НАУКОВИЙ АВТОРСЬКИЙ КОЛЕКТИВ

Miskinis A., doctor of social sciences (розділ 3.7); Вітлінський В.В., д.е.н., професор (розділи 2.2, 2.3); Діордіца С.Г., д.е.н., професор (розділ 1.4); Захарченко П.В., д.е.н., професор (розділ 1.5); Іванов М.М., д.е.н., професор (розділ 2.5); Кібальник Л.О., д.е.н., доцент (розділ 1.6); Курбанов К.Р., д.т.н., професор (розділ 3.5); Лакіс В.Ю., д.е.н., професор (розділ 3.6); Порохня В.М., д.т.н., д.е.н., професор (розділ 3.8); Рамазанов С.К., д.т.н., д.е.н., професор (розділ 1.7); Таушанжи К.П., д.е.н., доцент (розділ 3.9); Соловйов В.М., д.ф.-м.н., професор (розділи 1.1, 2.4); Тюфекчи Ферекдун, д.е.н. (розділ 3.9); Черняк О.І., д.е.н., професор (розділ 1.9)

Dzemydaite G., doctor of social sciences (розділ 3.1); Lauzadyte-Tutliene A., doctor of economics and management, associate professor (розділ 3.3); Paliulyte R., dr., associated professor (розділ 3.2); Rasteniene A., dr., associated professor (розділ 3.2); Баженова О.В., к.е.н., доцент (розділ 3.4); Бєгун А.В., к.е.н., професор (розділ 2.1); Гострик О.М., к.е.н., доцент (розділ 1.2); Гриценко К.Г., к.т.н., доцент (розділ 1.3); Данильчук Г.Б., к.е.н. (розділ 2.4); Ігнатова Ю.В., к.е.н. (розділ 2.1); Кобець В.М., к.е.н., доцент (розділ 1.4); Меняйлова Г.Є., к.е.н., доцент (розділ 3.5); Осипова О.І., к.е.н. (розділ 2.1); Пушкар О.І., к.е.н. (розділ 3.5); Скіцько В.І., к.е.н., доцент (розділ 2.3); Соловйова В.В., к.е.н., доцент (розділ 1.2); Тішков Б.О., к.е.н., доцент (розділ 1.8); Шерстенников Ю.В., к.ф.-м.н., доцент (розділ 3.8)

Водолєєва І.Є. (розділ 1.1); Засядько О.А. (розділ 2.4); Котлярова Ю.О. (розділ 1.8); Кузьмич Н.В. (розділ 1.6); Лазаренко А.О. (розділ 1.1); Якимчук Б.Б. (розділ 1.9)

2.2. ВПЛИВ ЛАГУ НА ЧИННИКИ ЕВОЛЮЦІЇ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТА ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКУ НА ПІДҐРУНТІ МАТРИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ

Анотація. Розглядається лагова матрична модифікація класичної динамічної моделі Харрода-Домара з постійним темпом приросту споживання. Описується математичний інструментарій знаходження оптимальних параметрів моделі в контексті відтворення цільової динаміки показників. Наводиться результат моделювання еволюції української економіки на підґрунті розглядуваної моделі у координатах «ВВП – податки». Оцінюється покоординатний ризик втрати економічною системою стійкості.

Ключові слова: економіко-математичне моделювання, модель Харрода-Домара, економічна динаміка, макроекономічна система, ризик.

Постановка проблеми. Аналіз еволюції національної економіки в часовому розрізі є важливою задачею у виконанні стратегічних завдань державного управління, зокрема, формування податкової та монетарної політики, планування державного бюджету, встановлення цілей довгострокового розвитку економіки. Ефективним інструментарієм у вирішенні зазначеної задачі виступає математичне і комп'ютерне моделювання еволюційних процесів нелінійної економіки. На сьогоднішній день значну увагу економістів-практиків привертає ортодоксальна динамічна лінійна модель Харрода-Домара, що дозволяє оцінювати зміну національного доходу в довгостроковому періоді. Принципові недоліки даної моделі звужують спектр її застосування, тому їх усунення є важливим завданням економіко-математичного моделювання, вирішення якого відкриває нові можливості макроекономічного аналізу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З моменту представлення науковому загалу класичної моделі Харрода-Домара, в літературі поставала велика кількість її різних модифікацій. Автори намагались зробити вихідну модель більш коректною в контексті дослідження тих чи інших аспектів макроекономічної динаміки, деталізуючи і вдосконалюючи її складові. Згадувана модель і тепер представляє для науковців інтерес як базис для подальших досліджень.

Так, у роботі [2] представлено декілька варіантів модифікації моделі Харрода-Домара, які вводять науково-технічний прогрес як чинник економічного зростання і водночас як результат інвестицій за попередні періоди. У [3] пропонується вдосконалення класичної моделі шляхом встановлення гіперболічної залежності накопичення капіталу від часу, а також врахування амортизації, що потенційно усуває концептуальний недолік вихідної моделі, пов'язаний з лінійною залежністю накопичення капіталу від інвестицій того ж часового періоду. У праці [5] наведено фрактально-лагову модифікацію моделі Харрода-Домара, що дозволяє, з одного боку, врахувати запізнення приросту доходу стосовно інвестицій, а з іншого – реалізувати нелінійну залежність обсягу інвестицій від доходу.

Інтерес до вдосконалення класичної моделі Харрода-Домара проявляють й іноземні дослідники. У статті [9] авторами здійснено спробу вирішити проблему закритості економічної системи, що притаманна класичній моделі, шляхом включення іноземних інвестицій у функцію приросту капіталу (доходу); також розглядається амортизація як додатковий чинник зміни доходу. У праці [11] розглядається модифікація моделі Харрода-Домара з розподіленим доходом, що передбачає використання різних норм заощадження для різних груп економічних суб’єктів (приватні підприємства, домогосподарства тощо).

Виокремлення невирішених раніше аспектів загальної проблеми. Існування лагових явищ у процесах взаємодії різних економічних чинників є актуальним питанням, що часто постає у наукових дискурсах – на жаль, переважно теоретичного характеру. Запізнення реакції економічного середовища на різноманітні збурення, такі як виникнення інвестиційних потоків, інноваційних технологій, коливання індексів на фондовому ринку тощо, спричиняє вплив на динаміку економічної системи. Попри те, що значимість подібного впливу важко переоцінити, на даний момент представлено небагато спроб врахувати часовий лаг у динамічних економіко-математичних моделях. З метою вдосконалення інструментарію для аналізу систем макроекономічного рівня доцільно розвивати лагові модифікації моделі Харрода-Домара зі збереженням (ненульового) споживання як складової національного доходу.

Окрім того, простежується обмаль досліджень, спрямованих на усунення принципового обмеження класичної моделі Харрода-Домара – фігурування національного доходу як єдиного показника макроекономічної системи, тобто одновимірності моделі. Хоча простота моделі була важливим критерієм успішного вивчення економічної системи на початковому етапі, дослідження, на сьогоднішній день системний підхід до моделювання вимагає цілісного представлення об’єкта в процесі абстрагування від його другорядних властивостей.

Серед значущих показників функціонування макроекономічної системи, що дають можливість більш цілісно описати її в зв’язці з національним доходом, доречно виділити доходи до державного бюджету. Вдалість вибору зазначеної пари показників обґрунтовується тим фактом, що діяльність держави як економічного суб’єкта відіграє важливу роль в еволюції національної економіки. Відсутність держави у класичній моделі Харрода-Домара робить її неповною для ґрунтовного економічного аналізу і зумовлює необхідність відповідної модифікації вихідної моделі.

Постановка завдання. Науково-дослідницьке завдання полягає у формалізації модифікованої моделі Харрода-Домара, що задовольняє наступним вимогам: 1) описує економічну систему у двовимірному просторі з координатами «ВВП – податки»; 2) долучає невиробниче споживання, що зростає з постійними темпами; 3) враховує величину лагу між дією економічних чинників та зміною результуючих показників. Подальше дослідження передбачає розроблення методу знаходження параметрів моделі для апроксимації реальної економічної динаміки, моделювання української економіки на підґрунті розробленого інструментарію, а також оцінювання ризику на підставі побудованої комп’ютерної моделі.

Виклад основного матеріалу дослідження. Динамічна модель економічного зростання типу Харрода-Домара у найбільш загальному вигляді записується наступним чином:

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot Y(t) + \frac{dC(t)}{dt}, \qquad (1)$$

де *Y(t)* – національний дохід у момент часу *t*, *a* – гранична продуктивність капіталу, *C(t)* – невиробниче споживання у момент часу *t*.

Динаміка обсягу споживання *C(t)* задається екзогенно. Цей показник може вважатися постійним у часі, зростати з заданим постійним темпом або мати якусь іншу динаміку (у перших двох випадках набагато простіше отримати розв’язок моделі). [4, с. 44-45]

У праці [1] відображено узагальнення одновимірної моделі (1) шляхом її представлення у матричній формі. Подібна модифікація дає змогу описувати систему з довільним числом змінних. Нижче приведено варіант матричної форми динамічної моделі Харрода-Домара з незмінним темпом приросту невиробничого споживання.

$$\dot{Y}(t) = A \cdot Y(t) + B, \qquad (2)$$

де *Y(t)* – вектор-стовпчик значення змінних моделі у момент часу *t* розмірності $n \times 1$, *A* – матриця коефіцієнтів, що описують лінійні взаємозв’язки між кожною парою змінних, розмірності $n \times n$, *B* – вектор-стовпчик незалежного приросту змінних (багатовимірний аналог приросту споживання) розмірності $n \times 1$, *n* – кількість змінних моделі, що представляють різні макроекономічні показники.

Оскільки в реальній економіці спостерігається лаг між зміною чинників та їх впливом на показники, наприклад, запізнення приросту доходу по відношенню до інвестицій, що зумовили даний приріст, доцільно вдосконалити модель (2) з метою врахування лагових явищ. Тоді система (2) набуває наступного виду:

$$\dot{Y}(t) = A \cdot Y(t-\tau) + B, \qquad (3)$$

де *Y(t)* – вектор-стовпчик значень змінних моделі у момент *t*, *A* – матриця коефіцієнтів лінійних взаємозв’язків змінних, $\tau \geq 0$ –

величина лагу взаємозв'язку змінних, *B* – вектор-стовпчик незалежного приросту змінних.

Модель (3) представляє собою систему диференційних рівнянь. Для знаходження розв'язку даної системи її необхідно переписати таким чином, щоб позбутися запізнення ($-\tau$) у складі аргументу функції $Y(t - \tau)$. У праці [5, с. 795] подібне перетворення виконувалось за допомогою ряду Тейлора. Нагадаємо, що рядом Тейлора для функції *f(x)* називається степеневий ряд наступного виду:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad (4)$$

де *f(x)* – функція, що нескінченно диференційована в околі точки *a*.

Виконаємо розклад функції $Y(t - \tau)$ в околі точки *t* в ряд Тейлора, використовуючи лише лінійні доданки (похідні першого порядку):

$$Y(t-\tau) = Y(t) + \frac{Y'(t)\cdot(t-\tau-t)}{1} = Y(t) - \tau\cdot Y'(t), \quad (5)$$

Підставивши праву частину виразу (5) у рівняння (3), отримуємо:

$$Y'(t) = A\cdot Y(t) - \tau\cdot A\cdot Y'(t) + B, \text{ або}$$

$$Y'(t) + \tau\cdot A\cdot Y'(t) = A\cdot Y(t) + B, \text{ і нарешті:}$$

$$(E + \tau\cdot A)\cdot Y'(t) = A\cdot Y(t) + B, \text{ тобто}$$

$$Y'(t) = (E + \tau\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot Y(t) + (E + \tau\cdot A)^{-1}\cdot B, \quad (6)$$

де $Y'(t)$ – похідна $Y(t)$ по часу *t*, *E* – одинична матриця тієї ж розмірності, що й матриця *A*.

Інтегруванням рівняння (6) по незалежній змінній *t* отримується його аналітичний розв'язок:

$$Y(t) = e^{(E+\tau\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot t}\cdot Y_0 + (E + \tau\cdot A)^{-1}\cdot(e^{(E+\tau\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot t} - E)\cdot B, \quad (7)$$

де *Y(t)* – вектор-стовпчик значень змінних моделі у момент часу *t*, $e^{(E+\tau\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot t}$ – експонента матриці $(E+\tau\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot t$, *E* – одинична матриця, τ – скалярна величина лагу, *A* – матриця коефіцієнтів лінійних взаємозв'язків змінних, *t* – момент часу, для якого розв'язується рівняння, Y_0 – вектор-стовпчик значень змінних у момент *t* = 0, *B* – вектор-стовпчик незалежного приросту змінних, *n* – кількість змінних моделі.

Динаміка змінних моделі (7) залежить від конкретних значень матриці *A*, векторів Y_0 і *B*, а також величини лагу τ. Для відтворення реальної динаміки національної економіки у координатах «ВВП – податки» на підґрунті моделі (7) необхідно знайти такі значення *A*, *B* і τ, щоб розрахункові значення змінних *Y(t)* максимально наближалися до реальних значень відповідних показників для кожного часового періоду. Значення скалярних компонент вектору Y_0 встановлюються на рівні статистичних значень показників, що відповідають першому періоду спостережень.

Для вирішення даної задачі скористаємося однією із модифікацій методу найменших квадратів (МНК). У зв'язку з нелінійним характером динаміки змінних моделі (7), для знаходження достатнього наближення виникає необхідність в ітеративному процесі на базі МНК.

Нехай θ_0 – вектор-стовпчик, що містить початкові значення налаштовуваних параметрів моделі (7):

$$\theta_0 = \{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{21} \quad a_{22} \quad b_1 \quad b_2 \quad \tau\}, \tag{8}$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – початкові значення матриці *A*, b_1, b_2 – початкові значення вектору *B*, τ – початкове значення величини лагу.

Початкові значення скалярних компонентів *A* і *B* обираються довільно в інтервалі [-1 ; 1], а початкове значення лагу τ – емпірично, виходячи з приблизної тривалості запізнення взаємовпливу розглядуваних економічних змінних. Тоді результатом кожної ітерації МНК буде вектор-стовпчик $\Delta\theta_i$, що представляє необхідну зміну значень параметрів моделі з метою наближення до цільової динаміки:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta_i, \tag{9}$$

де θ_i – вектор-стовпчик параметрів моделі на *i*-тій ітерації МНК, $\Delta\theta_i$ – результат *i*-тої ітерації МНК.

З наближенням розв'язків моделі (7) до цільової динаміки з використанням класичного МНК, існує ризик виникнення хаотичних явищ, пов'язаних з проходженням розрахункової матриці через окіл однієї із точок її виродження. Подібна поведінка може спричинити низьку точність результатів МНК, тому для вирішення задачі по оптимізації параметрів моделі (7) доцільно скористатися модифікацією методу МНК, відому як алгоритм Левенберга–Марквардта (в зарубіжній літературі часто фігурує назва методу Damped Least Squares). Згідно із зазначеним алгоритмом розв'язок задачі оптимізації зводиться до наступного рівняння [10, с. 39]:

$$\Delta\theta = J^T \left(J \cdot J^T + \lambda^2 I\right)^{-1} e, \tag{10}$$

де $\Delta\theta$ – вектор-стовпчик розмірності $p\times1$, що представляє зміну параметрів системи наприкінці даної ітерації, $J = \left\{J_{ij}\right\} = \left\{\dfrac{\partial e_i}{\partial \theta_j}\right\}$ – матриця Якобі розмірності $m\times p$, що характеризує величину зміни помилки e_i у разі нескінченно малої зміни значення параметра θ_j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$, $\lambda \geq 0$ – демпфуюча константа, значення якої вибирається емпірично і повинно бути якомога меншим, але достатньо великим, щоб усунути нестійкість в околі точки виродження матриці $J \cdot J^T$, e – вектор-стовпчик розмірності $m\times1$, що представляє помилку по кожному із критеріїв оптимізації, m – кількість критеріїв оптимізації, p – кількість параметрів системи, що оптимізуються.

У розглядуваній задачі оптимізації в якості помилки обрано суму квадратів відхилень розрахункових значень від статистичних для кожної із змінних моделі (7):

$$e_i = \sum_{t=1}^{T} \left(Y_t^{(i)} - \tilde{Y}_t^{(i)}\right)^2, \tag{11}$$

де e_i – i-тий елемент вектора помилок e, $i = \overline{1,2}$, $Y_t^{(i)}$ – розрахункове значення i-того показника за період t, $\tilde{Y}_t^{(i)}$ – цільове (статистичне) значення i-того показника за період t, T – кількість періодів спостереження.

Оскільки аналітичний розрахунок похідних помилки e моделі (7) по кожному з її налаштовуваних параметрів θ_i є занадто складною математичною задачею, для знаходження елементів матриці Якобі $\{J_{ij}\} = \left\{\dfrac{\partial e_i}{\partial \theta_j}\right\}$ використовується числовий метод розрахунку похідних. У такому випадку значення елементів матриці Якобі обчислюються за наступною формулою:

$$\{J_{ij}\} = \frac{e_i(\theta_1,...,\theta_{j-1},\theta_j + h,\theta_{j+1},...,\theta_p) - e_i(\theta_1,...,\theta_p)}{h}, \quad (12)$$

де $\{J_{ij}\}$ – елемент матриці *J*, що знаходиться в *i*-тому рядку *j*-того стовпчика, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$, $e_i(...)$ – величина помилки *i*-того показника при заданих значеннях параметрів моделі (7), θ_j – значення параметра моделі (7), що оптимізується, *h* – крок обчислення похідної, значення якого повинно обиратися якомога меншим, але й достатньо великим, щоб похибка комп'ютерного обчислення залишалась на прийнятному рівні, *m* = 2 – кількість змінних моделі (7), *p* = 7 – кількість параметрів моделі (7), що підлягають оптимізації.

Розглянемо статистичні дані розвитку української економіки, на базі яких можна відтворити динаміку еволюції національної економіки в координатах «ВВП – податки». У таблиці 1 представлено значення номінальних обсягів ВВП та доходів до зведеного державного бюджету за 1996-2016 рр., а також реальні обсяги відповідних показників у цінах 1996-го року, що дають змогу оцінити їх динаміку з урахуванням інфляції.

З метою більш коректного (з точки зору математичного моделювання) представлення даних наявні часові ряди макроекономічних показників варто нормалізувати. Нами використано наступну формулу нормалізації для ВВП:

$$Y_t^{(n)} = \frac{Y_t^{(s)}}{\min\limits_{i=\overline{1,T}}(Y_i^{(s)})}, \quad (13)$$

де $Y_t^{(n)}$ – нормалізоване значення ВВП за *t*-ий період, $Y_t^{(s)}$ – значення реального ВВП за *t*-ий період, *T* – кількість періодів спостережень.

Таблиця 1

Показники макроекономічного розвитку України за 1996-2016 рр.

Рік	Номінальний обсяг ВВП, млрд. грн.	Номінальний обсяг податків*, млрд. грн.	Дефлятор ВВП, %	Акумульований дефлятор **, %	Реальний обсяг ВВП, млрд. грн.	Реальний обсяг податків, млрд. грн.
1996	81.519	30.200	–	100.0	81.519	30.200
1997	93.365	28.100	118.1	118.1	79.056	23.793
1998	102.593	28.900	112.1	132.4	77.493	21.829
1999	130.442	32.900	127.3	168.5	77.399	19.521
2000	176.128	49.100	123.1	207.5	84.896	23.667
2001	211.175	54.900	110.2	228.6	92.367	24.013
2002	234.138	61.900	105.3	240.7	97.257	25.712
2003	277.355	75.300	108.2	260.5	106.477	28.908
2004	357.544	91.500	115.3	300.3	119.048	30.466
2005	457.325	134.200	124.1	372.7	122.700	36.006
2006	565.018	171.800	114.9	428.3	131.936	40.116
2007	751.106	219.900	122.8	525.9	142.824	41.814
2008	990.819	297.893	129.0	678.4	146.051	43.911
2009	947.042	272.967	112.6	763.9	123.977	35.734
2010	1120.585	314.506	113.7	868.5	129.020	36.211
2011	1349.178	398.554	114.2	991.9	136.024	40.182
2012	1459.096	445.525	107.8	1069.2	136.462	41.668
2013	1465.198	442.789	104.3	1115.2	131.383	39.705
2014	1586.915	456.067	115.9	1292.5	122.776	35.285
2015	1988.544	652.031	138.9	1795.3	110.763	36.318
2016	2383.182	782.749	117.1	2102.3	113.360	37.233

** Під податками маються на увазі доходи до зведеного державного бюджету. ** Під акумульованим дефлятором мається на увазі дефлятор ВВП з 1996 роком в якості базового періоду.*

Джерело: розрахунки авторів на основі [6], [7]

Для розрахунку нормалізованих значень податків було використано ту ж базу нормалізації, що й у випадку з ВВП, що обумовлено необхідністю збереження співвідношення між обсягами ВВП та податків у нормалізованих часових рядах:

$$G_t^{(n)} = \frac{G_t^{(s)}}{\min\limits_{i=\overline{1,T}}(Y_i^{(s)})}, \qquad (14)$$

де $G_t^{(n)}$ – нормалізоване значення податків за *t*-ий період, $G_t^{(s)}$ – значення реального обсягу доходів до зведеного державного бюджету за *t*-ий період, $Y_i^{(s)}$ – значення реального ВВП за *i*-ий період, *T* – кількість періодів спостережень.

Результатом нормалізації вихідних рядів статистичних даних є часові ряди, представлені у таблиці 2.

Таблиця 2

Нормалізовані значення показників макроекономічного розвитку України за 1996-2016 рр.

Рік	Нормалізовані значення реального обсягу ВВП	Нормалізовані значення реального обсягу доходів до зведеного державного бюджету
1996	1.053	0.390
1997	1.021	0.307
1998	1.001	0.282
1999	1.000	0.252
2000	1.097	0.306
2001	1.193	0.310
2002	1.257	0.332
2003	1.376	0.373
2004	1.538	0.394
2005	1.585	0.465
2006	1.705	0.518
2007	1.845	0.540
2008	1.887	0.567
2009	1.602	0.462
2010	1.667	0.468
2011	1.757	0.519
2012	1.763	0.538
2013	1.697	0.513
2014	1.586	0.456
2015	1.431	0.469
2016	1.465	0.481

Джерело: розрахунки авторів

Для подальшого моделювання динаміки української економіки на підґрунті (7) було виконано комп’ютерну реалізацію математичного інструментарію (9) – (12) у програмному пакеті Mathcad 14. Для розв’язку задачі оптимізації моделі (7) використано наступні значення параметрів оптимізаційного алгоритму: $A = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.10 \\ 0.05 & -0.05 \end{pmatrix}$ – початкова матриця коефіцієнтів лінійних взаємозв’язків між змінними, $B = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.00 \end{pmatrix}$ – початковий вектор незалежного приросту змінних, τ = 2.5 – початкова величина лагу взаємозв’язку між змінними, λ = 0.1 – демпфуюча константа, h = 0.00001 – крок обчислення елементів матриці Якобі.

Особливу увагу слід приділити обґрунтуванню вищезазначеного вибору початкового значення τ. Глибокий економіко-математичний аналіз проблеми лагу між виникненням інвестиційних потоків та відповідним приростом валового випуску продукції в межах української економіки було проведено у праці [8], де з використанням економетричних моделей встановлено, що для більшості галузей економіки України спостерігається лаг в межах від 2 до 3 років. На підставі цих даних вирішено використовувати значення лагу, рівне 2,5 року, на початковій ітерації на базі рівняння (10) з припущенням, що вказане значення з великою ймовірністю сприятиме найбільш швидкій і точній збіжності моделі (7) з цільовою динамікою змінних.

У результаті проведення 211 ітерацій методу (10) отримано наступний вектор, що містить оптимізовані значення параметрів моделі (числа округлені до 3-го знаку після коми):

$$\begin{aligned} \theta_{211} = \{&-0.047 \quad -0.398 \quad 0.080 \\ &-0.308 \quad 0.134 \quad -0.119 \quad 2.462\}, \end{aligned} \tag{15}$$

Згідно зі значеннями скалярних компонент вектора (15), оптимізовані параметри моделі (7) отримують такі значення: $A = \begin{pmatrix} -0.047 & -0.398 \\ 0.080 & -0.308 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.134 \\ -0.119 \end{pmatrix}$, $\tau = 2.462$.

Вектор початкових значень змінних дорівнює $Y_0 = \begin{pmatrix} 1.053 \\ 0.390 \end{pmatrix}$.

Підставивши вказані значення параметрів у аналітичний розв’язок (7) динамічної моделі (6), отримуємо числові закономірності (16), якими описується еволюція макроекономічної динаміки України у координатах «ВВП – податки» за 1996-2016 роки.

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \exp\left\{\begin{pmatrix} 0.164 & -0.979 \\ 0.196 & -0.478 \end{pmatrix} \cdot t\right\} \cdot \begin{pmatrix} 1.053 \\ 0.390 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.595 & 2.410 \\ -0.483 & 2.177 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \left[\exp\left\{\begin{pmatrix} 0.164 & -0.979 \\ 0.196 & -0.478 \end{pmatrix} \cdot t\right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0.134 \\ -0.119 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де *y(t)* – значення обсягу ВВП у момент часу *t*, *g(t)* – значення обсягу податків у момент часу *t*, $\exp\{...\}$ – експонента матриці, *t* ≥ 0 – розглядуваний момент часу.

Проаналізувавши отримані значення скалярних компонент матриці *A*, можна зробити висновок, що за розглядуваний період виробничі потужності української економіки схильні до постійного, хоча і незначного спаду в результаті перевищення амортизації над інвестиціями в капітал $(a_{11} = -0.047 < 0)$. Податкове навантаження справляє істотно більший негативний вплив на накопичення національного капіталу $(a_{12} = -0.398 < 0)$. Динаміка доходів до державного бюджету, як і варто було очікувати, знаходиться у прямо пропорційній залежності від обсягу національного доходу $(a_{21} = 0.080 > 0)$. А державний сектор економіки не є самодостатнім: доходи до державного бюджету не збільшуються в результаті використання бюджетних коштів, а, навпаки, схильні до швидкого зниження $(a_{22} = -0.308 < 0)$.

Аналіз отриманих значень вектора *B* вказує на значне зростання ВВП за рахунок зростання невиробничого споживання $(b_1 = 0.134)$, а також істотне скорочення доходів до державного бюджету через чинники, не враховані у моделі $(b_2 = -0.119)$. Усереднена тривалість запізнення між зміною розглядуваних показників (національного доходу та податків) та їх впливом один на одного становить τ = 2,462 роки. Підкреслимо, що даний лаг також стосується впливу змінних самих на себе, наприклад, інвестування у капітал за рахунок доходів приватного сектору, що зумовлюватиме майбутнє зростання виробничих потужностей і подальше збільшення доходів.

На основі моделі (16) отримано розрахункові значення обсягів ВВП та доходів до зведеного державного бюджету за 1996-2016 рр. (діапазон незалежної змінної *t* = [0; 20]), динаміка яких представлена на рис.1. З метою порівняння на графіку також показано динаміку нормалізованих реальних значень зазначених показників згідно табл. 2. Окрім того, було проведено екстраполяцію обсягів ВВП та податків на три роки після останнього періоду (*t* = [20; 23]), що дало змогу отримати прогноз їх динаміки на 2017-2019 рр., який також представлено на рис.1. Наголосимо, що подібно лінійним регресійним моделям, розглядувана модель довгострокового розвитку дає можливість отримати лише очікуваний тренд, хоча його точність значно вища порівняно з результатами моделей типу лінійної регресії.

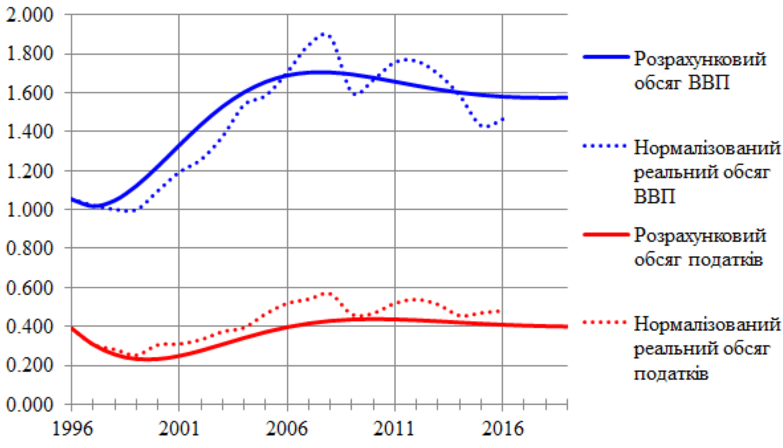

Рис. 1. Динаміка розрахункових та нормалізованих реальних значень ВВП і доходів до зведеного державного бюджету України за 1996-2019 рр.

Джерело: власні розрахунки

Для більш ґрунтовного аналізу української економіки доцільно оцінювати ризик по кожній із координат моделі (16).

Для виконання даної задачі було використано формули, наведені нижче.

$$r_*^{(j)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\left(m_k^{(j)}\right)^2 - \left(m_g^{(j)}\right)^2}{\left(m_a^{(j)}\right)^2}}\,, \qquad (17)$$

де $r_*^{(j)}$ – величина ризику для *j*-того показника, $j = \overline{1,s}$, s – кількість показників (залежних змінних) розглядуваної моделі, $m_k^{(j)}$ – середнє квадратичне значень *j*-того показника, $m_g^{(j)}$ – середнє геометричне значень *j*-того показника, $m_a^{(j)}$ – середнє арифметичне значень *j*-того показника. Тобто:

$$m_k^{(j)} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(j)}\right)^2}\,, \qquad (18)$$

де $m_k^{(j)}$ – середнє квадратичне значень *j*-того показника, $x_i^{(j)}$ – значення *j*-того показника за *i*-тий період, *n* – кількість рівнів часового ряду.

$$m_g^{(j)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{(j)}}\,, \qquad (19)$$

де $m_g^{(j)}$ – середнє геометричне значень *j*-того показника, $x_i^{(j)}$ – значення *j*-того показника за *i*-тий період, *n* – кількість рівнів часового ряду.

$$m_a^{(j)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{(j)}\,, \qquad (20)$$

де $m_a^{(j)}$ – середнє арифметичне значень *j*-того показника, $x_i^{(j)}$ – значення *j*-того показника за *i*-тий період, *n* – кількість рівнів часового ряду.

Кожен із показників ступеня ризику, оцінений згідно з (17), може приймати значення в інтервалі від 0 до 1.

За формулою (17) з використанням значень показників моделі (16), розрахованих для періоду 1996-2016 рр. (діапазон незалежної змінної *t* = [0; 20]), отримано наступні величини ризику: $r_*^{(1)} = 0.330$ – для ВВП, $r_*^{(2)} = 0.418$ – для податків. Для періоду 1996-2019 рр., що включає прогнозовані значення показників на майбутні роки (діапазон незалежної змінної *t* =

[0; 23]), ризик набуває значень $r_*^{(1)} = 0.311$ і $r_*^{(2)} = 0.395$ для ВВП та податків відповідно. Наведені результати вказують на очікуване зниження ризику (збільшення стійкості) динаміки розвитку української економіки у найближчі роки. Хоча значення ризику є досить значними (критичними).

Висновки. Проведено модифікацію класичної динамічної лінійної моделі Харрода-Домара (1), в результаті чого успішно усунено такі принципові недоліки вихідної моделі, як одновимірність та безлагова реалізація впливу чинників на показники. Отримана внаслідок модифікації модель (7) дозволяє описати макроекономічну систему у двох координатах із врахуванням середньої величини лагу між дією чинників економічного розвитку та відповідною зміною залежних показників.

З метою налаштування моделі (7) для відтворення реальної динаміки економічних показників на базі методу найменших квадратів розроблено математично-програмний інструментарій, що дозволяє знаходити оптимальні значення параметрів зазначеної моделі. З використанням даного інструментарію на підґрунті статистичних даних української економіки за 1996-2016 роки отримано модель (16), що описує динаміку розвитку економіки України у координатах «ВВП – податки». Параметрам моделі надано економічну інтерпретацію. Побудовано прогноз динаміки вказаних показників на 2017-2019 роки. Проведено оцінювання так званого покоординатного ризику для кожного із показників економічної системи.

Можна виокремити наступні перспективи подальших досліджень у напрямку вдосконалення представленої модифікації моделі Харрода-Домара. По-перше, дослідницький інтерес представляє подальше збільшення числа залежних змінних динамічної моделі з метою більш цілісного опису макроекономічної системи. По-друге, доцільно провести диверсифікацію величини лагу по кожній із залежних змінних моделі, оскільки використання єдиної величини для всіх показників є істотним спрощенням об’єкту моделювання. По-третє, автоматизація процедур знаходження оптимальних значень параметрів моделі має принципове значення для класу динамічних моделей на базі диференціальних рівнянь, тому актуальною залишається проблема вдосконалення математичного і програмного інструментарію оптимізації параметрів моделі з метою відтворення цільової динаміки показників.

Список використаних джерел:

1. Вітлінський В. В. Матричне узагальнення класичної моделі Харрода-Домара / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, В. А. Бондар // Прикладні аспекти прогнозування розвитку складних соціально-економічних систем: Монографія / За ред. О. І. Черняка, П. В. Захарченка. – Бердянськ : Видавець Ткачук О. В. – 2015. – С. 30-40.
2. Диленко В. А. Некоторые подходы к учету и анализу влияния научно-технического прогресса в модели экономического роста Харрода-Домара [Текст] / В. А. Диленко, Н. А. Гуляева // Проблеми економіки. – 2016. – № 4. – С. 238-243.
3. Малярец Л. М. Теоретические проблемы экономического роста [Текст] / Л. М. Малярец, А. В. Воронин, О. В. Гунько // Управляющие системы и машины. – 2016. – № 1. – С. 50–55. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/USM_2016_1_7
4. Математичні моделі та методи ринкової економіки [Текст] : навч. посіб. / В. В. Вітлінський, О. В. Піскунова. – К. : КНЕУ, 2010. – 531 с.
5. Коляда Ю. В. Ризики настання кризового стану на підґрунті ортодоксальних моделей економічної динаміки [Текст] / Ю. В. Коляда, В. А. Бондар // Молодий вчений. — 2016. — № 12.1 (40) — С. 795-799.
6. Офіційний веб-сайт Державної казначейської служби України [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.treasury.gov.ua/main/uk/doccatalog/list?currDir=146477
7. Офіційний веб-сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.ukrstat.gov.ua
8. Черненко О. Л. Дослідження взаємозв'язку між інвестиціями в основний капітал і валовою доданою вартістю в економіці

України [Текст] / О. Л. Черненко // Актуальні проблеми економіки. – 2013. – № 9. – С. 75-81. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2013_9_12
9. Bankole, A.S., and Ayinde, T.O. (2014), «Capital Account Liberalisation and Foreign Direct Investment in Nigeria: A Bound-Testing Approach». Botswana Journal of Economics, Botswana. Vol. 12, No. 2, Pp. 14-32.
10. Buss, Samuel R., and Kim, Jin-Su (2005), «Selectively Damped Least Squares for Inverse Kinematics». In Journal of Graphics Tools. Vol. 10, No. 3, pp. 37-49.
11. Giovannoni, Olivier G. (2014), «Income Distribution Macroeconomics». Levy Economics Institute, Working Papers Series No. 807. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2445975

2.3. МОДЕЛЮВАННЯ В ОЦІНЮВАННІ ЛОГІСТИЧНОГО РИЗИКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ШТУЧНОЇ ІМУННОЇ СИСТЕМИ

Анотація. Аналізується актуальність проблеми управління логістичного ризику як одного із основних ділових ризиків за сучасних умов ведення бізнесу. Наведені існуючі підходи до оцінювання логістичного ризику. Описано основні поняття штучних імунних систем. Побудовано модель оцінювання логістичного ризику з використанням клонового алгоритму відбору в штучній імунній системі для умовного прикладу.

Логістичний ризик за сучасних умов ведення бізнесу.

Проблема управління ризиками в бізнесі наразі є актуальною як ніколи. Це підтверджує, зокрема, той факт, що великі міжнародні аудиторські та страхові компанії, впливові світові організації на своїх сайтах розміщують різні звіти, аналітичну інформацію, повідомлення тощо, які присвячені різним аспектам управління ризиками. Зокрема, провідна страхова компанія «Allianz Global Corporate & Specialty» (AGCS) випускає щорічник Allianz Risk Barometer – збірник