

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330:51+519.86

Вітлінський В. В., Коляда Ю. В., Баранов К. О.

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТРАЕКТОРІЙ ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ НА ПІДҐРУНТІ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ СОЛОУ

Ґрунтуючись на ізоморфізмі дискретного варіанту моделі Солоу і класичного логістичного відображення, у праці отримано: аналогічно теорії ортодоксального логістичного відображення (з одним параметром r) для його модифікації, що характеризується двома числовими параметрами r і α , побудовано карту динамічних режимів на площині цих параметрів; вказано області, для числових значень яких спостерігається різноманітна поведінка результативної ознаки X_{n+1} , включаючи область детермінованого хаосу; наведено біфуркаційні діаграми модифікованого логістичного відображення: їх порівняння з класичними результатами вказує на появу більш складної структури перемішування (відсутність так званих вікон-полос). Вивчено вплив запізнення на траєкторії економічного розвитку, на підґрунті застосування логістичного відображення у вигляді алгоритму Ено. Емпірично встановлено числове значення $b = 0,15$ сталої Ено для моделювання нелінійної динаміки економічної системи (зазвичай в літературі $b = 0,3$).

Ключові слова: капітал економічної системи, модель Солоу, комп'ютерне моделювання, узагальнене логістичне відображення, модифікований алгоритм Ено, нелінійна економіка

Рис.: 16. *Формул.:* 3. *Бібл.:* 8.

Вітлінський Вальдемар Володимирович – доктор економічних наук, професор, кафедра економіко-математичного моделювання, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана (пр. Перемоги, 54/1, Київ, 03068, Україна)

Email: wite101@meta.ua

Коляда Юрій Васильович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра економіко-математичного моделювання, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана (пр. Перемоги, 54/1, Київ, 03068, Україна)

Баранов Костянтин Олегович – магістрант, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана (пр. Перемоги, 54/1, Київ, 03068, Україна)

Email: mercury4@bigmir.net

УДК 330:51+519.86

Витлинский В. В., Коляда Ю. В., Баранов К. О.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ

Основываясь на изоморфизме дискретного варианта модели Солоу и классического логистического отображения, в статье получено: аналогично теории ортодоксального логистического отображения (с одним параметром r) для его модификации, которая характеризуется двумя числовыми параметрами r и α , построена карта динамических режимов на плоскости упоминаемых параметров; указаны области, где наблюдается разнообразное поведение результирующей величины X_{n+1} , включая область детерминированного хаоса; приводятся бифуркационные диаграммы модифицированного логистического отображения: их сравнение с классическими данными свидетельствует о появлении более сложной структуры перемешивания (отсутствуют так называемые окна-полосы). Исследовано влияние запаздывания на траектории экономического развития, основываясь на использовании логистического отображения в виде алгоритма Эно. Эмпирически найдено числовое значение $b = 0,15$ постоянной Эно для моделирования нелинейной динамики экономической системы (в литературе $b = 0,3$).

Ключевые слова: капитал экономической системы, модель Солоу, компьютерное моделирование, обобщенное логистическое отображение, модифицированный алгоритм Эно, нелинейная экономика

Рис.: 16. *Формул.:* 3. *Библ.:* 8.

Витлинский Вальдемар Владимирович – доктор экономических наук, профессор, кафедра экономико-математического моделирования, Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана (пр. Победы, 54/1, Киев, 03068, Украина)

Email: wite101@meta.ua

Коляда Юрий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра экономико-математического моделирования, Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана (пр. Победы, 54/1, Киев, 03068, Украина)

Баранов Константин Олегович – магистрант, Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана (пр. Победы, 54/1, Киев, 03068, Украина)

Email: mercury4@bigmir.net

Vitlinskiy V. V., Kolyada Y. V., Baranov K. O.

MODELLING AND ANALYSIS OF TRAJECTORIES OF ECONOMIC DEVELOPMENT ON THE BASIS OF DISCRETE SOLOW MODEL

The article uses isomorphism of the discrete variant of the Solow model and classic logistic mapping to obtain the following: analogous to the theory of orthodox logistic mapping (with one r -parameter) for its modification, which is characterised by two numeric parameters r and α , it builds a map of dynamic modes on the plane of mentioned parameters; areas are shown where one can observe various behaviour of the resulting X_{n+1} value, including the area of determined chaos; bifurcation diagrams of modified logistic mapping are provided: their comparison with classical data testifies to appearance of a more complex structure of immixture (so-called window-strips are not available). The article studies influence of delay upon trajectories of economic development, based on the use of logistic mapping in the form of Henon algorithm. It empirically finds the numeric value $b = 0,15$ of the Henon constant for modelling non-linear dynamics of an economic system (in literature $b = 0,3$).

Key words: capital of economic system, Solow model, computer modelling, generalised logistic mapping, modified Henon algorithm, non-linear economy.

Pic.: 16. *Formulae:* 3. *Bibl.:* 8.

Blagun Ivan S. – Doctor of Science (Economics), Professor, Head of the Department, Department of Economic Cybernetics, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (vul. Shevchenka, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)

Email: blagun@email.ua

Dmitrishin Lesya I. – Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor, Department of Economic Cybernetics, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (vul. Shevchenka, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)

Email: dmytryshyn_l@hotmail.com

Вступ. Результат діяльності об'єкта господарювання, тлумаченої як поведінка економічної системи, з точки зору прикладної теорії систем цілком визначається такими рисами як: відкритий характер функціонування – невинний обмін субстанцією, енергією та інформацією; необоротність спостережуваних процесів, їх нелінійна динаміка тощо. Зазначене формує головні труднощі економічного аналізу – прогнозування числових значень чинників економіки і передбачення їх поведінки на певному часовому інтервалі.

Інструментом розв'язання окресленої проблеми нелінійної економічної динаміки може бути досить відома модель Солоу – швидкості змінюваності обсягу капіталу економіки з плином часу, що визначається складовими функції Кобба-Дугласа. Традиційна [1] модель Солоу записується у вигляді нелінійного диференційного рівняння першого порядку

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (n + d)k, \quad (1)$$

де змінна k відповідає фондоозброєності живої праці

(виробництва), похідна $\frac{dk}{dt}$ – швидкість її змінюваності

з плином часу (нелінійна функція); $f(k) = Ak^\alpha$ описує залежність продуктивності праці від фондоозброєності (використовуючи функцію Кобба-Дугласа). Величина n є коефіцієнтом темпу приросту населення, скаляр d відображає ступінь амортизації оснащення,

$0 < s < 1$ є нормою споживання.

Значущість такої економічної категорії як капітал для суспільства незаперечна, оскільки його обсяг, перш за все, пов'язаний з якістю життя – добробутом населення і, подруге, нарощування капіталу є ключовою метою економічного розвитку країни.

Щодо неперервної моделі (1) Солоу існує значне число публікацій в монографічних і періодичних виданнях, на-

приклад [1–3]. Але в них не здійснюється аналіз можливої хаотизації економічної еволюції, хоча реалії сьогодення свідчать про супротивне – появу режимів із загостренням – дефолтів чи біржових обвалів та сповзання до стану дивної поведінки траєкторії економічних процесів. Дійсно, з точки зору економічної синергетики [2], явище хаотизації складових розвитку економіки може з'явитися через умову використання нелінійної системи щонайменше трьох звичайних диференційних рівнянь, чим значно ускладнюється процедура комп'ютерного моделювання динаміки економічної еволюції.

У даній праці на підґрунті ізоморфізму між дискретним варіантом моделі (1) і логістичним відображенням здійснено моделювання і аналіз нелінійної динаміки обсягу капіталу за наявності різноманітних умов, ураховуючи запізнення економічних процесів. Числовим результатам надано економічне тлумачення.

Виклад основних результатів

Приймаючи до відома, що $\Delta k = k_{t+1} - k_t$, (після очевидних алгебраїчних перетворень) рівняння (1) набуває вигляду рекурентного співвідношення

$$k_{t+1} = sAk_t^\alpha \left(1 - \frac{(n+d+1)}{sA}\right) k_t^{1-\alpha}.$$

Здійснюючи заміну змінної

$$X_n = \left(\frac{n+d+1}{sA}\right)^{1/(1-\alpha)} * k_t,$$

отримаємо дискретне відображення [4]:

$$X_{n+1} = rX_n^\alpha (1 - X_n^{1-\alpha}) \quad (2)$$

логістичного типу, де скаляр $r = (n+d+1) > 1$. За відсутності величини α має місце класичне логістичне відображення.

Нижче наводяться графічні результати, що відображають закономірності функціонування узагальненого ло-

гістичного відображення (2). Його комп'ютерна реалізація здійснюється з використанням табличного процесора MS Excel.

Для збіжності класичного відображення має виконуватись умова $0 < r < 1$. У випадку модифікованого відображення (2) аналогічний результат досягається за умови:

$1 > \alpha > \frac{r+0.916}{r+1}$. Наприклад:

r	Xn	alpha
3	0,5	0,981

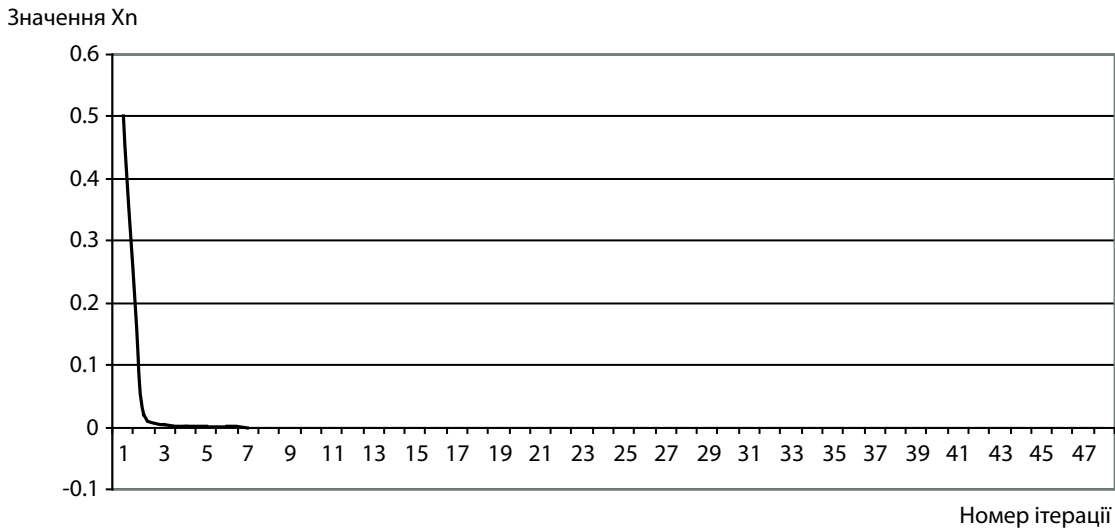


Рис. 1. Поводження {Xn} для модифікованого відображення

Якщо стабілізація досягається у класичному відображенні для нерівності $1 < r < 3$, то для модифікованого відображення (2) має виконуватись умова:

$$\frac{r+0.916}{r+1} > \alpha > \frac{r-1}{r+1}$$

Наприклад,

r	Xn	alpha
3	0,5	0,55

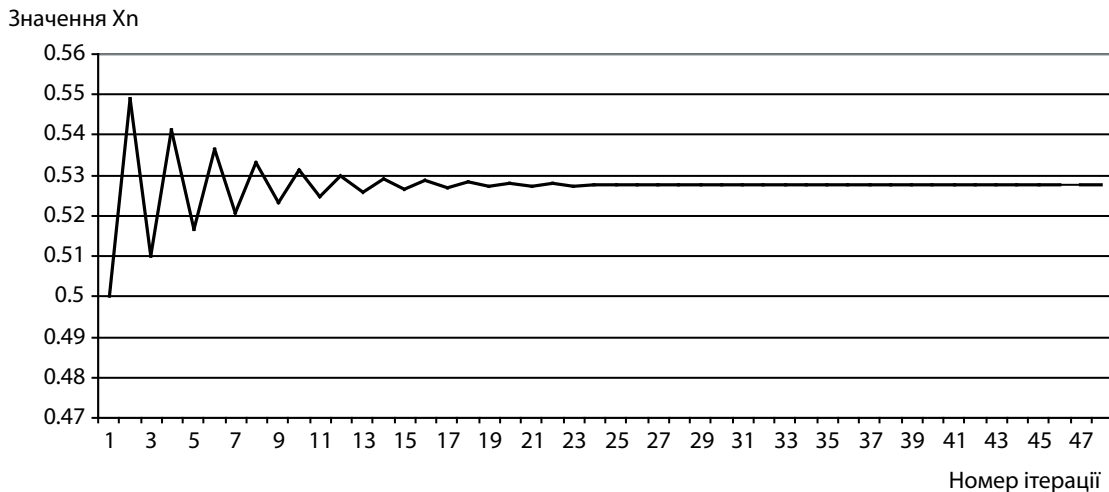


Рис. 2. Збіжність {Xn} для модифікованого відображення

Коливання між двома числами з'являються у класичному відображенні за умови: $3 < r < 3,45$. У випадку модифікованого відображення (2), щоб отримати цикл періоду 2, має виконуватись умова:

$$\frac{r-1}{r+1} > \alpha > \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1.239}$$

Наприклад,

r	Xn	alpha
3		

Значення X_n

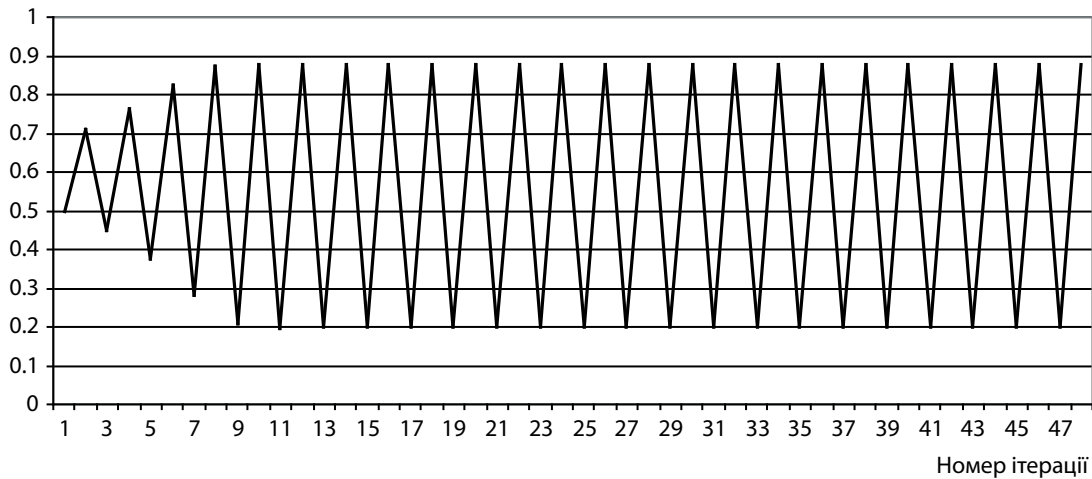


Рис. 3. Цикл періоду 2 для рекурентного відношення (2)

За умови значень $3,45 < r < 3,57$ у класичному відображенні спостерігається каскад біфуркацій подвоєння періоду. Числові значення X_n знаходяться у межах між 4-ма, 8-ма, 16-ма і т. д. числами з ростом значення r .

$$\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1.239} > \alpha > \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1.25} . \text{ Приклад:}$$

r	X_n	alpha
3	0,5	0,41

У випадку модифікованого відображення (2), щоб спостерігалось подібне, має виконуватись умова

Значення X_n

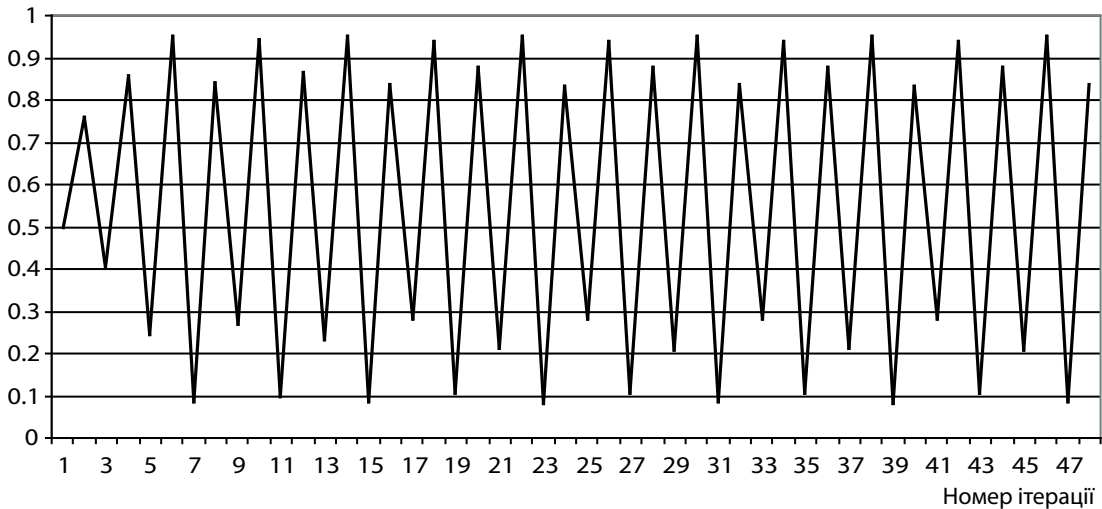


Рис. 4. Каскад біфуркацій $\{X_n\}$ для модифікованого відображення (2)

Для нерівності $3,57 < r < 4$ у класичному відображенні починається хаотична поведінка. Для модифікованого відображення (2) згадуваний вище детермінований хаос з'являється, коли виконується умова

$$\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1.25} > \alpha > \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1.3569} . \text{ Наприклад:}$$

r	X_n	alpha
3	0,5	0,395

Значення X_n

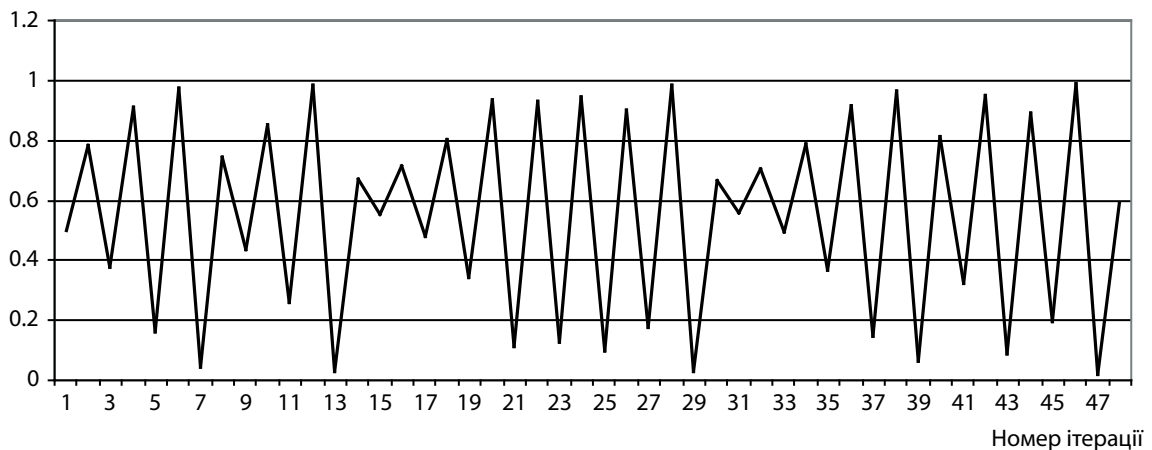


Рис. 5. Хаотичні значення $\{X_n\}$ для модифікованого відображення (2)

Якщо для нерівності $r > 4$ числові значення X_n виходять за межі інтервалу $[0;1]$ для будь яких початкових умов, то подібне явище спостерігається для відображення (2), коли виконується умова

r	X_n	α
3	0,5	0,1

$$\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{1.3569} > \alpha > 0. \text{ Наприклад,}$$

Значення X_n

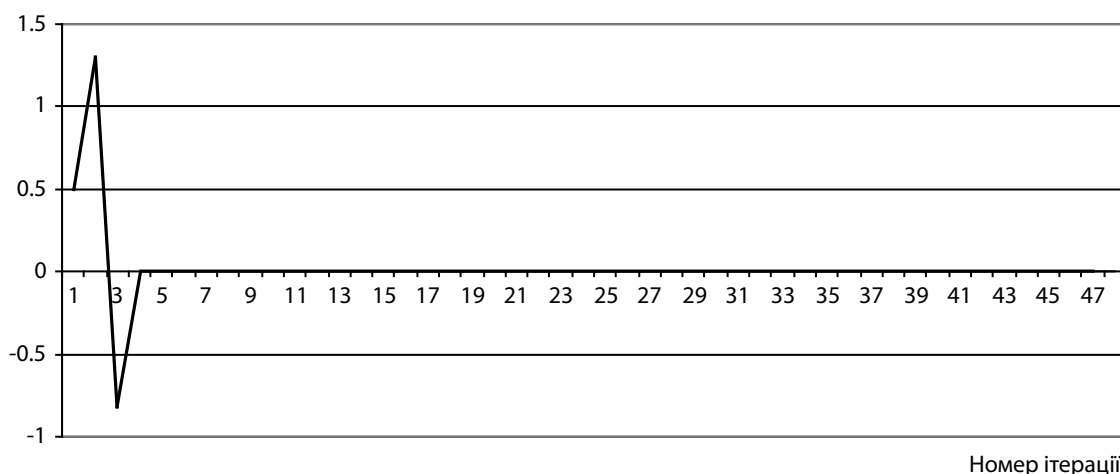


Рис. 6. Вихід $\{X_n\}$ за межі $[0;1]$ для модифікованого відображення (2)

Зауваження. Межі змінюваності параметра α для (2) встановлено емпіричним шляхом, приймаючи до уваги теоретичні надбання щодо класичного логістичного відображення.

Тобто, на відміну від ортодоксального відображення, для модифікованого логістичного відображення (2) визначальними будуть два параметри – r та α .

**Економічні тлумачення результатів
числового моделювання**

З погляду економіки, отримані вище результати є очікуваними, бо більша еластичність по капіталу забезпечує можливість ширшого коливання системи.

Порогові значення зміни режиму динамічності нелінійної системи були знайдені та перевірені лише емпіричним шляхом, що не може гарантувати їх достовірності для всіх можливих випадків. Однак для адекватних, з точки зору економіки, значень коефіцієнта технічного прогресу, вони виправдовуються.

Встановлено наступний факт: більші значення α стабілізують систему, що цілком логічно. Адже відповідно до моделі Солоу, на яку спирається це комп'ютерне дослідження, у розвинених країнах зі стабільною економікою коефіцієнт еластичності по капіталу значно переважає над коефіцієнтом еластичності по праці. Так, наприклад, для

США значення параметрів $\alpha = 0,73$, $r = 2,7$, [6–7], а для Німеччини $\alpha = 0,75$, $r = 1,9$ [5]. Підстановкою цих значень до модифікованого відображення (3) отримуються результати, що наводяться на рис. 7 і 8.

Видно, що країни з високим рівнем капіталізації та еластичності по ній мають тенденції до стабілізації своєї економіки та виходу обсягу капіталу на стабільне значення.

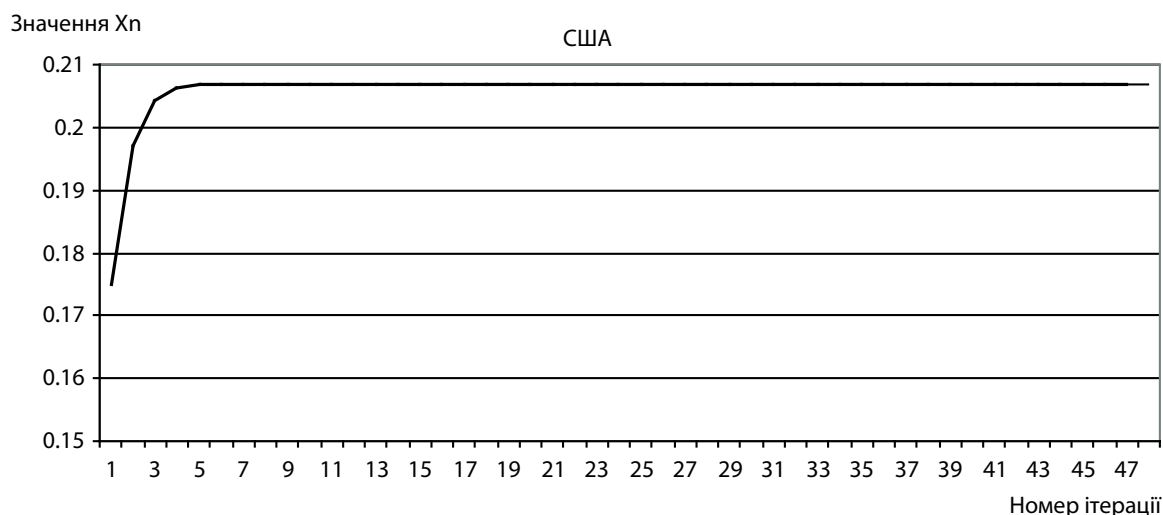


Рис. 7. Прогноз динаміки капіталу для США



Рис. 8. Прогноз динаміки капіталу для Німеччини

Навпаки, якщо уявити собі країну з низьким коефіцієнтом еластичності по капіталу, то їх економіка впадає в хаотичний стан, з стрімкими спадами та ростом, що відповідно матиме вкрай негативний вплив на майбутнє економіки. Наприклад, для експериментальних значень

r	X_n	alpha
2,1	0,175	0,25

за допомогою алгоритму (2) отримуємо наступний графік динаміки рівня капіталу в країні:

Початкове значення обсягу капіталу X_n фактично не має вирішального впливу на те, якого результату досягне країна. Якщо за даних умов економіка прямує до стабіліза-

ції на певному рівні, то формується точка-атрактор, до якої прямуватиме значення обсягу капіталу X_n , а його початкове значення лише впливатиме на те, як багато часу (ітерацій) необхідно для досягнення цього рівноважного стану, в залежності від того, як далеко поточний рівень відрізняється від атрактора. Таким самим чином, навіть надзвичайно великі обсяги капіталу в початковий момент часу (наприклад, міжнародні інвестиції) не зможуть забезпечити стабільність, якщо іншим економічним показником не притаманна така тенденція. Реальним прикладом такої найкритичнішої ситуації, що згідно з даним відображенням відповідала б тому режиму, коли значення виходять далеко за межі $[0;1]$ – економічний колапс в Зімбабве в 2000–2009 роках, коли рівень інфляції досягав 1470% на тиждень.

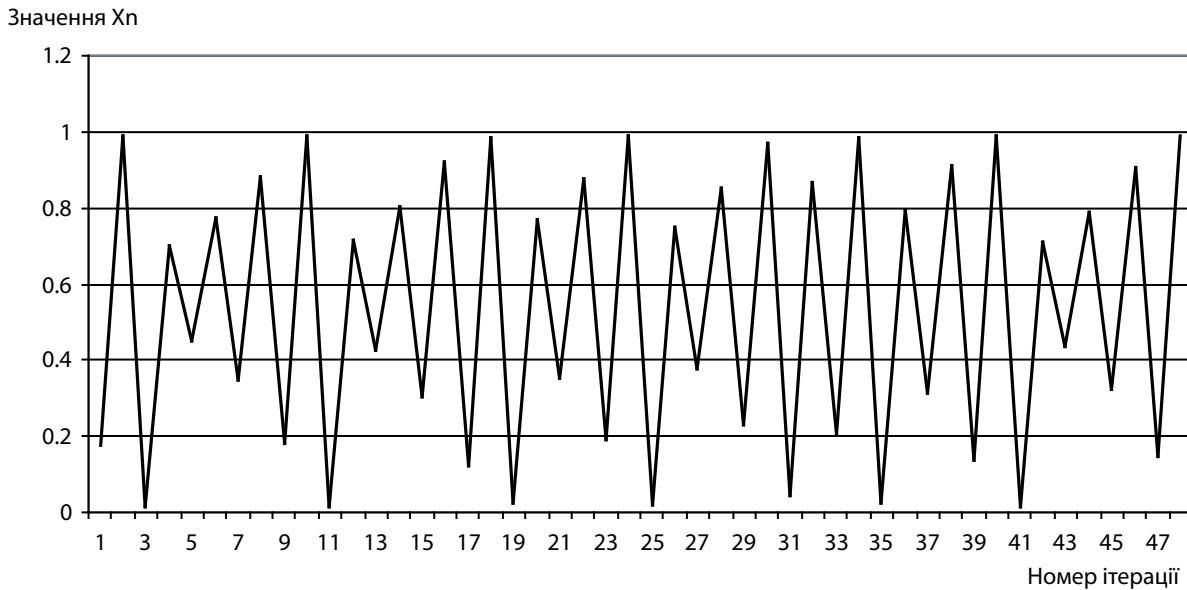


Рис. 9. Прогноз динаміки капіталу в недостатньо розвиненій країні

Моделювання впливу лагів на економічну еволюцію

Будь-які зміни в економіці не можуть проявлятися негайно. Чим більша система, тим більше необхідно часу для того, щоб будь-які дії дали свої результати – це називається лагом. Для класичного логістичного відображення французьким вченим Ено було розроблене [8] узагальнююче двовимірне відображення.

Для розглядуваної нами модифікації (2), урахувавши лаг, двовимірне відображення записується

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= r * X_n^\alpha * (1 - X_n^{1-\alpha}) - b * y_n, \\ y_{n+1} &= X_n^\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Останній доданок має враховувати ефект затримки (лагу). Коефіцієнт *b* показує, з якою силою цей лаг впливає на систему. Розробляючи своє відображення, Ено запропонував числове значення *b* = 0,3. Але економіка і демографія мають різні показники швидкості реакції на дії і тому, для вирішення економічних проблем, емпіричним шляхом було встановлене інше значення цього коефіцієнта, а саме *b* = 0,15.

За допомогою відображення (3) отримано результати, що доповнюють попередні.

Вочевидь, для реалізації високих рівнів технічного зростання, країна має значною мірою інвестувати свій капітал в це. І якщо на це буде залучено більше коштів, ніж допустимо, економіка впаде. Ураховуючи вплив лагу, визначаються адекватні рамки, в яких країна може нарощувати технічний прогрес – скільки вона зможе витримати інвестицій в це, не нашкодивши економіці в цілому. Також з урахуванням лагу значно звузились ті рамки, в яких значення *X_n* коливається між значеннями чи знаходиться в стані детермінованого хаосу, адже в реальній ситуації це майже неможливо – економіка більшості країн в міру стабільна, навіть якщо стабільно жахлива.

Наведемо приклад: така розвинена країна як Німеччина (вже розглядалась раніше для $\alpha = 0,75$) здатна нарощувати коефіцієнт економічного розвитку від 1,2 до 8.

Хоча останнє значення вже і було дещо великим, адже потребувало багато часу на стабілізацію. Отже, інвестуючи в технологічний прогрес, Німеччина ще довгий час отримуватиме з цього виключно позитивний результат. Проміжок коливань і хаосу малий і продовжується лише для $r \in (8;9]$, хоча досягти таких показників є майже неможливим.

Навпаки, візьмемо якусь недостатньо розвинену країну з $\alpha = 0.3$. Для такої країни максимальне значення технологічного прогресу, до якого можна інвестувати, не нашкодивши економіці, рівне 2.

Після цього слідує інтервал довжиною (2;2,5] протягом якого спостерігаються коливання і хаотичні процеси.

Таким чином, урахувавши лаг з силою впливу *b* = 0,15 за ітерацію, отримуємо результати більш відповідні до реальної економіки.

Для наглядного порівняння класичного логістичного відображення з модифікованим, долучаючи коефіцієнт еластичності, наведемо карту динамічних режимів обох відображень:

Зі зростанням змінюються режими, до яких приходить система. Зеленим кольором відображена стабілізація *X_n* на нульовому значенні, білим – стабілізація на одному числі, червоним – коливання між двома значеннями, чорним – зростання каскаду біфуркаційного періоду, жовтим – хаотичний стан, блакитним – вихід значень *X_n* за межі [0;1] (рис. 13).

Для модифікованого відображення використовуються такі ж кольори, позначаючи аналогічні режими системи.

Як бачимо з карт, в модифікованому алгоритмі (2) спостерігаються два визначальних чинники. Як наслідок, карта динамічних режимів має радикально інший вигляд.

Розглянемо біфуркаційну діаграму модифікованого відображення (рис. 14).

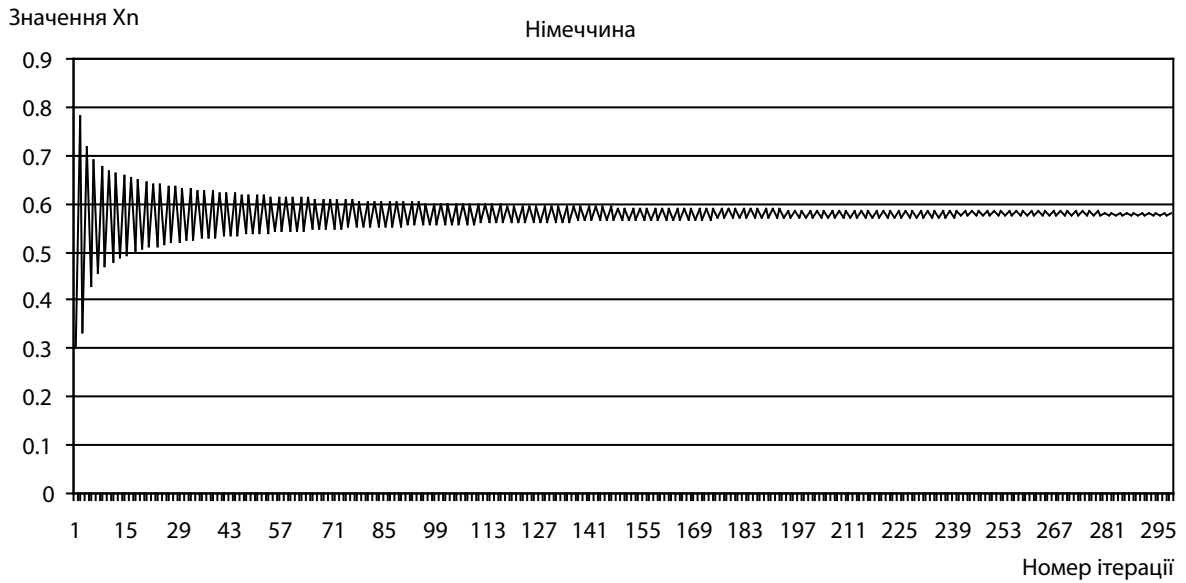


Рис. 10. Прогноз стабілізації обсягу капіталу в Німеччині для $r = 8$

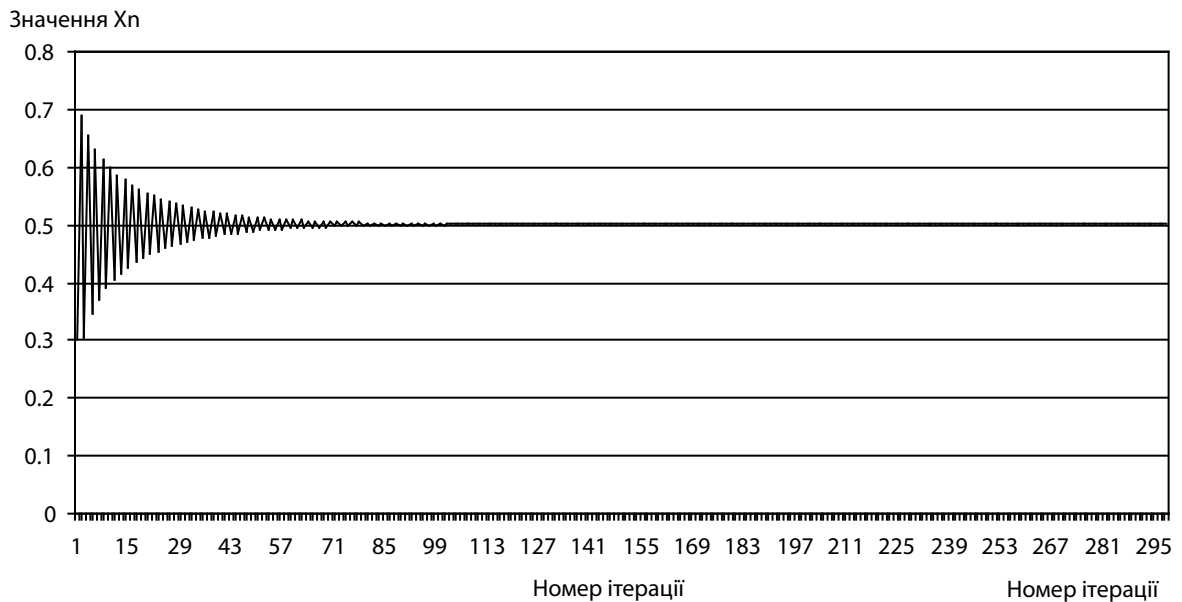


Рис. 11. Прогноз стабілізації обсягу капіталу в недостатньо економічно розвиненій країні для $r = 2$

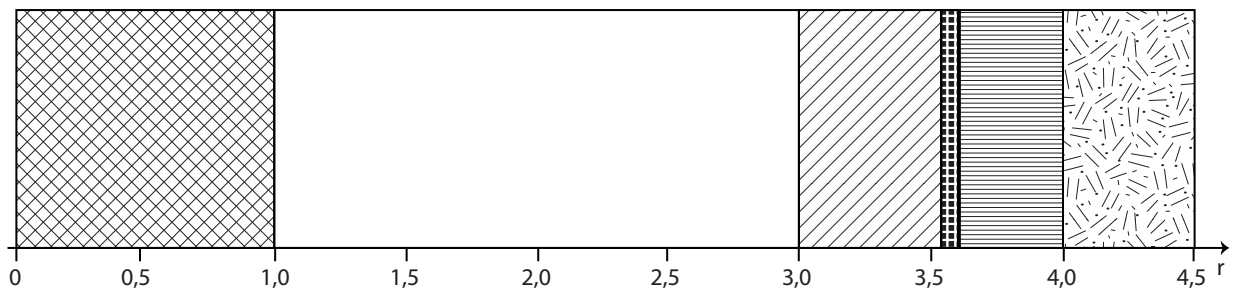


Рис. 12. Карта динамічних режимів класичного відображення

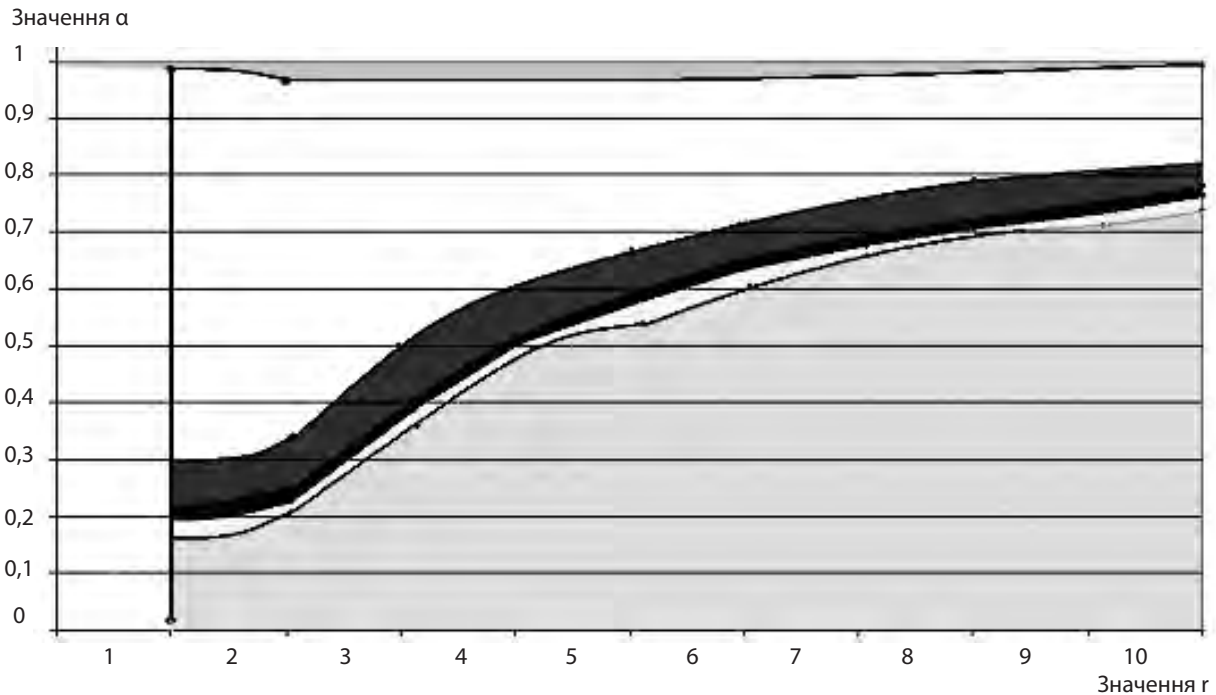


Рис.13. Карта динамічних режимів модифікованого відображення (2)

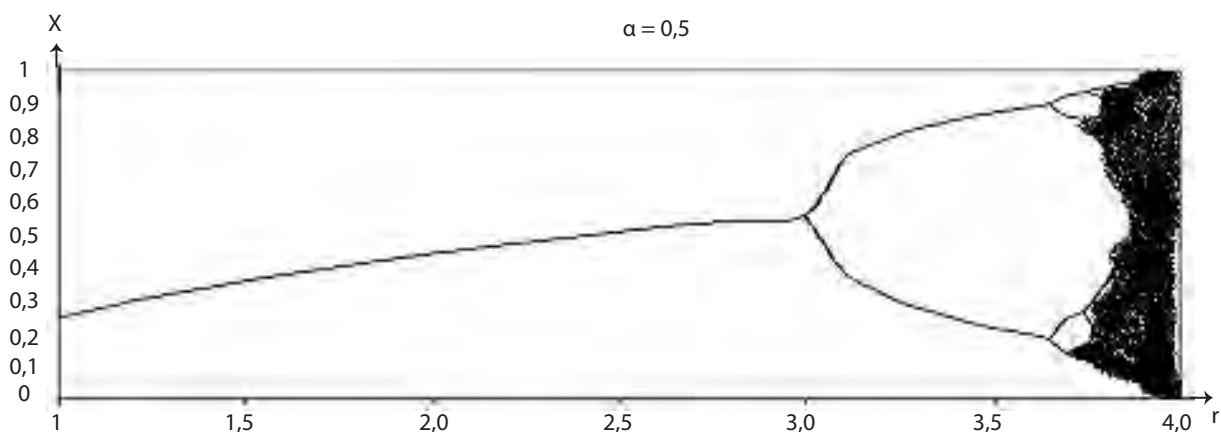


Рис. 14. Біфуркаційна діаграма модифікованого відображення (2)

Відсутні вікна (білі полоси), спостерігається досить складне переміщення, момент подвоєння періоду настає пізніше, графік діаграми сплющується (рис. 15).

Важливо зазначити: оскільки для модифікованого відображення два параметри здатні змінювати режим, то значення одного з них було взято фіксованим $\alpha = 0,5$, а параметр r варіювався. Однак зі зміною α загальна структура діаграми не змінюється. Як бачимо, значно поширився інтервал стабілізації системи, що є логічним для економіки. Також можна навести біфуркаційну діаграму за умови фіксованого значення $r = 3$, та варіації параметра α .

Цей факт має місце і для так званих двовірних відображень:

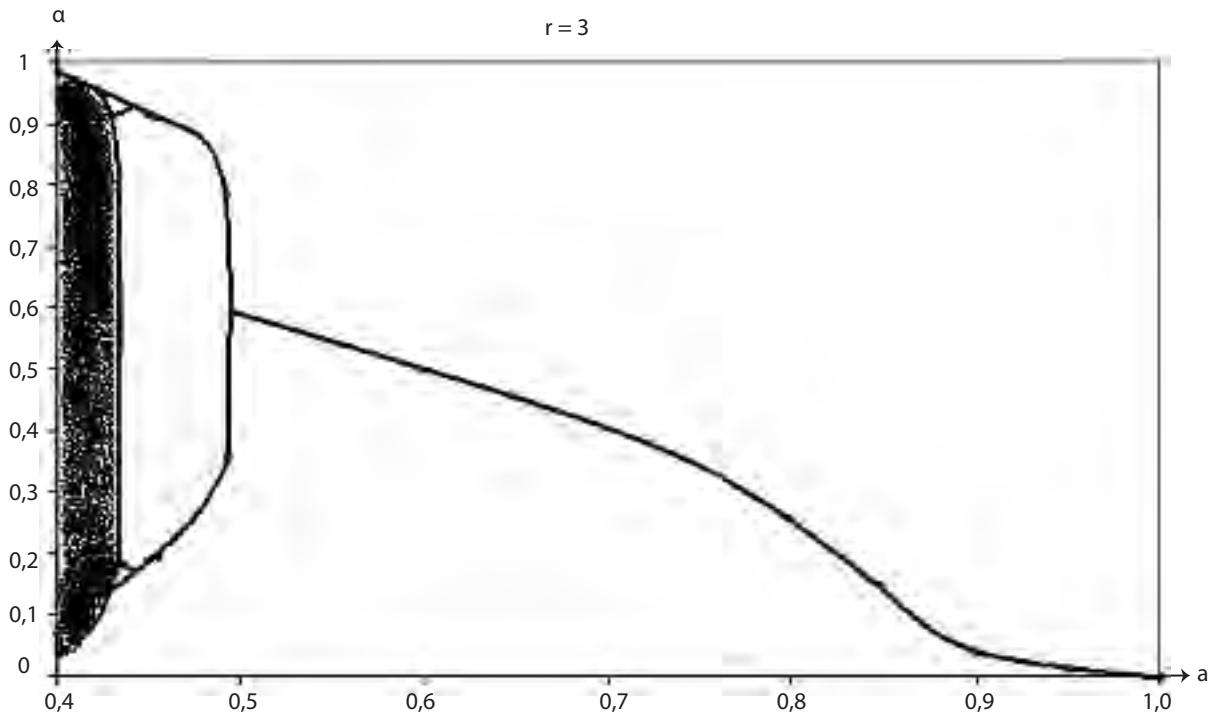
Висновки

Модифіковане, на підґрунті моделі Солоу, класичне логістичне відображення стало придатним для цілей моделювання і прогнозування динаміки капіталу в економіці.

Визначено межі змінюваності числових параметрів r і α , в яких країна може інвестувати в розвиток власного технічного прогресу, отримуючи власний економічний зиск, не піддаючи себе ризику краху економіки через нестачу коштів на інші галузі господарювання.

Визначальним параметром економічного розвитку є величина α – коефіцієнт виробничої функції Кобба-Дугласа. На координатній площині параметрів вказано область числових значень, для яких настає детермінований хаос: перехід до нього здійснюється через біфуркації подвоєння періоду – проміжний стан циклічний, причому періоду 4 відповідає цикл ділової активності.

Описані вище результати можуть бути застосовані до моделювання динаміки української економіки, але для цього треба мати числові значення вихідних параметрів виробничої функції України. Отримавши їх, можна буде розробляти таку траєкторію економічного розвитку кра-

Рис. 15. Біфуркаційна діаграма модифікованого відображення (2) для $r = 3$

їни, яка б забезпечила стабільно високий обсяг капіталу в економіці України.

Урахування лагу економічних процесів сприяло емпіричному визначенню числового значення $b = 0,15$ сталої модифікованого алгоритму Ено, яка для класичної схеми

рівна $b = 0,3$. У такому випадку біфуркаційна діаграма дещо ускладнюється (відсутні так звані вікна), крива діаграми сплющується, біфуркація подвоєння періоду настає для більшого значення r .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мэнкью Н. Г. Макроэкономика: Учебник. – М.: МГУ, 1994. – 734 с.
2. Занг В. Б. Синергическая экономика: время и перемены в нелинейной экономической теории / В. Б. Занг. – М.: Мир, 1991.
3. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование: моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.
4. Сергеева Л. Н. Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса). – Запорожье: ЗГУ, 2002. – 227 с.
5. Cobb-Douglas Production Function // http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb%E2%80%93Douglas_production_function
6. Шкуропат А. В., Терский М. В., редактор: Александрова Л. И. Мировая экономика. Часть 1. (конспект лекций) // http://abc.vvsu.ru/Books/l_mirekon1/page0021.asp
7. Dana HÁJKOVÁ, Jaromír HURNÍK Cobb-Douglas Production Function: The Case of a Converging Economy Czech Journal of Economics and Finance, 57, 2007, no. 9–10 p.465–476
8. Отображение Эно // <http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzhenon.htm>

REFERENCES

- «Cobb-Douglas Production Function» http://en.wikipedia.org/wiki/Cobb%E2%80%93Douglas_production_function.
- Dana Hajkova, Jaromir Hurnik. Cobb-Douglas Production Function: The Case of a Converging Economy Czech Journal of Economics and Finance, 57, 2007, no. 9-10 p. 465–476
- Kolemaev, V. A. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie: modelirovanie makroekonomicheskikh protsessov i sistem* [Economic-mathematical modeling: modeling of macroeconomic processes and systems]. Moscow: YUNITI-DANA, 2005.
- Menkiu, N. G. *Makroekonomika* [Macroeconomic]. Moscow: MGU, 1994.
- «Otobrazhenie Eno» [Henon map]. <http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzhenon.htm>.
- Shkuropat, A. V., and Terskiy, M. V. «Mirovaia ekonomika» [World Economy]. http://abc.vvsu.ru/Books/l_mirekon1/page0021.asp.
- Sergeeva, L. N. *Modelirovanie povedeniia ekonomicheskikh sistem metodami nelineynoy dinamiki (teorii khaosa)*. [Modeling the behavior of economies methods of nonlinear dynamics (chaos theory)]. Zaporozhe: ZGU, 2002.
- Zang, V. B. *Sinergicheskaya ekonomika: vremia i peremeny v nelineynoy ekonomicheskoy teorii* [Synergistic economy: the time and changes in the economic theory of nonlinear]. Moscow: Mir, 1991.