

**Г. В. Шуклін**, здобувач,  
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

## **МОДЕЛЮВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНИХ РІШЕНЬ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ**

*АНОТАЦІЯ. Стаття присвячена побудові диференціальних рівнянь, що описують закони розподілу ймовірностей зростання і падіння цін активів на фондовому ринку.*

*ANNOTATION. The article is devoted for construct differential equations which obtaining probability distributions of lift and fall assets in stocks market.*

**КЛЮЧОВІ СЛОВА.** Актив, стохастичне диференціальні рівняння із запізненням аргументу, ризик, індикатор стану фондового ринку.

### **Вступ**

Як відомо, грошові засоби є особливим типом товару, який обертається на фінансових ринках. Розподіл, покупка та продаж грошового капіталу та цінних паперів через фінансовий ринок відбувається з формуванням попиту та пропозиції залежно від прибутку та ризику інвестицій, що очікуються.

Однчасне існування кількох фінансових ринків зі своїми специфічними властивостями та прибутковістю дозволяє реалізувати різні методи та форми як фінансових інвестицій, так і залучення коштів, за рахунок того, що ці ринки доповнюють один одного, що забезпечує ефективніший перерозподіл фінансів. У той же час різні фінансові ринки діють в умовах взаємної конкуренції, що виражається у різноманітному рівні прибутку та ступенів ризику і характеризується в певний момент часу вкладанням коштів у різні сектори фінансового ринку з різним рівнем дохідності.

Фондовий ринок є, перш за все, ринком цінних паперів різних корпорацій. За умов нормального функціонування цей ринок забезпечує колективну оцінку багато чисельними гравцями кожної корпорації, акції якої фігурують на ринку та їх ймовірної ліквідності. Проте, в майбутньому така оцінка може виявитися значно завищеною, або необґрунтовано заниженою. Урахування цих моментів є стратегією різних учасників ринку цінних паперів — інвесторів та спекулянтів.

При будь-яких операціях з цінними паперами, необмінно враховувати, що наскільки вище очікувана прибутковість, настільки великим є ризик властивий їм. Це співвідношення прибутковості і ризику відображається чисельними дослідженнями історії фондового ринку, розрахунками норм доходності різних інструментів за певних умов і інвестицій.

На фондовому ринку всі основні ризики можна поділити на дві основні групи:

1) систематичний ризик, тобто ризик падіння ринку цінних паперів у цілому. Цей ризик властивий практично всім цінним паперам і його не можна зменшити шляхом збільшення числа та видів цінних паперів у портфелі;

2) несистематичний ризик — ризик, пов'язаний із володінням цінними паперами певного емітента. Цим ризиком можна керувати завдяки формуванню оптимального портфеля цінних паперів різних емітентів.

Ефективність інвестицій у цінні папери визначається переважно якістю доступних інвесторам індикаторів стану фондового ринку, як сигнали, які характеризують характер і можливість перелому довгострокової цінової тенденції на ньому, а також і контртрендових. Показники одних надійні при наявності на ринку яскраво вираженої тенденції, але в протилежному випадку частіше не вірні. Інші реагують на короткострокові коливання і гарно орієнтуються на безтрендовому ринку, а на іншому можуть привести до помилок. Лише разом вони утворюють систему, довіряючись сигналам якої інвестори і діють.

Таким чином, діяльність інвестора завжди пов'язана з ризиком, який будемо називати *невизначеністю*. Але, незважаючи на це, при використанні відповідного математичного апарату, цей ризик можна звести до мінімуму. Нас цікавить побудова моделей, при використанні яких можна давати надійний прогноз для зменшення ризику до можливого мінімуму. Дамо постановку задачі.

### ***Постановка задачі***

Нехай на фондовому ринку подані акції  $n$  емітентів, а ціна акції  $i$ -го емітенту дорівнює  $c_i(t)$  за одиницю активу. Нехай у момент часу  $t_0$  на ринку розміщений капітал  $k$  інвесторів і  $x_j(t_0)$  сумарний капітал  $j$ -го інвестора, який розміщений на фондовому ринку. Введемо матрицю, яка має наступну структуру.

$$\Psi(t_0) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}c_1(t_0) & \dots & \dots & \lambda_{1k}c_k(t_0) \\ \lambda_{21}c_1(t_0) & \dots & \dots & \lambda_{2k}c_k(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1}c_1(t_0) & \dots & \dots & \lambda_{nk}c_k(t_0) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Рядки матриці (1) визначають емітента, а стовпчик виражає розподіл коштів інвестора серед емітентів, які існують на ринку. Наприклад,  $\lambda_{ij}c_j(t_0)$  визначає, що  $j$ -й інвестор розмістив кошти в розмірі  $\lambda_{ij}c_j(t_0)$  в акції  $i$ -го емітента і  $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{ij}c_j(t_0) = x_j(t_0)$ . У [2] була розглянута задача ризикового інвестування, тобто, коли ціна акції  $c_i(t)$  у момент часу  $t$  задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = (a_i + \alpha_i \xi_i) c_i(t) \quad (2)$$

з початковими умовами

$$c_i(t) = c_i(t_0), \quad (3)$$

при  $t = t_0$ , де  $a_i > 0, \alpha_i = \text{const}, \xi_i$  – випадкова величина, яка розподілена за деяким законом.

Ми будемо розв’язувати задачу стабілізації фондового ринку в умовах невизначеності. Ця задача зводиться до дослідження властивостей матриці (1), змінні елементи якої задовольняють стохастичне рівняння (2) з початковими умовами (3).

### **Означення індикатора стану фондового ринку**

Обережні інвестори укладають угоди в напрямку домінуючої цінової тенденції, яка виявляється трендовим індикатором, наприклад ковзного середнього, але роблять це в моменти, коли контртрендовий індикатор, наприклад осцилятор [3], який обчислюється за формулою

$$100 - \frac{100}{1 + \frac{\Delta_+(t)}{\Delta_-(t)}},$$

де  $\Delta_+(t)$  — середнє значення додатних змін ціни за період  $t$ , а  $\Delta_-(t)$  — середнє значення від'ємних змін ціни за період  $t$ , аналізує про завершення ринкової корекції, показуючи «перепроданність» ринку при зростаючій динаміці і «перекупленність» у зворотній ситуації. Агресивні інвестори, якщо впевнені, що глибина майбутньої корекції такої тенденції достатня для того, щоб покрити їх операційні витрати і дасть їм певний прибуток, подібну систему використовують і проти тренда. Виходячи з даних міркувань, можна поставити у відповідність індикатору, як трендовому, так і контртрендовому, деякий випадковий процес, який описується наступним чином.

У момент часу  $t + \Delta t$  ціна акції  $c_i(t)$   $i$ -го емітента може приймати три можливі варіації: зменшитися, залишитися без змін, або збільшитися. Це означає, що випадкова величина  $\xi_i$  може приймати три можливих значення, а саме — 1 (контртренд), 0 (завершення ринкової корекції), 1 (тренд). Тобто задано випадковий процес

$$W_i = \begin{cases} -1, & \text{якщо } c_i(t + \Delta t) - c_i(t) < 0, \\ 0, & \text{якщо } c_i(t + \Delta t) - c_i(t) = 0, \\ 1, & \text{якщо } c_i(t + \Delta t) - c_i(t) > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Таким чином, рівняння (1) розпадається на три можливих рівняння:

1)  $\frac{dc_i(t)}{dt} = (a_i - \alpha_i)c_i(t)$ , при  $\xi_i = -1$ , що описує контртрендовий індикатор;

2)  $\frac{dc_i(t)}{dt} = a_i c_i(t)$ , при  $\xi_i = 0$ , що описує завершення ринкової корекції;

3)  $\frac{dc_i(t)}{dt} = (a_i + \alpha_i)c_i(t)$ , при  $\xi_i = 1$ , що описує тренд.

Із співвідношення (2) матимемо, що матриця  $\psi(t_0)$  має складну структуру, бо взагалі закон розподілу випадкової величини  $\xi_i$  невідомий. Проте, якщо ми зможемо побудувати закон розподілу випадкового процесу (4), який характеризує дії обережних і агресивних інвесторів, то матриці  $\psi(t_0)$  можна поставити у відповідність деяку матрицю  $\phi(t_0)$ , елементами якої є  $\{-1, 0, 1\}$ . Тоді процес моделювання стабілізації фондового ринку зводиться до побудови матричного простору з елементами  $\phi(t)$  і до побудови відповідного гомеоморфізму

## Моделі, що описують ймовірності розподілу індикатора стану фондового ринку

Неточність сигналів, на які орієнтуються інвестори, обертається для них великими або малими втратами. Саме з цього випливає наукова актуальність і практична значимість вдосконалення індикаторів стану фондового ринку. Таким чином, побудова закону розподілу ймовірності індикатора стану є найважливішою інформацією для прийняття інвестором рішень.

В основі побудови закону розподілу індикатора стану лежить те, що послідовність сигналів у момент часу  $t$  (тут ми розуміємо не тільки конкретне значення, але й деякий інтервал часу, наприклад, місяць, квартал, півріччя, рік), який залежить не тільки від самого часу  $t$ , але й від того, яка була послідовність сигналів у момент  $t - \tau$ ,  $\tau > 0$ . Іншими словами, послідовність сигналів у даний період залежить від передісторії, тобто початковими умовами є не конкретне значення  $\xi_t = \xi_{t_0}$ , при  $t = t_0$ , а деяка функція  $\xi_t = \varphi(t)$ , при  $-\tau \leq t \leq 0$ .

Розіб'ємо сигнали на дві множини:

$\Omega_-$  — множина сигналів падіння ціни активу,  $\Omega_- = \{-1, t = t_0 + \Delta t_{-1}\}$ ,  $t_0$  — початковий момент часу з якого почалось падіння ціни активу, а  $\Delta t_{-1}$  — інтервал часу протягом якого це падіння відбувається і відповідно  $\Omega_+$  — множина сигналів зростання ціни активів,

$\Omega_+ = \{1, t = t'_0 + \Delta t_{+1}\}$ ,  $t'_0$  — початковий момент часу з якого відбувається зростання ціни активу, і  $\Delta t_{+1}$  — інтервал часу протягом якого це зростання відбувалось.

Знайдемо закон розподілу випадкових величин  $\xi_- \in \Omega_-$  і  $\xi_+ \in \Omega_+$ . Введемо позначення:

- $p_{\xi_-}(t)$  — ймовірність того, що в момент часу  $t$  відбувається падіння ціни активу, тобто  $\xi = -1$ ;
- $p_{\xi_+}(t)$  — ймовірність того, що в момент часу  $t$  відбувається зростання ціни активу, тобто  $\xi = 1$ .

Припустимо, що:

1) ймовірність того, що відбувається сигнал в інтервалі  $\Delta t$  — нескінченно мала величина порядку  $\Delta t$ , яка дорівнює  $(\lambda_- + \lambda_+) \Delta t$ , де  $\lambda_-$ ,  $\lambda_+$  — середня кількість падіння та зростання ціни активу відповідно за одиницю часу;

2) ймовірність того, що кінець одного падіння відбувається в інтервалі  $\Delta t$  — нескінченно мала порядку  $\Delta t$ , яка дорівнює  $\mu_- \Delta t$ , де  $\frac{1}{\mu_-}$  — середній інтервал часу падіння;

3) ймовірність того, що кінець одного зростання відбувається в інтервалі  $\Delta t$  — нескінченно мала порядку  $\Delta t$ ; вона дорівнює  $\mu_+ \Delta t$ , де  $\frac{1}{\mu_+}$  — середній інтервал часу зростання.

При цих припущеннях складемо диференціальні рівняння, що описують динаміку зростання і падіння цін активів.

Ймовірність  $p(t + \Delta t)$  того, що в момент  $t + \Delta t$  відбувається сигнал, виражається у вигляді суми наступних двох несумісних залежних подій:

1. Добутку ймовірностей того, що:

- а) в момент  $t - \tau$  відбувалося падіння ціни активу —  $p_{\xi_-}(t - \tau)$ ;
- б) за період  $\tau$  відбулося завершення ринкової корекції —  $\mu_- \tau$ ;
- в) за період  $\Delta t$  відбувалося зростання ціни активу —  $p_{\xi_+}(t) \lambda_+ \Delta t$ ;
- г) протягом періоду  $\Delta t$  зростання не завершилось —  $p_{\xi_+}(t) (1 - \mu_- \Delta t)$ .

Тоді система рівнянь має вид:

$$\begin{aligned} p_{\xi_+}(t + \Delta t) &= p_{\xi_-}(t - \tau) \mu_- \tau p_{\xi_-}(t) \lambda_+ \Delta t p_{\xi_+}(t) (1 - \mu_- \Delta t) + p_{\xi_-}(t) = \\ &= p_{\xi_-}(t - \tau) \mu_- \tau p_{\xi_-}(t) \lambda_+ \Delta t p_{\xi_+}(t) + p_{\xi_-}(t) + O_1(\Delta t). \end{aligned}$$

2. Добутку ймовірностей того, що:

- а) в момент  $t - \tau$  відбувалося зростання ціни активу —  $p_{\xi_+}(t - \tau)$ ;
- б) за період  $\tau$  відбулося завершення ринкової корекції —  $\mu_+ \tau$ ;
- в) за період  $\Delta t$  відбувалося падіння ціни активу —  $p_{\xi_-}(t) \lambda_- \Delta t$ ;
- г) протягом періоду  $\Delta t$  падіння не завершилось —  $p_{\xi_-}(t) (1 - \mu_+ \Delta t)$ .

У цьому випадку

$$\begin{aligned} p_{\xi_-}(t + \Delta t) &= p_{\xi_+}(t - \tau) \mu_+ \tau p_{\xi_+}(t) \lambda_- \Delta t p_{\xi_-}(t) (1 - \mu_+ \Delta t) + p_{\xi_+}(t) = \\ &= p_{\xi_+}(t - \tau) \mu_+ \tau p_{\xi_+}(t) \lambda_- \Delta t p_{\xi_-}(t) + p_{\xi_+}(t) + O_2(\Delta t). \end{aligned}$$

Отже, ймовірність того, що за період  $\Delta t$  відбудеться сигнал, має вигляд:

$$p(t + \Delta t) = p_{\xi_-}(t - \tau)\mu_- \tau p_{\xi_-}(t)\lambda_+ \Delta t p_{\xi_+}(t) + p_{\xi_+}(t) + O_1(\Delta t) + \\ + p_{\xi_+}(t - \tau)\mu_+ \tau p_{\xi_+}(t)\lambda_- \Delta t p_{\xi_-}(t) + p_{\xi_-}(t) + O_2(\Delta t),$$

або

$$p(t + \Delta t) = p_{\xi_-}(t - \tau)\mu_- \tau p_{\xi_-}(t)\lambda_+ \Delta t p_{\xi_+}(t) + \\ + p_{\xi_+}(t - \tau)\mu_+ \tau p_{\xi_+}(t)\lambda_- \Delta t p_{\xi_-}(t) + p_{\xi_-}(t) + p_{\xi_+}(t) + O(\Delta t). \quad (5)$$

Звідки маємо:

$$p(t + \Delta t) - p(t) = p_{\xi_-}(t - \tau)\mu_- \tau p_{\xi_-}(t)\lambda_+ \Delta t p_{\xi_+}(t) + \\ + p_{\xi_+}(t - \tau)\mu_+ \tau p_{\xi_+}(t)\lambda_- \Delta t p_{\xi_-}(t) + O(\Delta t),$$

або

$$p(t) = p_{\xi_-}(t) + p_{\xi_+}(t).$$

Якщо  $O(\Delta t)$  — нескінченно мала більш високого порядку по відношенню до  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то маємо:

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = p_{\xi_-}(t - \tau)\mu_- \tau p_{\xi_-}(t)\lambda_+ p_{\xi_+}(t) + \\ + p_{\xi_+}(t - \tau)\mu_+ \tau p_{\xi_+}(t)\lambda_- p_{\xi_-}(t) + \frac{1}{\Delta t} O(\Delta t).$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  отримуємо:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \mu_- \lambda_+ \tau p_{\xi_-}(t - \tau) p_{\xi_-}(t) p_{\xi_+}(t) + \mu_+ \lambda_- \tau p_{\xi_+}(t - \tau) p_{\xi_+}(t) p_{\xi_-}(t). \quad (6)$$

Рівняння (6) і є закон розподілу ймовірності неперервної випадкової величини  $\xi \in \Omega_- \cup \Omega_+$ , при початкових умовах  $p(t) \equiv \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0$  і

$$\int_{-\tau}^{\infty} p(t) dt = 1.$$

До рівняння (6) слід додати рівняння, яке відповідає випадку, коли в момент  $t + \Delta t$  немає жодного сигналу, тобто

$$p_{\xi_0}(t + \Delta t) = p_{\xi_0}(t - \tau)(\lambda_- + \lambda_+) \Delta t + p_{\xi_0}(t)(1 - (\lambda_- + \lambda_+) \Delta t),$$

або

$$p_{\xi_0}(t + \Delta t) - p_{\xi_0}(t) = p_{\xi_0}(t - \tau)(\lambda_- + \lambda_+) \Delta t - p_{\xi_0}(t)(\lambda_- + \lambda_+) \Delta t,$$

звідки

$$\frac{p_{\xi_0}(t + \Delta t) - p_{\xi_0}(t)}{\Delta t} = (\lambda_- + \lambda_+) p_{\xi_0}(t - \tau) - (\lambda_- + \lambda_+) p_{\xi_0}(t).$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$ , отримаємо шукані рівняння:

$$\frac{dp_{\xi_0}(t)}{dt} = (\lambda_- + \lambda_+)p_{\xi_0}(t - \tau) - (\lambda_- + \lambda_+)p_{\xi_0}(t). \quad (7)$$

Рівняння (6) і (7) представляють математичну модель зміни вартості активу деякого емітента на фондовому ринку.

### **Висновок**

Автором запропоновано виділяти тренд і періодичні коливання в динаміці цін на ринку акцій за допомогою моделювання ситуацій. Побудовано диференціальні рівняння із запізненням аргументу, що описують закон розподілу ймовірностей таких явищ. Цей підхід дає можливість при наявності аналізу минулого з достатньою точністю спрогнозувати динаміку цін на активи на фондовому ринку в майбутньому. Такий підхід має перевагу при згладжуванні динаміки фондового ринку за допомогою традиційного ковзного середнього. Цей підхід використовується в технічному аналізі і найбільш точно відображає ринкові тенденції: наприклад, подолання ситуацій пов'язаних з відставанням на половину періоду від цінового ряду.

Цікавим також є задача дослідження запропонованої моделі з використанням асимптотичних методів. Асимптотичні методи дають можливість побудови функцій до яких прямують розв'язки рівнянь (6) і (7), а також побудови функцій керування, що стабілізують процеси на фондовому ринку в умовах невизначеності.

### **Літератури**

1. *Кравченко Ю.Я.* Фондовый рынок: Учебное пособие. — К.: Дакор, КНТ, 2008.
2. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения: введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
3. *Завельский М.Г., Пекарский А.В.* Методы повышения эффективности инвестиционных решений на фондовом рынке// Экономика и математические методы. — 2008. — Том 44. — №2. — С. 25—36.
4. *Кофман А.* Методы и модели исследования операций. — М.: Мир, 1966.

Стаття надійшла до редакції 26.11.09 р.