

конкретної спеціалізації, що становить ядро такого утворення. Так створюється економічна сукупність виробництв, органічно пов'язаних між собою через кооперування і комбінування. Обов'язковими умовами є концентрація цих об'єктів на певній компактній території і необхідний набір ресурсів для їх функціонування. Таке виробничо-територіальне утворення, що складається з виробництв, об'єднаних технологічними зв'язками, і спеціалізується на випуску певних видів продукції при повному використанні ресурсів, важливе для формування і функціонування господарської системи.

#### Список використаних джерел:

1. Саати Т. Принятие решений: метод анализа иерархий / Т. Саати / Пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.
2. Стратегія розвитку Івано-Франківської області на період до 2020 р. – Режим доступу: [http://www.if.gov.ua/files/SP\\_IF\\_oblast\\_4.pdf](http://www.if.gov.ua/files/SP_IF_oblast_4.pdf)

**Коляда Ю.В.**

*к.ф.м., доцент;*

**Бондар В.А.**

*бакалавр,*

*Київський національний економічний університет  
імені Вадима Гетьмана*

### ДИНАМІКА ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ НА ОСНОВІ ЛАГОВО-ФРАКТАЛЬНОЇ МОДИФІКАЦІЇ РІВНЯННЯ ХАРРОДА-ДОМАРА

Яскравим прикладом математичного втілення кейнсіанської економічної доктрини є ортодоксальна динамічна модель Харрода-Домара [1], яка для умови нульового споживання (гіпотетичному випадку, коли кожна одиниця продукту, виробленого у суспільстві, миттєво інвестується в економіку) записується:

$$y'(t) = a \cdot y(t), \quad (1)$$

де змінна  $y(t)$  описує економічну категорію внутрішнього валового продукту країни; похідна  $y'(t)$  відповідає приросту змінної  $y(t)$ ; коефіцієнт  $a$  – віддача приросту капіталу; незалежна змінна  $t$  – період часу.

Однак одновимірна лінійна динамічна модель (1) не враховує низки особливостей численних нелінійних зав'язків економічної системи. Приміром, враховуючи запізнення  $\tau$  та міру інвестування виробленого продукту ( $\frac{1}{k}$ ), класичне рівняння лінійної економічної динаміки набуває вигляду:

$$y'(t) = a \cdot y\left(1 + \frac{1}{k}\right)(t - \tau), \quad (2)$$

де скаляр  $k \in R$  вибирається з множини дійсних чисел, виключаючи значення  $k \neq 0, \pm 1$ ,  $\tau$  – величина лагу.

Динамічна модель (2) – це лагово-фрактальна модифікація рівняння Харрода-Домара. Заміною змінної  $t - \tau = T$ , вираз (2) переписується:

$$y'(T + \tau) = a \cdot y \left( 1 + \frac{1}{k} \right) (T). \quad (3)$$

Скориставшись лінійними членами ряду Тейлора:

$$y(T + \tau) = y(T) + \tau \cdot y'(T) \dots;$$

$$y'(T + \tau) = y'(T) + \tau \cdot y''(T) \dots,$$

економіко-математична модель (3) набуває остаточного вигляду

$$\tau \cdot y''(T) + y'(T) - a \cdot y \left( 1 + \frac{1}{k} \right) (T) = 0. \quad (4)$$

У випадку втрати фрактальності, диференційне рівняння (4) зводиться до лагової модифікації рівняння Харрода-Домара:

$$\tau \cdot y''(T) + y'(T) - a \cdot y(T) = 0. \quad (5)$$

У залежності від  $k$  числові результати моделювання можуть бути меншими за значення розв'язку (5) при  $k < 0$ , та більшими – при  $k > 0$ . Зі збільшенням  $|k|$  числові результати фрактальної модифікації будуть менш відхилятися від числового розв'язку рівняння (5).

У нашому випадку відома формула ризику [2] набуває вигляду:

$$r(t) = \frac{y_{\max}(t) - y_{\min}(t)}{\frac{1}{2} \times [y_{\max}(t) + y_{\min}(t)]} \times 100\%, \quad (6)$$

де  $y_{\max}(t)$  та  $y_{\min}(t)$  – максимально та мінімально можливі значення величини ВВП відповідно.

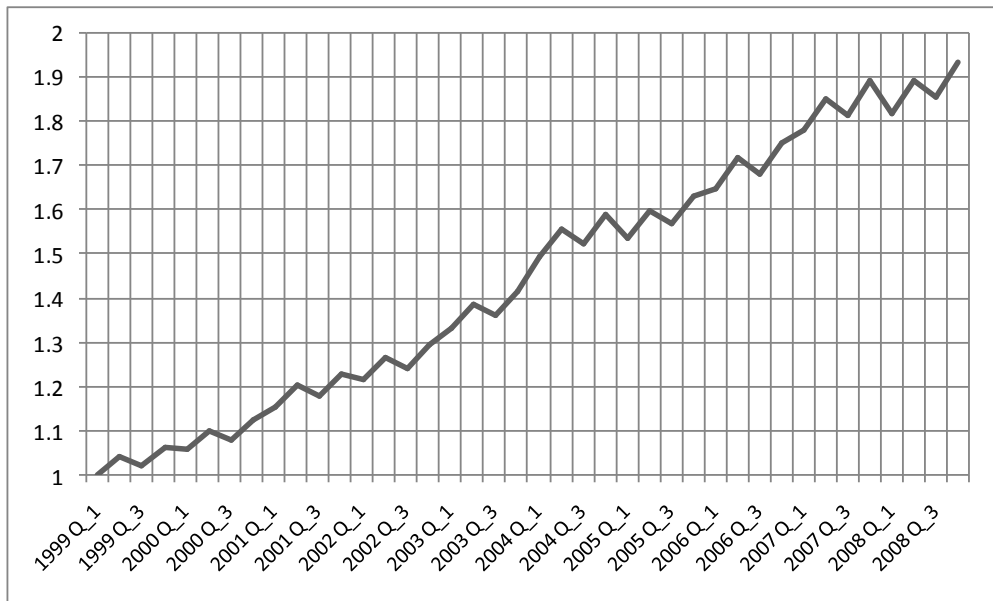
Замінивши чисельник формули (6) на модуль різниці спостережень ВВП з песимістичною та оптимістичною кривими (4), а знаменник – на реальні статистичні спостереження ВВП, після перетворення отримується вираз (7).

$$r(t) = \left| \frac{y_{k > 0}(t) + y_{k < 0}(t)}{\hat{y}(t)} - 2 \right| \times 100\%, \quad (7)$$

де  $y_{k > 0}(t)$  та  $y_{k < 0}(t)$  – значення ВВП за формулою (4) при  $k > 0$  та  $k < 0$ ,  $\hat{y}(t)$  – значення статистичних спостережень ВВП за період  $t$ .

Частка  $r\%$  відповідає за долю валової вартості потенційно збиткових операцій до поточної величини ВВП. Логіка даного рівняння полягає у тому, що переважання одного типу очікувань у суспільстві над іншим супроводжується збільшенням рівня банкрутств та виникненням загрози падіння національного продукту.

Змоделюємо динамку ВВП України на основі лагово-фрактальної модифікації рівняння Харрода-Домара (4). Для цієї мети було обрано найбільш динамічний період розвитку економіки України, приведений на рис. 1.



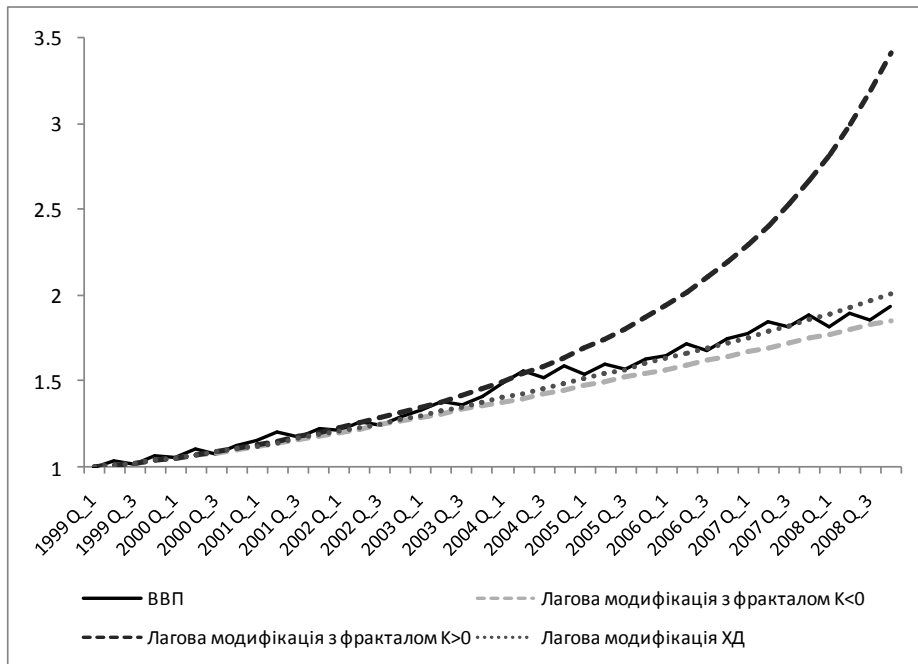
**Рис. 1. Динаміка реального щоквартального ВВП України 1999-2008 рр., відношення до першого кварталу 1999 року**

*Джерело: розроблено авторами*

Нехай диференційне рівняння другого порядку (5) має параметри  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=0,01$ ,  $a = 0.021$ . На основі його числового розв'язку було побудовано 2 інтегральні криві, які охоплюють спостереження статистичної вибірки ВВП України, а саме: верхня крива має параметр  $k=0.695$ , а нижня крива –  $k=-1.989$ . Результати моделювання графічно зведені на рис. 2. Зауважимо, що не всі статистичні спостереження можуть перебувати поміж двома інтегральними кривими (4) для  $k > 0$  і  $k < 0$ . Деяка статистична інформація може містити окремі екстремальні значення, вплив фактору помилки чи випадковості. Тому кількість спостережень, охоплених так званим коридором, має встановлюватися індивідуально для кожної статистичної вибірки окремо.

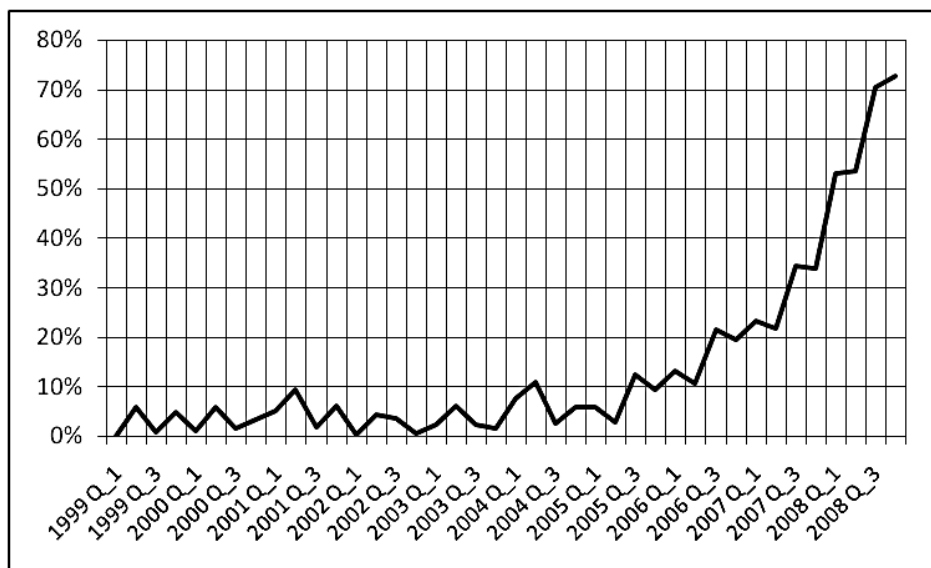
Інтегральні криві за динамічної моделі (4) є межами оптимістичних та песимістичних очікувань у суспільстві, які суб'єктивно існують у системі координат експоненційно зростаючого простору. Порушення балансу в економічній системі, а отже й втрати економічними агентами частини прибутку, може бути спричинено хибними прогнозами майбутнього рівня ділової активності. Що більший цей розрив, то більше підстав для зміни траєкторії розвитку. Такі настрої посилюють плавне нагромадження збитку, породжуючи ризик настання кризових явищ в цілому.

Обчислена на основі (7) динаміка ризику макроекономічного розвитку України графічно відтворена на рис. 3.



**Рис. 2. Інтегральні криві результатів моделювання української економіки на основі моделей (4) та (5)**

*Джерело: розроблено авторами*



**Рис. 3. Динамічна загрози економічного спаду ВВП України, 1999-2008 рр.**

*Джерело: розроблено авторами*

Як видно, нагромадження потенційно збиткових операцій в Україні відбувалося експоненційно, що є свідченням невідворотного настання кризи у 2008 році.

**Список використаних джерел:**

1. Самуельсон П.А. Основания экономического анализа / П.А. Самуельсон // Пер. с англ. под ред. П.А.Ватника. СПб.: Экономическая школа, 2002. – 604 с.
2. Шевченко И.Г. Порядок и хаос рынка акционерного капитала России / И.Г. Шевченко // М.: ООО «Журнал «Управление персоналом», 2003. – 216 с.