Висновки. Запропонований метод дає можливість на основі розрахованих динамічних показників оцінити ефективність фінансування інноваційного проекту на підприємстві за рахунок прибутку від основної діяльності і прийняти рішення про доцільність фінансування проекту.

Література

1. *Акофф Р*. Планирование будущего корпорации / Р. Акофф. – М.: Прогресс, 1985. — 326 с.
2. *Борисов Б.А*. Большой экономический словарь / Б.А. Борисов. – М.: Книжный мир, 1999. — 568 с.
3. Большой экономический словарь / [под общ. ред. А.Н. Азрилияна]. — М.: Правовая культура, 1994. — 1472 с.

Стаття надійшла до редакції 15.12.2012 р.

УДК 330.341.4

І.А. Джалладова, проф.,
зав. кафедри вищої математики ФІСІТ,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ СТРУКТУРИ ТА ОЦІНКИ СТРУКТУРНИХ КОЛИВАНЬ У ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСАХ

ANNOTATION. We consider a system with quadratic right-hand side and asymptotically stable matrix linear approximation. A System written in a special uniform vector-matrix form. The algorithm estimates the region of stability in the phase space of the zero equilibrium position system with quadratic right-hand side. The algorithm is based on using the second method of Lyapunov quadratic function of the form [4].

KEY WORDS. uncertainty, estimates of stability, model population in the uncertainty conditions, the second Lyapunov method, equations with delay.

АНОТАЦІЯ. У роботі розглядаються системи з квадратичною правою частиною та асимптотично стійкою матрицею лінійного наближення. Системи записуються в спеціальному уніфікованому векторно-матричному вигляді. Запропоновано алгоритм оцінки області стійкості в фазовому просторі нульового положення рівноваги системи з квадратичною правою частиною. Алгоритм заснований на використанні другого методу Ляпунова з функцією квадратичного виду.

КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ. невизначеність, оцінки стійкості, моделі чисельності населення в умовах невизначеності, другий метод Ляпунова, рівняння із запізненням.

1. Вступ

Надзвичайно важливо зрозуміти, яка подія може змінити людську історію на шляху до формування гармонійного людства без вбивств собі подібних і воєн.

Вже кілька десятків років вчені мужі — представники різних наук б'ються над питаннями: Як швидко вичерпаються енергетичні ресурси, прісна вода і т. д. при безперервному збільшенні чисельності людей і безперервному збільшенні споживання всіх ресурсів на душу населення. Як швидко псується середовище проживання при збільшенні щільності населення. Чи можна ввести поняття «якість життя» і як це якість змінюється із зростанням чисельності населення і збільшенням середньої тривалості життя індивідуума? [12], [13].

Спробу відповісти на всі ці питання частково дала програма «WORLD», яка розроблена інтернаціональним колективом вчених починаючи з 70-х років 20-го століття на основі нових комп'ютерних технологій. Результати аналізу глобальних процесів подано у багатьох дослідженнях, але питання все ж залишаються відкритими і актуальними. Нижче ми розглядаємо деякі підходи і методи аналізу проблеми і наведемо окремі ілюстрації та приклади такого аналізу. Для цього звернемося до визначення **поняття «якості життя».**

Дамо спочатку *означення функції якості життя за Форрестером.*

Означення. ***Функція якості життя*** QL в умовних одиницях задоволеності є добутком множників

$$QL = QLS \times QLM \times QLC \times QLF \times QLP ,$$

де $QLS = 1$ — стандартна якість життя,

QLM — множник, що залежить від матеріального рівня життя LM,

QLC — множник, що залежить від щільності населення LC,

QLF — множник, що залежить від їжі LF,

QLP — множник, що залежить від забруднення LP (Pollution),

$QLS = 1$ умовно прийнято для США 1970 г.

Сама функція QL насправді не скаляр, а багатокомпонентний «вектор». Щільність визначає не тільки міру «комфорту», але й схильність до воєн, епідемій і т. д. Якщо функції QLF і QLM виходять на стаціонар або насичуються, то QLC і QLP «можуть все згубити».

Один із розрахунків в [13] показує, що матеріальний рівень життя досягає максимум зі зростанням сільськогосподарських фондів біля 2010—2012 років, але якість життя при цьому спадає.

Тоді як, за прогнозами Медоузов вже не простежується «якість життя», але можна побачити сценарії з обмеженням зростання населення, виснаження ресурсів і зростання забруднення середовіща Видно також, що середня тривалість життя падає. Із застосуванням статистичних даних України 1990-х років і власного досвіду, зрозуміло що тривалість життя дуже сильно залежить від погіршення всіх глобальних економічних показників.

Аналізуючи дані про зростання населення Землі з моменту появи людини до наших днів (приблизно від –2000 до +3000 р., а також криві відносної швидкості збільшення чисельності людей у різних регіонах починаючи з 400 р. до н.е., можна зробити висновок такий: з часу близько двох мільйонів років тому, коли число людей досягло приблизно 100 000 чоловік, до кінця другого тисячоліття закон зростання незмінний, з самого кінця 20-го століття спостерігається демографічний перехід — зменшення відносної швидкості приросту населення.

Таблиця 1

Рік	Чисельність населення	Різниця	Коефіцієнт абсолютної швидкості
1950	2529346		
1955	2763453	234107	1,093
1960	3023358	259905	1,094
1965	3331670	308312	1,102
1970	3685777	354107	1,106
1975	4061317	375540	1,102
1980	4437609	376292	1,093
1985	4846247	408638	1,092
1990	5290452	444205	1,092
1995	5713073	422621	1,080
2000	6115367	402294	1,070
2005	6512276	396909	1,065
2010	6908688	396412	1,061

Навіть по даним таблиці 1 криві «демографічного переходу», коли відносна швидкість приросту населення досягає максимуму і починає зменшуватися незалежно від країни. Однак максимуми зміщені в часі. Як ми побачимо нижче з сучасних теоретичних уявлень, демографічний перехід відбувається по «внутрішнім причинам» розвитку біологічного виду людини. Він прямо не залежить від виснаження природних ресурсів, енергії і т.п. Важливо, що демографічний перехід спочатку відбувається у високорозвинених країнах, а потім з невеликим запізненням на десятки років у «слаборозвинених».

Було б цікаво простежити, як змінюються наведені глобальні функції для України зараз. Скажемо, додати в означення функції якості життя наступні множники:

QLE — множник, який залежить від рівня освіти *LE*;

QLW — множник, який залежить від рівня емансипації жінок *LW*; та інші, а потім проаналізувати вплив цих факторів на демографічні характеристики.

Виходячи із прогнозів дослідників можна зробити висновок: **демографічний перехід найближчі 20—30 років буде супроводжуватися кризою світової макроекономіки.** Тому побудова прогнозуючих моделей і пошук стратегії, пом'якшувальною кризи, є першорядним завданням різних фахівців, у тому числі й математиків, статистиків, економістів.

2. Системи без запізнювання

Один з ефективних підходів при розробці динамічних моделей в економіці, екології та динаміці популяцій полягає в розробці моделей, в яких швидкість динаміки пропорційна кількості популяції [5, 6]. Значна частина математичних моделей описується системами звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\dot{x}(t) = K[x(t)]x(t). \qquad (2.1)$$

Тут $K[x(t)]$ квадратна матриця, яка вказує на залежність швидкості росту від фазових координат. Якщо матриця $K[x(t)]$ лінійна, то модель являє собою систему з квадратичною правою частиною. Зокрема, якщо модель скалярна, то

$$\dot{x}(t) = [a - bx(t)]x(t), \qquad (2.2)$$

де $x(t) \in R^1$, a, b деякі додатні сталі, $t \geq 0$.

2.1. Модель Ферхюльста

Одним з найбільш відомих рівнянь, що описує динаміку народонаселення з урахуванням обмеженості росту популяції в обмеженому регіоні, є логістичне рівняння, запропоноване Ферхюльста в 1838 р.

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right). \tag{2.3}$$

яке в період кризи або демографічного переходу є найкращою моделлю для описування «насичення» зростання.

При малих значеннях фазової координати чисельність популяції $x(t)$ зростає, а при більших величинах зменшується і наближається до значення k. Рішення задачі Коші, диференціального рівняння (1.1), що задовольняє початковому умові $x(0) = x_0$, можна записати у вигляді

$$x(x_0, t) = \frac{kx_0 e^{at}}{k + x_0\left(e^{at} - 1\right)}. \tag{2.4}$$

Якщо початкове значення $x_0 < \frac{1}{2}k$, крива має точку перегину. Динамічна система має два положення рівноваги $x(t) \equiv k$ і $x(t) \equiv 0$. Перше положення рівноваги стійко, а друге нестійке. Таким чином, кількість популяції прямує до деякої сталої кількості, що залежить від параметрів моделі. Найкращим чином формула (2.4) описує статистику демографічних даних в період демографічних переходів.

Зауважимо, що максимальний приріст населення Землі $\Delta \mathrm{N} = 87$ млн чол. припав на 1990 р.

Зауваження 2.1. Розглянемо скалярне рівняння

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx^2(t), \; a > 0.$$

Це рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Його безпосереднім розв'язком є

$$x(t) = \frac{ax(0)e^{-at}}{a - bx(0)\left[1 - e^{-at}\right]}.$$

Розглянемо використання методу функцій Ляпунова [8] з функцією $V(x)=x^2$. Для цієї функції $\lambda_{\max}(H)=\lambda_{\min}(H)=1$. Повна похідна з огляду на лінійну частину має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x(t))=-2ax^2(t).$$

Тому $\varphi(H)=1$, $\gamma(H)=2a$. Оцінка збіжності для розв'язків з початковими умовами $|x(0)|<a/|b|$ має аналогічний вигляд

$$|x(t)|\le\frac{a|x(0)|}{[a-|b||x(0)|]e^{at}+|b||x(0)|}=\frac{a|x(0)|e^{-at}}{a-|b||x(0)|[1-e^{-at}]}\to 0\,.$$

Таким чином, для скалярного рівняння точний розв'язок збігається з оцінкою, що подається квадратичною функцією Ляпунова.

3. Системи із запізненням

Як правило, в моделях екології та економіки яким притаманний фактор запізнювання, що визначається «**часом статевого дозрівання» і «часом прийняття рішення**». Тому більш адекватними є математичні моделі, що описуються системами функціонально-диференціальних рівнянь із запізнюванням [9]. Одними з перших математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями з сталим запізнюванням, були рівняння Хатчисона і Вольтера [5, 6, 9].

3.1. Рівняння Ферхюльста із запізненням.

Рівняння Ферхюльста відображає динаміку зростання популяції з насиченням. Обмеженість зростання обумовлена «внутрішньої конкуренцією». Відзначимо наступний фактор, що уточнює модель Ферхюльста. Конкуренція, взагалі кажучи, виникає між новою популяцією $x(t)$ і популяцією $x(t-\tau)$, народженої з запізненням τ. У цьому випадку, динаміка популяції визначається вже рівнянням Хатчисона (1948 р.), яке має вигляд диференціального рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{k}\right). \tag{3.1}$$

Запізнювання виникає через кінцевий час, необхідний для досягнення «статевої зрілості».

Динамічна система, яка описується рівнянням (3.1) також має два положення рівноваги $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv k$. Неважко побачити, що лінійне наближення в точці $x(t) \equiv 0$ дає рівняння

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

і вказує на нестійкість нульового положення рівноваги. Розглянемо другу точку спокою $x(t) \equiv k$.

Проведемо лінеаризацію рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), x(t-\tau)\right)$$

в околі точки $x(t) \equiv k$. Запишемо

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left.\frac{\partial f\left(x(t), x(t-\tau)\right)}{\partial x(t)}\right|_{x(t)=x(t-\tau)=k} \left[x(t)-k\right] + \left.\frac{\partial f\left(x(t), x(t-\tau)\right)}{\partial x(t-\tau)}\right|_{x(t)=x(t-\tau)=k} \left[x(t-\tau)-k\right] \cdot$$

Після підстановки відповідних значень отримаємо

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a\left[x(t-\tau)-k\right].$$

В околі особливої точки $x(t) \equiv k$ рівняння лінійного наближення має вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t-\tau), \quad y(t) = x(t) - k\,. \tag{3.2}$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda + ae^{\lambda\tau} = 0$$

І, як слідує з [10], при

$$0 < a\tau < \frac{\pi}{2}$$

положення рівноваги $x(t) \equiv k$ буде локально асимптотичне стійким.

Проведемо оцінку області стійкості в фазовому просторі положення рівноваги $x(t) \equiv k$ початкової нелінійної системи (3.1). Перенесемо перетворенням

$$y(t) + k = x(t)$$

точку $x(t) \equiv k$ у початок координат. Отримаємо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{a}{k}\left[y(t) + k\right]y(t-\tau). \tag{3.3}$$

Скористаємося квадратичною функцією Ляпунова $V(y) = \frac{1}{2}y^2$. Оскільки розглядається рівняння із запізненням, то при оцінці повної похідної буде використовуватися умова Б. С. Разуміхіна [11]. Ця умова геометрично означає, що повна похідна обчислюється шляхом знаходження зсередини поверхні рівня функції Ляпунова. Стосовно до функції $V(y) = \frac{1}{2}y^2$ воно має вигляд

$$\frac{1}{2}y^2(t-\tau) = V(y(t-\tau)) < V(y(t)) = \frac{1}{2}y^2(t),$$

тобто

$$|y(t-\tau)| < |y(t)|. \tag{3.4}$$

І для повної похідної функції Ляпунова з огляду на рівняння (3.3) має місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = -\frac{a}{k}y(t)\left[y(t) + k\right]y(t-\tau) =$$

$$-\frac{a}{k}y(t)\left[y(t) + k\right]y(t) - \frac{a}{k}y(t)\left[y(t) + k\right]\left[y(t-\tau) - y(t)\right] \le$$

$$\le -a\left[1 - \frac{1}{k}|y(t)|\right]|y(t)|^2 + \frac{a}{k}|y(t)|\left[|y(t)| + k\right]|y(t) - y(t-\tau)|.$$

Оцінимо різницю фазових координат із запізненням і без нього. Перепишемо рівняння (3.3) у вигляді

$$y(t) = y(t-\tau) - \frac{a}{k}\int_{t-\tau}^{t}\left[y(s) + k\right]y(s-\tau)ds.$$

Використовуючи умову (3.4), отримуємо

$$|y(t)-y(t-\tau)|<\frac{a}{k}\int\limits_{t-\tau}^{t}\big[|y(s)|+k\big]|y(s-\tau)|ds\le\frac{a}{k}\big[|y(t)|+k\big]|y(t)|\tau .$$

І для повної похідної функції Ляпунова буде мати місце

$$\frac{d}{dt}V(y(t))<-a\left[1-\frac{1}{k}|y(t)|\right]|y(t)|^2+\left(\frac{a}{k}\right)^2\big[|y(t)|+k\big]^2|y(t)|^2\tau .$$

Таким чином, при

$$a\left[1-\frac{1}{k}|y(t)|\right]>\left(\frac{a}{k}\right)^2\big[|y(t)|+k\big]^2\tau$$

повна похідна функції Ляпунова буде від’ємно визначеною. І умови асимптотичної стійкості визначаються нерівностями

$$\|y(0)\|_\tau<k\ ,\ \|y(0)\|_\upsilon=\max_{-\tau\le s\le\tau}\{|x(s)|\},\ \tau<\frac{k\big[k-\|y(0)\|_\tau\big]}{a\big[\|y(0)\|_\tau+k\big]^2}. \qquad (3.5)$$

Формули (3.5) дозволяють отримати оцінки структурних коливань у демографічних процесах.

Для України дуже важливим є побудова та аналіз моделей змін чисельності населення, бо майбутнє України в найближчі часи буде визначатися не лише рівнем народжуваності і смертності , але й іншими процесами, наприклад, міграційними потоками та ін.

Література

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения — М.: Гос. издат. тех.-теор. литературы, 1950. — 472 с.

2. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М., Наука, 1966. — 530 с.

3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

4. *Хусаінов Д.Я., Джалладова І.А., Шатирко О.А*. Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2011. — С. 227—230.

5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М., Наука, 1976. — 286 с.

6. *Смит Дж*. Модели в экологии. — М., Мир, 1976. — 286 с.
7. *Хусаінов Д.Я., Давидов В.Ф*. Оцінка області стійкості квадратичних диференціальних систем // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в. 2, 1991. — С. 3—6.
8. *Барбашин Е.А*. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
9. *Колмановский В.Б.* Уравнения с последействием и математическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. — № 4. — 1996. — С. 122—127.
10. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б*. Введение в дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
11. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В*. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. — К. : Изд.-во Киевского университета, 1997. — 236 с.
12. *Robert Smith.* Modelling Disease Ecology with Mathematics. — 2008 by the American Institute of Sciences. — 189 p.
13. *D.S. Jones, M.J. Planh*, and *B.D. Sleeman*. Differential Equations and Mathematical Biology. Second Edition. — 2010 by Taylor and Fracis Group, LLC. — 444 p.

Стаття надійшла до редакції 05.10.2012 р.

УДК 004.77:37.091.212

Т.В. Давидюк, начальник відділу автоматизації управління навчальним процесом ЦАУУ,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

БАГАТОРІВНЕВА СИСТЕМА КОМПЛЕКСНОЇ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ПІДТРИМКИ АДМІНІСТРУВАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ

АНОТАЦІЯ. У статті описано технологія реалізації першого рівня багаторівневої системи інформаційної підтримки адміністрування навчальної діяльності студентів в університеті — електронного журналу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: навчальний процес, адміністрування, електронний журнал, інформаційна підтримка, контроль навчальної діяльності.

АНОТАЦИЯ. В статье раскрывается технология реализации первого уровня многоуровневой системы информационной поддержки администрирования учебной деятельности студентов в университете — электронного журнала.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: учебный процесс, администрирование, электронный журнал, информационная поддержка, контроль учебной деятельности.