

УДК 330.3:330.46

## РИЗИКИ НАСТАННЯ КРИЗОВОГО СТАНУ НА ПІДґРУНТІ ОРТОДОКСАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Коляда Ю.В., Бондар В.А.

Київський національний економічний університет  
імені Вадима Гетьмана

Запропоновано методикку передбачення кризи макроекономічного розвитку. Вона ґрунтується на застосуванні модифікацій класичних моделей та формули числової міри ризику. Здійснено апробацію здійсненої методики на прикладі української економіки. Комп'ютерне моделювання ураховує цілу низку особливостей еволюції економічної системи: запізнення, нелінійність, фрактальність лінійної моделі. Вказано на потребу узагальнення результатів, відштовхуючись від багатовимірних динамічних моделей економіки.

**Ключові слова:** модель економічного зростання, динаміка ризику, модифікації моделі Харрода-Домара, модель Солоу, інтервальный прогноз.

**Постановка проблеми.** Передбачення кризового стану економічної еволюції, як прояву буття реальної економіки, є дуже важливою проблемою суспільного розвитку. На сьогодні економічний ризик ґрунтується на панівній в економіці теорії рівноважного стану.

Події останнього часу, що відбулися у світі, нашому суспільстві, вказують на потребу вивчення динаміки економічного ризику, причому лінійна парадигма в класичному розумінні вичерпала свої можливості. Для розв'язання поточних проблем поведінки економічного розвитку з плином часу слід долучати методи нелінійної динаміки, зважаючи на прикметні риси економічної системи [1].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** У відомій літературі [2-4], на нашу думку, проведено глибокий вербальний аналіз природи та міри прояву економічного ризику, створивши передумови для подальшого його комп'ютерного дослідження – від процесу статистики перейти до розгляду динамічних траєкторій перехідного процесу.

**Постановка завдання.** Спираючись на моделі економічної динаміки, якими охоплюється статичний режим, розробити підхід до оцінювання величини економічного ризику, як передвісника кризового стану економіки, тобто увійти в окіл настання кризи. Для цього потрібно визначитися з числовою мірою економічного ризику, його ступенем.

**Мета статті.** Застосовуючи класичні моделі економічної динаміки (Харрода-Домара та Солоу), здійснити апостеріорне оцінювання числової міри ризику на конкретному прикладі економіки України. Комп'ютерне дослідження поведінки економічного ризику з плином часу доповнити, ураховуючи запізнення процесів економіки і фрактальність лінійної економічної динаміки моделі.

**Виклад основного матеріалу.** Класична модель Харрода-Домара макроекономічної динаміки, ґрунтуючись на кейнсіанських традиціях [5; 6], для нульового споживання записується:

$$Y'(t) = C(t) + I(t) = 0 + \frac{1}{\alpha} \frac{dY(t)}{dt}, \quad (1)$$

де  $Y(t)$  – змінна національного доходу,  $Y'(t)$  – її похідна;  $\alpha$  – гранична продуктивність капіталу.

Тоді диференціальне рівняння (1) має аналітичний розв'язок:

$$Y(t) = Y_0 \cdot \exp\{\alpha \cdot t\}, \quad (2)$$

де  $Y_0$  – початкова величина національного доходу.

Звісно, лінійна динамічна модель (1) недостатньо точно моделює поведінку економічної системи, котра завжди містить нелінійні внутрішні зв'язки. Зазначене зумовило потребу удосконалення моделі (1), використовуючи міру міри ефективності реінвестування національного продукту  $k$ . Модифікована модель, в основу якої було покладено поняття фракталу, має вигляд:

$$\dot{Y}(t) = a \cdot Y \left(1 + \frac{1}{k}\right)(t), \quad (3)$$

де скаляр  $k \in \mathbb{Z}$  вибирається з множини цілих чисел, виключаючи значення  $k \neq 0, \pm 1$ .

Аналітичний розв'язок динамічної моделі (3) має наступний вигляд

$$Y(t) = Y_0 \cdot \left[ \frac{k}{(t_0 - t) \cdot a \cdot Y_0 \left(\frac{1}{k}\right) + k} \right]^k. \quad (4)$$

Однак лінійні динамічні моделі (1) та (3) не враховують низки особливостей численних нелінійних зв'язків економічної системи, зокрема, вплив величини запізнення  $\tau$  на макроекономічну траєкторію. Тому класичне рівняння лінійної економічної динаміки можна модифікувати наступним чином:

$$Y'(t) = \alpha \cdot Y(t - \tau), \quad (5)$$

де  $\tau$  – величина лагу.

Динамічна модель (5) – це одновимірний лагово модифікація рівняння Харрода-Домара. Її розв'язок отримано у такий спосіб: запишемо ряд Тейлора для правої частини диференціального рівняння (5):

$$Y'(t - \tau) = \alpha Y(t) - \alpha \tau Y'(t) + \dots;$$

Тоді вираз (5) переписується

$$(1 + \alpha \tau) Y'(t) = \alpha Y(t).$$

Остаточно

$$Y'(t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha \tau} Y(t). \quad (6)$$

Рівняння (6) має аналітичний розв'язок:

$$Y(t) = Y_0 \cdot \exp\left\{\frac{\alpha t}{1 + \alpha \tau}\right\}. \quad (7)$$

Об'єднуючи рівняння (3) та (5), отримуємо одновимірну лагово-фрактальну модифікацію класичної динамічної моделі Харрода-Домара:

$$Y'(t) = \alpha \cdot Y \left( 1 + \frac{1}{k} \right) (t - \tau), \quad (8)$$

де скаляр  $k \in R$  вибирається з множини дійсних чисел, виключаючи значення  $k \neq 0, \pm 1$ .

Динамічна модель (8) заміною змінної  $t - \tau = T$  переписується:

$$Y'(T + \tau) = \alpha \cdot Y \left( 1 + \frac{1}{k} \right) (T). \quad (9)$$

Знову скориставшись лінійними членами рядів Тейлора:

$$Y(T + \tau) = Y(T) + \tau \cdot Y'(T) \dots;$$

$$Y'(T + \tau) = Y'(T) + \tau \cdot Y''(T) \dots,$$

економіко-математична модель (9) набуває вигляду

$$\tau \cdot Y''(T) + Y'(T) - \alpha \cdot Y \left( 1 + \frac{1}{k} \right) (T) = 0. \quad (10)$$

Хоча лагово-фрактальна модель (10) не має аналітичного розв'язку, за допомогою числових розв'язків вона дозволяє дослідити одночасно вплив запізнення та фрактальності під час комп'ютерного моделювання.

У залежності від  $k$  числові результати моделювання можуть бути меншими за значення розв'язку (2) при  $k < 0$ , та більшими при  $k > 0$ . Зі збільшенням  $|k|$  числові результати моделі будуть менш відхилятися від значень моделі (2).

Інтегральні криві для динамічної моделі (10) та величин  $k < 0$  та  $k > 0$  є межами оптимістичних та песимістичних очікувань. Порушення балансу в економічній системі може бути спричинене домінантою негативних очікувань над позитивними. Що більший цей відрив, то більше підстав для зміни траєкторії розвитку, а отже – посилення загрози економічного спаду. У нашому випадку формула ризику [7] набуває вигляду:

$$r(t) = \frac{Y_{\max}(t) - Y_{\min}(t)}{\frac{1}{2} \times [Y_{\max}(t) + Y_{\min}(t)]} \times 100\%, \quad (11)$$

де  $Y_{\max}(t)$  та  $Y_{\min}(t)$  – максимальні та мінімальні значення величини ВВП.

Замінивши знаменник формули (11) на значення виразу (2), та врахувавши, що числові значення  $Y(t)$  завжди додатні, отримаємо [8, с. 184]:

$$r(t) = \left| \frac{Y_{k>0}(t) + Y_{k<0}(t)}{Y(t)} - 2 \right| \times 100\%, \quad (12)$$

де  $Y_{k>0}(t)$  та  $Y_{k<0}(t)$  – значення ВВП за (11) при  $k > 0$  та  $k < 0$ ;

$Y(t)$  – фактичне значення ВВП.

Формула (12) виражає міру загрози падіння суспільного продукту на величину  $r(t)\%$  від ВВП у наступному періоді  $(t+1)$ . Логіка даного рівняння полягає у тому, що фактичні значення, які рівновіддалені від меж коридору свідчать про незмінність тренду, а отже, загроза настання економічної кризи мінімальна; з мірою наближення значення  $Y(t)$  до  $Y_{k>0}(t)$  або  $Y_{k<0}(t)$ , тим самим віддаляючись від іншої межі, система набуває рис нестійкості з позиції сталості тренду.

Змоделюємо динаміку ВВП України на основі лагово-фрактальної модифікації рівняння Харрода-Домара (10). Оскільки модель (10) є ліній-

ною та одновимірною, її здатність відтворити економічний тренд обмежена лише єдиним висхідним або низхідним напрямком. З цієї причини було обрано найбільш динамічний період розвитку економіки України, приведений на рис. 1.

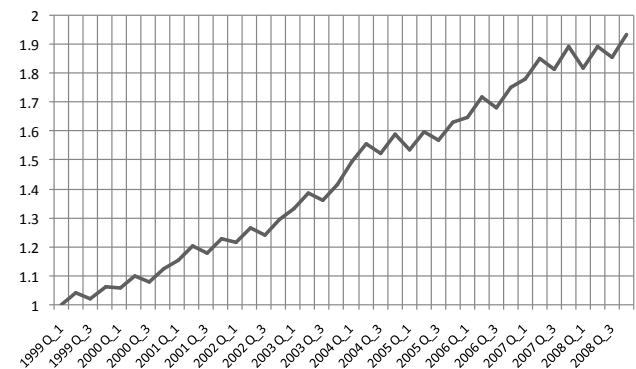


Рис. 1. Динаміка реального поквартального ВВП України 1999-2008 рр., відношення до першого кварталу 1999 року

Джерело: розроблено авторами

Нехай диференційне рівняння другого порядку (10) має параметри  $Y_0 = 1$ ,  $Y'_0 = 0,01$ ,  $\alpha = 0,021$  та доданком  $\frac{1}{k} = 0$ . Вибір значення  $\tau$  для моделі (10) був зумовлений максимізацією точності її результатів, тобто такою величиною запізнення, за якою сума квадратів відхилення розрахункових даних за (10) від фактичних була б мінімальною. На рис. 3 зображено зміна похибки моделі (10) на прикладі числового експерименту економіки України залежно від значень  $\tau$  та її мінімальне значення для  $\tau = 1$ .

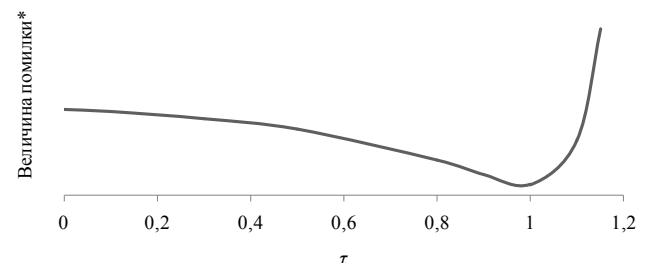


Рис. 2. Вплив величини запізнення  $\tau$  на точність розв'язків за моделлю (10)

\*під «величиною помилки» слід розуміти суму квадратів відхилень розрахункових та фактичних значень  $Y(t)$   
Джерело: розроблено авторами

З рис. 2 можна помітити відносну толерантність моделі для  $\tau \rightarrow 0$ , тобто тоді, коли модель (10) зводиться до класичної моделі Харрода-Домара (1). З іншого боку, при збільшенні значення  $\tau > 1$ , модель швидко втрачає точність. Такий особливий випадок поведінки пояснюється неможливістю економіки структурно залежати від попередніх періодів, адже в основу (1) покладено реінвестиція актуального національного доходу. Однак все ж таки реінвестування не може відбуватися миттєво, породжуючи феномен запізнення в економіці.

Результат числового розв'язку (10) із вказаними вище параметрами моделі графічно зведений на рис. 3. Також на рис. 3 нанесені 2 ін-

тегральні криві, які охоплюють спостереження статистичної вибірки ВВП України, а саме: верхня крива має параметр  $k = 0.695$ , а нижня крива  $-k = -1.989$ . Зауважимо, що не всі статистичні спостереження з рис. 3 перебувають між двома інтегральними кривими (10) для  $k > 0$  і  $k < 0$ . Деяка статистична інформація може містити окремі екстремальні значення, випадковості та шум, включення якої до коридору суттєво спотворить результати. Тому кількість спостережень, охоплених верхньою та нижньою межами, має встановлюватися індивідуально для кожної статистичної вибірки.

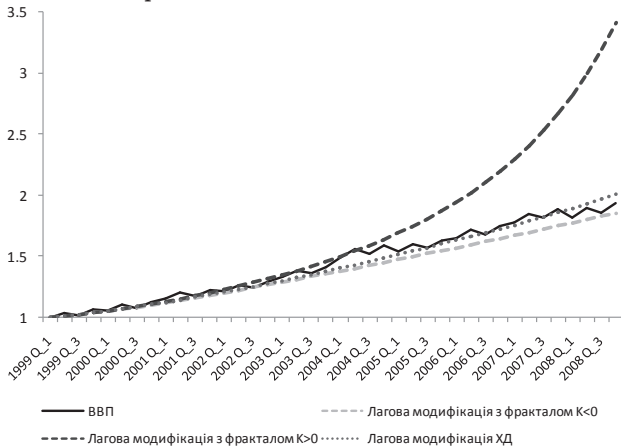


Рис. 3. Інтегральні криві результатів моделювання української економіки на основі моделі (10)

Джерело: розроблено авторами

Інтегральні криві за динамічної моделі (10) для  $k > 0$  та  $k < 0$  є межами можливих значень експоненційного коридору. Порушення балансу в економічній системі, а отже, й втрати економічними агентами частини прибутку спричиняється відхиленням економічної динаміки від прогнозованого тренду. Що більше це відхилення, то більше підстав для зміни траєкторії розвитку. Такі настрої посилюють плавне нагромадження збитку, посилюючи загрозу настання кризових явищ.

Обчислена на основі (12) динаміка ризику макроекономічного розвитку України графічно відтворена на рис. 4.

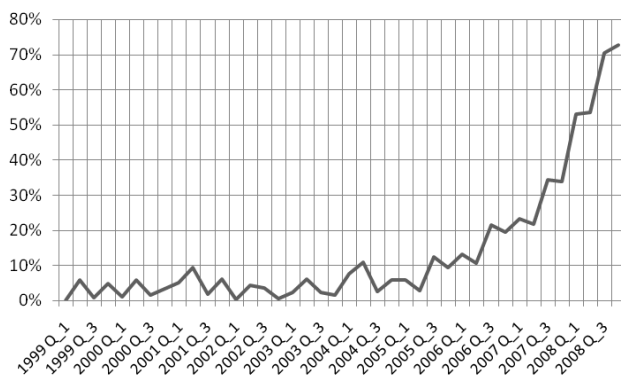


Рис. 4. Динамічна загрози економічного спаду ВВП України, 1999-2008 рр.

Джерело: розроблено авторами

Як видно, модель (10) здатна спрогнозувати невідворотне настання кризи у 2008 році як результат експоненційного нагромадження по-

тенційно збиткових операцій упродовж періоду 2005-2007 рр. Однак слід зазначити, що модель (10) є лінійною, тому її можливості прогнозування реальної економічної динаміки обмежені лише ділянками з однорідними траєкторіями. Тому використання нелінійного інструменту моделювання дозволить більш точну ідентифікацію ризиків настання кризових явищ.

Скористаємося ортодоксальним для економіки результатом – нелінійною моделлю Солоу, котра узагальнено записується [9, с. 69]:

$$x'(t) = s \cdot f(x(t)) - b \cdot x(t), \quad (13)$$

де змінна  $x(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$  – капіталозабезпеченість, а  $K(t)$  – рівень капіталу,  $L(t)$  – чисельність працездатного населення;  $s$  – рівень заощаджень;  $f(x(t))$  – виробнича функція; коефіцієнт  $b$  сумарно ураховує ступінь зносу фондоозброєності, приріст населення і НТП.

Нелінійна динамічна модель (13) представлена диференціальним рівнянням першого порядку є відомим в курсі вищої математики рівнянням Бернуллі, коли скористатися виробничою функцією:

$$f(x) = A \cdot x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (14)$$

де  $A$  – технологічний рівень.

Тоді динамічна модель (13) набуває вигляду

$$x'(t) = s \cdot A \cdot x^\alpha - b \cdot x(t). \quad (15)$$

Останнє рівняння є класичною динамічною нелінійною, але одновимірною моделлю економічного зростання. Аналітичний розв'язок вказаної моделі має наступний вигляд:

$$x(t) = x_0 \left( (1 - M) \cdot e^{(\alpha-1)bt} + M \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (16)$$

де константа  $M = \frac{sAx_0^{\alpha-1}}{b}$ ;  $x_0 = \frac{K_0}{L_0}$  – початкова умова.

Відомо, що рівноважне значення капіталозабезпеченості, при якому економічна виробнича система переходить у стійкий стан рівноваги, тобто  $x'(t) = 0$ , може бути отримане за допомогою виразу (17).

$$x^* = \left( \frac{sA}{b} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (17)$$

Якщо  $x(t) < x^*$ , то значення моделі (15) будуть зростати з плином часу до того моменту, коли  $x(t) = x^*$ . За іншої ситуації –  $x(t) > x^*$  – значення капіталозабезпеченості будуть поступово спадаати аж поки не досягнуть величини  $x^*$ . Враховуючи дану особливість неокласичної моделі Солоу, доцільно математично вказати межі допустимих значень  $x(t)$ , які одночасно охоплюють можливу траєкторію національного продукту, залежно від рівноважного стану, але разом з тим допускають відхилення значень моделі від фактичних даних. Для цього необхідно визначити нижню межу коридору за допомогою мультиплікатора, який постійно зменшується з плином часу, прямуючи до 0. Аналогічним чином, верхня межа отримується за допомогою зростаючого з часом мультиплікатора. Тоді зазначене вище можна узагальнити у вигляді наступної нерівності:

$$x(t) \times e^{-\gamma t} \leq x(t) \leq x(t) \times e^{\gamma t}, \quad (18)$$

де  $0 < \gamma < 1$  – міра місткості коридору допустимих відхилень.

Подвійна нерівність (18) формує експоненційний коридор на динамічному просторі можливих станів у межах результатів моделі (15). Необхідно зауважити, що міру місткості  $\gamma$  варто оптимізувати таким чином, щоб всі статистичні спостереження могли бути охоплені межами коридору.

З метою оцінки міри відхилення фактичних значень від результатів моделювання, скористаємося формулою динаміки ризику (19) як модифікацією виразу (12).

$$r(t) = \left| \frac{x(t) \times e^{\gamma} + x(t) \times e^{-\gamma}}{x(t)} - 2 \right| \times 100\%, \quad (19)$$

де  $r(t)$  – міра загрози втрати величини.

Модифікована формула визначається як відносне значення різниці відстаней поточних значень величини капіталозабезпеченості від лівої та правої меж коридору. Тобто помітне зміщення фактичної величини  $x(t)$  до крайніх значень нерівності (18) є сигналом загрози втрати стабільності системи.

Варто зазначити, що величина  $r(t)\%$  вказує на усереднену частку капіталозабезпеченості, яка може бути втрачена у результаті зміни рівноважного стану з  $x_0^*$  на  $x_1^*$ .

Використаємо нелінійне рівняння Солоу (15) та формулу динаміки ризику (19) для моделювання рівня капіталозабезпеченості України та загрози настання кризових явищ для періоду 2000-2016 рр. Необхідна для обчислень статистична інформація зведена у табл. 1.

Таблиця 1

**Динаміка працездатного населення та вартість основних засобів України в період 2000-2013 рр.**

Рік	L, тис. чол.	K, міль. грн.*
2000	33310	673291,6
2001	34441	676693,9
2002	34314	678555,1
2003	34187	668242,6
2004	34060	645586,4
2005	33933	579952,2
2006	33806	621045,9
2007	33679	660513,5
2008	33498	675070,3
2009	33346	575902,3
2010	33216	598647,2
2011	33100	630490,2
2012	33013	632309,8
2013	32940	651886,5

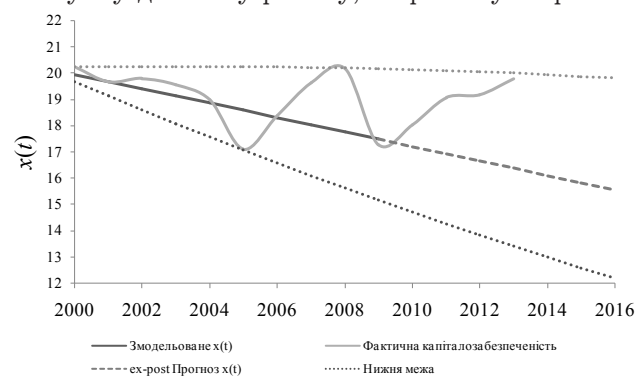
\* у цінах 1999 року

Джерело: складено авторами на основі [10]

Виходячи з рівності (14), припустимо, що  $A=1$ . Тоді, беручи за основу аналітичний розв'язок (16), динаміка рівня капіталозабезпеченості України в період 2000-2013 рр., може бути змодельована за таких параметрів:  $x_0 = 20.213$ ,  $\alpha = 0.256$ ,  $b = 0.0033$ ,  $s = 0.25$ . З метою визначення міри ризику, побудуємо межі коридору допустимих відхилень  $x(t)$ , користуючись нерівністю (18) для  $\gamma = 0.01667$ . Результати числових експериментів для періоду 2000-2016 рр. графічного приведені на рис. 5.

Врахуємо значення нижньої (лівої) та верхньої (правої) межі нерівності (18) як чисельник формули (19), а її знаменник – як фактичні значення капіталозабезпеченості для періоду

2000-2013, а для 2014-2016 рр. використаємо прогнозні результати моделі (16). Тоді отримаємо наступну динаміку ризику, зображену на рис. 6.



**Рис. 5. Результати моделювання української економіки**



**Рис. 6. Динаміка ризику української економіки на основі нелінійної моделі Солоу на період 2000-2016 рр.**

Отже, табл. 1 засвідчує довготривале убавання капіталозабезпеченості виробництва в економічній системі України паралельно з поступовим зниженням чисельності працездатного населення. Саме це є причиною низхідного тренду числових значень моделі на рис. 5. Через систематичну амортизацію основних засобів національного господарства прогнозовані значення ризиків з рис. 6 у період 2008-2014 передбачили загрозу економічного спаду в 2008 р., а також вказують на посилення загрози для періоду 2009-2014 рр.

Таким чином, нелінійний інструментарій моделювання економічної динаміки та динаміки ризику економічного спаду є більш гнучкий та функціональний у порівнянні з лінійним апаратом на основі класичного рівняння Харрода-Домара.

**Висновки.** У даній статті моделювання динамічних траєкторій економічного ризику відбулося з використанням одновимірних моделей економічної динаміки: нелінійної моделі Солоу та модифікацій класичного рівняння Харрода-Домара. Результати обчислювального експерименту узгоджуються з статистичними даними. Також вдалося оцінити міру ризику настання економічного спаду. Розроблений підхід до оцінки загрози кризи довів свою універсальність при використанні з декількома математичними моделями економічного зростання. Він дозволив передбачити історичні спади української економіки.

Наступний крок у вивченні поведінки траєкторій економічного ризику та передбачення кризового стану економіки пов'язаний з долученням динамічних моделей більшої розмірності.

### Список літератури:

1. Малинецкий Г.Г. Нелинейная динамика и проблемы прогноза / Г.Г. Малинецкий, С.В. Курдюмов // Вестник РАН, Т. 71, № 3. – 2001. – С. 210-232.
2. Тищенко І.С. Визначення економічної сутності поняття «ризик» за допомогою контент-аналізу / І.С. Тищенко, Управління розвитком. – № 1 (141). – 2013. – С 152-154.
3. Радзіховська Л.М., Сутність поняття «економічний ризик»: ретроспектива та сучасність / Л.М. Радзіховська, О.В. Іващук // Economic Annals-XXI. – 2015. – 7-8 (1). – С 4-7.
4. Ковальчук Н.П. Економічні ризики: класифікація, принципи і способи оцінювання / Н.П. Ковальчук // Актуальні проблеми економіки. – № 10 (124). – 2011. – 31-36 с.
5. Domar E.D. Essays in the Theory of Economic Growth. – New York, NY, USA, 1966 (first publication 1957) – 272 p.
6. Harrod R.F. An essay in dynamic economics. Economic Journal, 49, 1939 – 14-33 pp.
7. Шевченко І.Г. Порядок и хаос рынка акционерного капитала России / И.Г. Шевченко // М.: ООО Журнал «Управление персоналом», 2003. – 216 с.
8. Фрактальна модифікація рівняння Харрода-Домара та динаміка економічного ризику [Текст]: перш. нац. наук.-метод. конф., КНЕУ, 30 вересня – 1 жовтня 2016 р.: тези доповідей / [Ю.В. Коляда, В.А. Бондар]. – КНЕУ. – 2016 – С. 182-185.
9. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth / Robert M. Solow // The Quarterly Journal of Economics. – 70 (1). – 1956. – С. 65-94.
10. Филиппова І.Г. Україна: моделі економічного зростання / В.Г. Сумцов, І.Г. Филиппова // Формування ринкової економіки: збірник наукових праць. – Спец. випуск: у 3 т. – Т. 3. – К.: КНЕУ, 2010. – С. 336-346.

**Коляда Ю.В., Бондарь В.А.**

Киевский национальный экономический университет  
имени Вадима Гетьмана

## РИСК НАСТУПЛЕНИЯ КРИЗИСНОГО СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ ОРТОДОКСАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

### Аннотация

Предложена методика предсказания кризиса макроэкономического развития. Она основывается на применении модификаций классических моделей и формулы числовой меры риска. Осуществлена апробация проведенной методики на примере украинской экономики. Компьютерное моделирование учитывает целый ряд особенностей эволюции экономической системы: опоздания, нелинейность, фрактальность линейной модели. Указано на необходимость обобщения результатов, отталкиваясь от многомерных динамических моделей экономики.

**Ключевые слова:** модель экономического роста, динамика риска, модификации модели Харрода-Домара, модель Солоу, интервальный прогноз.

**Kolyada Y.V., Bondar V.A.**

Kyiv National Economic University  
named after Vadym Hetman

## THE RISK OF THE ONSET OF THE CRISIS SITUATION ON THE BASIS OF THE ORTHODOX MODEL OF ECONOMIC DYNAMICS

### Summary

A method for predicting of the development of the macroeconomic crisis was proposed. It is based on the use of modifications of classical models and formulas numeric al measure of risk. Implemented testing methods carried out by the example of the Ukrainian economy. Computer modeling takes into account a number of features of the evolution of the economic system: delay, nonlinear, linear fractal model. The necessity of generalization of results is based on multivariate dynamic models of the economy.

**Keywords:** model of economic growth, risk dynamics, modifications of the Harrod-Domar model, Solow model, the interval forecast.