

2. Райхельд, Фредерик Ф. Эффект лояльности: движущие силы экономического роста, прибыли и непреходящей ценности / Фредерик Ф. Райхельд. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 384 с.
3. Котлер Ф. Маркетинг. Гостеприимство и туризм: / Ф. Котлер, Дж. Боуэн, Джеймс Мейкенз. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 787 с.
4. Javalgi R. G. Service loyalty: implications for service providers / R. G. Javalgi, C. R. Moberg // Journal of Services Marketing. – 1997. – Vol. 11, 3. – С. 165-179.
5. Цысарь А. В. Лояльность покупателей: основные определения, методы измерения, способы управления / А. В. Цысарь // Маркетинг и маркетинговые исследования в России. – 2002. – № 5. – С. 55-61.
6. Ламбен Жан-Жак Стратегический маркетинг. Европейская перспектива / Жан-Жак Ламбен. – М. : Наука, 1996. – 589 с.
7. Кузнецов А. Методика оценки характера поведения потребителей / А. Кузнецов // Экономика Украины. – 1999. – №8. – С. 41-47.
8. Херрманн А. Детерминанты толерантного отношения к цене / А. Херрманн, Ф. Хубер, М. Врике // Проблемы теории и практики управления. – 2004. – №1. – С. 96-102.
9. Компьютерная піддержка складних організаційно-технічних систем / [Борисов В.В., Бычков И. А., Деметьев А. В. и др.]. – М. : Горячая линия-Телеком, 2002. – 154 с.
10. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф. С. Робертс. — М. : Наука, 1986. – 494 с.

УДК 330.51

## **АНАЛІТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ ДИНАМІКИ РИЗИКУ ЕКОНОМІЧНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З УРАХУВАННЯМ КОРУПЦІЇ І ТІНЬОВОЇ ЕКОНОМІКИ**

Вітлінський В.В., д.е.н., професор, Коляда Ю.В., к.т.н., доцент

*Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана*

На основі математичної моделі динаміки взаємодії корупції, тіньової і легальної економік отримано аналітичні вирази мажорантного типу щодо оцінювання обсягів складових економічної еволюції та ступеня ризику (ймовірності) їх співіснування. Оскільки згадані оцінки є функції незалежної змінної часу, то цілком правомірно говорити про динаміку числової міри ризику.

*Ключові слова: математична модель, оцінки згори, динамічний ризик.*

Витлинский В.В., Коляда Ю.В. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ДИНАМИКИ РИСКА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ С УЧЕТОМ КОРРУПЦИИ И ТЕНЕВОЙ ЭКОНОМИКИ / Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана, Украина.

На основе математической модели динамики взаимодействия коррупции, теневой и легальной экономик получены аналитические выражения мажорантного типа относительно оценивания объемов составляющих экономической эволюции и степени риска (вероятности) их сосуществования. Поскольку упоминавшиеся оценки являются функциями независимой переменной времени, то полностью правомерно говорить о динамике числовой меры риска.

*Ключевые слова: математическая модель, оценки сверху, динамический риск.*

Vitlinskiy V.V., Kolyada Y.V. ANALYTICAL EVALUATION OF DYNAMICS OF RISK OF ECONOMIC EVOLUTION TAKING INTO ACCOUNT CORRUPTION AND SHADOW ECONOMY / Vadym Hetman Kyiv National Economic University, Ukraine.

On subsoil of mathematical model of dynamics of co-operation of corruption, shadow and legal economies analytical expressions of majorant type are got in relation to the evaluation of volumes component an economic evolution and degree of risk (probabilities) of their coexistence. As the mentioned estimations are the functions of independent variable of time, it is fully legitimate to talk about the dynamics of numerical measure of risk.

*Key words: mathematical model, estimations from above, dynamic risk.*

## ВСТУП

Аналіз низки літературних джерел показує, що корупція і тіньова економіка завжди супроводжують офіційний (легальний) економічний процес (надалі легальну економіку). Інакше кажучи, потворні явища корупції і тіньової економіки є вічними супутниками легальної економіки.

Феноменологічне вивчення соціально значимих, але негативних за своїм змістом та антисуспільною спрямованістю явищ корупції і тіньової економіки, відбувається в межах соціально-економічного процесу кожної країни, зважаючи на існуючий між цими процесами тісний взаємозв'язок. Аналітичне дослідження кожної із зазначених складових окремо та в комплексі є цілком виправданим, зважаючи на низку об'єктивних причин, але може, на перший погляд, виглядати дещо проблематичним. Між іншим, економетричне моделювання згадуваних явищ у комплексі досить важке або навіть неможливе, тому що, зокрема, відсутні статистичні дані про масштаби явищ, їх прояви і правила, що діють усередині обтяженої корупцією досліджуваної економічної системи.

Інтерес суспільства до вивчення паразитуючих на тілі легальної економіки явищ тіньової економіки та корупції цілком зрозумілий, він постійно перебуває в центрі уваги громадськості. Гострота зазначеної проблеми не вщухає дотепер, із часом вона лише посилюється.

## АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Неупереджений і критичний погляд на праці останнього часу, наприклад, монографія [1] і журнальна стаття [2] та літературні джерела в них, привертає увагу до прикметного у вивченні проблеми співіснування тіньової економіки і корупції в суспільстві, а саме:

- 1) дослідження носять головним чином вербальний характер, що є тільки передумовою отримання адекватного математичного опису;
- 2) переважно спостерігається юридичне вивчення наслідків протиправної діяльності та її законодавче унеможливлення;
- 3) того економетричного аналізу досліджуваних процесів, що є в літературі, свідомо недостатньо, бо спостерігається значна динаміка подій і відчувається брак статистичної інформації;
- 4) найголовніше те, що сьогоденне вивчення потворних явищ корупції та тіньової економіки здійснюється як окремо розглядувані фактори економічної дійсності, хоча існуючі між ними взаємозв'язок і взаємовплив незаперечні.

Отже, у дослідженні еволюції економіки суспільства спостерігається нічим не виправдане розмежування складових економічного процесу, тобто домінує вивчення окремо взятої легальної економіки без одночасного урахування сектора і корупції.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Мета цієї праці полягає в такому:

- а) для утвердження тези про сумісне розглядання сукупної взаємодії складових економічної дійсності запропонувати математичну модель (ММ) досліджуваного явища;
- б) провести аналітичне дослідження рівнянь ММ та отримати мажорантні оцінки щодо обсягів легальної і тіньової економіки та рівня корупції;
- в) на підґрунті вищезазначених оцінок розглянути динаміку ризику подій, що утворюють економічну дійсність.

Слід підкреслити, що проголошений у статті підхід до вивчення реальної економіки є принципово новим і суттєво відрізняється від економетричного дослідження. Отримані в роботі результати поповнюють скарбницю економічного ризику та його динаміки.

## ВИКЛАД РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

На базі аналогій між досліджуваною нами проблемою та відомою задачею з математичної біології [3] щодо співіснування популяцій трьох залежних один від одного видів пропонується математична модель (ММ) динаміки взаємодії корупції, тіньової та легальної економік.

Попередньо прийемо таку гіпотезу: корупція живиться тіньовою економікою, котра, зокрема, співіснує з легальною економікою, водночас зростання останньої нічим не обмежується. Вважатимемо також, що корупція значно зменшується за відсутності тіньової економіки. Звичайно, висловлені вище припущення не відображають у всій повноті взаємозв'язки і взаємовпливи між корупцією і тіньовою економікою, які паразитують на тілі легально діючої економіки. Необхідно наголосити, що в науковій літературі вивченню цих складових економічного процесу приділяється ще недостатньо уваги.

Слушно синтезувати таку математичну модель (ММ) нелінійної парадигми еволюції економіки в координатах: корупція –  $N_1(t)=N_1$ , тіньова економіка –  $N_2(t)=N_2$  і легальна економіка –  $N_3(t)=N_3$ , яку можна представити у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку:

$$\begin{cases} \beta_1 \frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 \beta_1 + a N_2 \bar{Y}_1 \\ \beta_2 \frac{dN_2}{dt} = \alpha_2 \beta_2 - a N_1 + b N_3 \bar{Y}_2, \\ \beta_3 \frac{dN_3}{dt} = \alpha_3 \beta_3 - b N_2 \bar{Y}_3 \end{cases} \quad (1)$$

де величини  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  відповідно є характерними проміжками часу стосовно релаксації змінних моделі;  $\alpha_i$  ( $i=1,2,3$ ),  $a, b$  – відповідні числові коефіцієнти моделі; вважатимемо, що  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b > 0$ . Прийmemo також гіпотезу, що функції  $N_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ) диференційовані, а їхні числові значення відповідають відповідно обсягам корупції, тіньової та легальної економік у деякий момент часу  $t$ .

Сутність системи рівнянь (1) є досить прозорою й очевидною. Дійсно, характер зростання обсягів легальної економіки є експоненціальним за відсутності тіньової економіки, що впливає з третього рівняння моделі. Водночас, зростання обсягів тіньової економіки гальмує зростання обсягів легальної економіки, що відображається відповідним доданком  $-bN_2$ . Щодо другого рівняння системи (1), то за відсутності змінної  $N_3$  рівень обсягів тіньової економіки експоненційно спадає, оскільки з другого рівняння моделі впливає, що функція  $N_2$  є функцією експоненціального виду з від'ємним показником степеня. Насамкінець, аналізуючи перше рівняння системи (1) бачимо, що корупція  $N_1$  зникає, коли відсутня тіньова економіка (знову ж таки функція  $N_1$  експоненціального виду з від'ємним показником степеня).

Для функцій  $N_i(t)$  ( $i=1,2,3$ ), числові значення яких відображають обсяги корупції, тіньової та легальної економік описуються такими виразами:

$$N_1(t) = N_1(t_0) \exp\left(\left(\frac{a}{\beta_1} \bar{N}_2 - \alpha_1\right) \bar{Y}_1 (t-t_0)\right), \quad (2)$$

де  $\bar{N}_2$  - середнє значення обсягів тіньової економіки за період  $(t-t_0)$ ; зрозуміло, що зростання тіньової економіки сприяє зростанню обсягів корупції за рахунок доданка  $\frac{a}{\beta_1} \bar{N}_2$ ;

$$N_2(t) = N_2(t_0) \exp(-\alpha_2(t-t_0)) \exp\left(-\frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1(t-t_0)\right) \exp\left(\frac{b}{\beta_2} \bar{N}_3(t-t_0)\right), \quad (3)$$

де  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_3$  є середні величини відповідно обсягів корупції та легальної економіки (за період  $(t-t_0)$ ); перший експоненціальний множник  $\exp(-\alpha_2(t-t_0))$  свідчить про спадання рівня обсягів тіньової економіки з плином часу, що є прикметою самоорганізації розглядуваної економічної системи. Другий співмножник  $\exp\left(-\frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1(t-t_0)\right)$  вказує на те, що корупція живиться за рахунок тіньової економіки, яка сплачує своєрідний «податок» (від'ємний показник степеня). Третій експоненціальний співмножник засвідчує те, що тіньова економіка паразитує на тілі легальної економіки (співіснує з нею). Проаналізуємо аналітичний вираз стосовно динаміки обсягів легальної економіки:

$$\bar{N}_3(t) = N_3(t_0) \exp\left(\left(\alpha_3 - \frac{b}{\beta_3} \bar{N}_2\right) \bar{Y}_3 (t-t_0)\right), \quad (4)$$

З (4) впливає, зокрема, що зростання обсягів тіньової економіки негативно впливає на зростання обсягів легальної економіки, зменшуючи ці обсяги за рахунок від'ємного доданка  $-\frac{b}{\beta_3} \bar{N}_2$  експоненціальної функції.

Метод отримання вищенаведених аналогічних виразів для  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  продемонструємо на прикладі отримання виразу функції  $N_2$  як найбільш громіздкого. Друге рівняння ММ (1) можна подати у такому вигляді:

$$\frac{dN_2}{N_2} = \left( -\alpha_2 - \frac{a}{\beta_2} N_1 + \frac{b}{\beta_2} N_3 \right) dt.$$

Інтегруючи його, отримуємо такий вираз:

$$\ln \frac{N_2(t)}{N_2(t_0)} = -\alpha_2(t-t_0) + \int_{t_0}^t \left( \frac{b}{\beta_2} N_3 - \frac{a}{\beta_2} N_1 \right) dt.$$

Скориставшись теоремою про середнє для визначеного інтеграла, останній вираз набуває вигляду:

$$\ln \frac{N_2(t)}{N_2(t_0)} = -\alpha_2(t-t_0) + \left( \frac{b}{\beta_2} \bar{N}_3 - \frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1 \right) (t-t_0).$$

Потенціюючи останнє рівняння, записуємо остаточний результат (3):

$$N_2(t) = N_2(t_0) \exp(-\alpha_2(t-t_0)) \exp\left(-\frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1(t-t_0)\right) \exp\left(\frac{b}{\beta_2} \bar{N}_3(t-t_0)\right),$$

де  $N_2(t_0)$  – початкова умова, або стартова величина обсягів тіньової економіки.

Зазначимо, що від рівностей (2) – (4) можна перейти до оцінок зверху для обсягів корупції, тіньової та легальної економік, нехтуючи членами зі знаком мінус у рівняннях ММ(1). Відповідні нерівності матимуть вигляд:

$$N_1(t) \leq N_1(t_0) \exp(\bar{N}_2(t-t_0)); \quad (2a)$$

$$N_2(t) \leq N_2(t_0) \exp(\bar{N}_3(t-t_0)); \quad (3a)$$

$$N_3(t) \leq N_3(t_0) \exp(\alpha_3(t-t_0)). \quad (4a)$$

Зазначимо, що зважаючи на нерівність (4a), аналітичні вирази оцінок (2a) і (3a) можна зробити більш зручними для аналізу, виключивши в них середні величини  $\bar{N}_3$  і  $\bar{N}_2$ .

Важливо також розглянути питання стосовно кількісного оцінювання ступеня ризику взаємного співіснування відповідних обсягів тіньової та легальної економік, чинники яких сумісні, але можуть бути як залежними, так і незалежними.

Як один із показників кількісного оцінювання ступеня ризику візьмемо ймовірність співіснування відповідних обсягів тіньової та легальної економік (оцінка зверху). Нехай подія  $A$  відповідає тіньовій економіці, а подія  $B$  – легальній економіці. З теореми додавання двох сумісних і незалежних подій має місце рівність [4]:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B), \quad (5)$$

де ймовірності настання тієї чи іншої події свідчитимуть про міру відповідного ризику. Зрозуміло, що події  $A$  і  $B$  утворюють повну групу подій. Рівень обсягів кожної з економік оцінюється для довільного моменту часу, використовуючи нерівності (3a) і (4a).

На підґрунті класичного визначення ймовірності справедливими будуть такі оцінки ймовірностей  $P(A)$  та  $P(B)$ :

$$P(A) = \frac{N_2}{N_2 + N_3} \quad \text{і} \quad P(B) = \frac{N_3}{N_2 + N_3}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (5), одержимо:

$$P(A+B) = 1 - \frac{N_2 N_3}{(N_2 + N_3)^2}. \quad (5a)$$

Використовуючи добре відому числову нерівність  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , з якої випливає оцінка  $\frac{ab}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{4}$ ,

можна дійти висновку, що  $P(A+B) \geq 0,75$ . Ця нерівність інтерпретується таким чином: ймовірність

незалежного співіснування легальної (ЛЕ) і тіньової (ТЕ) економік суспільства не може сягати менше 0,75. Відповідно для протилежного випадку (унеможливлення зазначеного співіснування ЛЕ і ТЕ) рівень ймовірності такої події не може перевищувати 0,25. Очевидно, останню числову оцінку можна сприймати як міру ризику співіснування відповідних обсягів ЛЕ і ТЕ. Вона є критичною межею, перевищення якої сигналізує про незадовільний стан економічної структури суспільства.

Оскільки оцінки (3а) і (4а) функцій  $N_2$  і  $N_3$ , якими описуються обсяги тіньової та легальної економік, залежать від часу  $t$ , то цілком слушно говорити про динамічну кількісну оцінку ступеня ризику відповідних обсягів тіньової економіки та легальної економіки.

Для сумісних і залежних подій формула (5) набуває такого вигляду:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B), \quad (56)$$

де  $P_A(B)$  є умовна ймовірність події  $B$  за настання події  $A$ .

На завершення розглянемо ризик співіснування корупції, тіньової та легальної економік в суспільстві. Приймаючи до уваги попередні позначення, покладемо, що подія  $C$  відповідає корупції. Відповідна теорема для трьох сумісних подій  $C$ ,  $A$  та  $B$  записується так [4]:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC), \quad (6)$$

$$\text{де } P(A) = \frac{N_2}{N_1 + N_2 + N_3}; \quad P(B) = \frac{N_3}{N_1 + N_2 + N_3}; \quad P(C) = \frac{N_1}{N_1 + N_2 + N_3}.$$

Для випадку незалежних подій наступні три доданки легко розписуються (див. вищеведене для формули (5)), а для останнього доданка  $P(ABC)$  можна скористатися такою оцінкою  $\frac{abc}{(a+b+c)^3} \leq \frac{1}{27}$ ,

яка є наслідком добре відомої нерівності  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ .

У випадку сумісних і залежних подій формула (6) набуває вигляду: наступні її три доданки ( $P(AB)$ ,  $P(AC)$ ,  $P(BC)$ ) записуються аналогічно тому, як це було здійснено згідно з формулою (56); останній доданок формули (6) для сумісних і залежних подій набуває вигляду

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C), \quad (7)$$

де величина  $P_{AB}(C)$  є умовна ймовірність події  $C$ , урахувавши те, що події  $A$  та  $B$  настали.

## ВИСНОВКИ

На підґрунті прийнятого концептуального положення щодо взаємного існування корупції, тіньової економіки і легально діючої економіки, запропонована математична модель (ММ) функціонування економічного механізму.

Отримані в праці вирази для залежних змінних ММ дозволяють оцінити обсяги та ймовірності співіснування складових економічної еволюції, також розглянути окремо співіснування ймовірності відповідних обсягів тіньової та легальної економік, як один із показників кількісного оцінювання ступеня ризику. Оскільки оцінки ймовірностей залежать від часу  $t$ , то можна говорити про динаміку числової міри ризику співіснування відповідних обсягів легальної, тіньової економіки та корупції.

Зважаючи на відсутність статистичної інформації щодо обсягів корупції та тіньової економіки, ще одне призначення результатів цієї наукової праці полягає в превентивному оцінюванні розглянутих складових, орієнтуючи державні органи на відповідне, своєчасне та адекватне реагування стосовно зниження ступеня ризику та обсягів корупції та тіньової економіки.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Тіньова економіка: сутність, особливості та шляхи легалізації : монографія / [З. С. Варналій, А. Я. Гончарук, Я. А. Жаліло та ін.] ; за ред. д.е.н., проф. З. С. Варналія. – К. : НІСД, 2006. – 576 с.
2. Скрипник А. Детермінанти корупції в Україні / А. Скрипник, В. Вдовиченко // Економіка України. – 2009. – № 4. – С. 29-43.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М. : ИКИ, 2004. – 288 с.
4. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - М. : Высш. шк., 2000. - 383 с.