

В той же час, приховування прибутків з метою уходу від їх оподаткування та невідображення їх у фінансовій звітності не дає можливості таким компаніям розвиватися і залучати достатній обсяг інвестицій для розвитку свого бізнесу.

Література

1. Страховий рейтинг: <http://insurancetop.com>
2. Білошицький О.В. Нечітко-множинний підхід у матричній системі кредитного скорингу. — К.: Ринок цінних паперів України. — № 1—2. — 2006. — С. 96.
3. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. — М., 2002. — 181 с.
4. РА «Кредит-Рейтинг». «Методологія рейтингової оцінки страхової компанії». — <http://credit-rating.com.ua/ru/ratings/scale.html>
5. Держана комісія з регулювання ринків фінансових послуг України. «Інформація про стан і розвиток страхового ринку України за 12 місяців 2006 року», 2007 р.
6. Закон України «Про страхування» від 01.01.2008 р.
7. Sigma #4/2006 Swiss Re. «Solvency II: an integrated risk approach for European insurers», 2006 р.
8. Держфінпослуг. «Інформація про стан і розвиток страхового ринку України за 12 місяців 2006 року», 2007 р.
9. «Експерт РА». «Методика рейтингу надійності страхових компаній». — <http://www.raexpert.ru/ratings/insurance/method/>

Стаття надійшла до редакції 20.10.08 р.

УДК 311.17: 519.86

П. М. Грицюк, канд. фіз.-мат. наук,
доцент кафедри прикладної математики,
Національний університет водного господарства
та природокористування

РЕКОНСТРУКЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ВРОЖАЙНОСТІ ЗА ДАНИМИ ЧАСОВИХ РЯДІВ

АНОТАЦІЯ. Використовуючи методику реконструкції динамічних математичних моделей неавтономних систем із циклічним впливом за даними часових рядів побудовано математичну модель динаміки врожайності озимої пшениці. Модель використано для короткострокового прогнозування врожайності.

ANNOTATION. Using a technique of reconstruction of dynamical mathematical models of non-autonomous systems being under regular driving from time series data the mathematical model of winter wheat crop yield dynamics is constructed. The model is used for short-term crop yield forecasting.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. *Часові ряди врожайності, динамічна модель, прогнозування врожайності.*

1. Циклічність врожайності зернових культур. Для більшості природних процесів є характерною циклічність. Цей ефект найчастіше пояснюють періодичністю гравітаційного поля Землі, яка, в свою чергу, пояснюється періодичністю взаємного розташування небесних тіл. Циклічність притаманна й економічним процесам. Щоправда, причини цього явища зовсім інші і лежать в економічній площині. Серед економічних циклів виділяють: короткі цикли тривалістю 3—5 років; середні — тривалістю до 11 років; довгі цикли Кондратьєва тривалістю 50—60 років. Дослідження статистики врожайності озимої пшениці [1] дозволяє виявити цикли тривалістю 4 і 16—17 років. Перший цикл, на нашу думку, є проявом динаміки системи «врожайність — родюча здатність». Природа другого циклу поки що невідома.

Часові ряди врожайності сільськогосподарських культур є відображенням функціонування складного природно-економічного комплексу. Природною основою динаміки врожайності є динаміка родючої здатності ґрунту, вологості ґрунту та його температури. Родюча здатність ґрунту у даний період часу перебуває у прямій залежності від врожайності за минулий період. Висока врожайність виснажує ґрунт і зменшує родючу здатність. Низька врожайність дає змогу ґрунту відпочити і відновити свою родючу здатність. Система «родючість — врожайність» є системою типу «хижак—жертва» і породжує короткострокову циклічність врожайності з приблизним періодом у 4 роки. Статистичне підтвердження цієї гіпотези отримане в результаті гармонічного аналізу часових рядів урожайності озимої пшениці за останніх 52 роки для областей України [1].

Температура ґрунту підлягає динаміці річного циклу. Однак її випадкові відхилення від середньостатистичних значень у критичні моменти вегетації можуть мати значний вплив на врожайність. Що стосується динаміки опадів, то це є, скоріш за все, випадковий процес. Несприятливі погодні умови чинять значний негативний вплив на урожайність зернових. Найбільш частим несприятливим фактором є посуха у критичний період вегетації (рання весна). Посуха повторюється з приблизним періодом 3—4 роки.

Найбільш посушливими за останні 35 років є 1972, 1975, 1979, 1981, 1983, 1986, 1994, 1995, 1996, 1999, 2003 роки [2]. Втрати від несприятливих погодних умов можуть досягати до 50 % врожаю, проявляються випадковим чином і тому не можуть бути змодельовані в рамках динамічної моделі.

Сонячна енергія є рушійною силою біосинтезу. Тому динаміка сонячної активності повинна чинити вплив на динаміку врожайності. Багаторазові дослідження [3, 4] не дають підстав твердити про наявність прямого зв'язку між цими факторами. Однак існує вірогідність зв'язку між змінами сонячної активності та регулярністю повторень несприятливих погодних умов.

Вплив внутрішнього економічного фактора на врожайність проявляється через динаміку цін на добрива, техніку, паливно-мастильні матеріали. Зовнішнім економічним фактором виступає динаміка цін на зерно на світових ринках. У системі зерновиробництва важливим є і політичний фактор. Так, наприклад, заява українського уряду про відміну обмежень на експорт зерна (квітень 2008 р.) викликала обвал цін на зерно на світових ринках.

2. Передмодельна підготовка часового ряду врожайності. Основним об'єктом досліджень у нашій роботі будуть часові ряди врожайності озимої пшениці для областей України (дані Держкомстат України за 1955—2007 роки). Статистичні дослідження [1] показали, що в плані динаміки врожайності всі області можна розбити на дві групи. «Континентальна» група об'єднує 18 областей України. Для неї є характерними цикли довжиною 4 і 16—17 років. «Атлантична» група об'єднує 7 областей західної України. Її динаміка є в більшій мірі стохастичною, що пояснюється сильним впливом Атлантики. Використовуючи ергодичну гіпотезу у зворотному трактуванні ми об'єднуємо дані врожайності для 18 областей «континентальної» групи в об'єднаний просторово-часовий ряд, який містить 954 елементи [5] (рис. 1).

Кожному року відповідає 18 послідовних рівнів, які відповідають середньообласним значенням врожайності (порядок областей фіксований). Нижні стовпці відображають оцінку втрат урожаю Δ_i в окремі роки внаслідок несприятливих природно-кліматичних умов.

На рис. 1 добре видно «провали», які відповідають рокам із несприятливими погодними умовами. Зрозуміло, що динамічна модель не може моделювати такі провали, які проявляються, в значній мірі, випадково. Тому першим кроком підготовки часового ряду до моделювання повинно бути його вирівнювання. Вирівнювання було проведено нами за критерієм мінімального серед-

ньоквадратичного відхилення від трьохгармонічного тренду, який зарекомендував себе надійною моделлю динаміки врожайності [6].

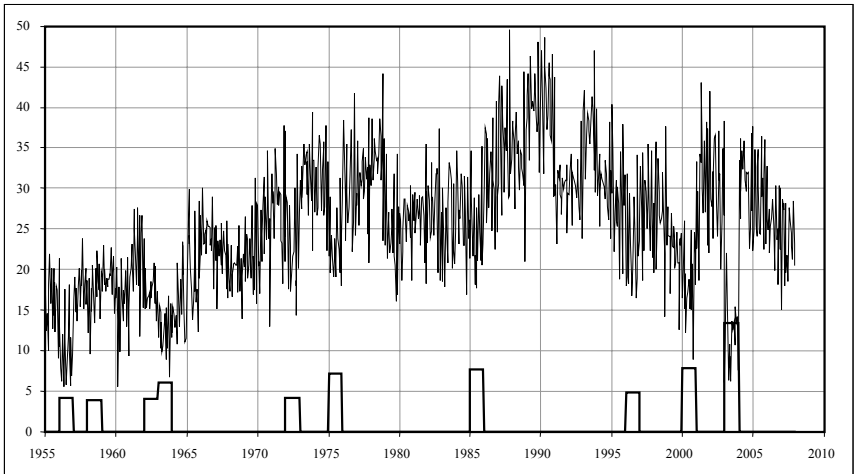


Рис. 1. Об'єднаний ряд врожайності озимої пшениці

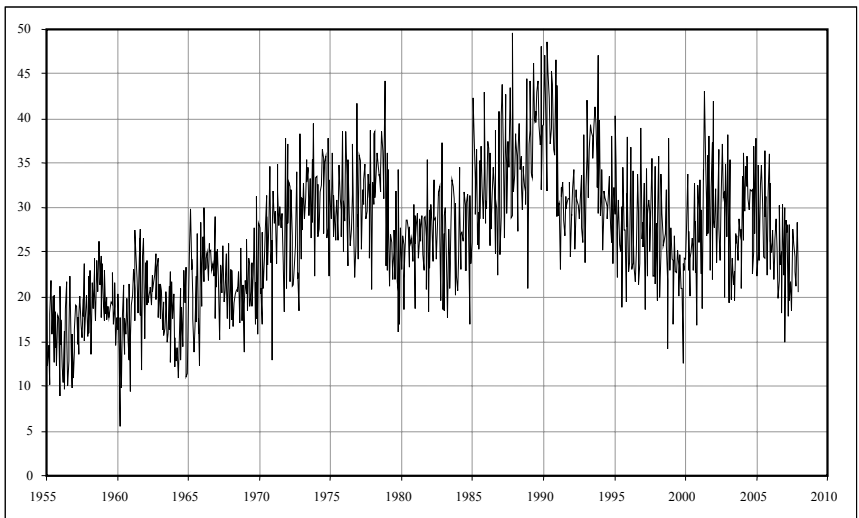


Рис. 2. Вирівняний ряд врожайності озимої пшениці

З метою вирівнювання всі значення урожайності, які відповідають i -му неврожайному року були збільшені на деяку величину

Δ_i , значення якої мінімізує функціонал похибки у сенсі найменших квадратів. Значення Δ_i є оцінкою середніх втрат урожаю у даному році. Результат вирівнювання об'єднаного ряду врожайності представлений на рис. 2.

Кожен часовий ряд є конкретною реалізацією випадкового або зашумленого детермінованого процесу. Для дослідження статистичних характеристик процесу слід переконатися, що процес є стаціонарним. У противному разі необхідно змодельювати і виділити тренд. Процес зерновиробництва за спостережуваний період можна розділити на два якісно різних підперіоди, які характеризуються різними економіко-політичними умовами. Перший підперіод об'єднує 1955—1990 рр. і характеризується ростом врожайності, пов'язаним із розвитком технологій при стабільному економіко-політичному кліматі. Другий підперіод об'єднує 1991—2007 рр. і характеризується деяким спадом врожайності, що пояснюється як загальнодержавною економічною кризою, пов'язаною з труднощами народження і росту нової держави, так і з посиленням диспаритету цін на техніку, паливно-мастильні матеріали, добрива та засоби захисту рослин від шкідників з одного боку і цінами на зерно з іншого. Тому логічним буде наступна конструкція тренду: зростаючий лінійний участок на інтервалі 1955—1990 рр. і спадний лінійний участок на інтервалі 1991—2007 рр. Після вилучення такого білінійного тренду ми отримуємо стаціонарний ряд залишків, представлений на рис. 3.

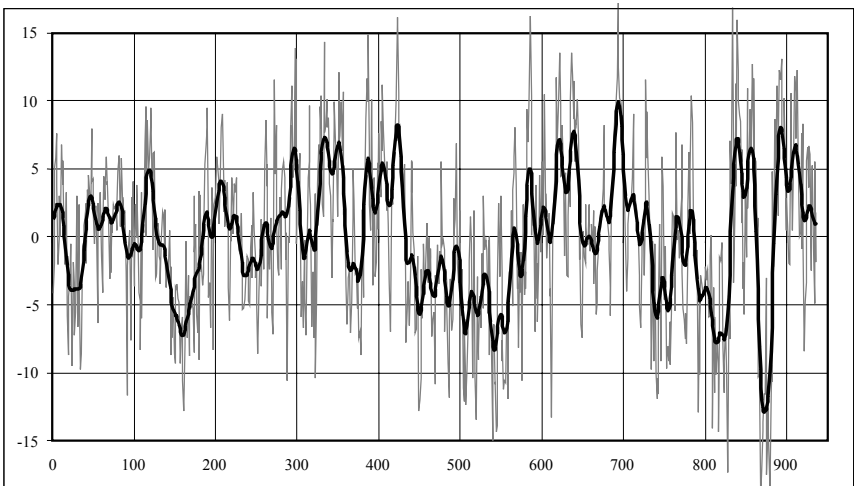


Рис. 3. Ряд залишків та його згладжування

Важливу інформацію про динамічні властивості ряду залишків дає його автокореляційна функція (рис. 4). Вигляд автокореляційної функції (повільне спадання за степеневим законом) свідчить про наявність ефекту довготривалої пам'яті, тобто про детермінований характер динаміки врожайності [7].

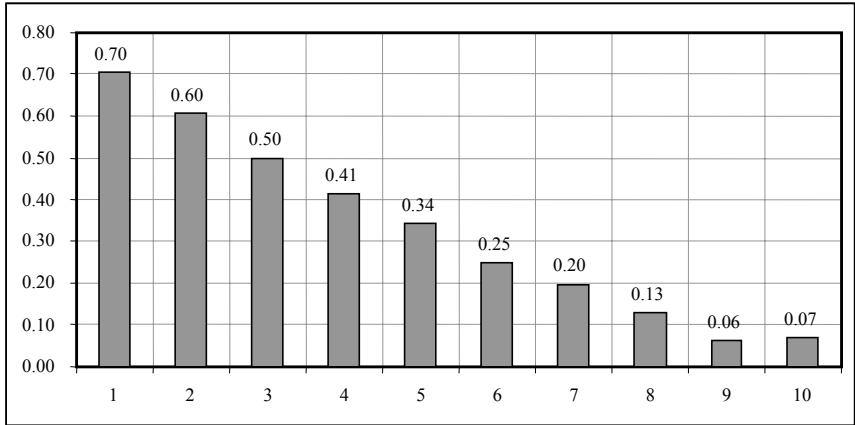


Рис. 4. Автокореляційна функція ряду залишків

Наступним етапом передмодельної підготовки ряду є його згладжування. Кожен часовий ряд, який генерується природною чи економічною системою, є у значній мірі «зашумленим» стохастичними збуреннями. Для виявлення прихованої динаміки слід відфільтрувати високочастотні шуми. Одним з найпоширеніших методів фільтрування сигналу є метод віконного перетворення Фур'є [8]. Для покращення частотної характеристики фільтра використовують зважуючі коефіцієнти, які плавно зменшують до нуля досліджуваний сигнал на краях вікна. Якщо вважати, що сторонні шуми є гауссовим випадковим процесом, то оптимальною формою зважуючого вікна буде гауссіан. Ядром згортки виступає функція

$$K(x, \sigma) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Тут x — елементи ряду врожайності, σ — параметр, що визначає ширину вікна. Чим більша ширина гауссової кривої, тим сильнішим буде ефект згладжування. Повна ширина зважуючого вікна визначається співвідношенням:

$$w_z = 2w = 2\sigma \cdot \sqrt{8 \lg(2)}. \quad (2)$$

Алгоритм фільтрування складається з наступних кроків: 1. Перетворення Фур'є початкового ряду; 2. Перетворення Фур'є ядра згортки; 3. Множення отриманих перетворень; 4. Обернене Фур'є-перетворення добутку. Розрахунки були виконані нами з використанням пакету Mathematica при значенні параметра $w = 6$. Результат згладжування об'єднаного ряду урожайності представлений на рис. 3 (жирна лінія).

3. **Дослідження спектральної щільності.** Основними характеристиками стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ є кореляційна функція $k_x(\tau)$, $\tau = t_i - t_j$ та функція спектральної щільності $S_x(\omega)$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

$$k_x(\tau) = M[X(t)X(t+\tau)] = \frac{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}. \quad (4)$$

Для спектральної щільності систем з дискретним спектром зовнішньої дії характерні чітко виражені максимуми. Це означає, що система знаходиться під регулярним (циклічним) впливом деяких факторів. У якості прикладу розглянемо математичну модель неавтономного осцилятора Тої, який знаходиться під регулярним зовнішнім впливом (рис. 5) [9]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + 1 - e^{-x} = \varphi(t). \quad (5)$$

Тут
$$\varphi(t) = A \left(\exp \left(- \left(\frac{\tau(t)}{\sigma} \right)^2 \right) - \exp \left(- \left(\frac{\tau(t+T/2)}{\sigma} \right)^2 \right) \right),$$

$$\tau = (t - t_0) \bmod T - \frac{T}{2}.$$

Періодограма (залежність спектральної щільності від періоду коливаний) осцилятора Тої представлена на рис. 6. Як і слід було сподіватися, вона характеризується одним, чітко вираженим максимумом, який відповідає періоду зовнішньої дії.



Рис. 5. Періодичні гауссові імпульси впливу $\varphi(t)$ на осцилятор Тоди

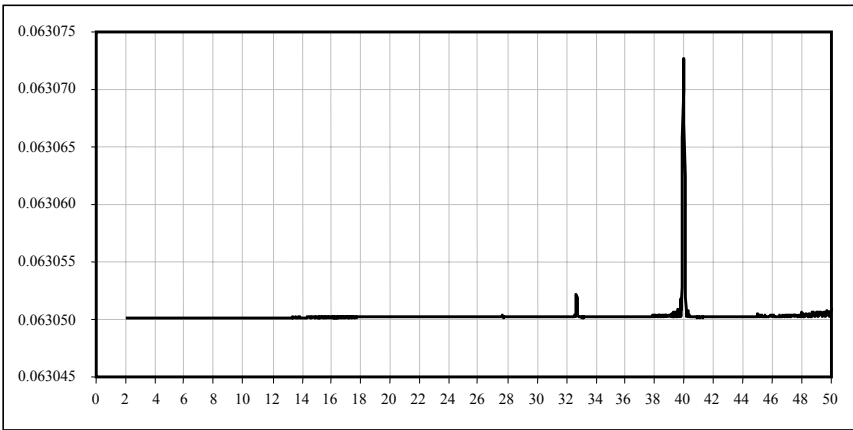


Рис. 6. Періодограма осцилятора Тоди

Проведемо дослідження функції спектральної щільності згладженого ряду залишків урожайності озимої пшениці. Періодограма спектральної щільності представлена на рис. 7 і характеризується двома піками. Перший (вузький) відповідає періоду циклічності 4 роки, який є практично однаковим для всіх областей. Другий (розширений) відповідає періоду циклічності 16—18 років, який дещо відрізняється для різних областей. Для більш точного визначення періоду циклічності слід застосувати гармонічний аналіз.

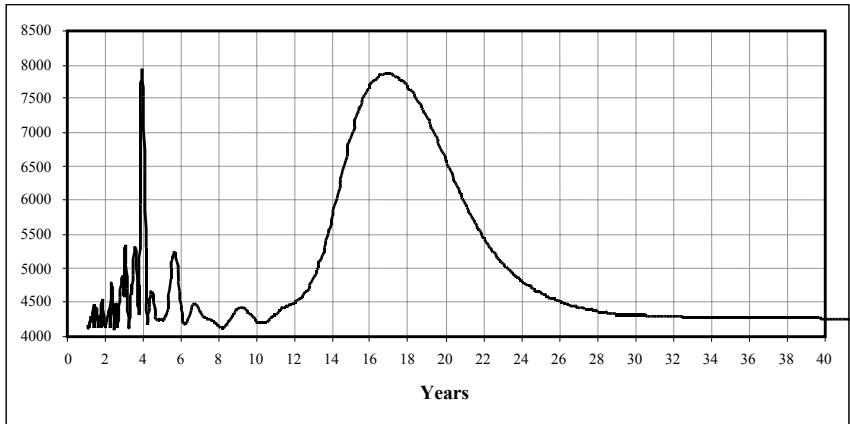


Рис. 7. Періодограма згладженого ряду залишків урожайності озимої пшениці

4. Гармонічний аналіз часових рядів. У роботах [1, 5, 6] було показано, що для системи зерновиробництва України як і для більшості економічних систем є притаманною чітко виражена циклічність. Приймавши гіпотезу про гармонічний характер циклів, для моделювання динаміки врожайності можна використати полігармонічну модель. В основі моделі лежить припущення про те, що детрендована функція врожайності є сумою кількох гармонік і випадкового чинника (шуму). Для визначення параметрів моделі використовується метод найменших квадратів у комбінації з повним перебором значень періоду. Така методика дозволяє виділити гармонічні цикли, які є найхарактернішими для даної динамічної системи. У загальному вигляді полігармонічна модель має вигляд (m — кількість головних гармонік):

$$x_t^* = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cos(\omega_i t) + \sum_{i=1}^m b_i \sin(\omega_i t). \quad (6)$$

Тут x_t^* — модельне значення врожайності, a_i, b_i — амплітуди i -ої гармоніки, $\omega_i = 2\pi/T_i$ — циклічна частота, T_i — період гармоніки, t — поточний час. Значення параметрів i -ої гармоніки ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) послідовно визначалися з умови мінімуму функціонала похибки моделі

$$\Psi = \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{T \max} (x_t - a_0 - a_i \cdot \cos(\omega_i t) - b_i \cdot \sin(\omega_i t))^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

Тут x_i — фактичні значення врожайності. Якщо процесу дійсно властива циклічність, значення амплітуд перших гармонік повинні монотонно спадати. У протилежному випадку можна зробити висновок, що даний процес не є циклічним. Ще одна умова статистичної значимості полягає у тому, що амплітуда виділеної гармоніки повинна перевищувати середньоквадратичне відхилення ряду залишків.

Для того щоб полігармонічна модель адекватно відображала динаміку зашумленого детермінованого процесу, необхідно вирішити питання про кількість гармонік, які слід включати у модель. Практика гармонічного аналізу показує, що виділені гармоніки можна розділити на дві групи. Амплітуди кількох перших гармонік набагато перевищують амплітуди решти гармонік. Ці гармоніки описують детерміновану складову процесу. Інші гармоніки, амплітуди яких майже не відрізняються за величиною, описують шумовий фон.

5. Реконструкція математичної моделі за даними часових рядів. Основним методом побудови динамічних математичних моделей об'єктів і систем є диференціальні рівняння. Динамічна модель дозволяє однозначно передбачити стан системи у довільний момент часу за її початковим станом. Найчастіше при побудові модельних диференціальних рівнянь, слідуючи принципу «від загального до часткового», виходять з фундаментальних законів, яким підкоряються модельовані об'єкти. Перевагою такого класичного підходу є те, що при цьому є цілком прозорим фізичний зміст змінних та параметрів. Класична методика багаторазово апробована у різних галузях науки і техніки.

Проте можна навести багато прикладів, коли інформації про об'єкт недостатньо або ж базову систему рівнянь записати неможливо через складність системи. Наприклад, про хід процесів на далекій зірці можна судити лише по залежності її світності від часу. Інформація про динаміку системи зерновиробництва відображається часовими рядами врожайності. Одним з шляхів отримання математичних моделей у таких ситуаціях є конструювання рівнянь за експериментальними часовими рядами [9—11].

Процедуру отримання модельних рівнянь за часовими рядами називають реконструкцією рівнянь. Якщо для спостережень доступним є лише скалярний часовий ряд (значення одного параметра), спочатку необхідно «відновити» часовий ряд векторів станів системи у фазовому просторі розмірності D . Цю процедуру називають реконструкцією фазової траєкторії [12—13]. Одним з часто використовуваних методів є метод послідовного диференці-

ювання, згідно з яким координатами вектора стану в момент часу t_i є послідовні часові похідні спостережуваної величини $x(t_i)$ у цей момент:

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= x(t_i), \\ x_2(t_i) &= \frac{dx(t_i)}{dt}, \\ &\dots \\ x_D(t_i) &= \frac{d^{D-1}x(t_i)}{dt^{D-1}} = F(x, t). \end{aligned} \tag{8}$$

Реконструкція математичної моделі у вигляді системи диференціальних рівнянь відбувається за наступною схемою. На першому етапі на підставі апріорних даних, за оцінкою розмірності множини, відновленої у фазовому просторі за часовим рядом, вибирається розмірність D моделі, а також вигляд функції $F(x, t)$, за допомогою якої буде здійснюватися апроксимація. Функція повинна адекватно відображати динаміку циклічного зовнішнього впливу на систему зерновиробництва. Вибір розмірності моделі D можна здійснити на основі попереднього аналізу часового ряду [14, 15]. У нашому випадку $D = 3$, тобто ми будемо будувати модель динаміки урожайності у трьохвимірному фазовому просторі.

На наступному етапі часовий ряд розділяється на дві частини: навчальну вибірку (більша частина ряду) і контрольну вибірку. Перша служить основою для побудови моделі, друга призначена для оцінки моделі. Навчальна вибірка піддається процедурам вирівнювання та згладжування, за допомогою яких подавляються шуми. На третьому етапі шукану функцію F представляють за допомогою вибраних на першому етапі базисних функцій з невідомими коефіцієнтами і знаходять значення коефіцієнтів, які забезпечать найкращу відповідність моделі та експериментальних даних. На четвертому етапі результати прогнозування отримані на базі отриманої моделі порівнюють з даними тестової частини ряду. При цьому оцінюють якість отриманої моделі, використовуючи критерії, що визначаються метою моделювання. Протестовану модель можна використовувати для реального моделювання динаміки врожайності.

Ми будемо будувати математичну модель динаміки врожайності у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \quad \frac{dx_{D-1}}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_{D-1}) + g(t). \quad (9)$$

Функція $g(t)$ моделює зовнішню періодичну дію, функція $f(x_1, x_2)$ повинна моделювати авторегресійну залежність врожайності. Стандартним методом представлення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_{D-1})$ є поліном наступного вигляду:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{D-1}) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{D-1}}^K c_{l_1, l_2, \dots, l_{D-1}} \prod_{j=1}^{D-1} x_j^{l_j}, \quad \sum_{j=1}^{D-1} l_j \leq K, \quad (10)$$

де K — максимальний степінь полінома. Для представлення функції $g(t)$ використовують суму кількох гармонік із частотами, які є кратними до основної частоти $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$. У складніших випадках, якими є реальні природно-економічні системи для представлення $g(t)$, використовують кілька основних гармонік із частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ та їхні субгармоніки:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k_1} (a_j \cos(\omega_1 j t) + b_j \sin(\omega_1 j t)) + \dots + \sum_{j=1}^{k_m} (a_j \cos(\omega_m j t) + b_j \sin(\omega_m j t)) \quad (11)$$

У відповідності до описаної вище схеми процедура побудови моделі буде складатися з наступних кроків:

- За вирівняним детрендованим згладженим часовим рядом урожайності $\{x_i\}$ розрахувати часові ряди похідних $\left\{ \frac{dx(t_i)}{dt} \right\}$,

$$\left\{ \frac{dx^2(t_i)}{dt^2} \right\}.$$

- Побудувати функції, які апроксимують залежність $\left\{ \frac{dx^2(t_i)}{dt^2} \right\}$ від x і t .

- Перевірити ефективність побудованої моделі на тестовій вибірці.

Першу задачу розв'язують шляхом чисельного диференціювання. При відсутності шумів для цього можна використати стандартні формули першого порядку

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1} - x_i, \quad (12)$$

або більш точні формули вищих порядків:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{2x_{i+2} + x_{i+1} - x_{i-1} - 2x_{i-2}}{10}. \quad (13)$$

При наявності шуму формули (12, 13) дають дуже великі похибки, а тому для знаходження похідної використовують метод локального лінійного тренду [16]. При цьому похідну визначають як коефіцієнт нахилу трендової прямої.

6. **Підгонка моделі.** Для визначення коефіцієнтів функцій $f(x_1, x_2)$ та $g(t)$ ми використали нелінійний варіант методу найменших квадратів. Його суть полягає в наступному.

1. Початкові значення частот основних гармонік визначалися методом гармонічного аналізу згладженого ряду залишків.

2. Коефіцієнти полінома $f(x_1, x_2)$ та функції $g(t)$ визначалися звичайним методом найменших квадратів шляхом розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$. Через велику розмірність така система зазвичай буває погано означеною. Тому доводилося виконувати процедуру регуляризації системи за Тихоновим [17]. Задачу розв'язування погано означеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$ можна замінити задачею відшукування мінімуму функціоналу Тихонова:

$$\Omega(x, \lambda) = |Ax - b|^2 + \lambda|x - x_0|^2. \quad (14)$$

Можна показати, що ця задача зводиться до розв'язування іншої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A^T A + \lambda I) \cdot x = A^T B + \lambda x_0. \quad (15)$$

Тут x_0 — початкова апріорна оцінка розв'язку системи.

3. На наступному етапі уточнювалися частоти основних гармонік (метод покоординатного спуску).

4. Пункти 2 і 3 повторювалися до досягнення необхідної точності підгонки моделі під навчальну вибірку.

7. Реконструкція математичної моделі динаміки врожайності. Для апробування описаної вище методики проведемо реконструкцію математичної моделі за хаотичним часовим рядом, у ролі якого виступає чисельний розв'язок неавтономного рівняння осцилятора Тоди (5). Розв'язок було отримано методом Рунге-Кутта четвертого порядку при величині кроку $\Delta x = 0,01$. Для побудови моделі був використаний поліном 6-го порядку і одна основна гармоніка з кратністю частоти 30. Результати реконструкції фазового портрета (рис. 8) свідчать про хорошу точність моделі.

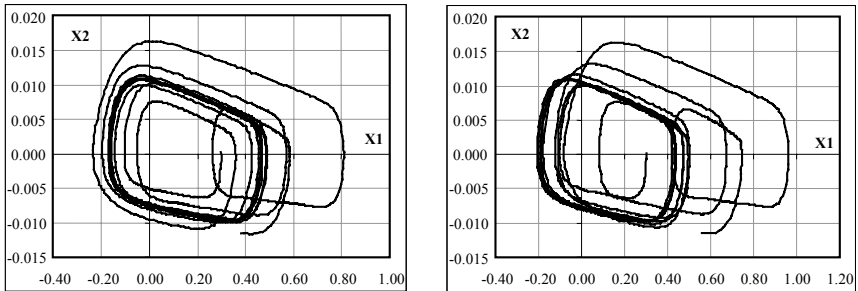


Рис. 8. Фазовий портрет неавтономного осцилятора Тоди: зліва оригінал, справа реконструкція

Застосуємо ту ж методику для реконструкції математичної моделі динаміки урожайності. Сформуємо навчальну вибірку у кількості 774 елементи та контрольну вибірку у кількості 180 елементів. Використання поліномів не підвищувало точності реконструкції, тому для побудови моделі ми використали лише 5 основних гармонік з кратністю частоти 60. Періоди гармонік, отримані в результаті підгонки моделі, становили відповідно 15,80; 3,98; 20,74; 12,18; 5,83 років. Вигляд фазового портрета моделі (рис. 9) свідчить про хорошу точність реконструкції.

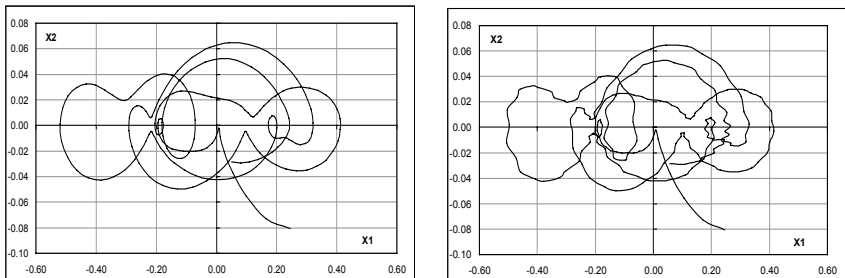


Рис. 9. Фрагмент фазового портрета динаміки урожайності: зліва оригінал, справа реконструкція

Наступним етапом нашої роботи стало тестування побудованої нами моделі на контрольній вибірці. Якщо модель є адекватною до динаміки урожайності, вона повинна не лише точно відобразити функцію врожайності у межах навчальної вибірки (елементи згладженого вирівняного ряду урожайності 1—774), а й мати хорошу точність за її межами (елементи з номерами 775—954). Результати тестування моделі, які представлені на рис. 10, свідчать про адекватність моделі за межами контрольної вибірки. Що стосується точності прогнозу, то вона є хорошою для перспективи 1 рік (18 точок ряду). Для більш далекої перспективи точність погіршується. При цьому проявляється досить сильна залежність прогнозу від параметрів моделі. Слід зауважити, що така ситуація є характерною для нелінійних динамічних систем.

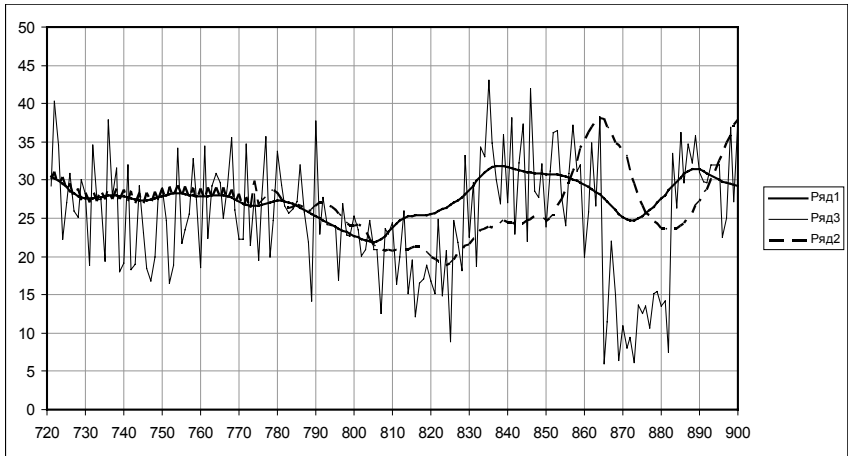


Рис. 10. Реконструкція ряду урожайності
 Ряд 1 — тренд вирівняного ряду урожайності,
 ряд 2 — реконструкція ряду урожайності, ряд 3 — ряд урожайності.
 Довжина навчальної вибірки — 772 елементи

Завершальним етапом роботи стала побудова прогнозу врожайності для 2008 року. Для побудови прогнозної моделі ми включили у навчальну вибірку 918 елементів, у контрольну — 36 елементів. Результати прогнозування представлені на рис. 11.

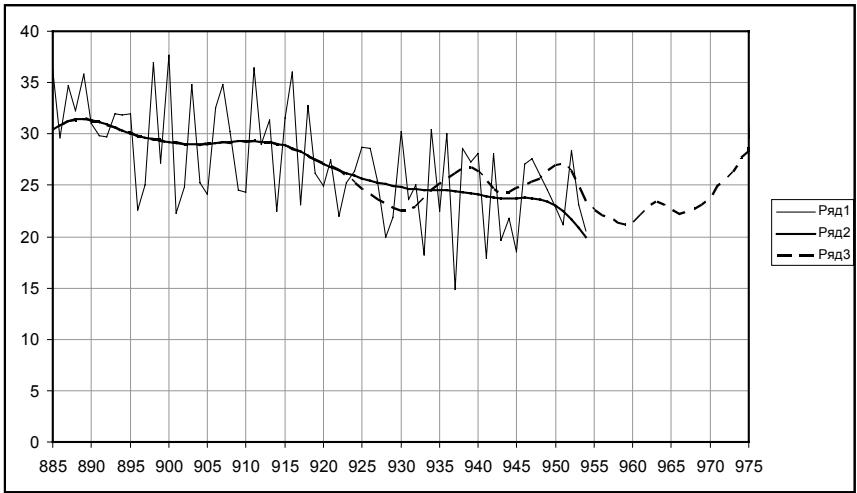


Рис. 11. Прогнозування урожайності озимої пшениці
 Ряд 1 — фактична урожайність, ряд 2 — тренд урожайності, ряд 3 — прогноз.
 Елементи 1: 918 — навчальна вибірка, 919: 954 — контрольна вибірка,
 955: 972 — прогноз

8. **Висновки.** Нами досліджена проблема реконструкції моделі динаміки врожайності за даними часових рядів на прикладі озимої пшениці. Для реконструкції моделі було використано об'єднаний ряд динаміки урожайності для 18 областей України за період спостережень 53 роки. Попередні дослідження циклічності урожайності озимої пшениці дозволили ідентифікувати систему зерновиробництва як неавтономну динамічну систему із дискретним спектром зовнішньої дії. Зовнішня дія моделюється полігармонічною функцією, побудованою на базі 5 основних гармонік. Реконструкція та тестування моделі підтвердили її адекватність. Модель була використана для побудови прогнозу врожайності на 2008 рік. У даній роботі розроблена нова методика реконструкції математичної моделі реальних динамічних систем за даними скалярного часового ряду, яка включає фільтрування високочастотних шумів та ліквідацію впливів сильних стохастичних збурень.

Література

1. Грицюк П.М. До питання про циклічність урожайності зернових // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наукових праць. — К.: КНЕУ, 2008. — Вип. 77.

2. <http://www.lol.org.ua/ukr/> 11.11.2004
3. Слущкий Е.Е. Статистический эксперимент как метод исследования // Журнал геофизики. — 1935. — Том V. — № 1(15). — С. 18—38.
4. Эффективность прогнозов по технологии «ЗОИТ» / Под ред. И.Б. Загайтова, Л.П. Яновского. — Воронеж: ВГАУ, 2001. — 206 с.
5. *Витлинський В.В., Грицюк П.М.* Дослідження динаміки урожайності озимої пшениці для областей України // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наукових праць. — К.: КНЕУ, 2007. — Вип. 76. — С. 275—295.
6. *Витлинский В.В., Грицюк П.М.* Полигармоническое прогнозирование как метод минимизации инвестиционных рисков в зернопроизводстве // Труды Международной Научной Школы МА БР — 2008 / СПб.: ГУАП, 2008.
7. *В.Д.Дербенцев, В.М.Соловйов, О.Д.Шаранов.* Дослідження довготривалої пам'яті фінансово-часових рядів. // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наукових праць. — К.: КНЕУ, 2005. — Вип. 72. — С. 5—17.
8. <http://imaging.mrc-cbu.cam.ac.uk/imaging//PrinciplesSmoothing>
9. *B. Bezruchko, D. Smirnov.* Nonlinear Dynamical Models from Chaotic Time Series: Methods and Applications // in Handbook of Time Series Analysis B. Schelter, M. Winterhalder, J. Timmer, 2006, Ch. 8, P. 193-223.
10. *Crutchfield J. P., McNamara B. S.* Equations of motion from a data series // Complex Systems, 1987, Vol. 1(3), p.417-452.
11. *Gouesbet G. and Letellier C.* Global Vector-Field Reconstruction By Using a Multivariate Polynomial L2 Approximation on Nets // Physical Review E, 1994, Vol. 49(6), p.4955-4972.
12. *Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D. & Shaw R. S.* Geometry from a time series, Phys. Rev.Lett. 45(9), 712-716, 1980.
13. *Takens F.* Dynamical Systems and Turbulence // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. — 1981. — V 898. — S. 366-381.
14. *Broomhead D.S., King G.P.* Extracting qualitative dynamics from experimental data. Physica 20D, 1986, 217-236.
15. *Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I.* «Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction», Phys.Rev. A, 1992, Vol. 45, №6, p.3403-3411.
16. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А.* Реконструкция обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам. — Саратов: Колледж, 2000. — 46 с.
17. *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* Методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1979.

Стаття надійшла до редакції 20.01.09 р.