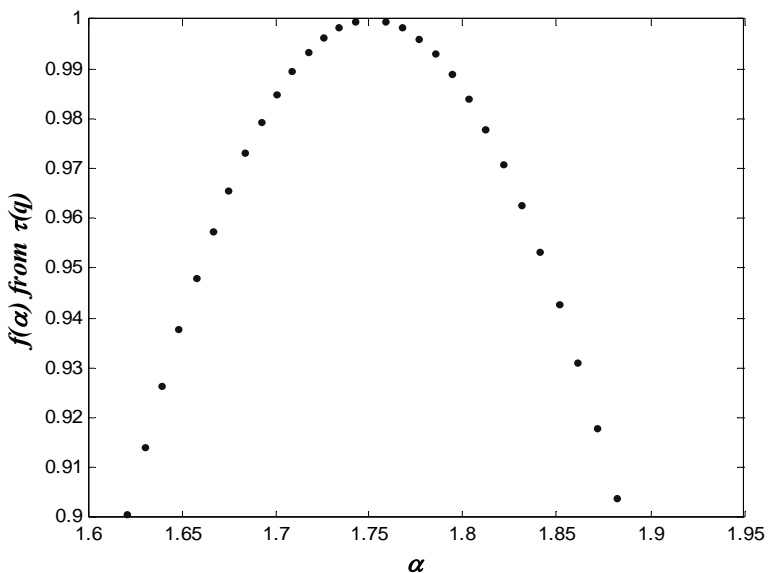


Рис. 8. Розрахунок спектра сингулярності $f(\alpha)$ індексу S&P/ASX 200

Висновки

Мультифрактальний аналіз дозволяє вказати на глобальні та локальні характеристики часових рядів, які можуть бути використані для прогнозування і передбачення кризових явищ.

Проведений аналіз графіків рис. 1—8 свідчить про те, що за розглянутий проміжок часу з розглянутих фінансових систем найшвидше реагує на збурення США (індекс S&P 500), хоча в цій же системі найбільша кількість деструктивних процесів (про свідчить ширина спектра сингулярності), що в свою чергу означає близькість цієї системи до хаотичного режиму функціонування. Близькі значення демонструють і фінансові системи Європи та Австралії. Фінансова система України демонструє значно спокійнішу поведінку, що можна пояснити як відносною молодістю самої системи (зокрема, складніше дослідити скейлінгову поведінку). Крім того мож-

на помітити, наявність кризового стану для кожної системи за визначений проміжок часу, про свідчить залежність функцій флуктуацій від ширини вікно. Причому, на європейську та австралійську систем цей стан вплинув більше ніж на американську.

Тож, проаналізувавши відповідні індекси, з погляду ризик-менеджменту можна зробити висновок, що найадаптованішим до кризових явищ є фондовий ринок США, а найменш адаптованим — ринок України

Література

1. *K. Ivanova, H.N. Shirera, E.E. Clothiaux, N. Kitova, M.A. Mikhalev, T.P. Ackermanc, M. Ausloos.* A case study of stratus cloud base height multifractal fluctuations. — Pacific Northwest National Laboratory, Richland, WA 99352, USA. SUPRAS & GRASP, B5, Sart Tilman, B-4000 Liège, Belgium, 2001. 15 p.

2. GORDON R. RICHARDS. A Fractal Forecasting Model for Financial Time Series. Sprint, Kansas, USA, 2004. 16 p.

3. Gao-Feng Gu and Wei-Xing Zhou. Detrended fluctuation analysis for fractals and multifractals in higher dimensions.- School of Business, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China, 2006. 10 p.

4. *K. Ivanova, M. Ausloos.* Application of the detrended fluctuation analysis (DFA) method for describing cloud breaking. Institute of Electronics, Bulgarian Academy of Sciences, Tzarigradzsko Chaussee 72, 1784 Sofia, Bulgaria. SUPRAS and GRASP, Institute of Physics, Sart Tilman, B5, University of Liege, B-4000 Liege, Belgium, 1999. 6 p.

5. Kun Hu, Plamen Ch. Ivanov, Zhi Chen, Pedro Carpena, and H. Eugene Stanley. Effect of trends on detrended fluctuation analysis.- Center for Polymer Studies and Department of Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215Harvard Medical School, Beth Israel Deaconess Medical Center, Boston, Massachusetts 02215 Departamento de Física Aplicada II, Universidad de Malaga E-29071, Malaga, Spain, 2001. 19 p.

6. *А.Н. Павлов, В.С. Анищенко.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов. — 2007. 18 с.

7. *А.Н. Павлов, О.В. Сосновцева, А.Р. Зиганишин.* Мультифрактальный анализ хаотической динамики взаимодействующих систем.

Стаття надійшла до редакції 17.12.2012 р.