УДК 519.21

МОМЕНТНІ МІРИ ЗМІШАНИХ ЕМПІРИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ І МАРКОВАНИХ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ В КОМПАКТНИХ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ. 1

М.Г.СЕМЕЙКО

Анотація. Досліджені моментні міри змішаних емпіричних випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів, використовуючи твірні функції випадкових лічильних мір.

Аннотация. Исследованы моментные меры смешанных эмпирических случайных точечных процессов и маркированных точечных процессов, используя производящие функции случайных считающих мер.

Abstract. Moment measures of the mixed empirical random point processes and marked point processes are investigated using probability generating functions of the random counting measures.

1. Вступ

За останнє десятиріччя значно зросла зацікавленість до розвитку теорії і статистичних методів випадкових точкових процесів (ТП) і маркованих точкових процесів (МТП) як дієвого апарату дослідження багатьох проблем сферичної стохастичної геометрії [1], стереологоії [2], математичної морфології [3], біології, екології, космології, економіки. Досить непомітне місце в теорії ТП займають змішані емпіричні процеси, породжені незалежними і однаково розподіленими випадковими елементами (випадковими величинами) $x_1, x_2, ..., x_N$ вимірного простору $(X, \mathfrak{A}_X)$. В змішаних емпіричних точкових процесах вважається, що число елементів N є невід'ємна випадкова величина, що набуває цілих значень і незалежна від випадкових елементів $x_1, x_2, ..., x_N$. Якщо ж число елементів N є фіксованою величиною: $N = n$, то незалежні і однаково розподілені випадкові елементи $x_1, x_2, ..., x_n$ утворюють емпіричний ($n-$ вибірковий) точковий процес на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$ [4]. Терміни емпіричний точковий процес і змішаний емпіричний точковий процес вперше введено в монографії A.Karr [4]. Дослідженню емпіричних процесів присвячені роботи A.Karr [4], M.Csörqo, P.Revesz [5], P.Gaenssler [6], P.Gaenssler, W.Stute [7], D.Pollard [8], R.Serfling [9].

Теорія змішаних емпіричних МТП більш універсальна і дозволяє досліджувати різноманітні проблеми стохастичної геометрії, в яких геометричні структури випадкової природи не обов'язково розміщені рівномірно в просторах R^2, R^3 або S^2.

У роботі продовжено дослідження властивостей змішаних емпіричних випадкових упорядкованих точкових процесів (УТП) і маркованих точкових процесів (УМТП), розпочатих в роботах [10-12]. Основна увага зосереджена на дослідженні моментних мір змішаних емпіричних УТП і УМТП в компактних метричних просторах, що побудовані на вибірках, одержаних шляхом простого випадкового вибору без повернення із генеральних сукупностей.

Стаття має наступну структуру. В першій частині, що складається із розділів 2 - 6, досліджуються змішані емпіричні випадкові УТП в компактних метричних

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G55;

Ключові слова і фрази. Змішаний емпіричний точкових процес, маркований точковий процес, твірна функція, моментні міри.

просторах. В другому розділі надано означення основних тверджень теорії випадкових ТП і МТП [10, 13]. В третьому розділі подано основні поняття теорії змішаних емпіричних випадкових УТП.

Сумісні і маргінальні твірні функції випадкових емпіричних лічильних мір УТП побудовані в четвертому розділі. Апарат твірних функцій інтенсивно використано для дослідження моментних мір, змішаних моментних мір, факторіальних моментних мір УТП.

В п'ятому і шостому розділах побудовані моделі змішаних емпіричних пуассонівського і негативного біноміального випадкових УТП. Обчислені їхні різноманітні моментні міри.

В другій частині статті, що подана в розділах 7 - 10, вивчаються змішані емпіричні випадкові УМТ в компактних метричних просторах. Основні поняття теорії змішаних емпіричних випадкових УМТП з незалежним маркуванням в компактних метричних просторах розглянуто в розділі сьомому.

Моментні міри змішаного емпіричного випадкового УМТП подано в восьмому розділі.

У дев'ятому і десятому розділах запропоновані моделі змішаних емпіричних пуассонівського і негативного біноміального випадкових УМТП. Досліджені їхні різноманітні моментні міри.

Література в обох частинах статті однакова.

Стаття присвячена світлій пам'яті мого наукового керівника професора Юрія Івановича Петуніна, останні поради й зауваження якого враховані під час написання цієї роботи.

2. Основні поняття теорії випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів

Надамо означення основних понять теорії випадкових ТП і МТП, які нам будуть потрібні надалі [10,13].

Нехай $(X, \mathfrak{A}_X)$– вимірний простір, причому σ - алгебра $\mathfrak{A}_X$ містить всі одноточкові підмножини $\{x\}$ із простору X. Будемо вважати, що у вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$ введено структуру обмежених множин (ОМ) $\mathfrak{B}_X$, якщо в просторі X утворено систему підмножин $\mathfrak{B}_X$, що задовольняє такі умови [14]:

(1) $\mathfrak{B}_X$– спадковий клас;
(2) $\mathfrak{B}_X$– замкнута відносно скінченних об'єднань;
(3) система підмножин $\mathfrak{B}_X$ утворює покриття простору X;
(4) клас обмежених вимірних множин $\mathfrak{C}_X = \mathfrak{A}_X \bigcap \mathfrak{B}_X$ кофінальний в $\mathfrak{B}_X$ відносно включення: якщо $B_X \in \mathfrak{B}_X$, то існує $F_X \in \mathfrak{C}_X$, для якого $B_X \subset F_X$.

Означення 2.1. Вимірний простір $(X, \mathfrak{A}_X)$ з виділеною структурою обмежених множин $\mathfrak{B}_X$ називається обмеженим простором (ОП) і позначається трійкою символів $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$ [14].

Означення 2.2. Підмножина $E = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ обмеженого простору $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$, яка складається з точок простору X, що, можливо, повторюються, називається розрідженою множиною (РМ), якщо її перетин з довільною вимірною ОМ $B_X \in \mathfrak{C}_X$ містить лише скінченне число елементів: $N(E, B_X) = card[E \bigcap B_X] < \infty$, де $card[E \bigcap B_X]$– число елементів у множині $E \bigcap B_X$.

$N(E, B_X)$– лічильна міра на класі обмежених вимірних підмножин B_X простору X, що приймає цілі невід'ємні значення: $N(E, B_X) \in Z_+$. Атомами міри $N(E, B_X)$ є точки x розрідженої множини $E(x-$ атом міри N, якщо $N(E, \{x\}) > 0)$. Для довільного атома x міри N значення $N(E, \{x\})$ визначає кратність точки x, тому лічильна міра $N(E,B_X)$ і розріджена множина E мають такий вигляд [15]:

$$N(E,B_X) = \sum_{x\in E} N(E,\{x\}) I_{B_X}(x),$$
$$E = \{x : x \in X,\ 0 < N(E,\{x\}) < \infty\},$$

де $I_{B_X}(x)-$ характеристична функція множини B_X. Розріджену множину E можна розглядати як підмножину із простору $X \times \{1,2,3,...\}$, де індекс визначає кратність точки із X [14].

Означення 2.3. РМ E обмеженого простору $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X)$ називається простою, якщо $E = \{x : x \in X,\ \ N(E,\{x\}) = 1\}$, тобто проста РМ не містить точок, що повторюються.

Означення 2.4. Лічильна міра $N(E,B_X)$ називається простою, якщо її можна подати наступним чином: $N(E,B_X) = \sum\limits_{x\in E} I_{B_X}(x)$.

Очевидно, простій РМ E відповідає проста лічильна міра $N(E,B_X)$.

Означення 2.5. Лічильна міра $N(E,B_X)$ вважається локально скінченною (або радоновою) на ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X,)$ якщо $N(E,B_X) < \infty$ для всіх $B_X \in \mathfrak{E}_X$ [16].

Позначимо через $\mathcal{E}$ клас всіх РМ E із ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X,)$. Нехай B_X- довільна вимірна ОМ $(B_X \in \mathfrak{E}_X)$ і локально скінченна міра $N(E,B_X)-$ відображення, визначене на класі $\mathcal{E}$ всіх РМ E :

$$N_{B_X}(\cdot) = N(\cdot,B_X) : \mathcal{E} \longrightarrow Z_+.$$

Розглядаючи клас $\mathcal{E}$ всіх РМ E як новий основний постір, позначимо через $\mathfrak{X}$ мінімальну $\sigma-$ алгебру підмножин простору $\mathcal{E}$, утворену всіма підмножинами виду:$\{E : N(E,B^i_X) = n_i,\ i = 1,2,...,m\}$, де $m \in \mathbb{N},\ B^i_X \in \mathfrak{E}_X,\ n \in Z_+$. Таким чином, $\mathfrak{X}-$ мінімальна $\sigma-$ алгебра підмножин постору $\mathcal{E}$, для якої всі відображення $N(E,B_X)$ є вимірними відносно $\mathfrak{X}$ для всіх $B_X \in \mathfrak{E}_X$ [15].

Означення 2.6. Випадковим точковим процесом (ТП) в ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X)$ називається ймовірнісний простір $(\mathcal{E},\mathfrak{X},P)$, де $P-$ ймовірнісна міра, визначена на $\sigma-$ алгебрі $\mathfrak{X}$ [13]; при цьому X називається простором положень ТП.

Означення 2.7. Випадковий ТП $(\mathcal{E},\ \mathfrak{X},P)$ називається скінченним в ОП $(X,\mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$, якщо

$$P\{E : N(E,X) < \infty\} = 1.$$

Означення 2.8. Випадковий ТП $(\mathcal{E},\mathfrak{X},P)$ називається простим в ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X)$, якщо кожна траєкторія E процесу є простою РМ в просторі X.

Звичайно про такі ТП кажуть, що вони з ймовірністю одиниця не мають кратних точок [17]:

$$P\{E : N(E,\{x\}) \le 1,\ x \in X\} = 1.$$

Означення 2.9. [13]. Випадковий процес $(\mathcal{E},\mathfrak{X},P)$ вважається простим упорядкованим ТП (УТП) в ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X)$, якщо $X-$ лінійно упорядкований простір [18] і майже кожна його траєкторія $E \in \mathcal{E}$ є скінченною або зліченою простою РМ (послідовністю) із простору X виду: $E = (x_1,...,x_n)$ $(E = (x_1,...,x_n,...)$, $E = (...,x_{-n},..., x_{-1},x_0,x_1,...,x_n,...))$ причому $x_k < x_m$, якщо $k < m$.

Означення 2.10. [13]. Будемо вважати, що випадковий процес $(\mathcal{E},\mathfrak{X},P)$ є простим невпорядкованим ТП (НТП) в ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathfrak{B}_X)$, якщо майже кожна його траєкторія E є невпорядкованою простою РМ в просторі $X : E = \{x_{(1)},...,x_{(n)}\}$ (нижні індекси в множині E введені лише для розрізнення точок, а не вказують на порядок їх слідування).

У випадковому маркованому точковому процесі (МТП) кожна випадкова подія розглядається як упорядкована пара $[x;k]$, що складається із точки положення x та її мітки (марки) k. Точка x є елементом простору положень X і вказує місце, де може відбутись подія, а марка k є елементом простору маркування K і визначає деякий кількісний показник події (наприклад, її величину, інтенсивність, швидкість, потужність). Тому фазовий простір Y такого МТП є декартовим добутком просторів X і $K : Y = X \times K$, де $K-$ напівупорядкована (частково упорядкована [18]) множина з виділеними $\sigma-$ алгеброю вимірних множин $\mathfrak{A}_K$ і структурою обмежених множин $\mathfrak{B}_K$.

Як завжди під $\sigma-$ алгеброю в просторі Y будемо вважати декартовий добуток $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K$ $\sigma-$ алгебр $\mathfrak{A}_X$ і $\mathfrak{A}_K$. Введемо у вимірному просторі $(Y, \mathfrak{A}_Y)$ структуру обмежених множин $\mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_K$, вважаючи множину $B_Y \subset Y$ обмеженою тоді і тільки тоді, коли існують такі ОМ $B_X \in \mathfrak{B}_X$ і $B_K \in \mathfrak{B}_K$, що $B_Y \subseteq B_X \times B_K$. Для $\mathfrak{B}_Y$ виконуються також всі аксіоми структури обмежених множин, так що $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$ стає ОП.

Означення 2.11. МТП називається випадковий ТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$; при цьому $\mathcal{E}^* = \{E^*\}$ клас всіх РМ $E^* = ([x_1; k_1], ..., [x_n; k_n], ...)$ із ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$.

Означення 2.12. Випадковий МТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називається простим в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$, якщо для майже всіх його траєкторій $E^* = ([x_1; k_1], ..., [x_n; k_n], ...)$ виконується умова: $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$, тобто $\forall x \in X$

$$P^*\{E^* : N^*(E^*, \{x\} \times K) \leq 1\} = 1,$$

де $N^*(E^*, B_Y) = card[E^* \bigcap B_Y]-$ випадкова лічильна міра МТП $(B_Y \in \mathfrak{C}_y = \mathfrak{A}_Y \bigcap \mathfrak{B}_Y)$.

Означення 2.13. Випадковий МТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називається строго простим в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$, якщо для майже всіх його траєкторій E^* виконується умова $x_i \neq x_j$ і $k_i \neq k_j$ $(i \neq j)$, тобто $\forall x \in X,\ k \in K$

$$P^*\{E^* : N^*(E^*, \{x\} \times K) \leq 1\} = 1,$$

$$P^*\{E^* : N^*(E^*, X \times \{k\}) \leq 1\} = 1.$$

Означення 2.14. Випадковий МТП $(\mathcal{E}^*,\ \mathfrak{X}^*,\ P^*)$ називається скінченним в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathfrak{B}_Y)$, якщо з ймовірністю одиниця об'єм майже кожної траєкторії E^* процесу є скінченним: $P^*\{E^* : card[E^*] = N^*(E^*, Y) < \infty\} = 1$.

Означення 2.15. Процес $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називається скінченним простим упорядкованим МТП (УМТП) в ОП $(Y = X \times K, \mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K, \mathfrak{B}_Y = \mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_K)$, якщо його проекція $(\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P) = P_{r_X}(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ на простір положень X є скінченним простим УТП в ОП положень $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$ [19].

Довільна траєкторія E^* УМТП $(\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ є скінченною простою упорядкованою РМ (вектором) із фазового простору $Y = X \times K$:

$$E^* = (y_1, ..., y_i, ..., y_n) = ([x_1; k_1], ..., [x_i; k_i], ..., [x_n; k_n]),$$

де x_i- точка положення, k_i- марка випадкової події $y_i = [x_i; k_i]$.

3. Основні поняття теорії змішаних емпіричних випадкових упорядкованих точкових процесів

Наведемо означення основних понять теорії змішаних емпіричних випадкових упорядкованих точкових процесів (УТП) в компактних метричних просторах [10, 11, 20, 21]. Припустимо, що $(X, \mathfrak{A}_X, \vartheta)$ є вимірний компактний метричний простір $(X, \mathfrak{A}_X)$ з мірою ϑ, метрикою $\rho_X(x_i, x_j)$ і природнім чином вибраними структурами вимірних множин $\mathfrak{A}_X$ й обмежених множин $\mathfrak{B}_X$ [10]. Зокрема, міра ϑ може бути мірою Лебега або аналогом міри Лебега, якщо метричний простір X є компактним орієнтованим деференційованим многовидом (сфера, еліпсоїд тощо) [22, 23]. Кожна траєкторія E скінченного простого УТП $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{X}, P)$ в обмеженому просторі (ОП) $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$ є розрідженою множиною метричного простору X і складається із скінченної послідовності точок: $E = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$, де x_i- точка положення $(x_i \in X,\ i = \overline{1, n})$.

Розглянемо такий випадковий механізм побудови УТП. Для цього введемо дві випадкові величини $x = x(\omega)$ та $\nu = \nu(\omega)$, що задовольняють такі умови:

3.1. випадкова величина $x(\omega)$ та цілочислова невід'ємна випадкова величина $\nu(\omega)$ визначені на деякому основному ймовірнісному просторі $(\Omega = \{\omega\}, \Im, \mathbb{P})$;

3.2. випадкові величини $x(\omega)$ та $\nu(\omega)$ набувають відповідно значення із вибіркових ймовірнісних просторів $(X, \mathfrak{A}_X, P_x)$ та $(Z_+, \mathfrak{A}_{Z_+}, P_\nu)$ з ймовірнісними мірами P_x та P_ν, де

$$P_x(B_X) = \mathbb{P}\{\omega : x(\omega) \in B_X\} = \mu_1(B_X)(B_X \in \mathfrak{A}_X),$$
$$P_\nu(B_{Z_+}) = \mathbb{P}\{\omega : \nu(\omega) \in B_{Z_+}\}\ (B_{Z_+} \in \mathfrak{A}_{Z_+});$$

3.3. розподіл $P_x(B_X)$ випадкової величини $x = x(\omega)$ вважається абсолютно неперервним відносно міри ϑ у вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$;

3.4. $x(\omega)$ та $\nu(\omega)-$ незалежні випадкові величини.

Випадково (у відповідності з розподілом ймовірностей P_ν випадкової величини $\nu(\omega)$) вибирається число $n \in Z_+$, а потім кожна траєкторія $E = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ об'єма n простого УТП $(\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P)$ утворюється в результаті n незалежних повторень одного і того ж випадкового експерименту G_1, що полягає у простому випадковому виборі без повернення точки x із простору X. Вважається, що випадковому експерименту G_1 відповідає ймовірнісний простір $(X, \mathfrak{A}_X, P_x)$.

Отже, траєкторію E можна розглядати як реалізацію у вибірковому вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$ скінченної простої упорядкованої розрідженої випадкової множини (вектора – вибірки)

$$E = E(\omega) = (x_1(\omega), \ldots, x_i(\omega), \ldots, x_{\nu(\omega)}(\omega)) \tag{1}$$

випадкового об'єму $\nu(\omega)$ незалежних і однаково розподілених з ймовірнісною мірою P_x випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ [1] [10]. Легко бачити, що випадкова величина $\nu(\omega)$ може мати таке подання: $\nu(\omega) = N = N(E, X) = \mathrm{card}[E \bigcap X] = \sum\limits_{x \in E} I_X(x)$, де $N(E, X)-$ випадкова величина, що визначає кількість точок множини E в просторі X, $I_X(\cdot)-$ характеристична функція простору X.

Означення 3.1. Випадковий процес $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P)$ називатимемо простим змішаним емпіричним УТП точок положень в ОП $(X, \mathfrak{A}_X, \mathfrak{B}_X)$.

Для кожного вибіркового об'єму $n (N = n)$ і довільних фіксованих обмежених вимірних множин $B_X^1 \in \mathfrak{E}_X,\ B_X^2 = X \setminus B_X^1 \in \mathfrak{E}_X(\mathfrak{E}_X = \mathfrak{A}_X \bigcap \mathfrak{B}_X)$ побудуємо випадкову емпіричну лічильну міру $N(B_X^1) = N(E, B_X^1) = \mathrm{card}[E \bigcap B_X^1] = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{B_X^1}(x_i)$.

[1] Вважаємо, що метричний простір X є континуальним з неперервною мірою P_x, так що вилучення будь-якого елемента із X не впливає на незалежність компонентів вибірки та їхній маргінальний розподіл.

При цьому умовний розподіл лічильної міри $N(B_X^1)$ відповідає біноміальному закону $B(n,\mu_1(B_X^1))$ із параметричною мірою $\mu_1(B_X^1)$ [10, 20]:

$$P\{N(B_X^1)=k|N=n\}=P\{N(B_X^1)=k,\ N(B_X^2)=n-k|N=n\}=$$
$$=C_n^k\mu_1^k(B_X^1)[1-\mu_1(B_X^1)]^{n-k}=C_n^k\mu_1^k(B_X^1)\mu_1^{n-k}(B_X^2), \tag{2}$$

де $\mu_1(B_X^2)=1-\mu_1(B_X^1),\ \ k=0,1,\ldots,n$. Якщо $B_X^1,\ldots,B_X^s(\bigcup\limits_{j=1}^{s}B_X^j=X)$– довільна скінченна послідовність обмежених вимірних множин із простору X, що попарно не перетинаються, $k_j\in Z_+\left(j=\overline{1,s}\right),\sum\limits_{j=1}^{s}k_j=n$, то для заданого $n(N=n)$ умовний сумісний розподіл лічильних мір $\{N(B_X^j),\ \ j=\overline{1,s}\}$ відповідає поліноміальному закону [21]:

$$P\{N(B_X^j)=k_j,\ j=\overline{1,s}|N=n\}=\frac{n!}{k_1!...k_s!}\mu_1^{k_1}(B_X^1)\ldots\mu_1^{k_s}(B_X^s), \tag{3}$$

де $\sum\limits_{j=1}^{s}\mu_1(B_X^j)=1$. Використовуючи умовні розподіли (2), (3) і формулу повної ймовірності, одержуємо розподіл лічильної міри $N(B_X^1)$ і сумісний розподіл лічильних мір $\{N(B_X^j),\ j=\overline{1,s}\}$:

$$P\{N(B_X^1)=k\}=\sum_{n\geq k}P\{N(B_X^1)=k|N=n\}P\{N=n\}=$$
$$=\sum_{n\geq k}C_n^k\mu_1^k(B_X^1)\mu_1^{n-k}(B_X^2)P\{N=n\}\ \ (k\in Z_+), \tag{4}$$

$$P\{N(B_X^j)=k_j,\ j=\overline{1,s}\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(B_X^j)=k_j,\ j=\overline{1,s}|N=n\}P\{N=n\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{k_1!...k_s!}\mu_1^{k_1}(B_X^1)\ldots\mu_1^{k_s}(B_X^s)P\{N=n\}\ \ \left(\sum_{j=1}^{n}k_j=n,\ k_j\in Z_+\right). \tag{5}$$

4. Моментні міри змішаного емпіричного випадкового УТП

Розглянемо проблему знаходження коваріаційної міри залежності між випадковими лічильними мірами $N(B_X^1)$ і $N(B_X^2)$ УТП $\widetilde{\mathcal{D}}=(\mathcal{E},\mathfrak{X},P)$ для двох взаємодоповнюючих множин B_X^1 і B_X^2 із ОП $(X,\mathfrak{A}_X,\mathcal{B}_X)$:

$$cov[N(B_X^1),N(B_X^2)]=M[N(B_X^1)N(B_X^2)]-M[N(B_X^1)]M[N(B_X^2)]. \tag{6}$$

Обчислимо змішаний момент $M[N(B_X^1)N(B_X^2)]$, використовуючи формулу повного математичного сподівання [24]:

$$M[N(B_X^1)N(B_X^2)]=M\{M[N(B_X^1)N(B_X^2)|N=n]\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}M[N(B_X^1)N(B_X^2)|N=n]P\{N=n\}. \tag{7}$$

На основі співвідношення (2) одержуємо:

$$M[N(B_X^1)N(B_X^2)|N=n]=\sum_{k=0}^{n}k(n-k)P\{N(B_X^1)N(B_X^2)=k(n-k)|N=n\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}k(n-k)P\{N(B_X^1)=k,N(B_X^2)=n-k|N=n\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}\mu_1^k(B_X^1)\mu_1^{n-k}(B_X^2)=$$
$$=n(n-1)\mu_1(B_X^1)\mu_1(B_X^2)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\mu_1^{k-1}(B_X^1)\mu_1^{n-k-1}(B_X^2)=$$
$$=n(n-1)\mu_1(B_X^1)\mu_1(B_X^2)[\mu_1(B_X^1)+\mu_1(B_X^2)]^{n-2}=n(n-1)\mu_1(B_X^1)\mu_1(B_X^2), \quad (8)$$
оскільки $\mu_1(B_X^1)+\mu_1(B_X^2)=1$. Підставляючи результат (8) в формули (6), (7), маємо:

$$cov[N(B_X^1),N(B_X^2)]=\mu_1(B_X^1)\mu_1(B_X^2)m_{[2]}-M[N(B_X^1)]M[N(B_X^2)], \quad (9)$$
де $m_{[2]}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)P\{N=n\}=M[N(N-1)]=M[N^{[2]}]-$ другий факторіальний момент випадкової величини N і $N^{[2]}=N(N-1)-$ факторіальна степінь порядка два [10, 24].

Побудуємо сумісну твірну функцію
$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1,...,z_s)=M[z_1^{N(B_X^1)}...z_s^{N(B_X^s)}]$$
випадкових емпіричних лічильних мір $\{N(B_X^j),\ j=\overline{1,s}\}$, якщо $\bigcup\limits_{j=1}^{s}B_X^j=X$, $B_X^i\bigcap B_X^r=\varnothing(1\le i,r\le s;\ i\ne r)$, використовуючи умовний сумісний розподіл (3):
$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1,...,z_s)=M\{M[z_1^{N(B_X^1)}...z_s^{N(B_X^s)}|N=n]\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}M[z_1^{N(B_X^1)}\dots z_s^{N(B_X^s)}|N=n]P\{N=n\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1,...,k_s\ge0,k_1+...+k_s=n}z_1^{k_1}...z_s^{k_s}P\{N(B_X^j)=k_j,\ j=\overline{1,s}|N=n\}\right\}P\{N=n\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k_1,...,k_s\ge0,k_1+...+k_s=n}\frac{n!}{k_1!...k_s!}[z_1\mu_1(B_X^1)]^{k_1}\dots[z_s\mu_1(B_X^s)]^{k_s}\right\}P\{N=n\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{s}z_j\mu_1(B_X^j)\right\}^nP\{N=n\}=M\left[\left\{\sum_{j=1}^{s}z_j\mu_1(B_X^j)\right\}^N\right]=$$
$$=\Pi_N(z_1\mu_1(B_X^1)+...+z_s\mu_1(B_X^s)), \quad (10)$$
де $\Pi_N(z)=M[z^N]-$ твірна функція випадкової величини N.

Сумісна твірна функція (10) дозволяє одержати маргінальні твірні функції лічильних мір:

$$\Pi_{N(B_X^j)}(z_j)=M[z_j^{N(B_X^j)}]=\Pi_N(z_j\mu_1(B_X^j)+\sum_{t=1,t\neq j}^{s}\mu_1(B_X^t))(j=\overline{1,s}),$$

$$\Pi_{N(B_X^{j_1}),...,N(B_X^{j_h})}(z_{j_1},...,z_{j_h})=M\left[z_{j_1}^{N(B_X^{j_1})}...z_{j_h}^{N(B_X^{j_h})}\right]=$$

$$=\Pi_N\left(\sum_{t=1}^{h}z_{j_t}\mu_1(B_X^{j_t})+\sum_{t=1,t\neq j_1,...,j_h}^{s}\mu_1(B_X^t)\right),$$

де $1\le j_1<...<j_h\le s,\ \ h=\overline{1,s}$, та їх похідні: .

$$\Pi^{(h)}_{N(B_X^j)}(1)=\mu_1^h(B_X^j)\Pi_N^{(h)}(1), \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial^h\left\{\Pi_{N(B_X^{j_1}),...,N(B_X^{j_h})}(z_{j_1},...,z_{j_h})\right\}}{\partial z_{j_1}\dots\partial z_{j_h}}\right|_{z_{j_k}=1,k=\overline{1,h}}=\mu_1(B_X^{j_1})...\mu_1(B_X^{j_h})\Pi_N^{(h)}(1), \tag{12}$$

де $\Pi_N^{(h)}(\cdot)-$ похідна порядка h твірної функції $\Pi_N(\cdot)$.

Введемо позначення таких моментних мір УТП $\widetilde{\mathcal{D}}$:
$\nu^{(h)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)=M\left[N^h(B_X^j)\right]$ – моментна міра порядку $h(h=1,2,...)$,
$\nu^{(h)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1}\times...\times B_X^{j_h})=M\left[N(B_X^{j_1})...N(B_X^{j_h})\right]$ – змішана моментна міра порядку h,
$\alpha^{(h)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)=M\left[N^{[h]}(B_X^j)\right]=M[N(B_X^j)(N(B_X^j)-1)...(N(B_X^j)-h+1)]-$ факторіальна моментна міра порядку h,
$\nu^{(2)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1}\times B_X^{j_2})=M\left[N(B_X^{j_1})N(B_X^{j_2})\right]$ – змішана моментна міра другого порядку $(1\le j_1,j_2\le s,\ j_1\neq j_2)$,
$D(N(B_X^j))=\nu^{(2)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)-\left[\nu^{(1)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)\right]^2$ – дисперсія лічильної міри $N(B_X^j)$,
$cov\left[N(B_X^{j_1}),N(B_X^{j_2})\right]=\nu^{(2)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1}\times B_X^{j_2})-\nu^{(1)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1})\nu^{(1)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}B_X^{j_2})-$ коваріаційна міра залежності між лічильними мірами $N(B_X^{j_1})$ і $N(B_X^{j_2})(1\le j_1,j_2\le s;\ j_1\neq j_2)$.

Оскільки

$$\nu^{(h)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1}\times...\times B_X^{j_h})=\left.\frac{\partial^h\left\{\Pi_{N(B_X^{j_1}),...,N(B_X^{j_h})}(z_{j_1},...,z_{j_h})\right\}}{\partial z_{j_1}\dots\partial z_{j_h}}\right|_{z_{j_1}=1,...,z_{j_h}=1},$$

$$\alpha^{(h)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)=\Pi^{(h)}_{N(B_X^j)}(1),\ \nu^{(1)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)=M[N(B_X^j)]=\Pi'_{N(B_X^j)}(1),$$

$$\nu^{(2)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^j)=M[N^2(B_X^j)]=\Pi''_{N(B_X^j)}(1)+\Pi'_{N(B_X^j)}(1),$$

$$D(N(B_X^j))=\Pi''_{N(B_X^j)}(1)-\left\{\Pi'_{N(B_X^j)}(1)\right\}^2+\Pi'_{N(B_X^j)}(1),$$

$$\nu^{(2)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1}\times B_X^{j_2})=\left.\frac{\partial^2\left\{\Pi_{N(B_X^{j_1}),N(B_X^{j_2})}(z_{j_1},z_{j_2})\right\}}{\partial z_{j_1}\partial z_{j_2}}\right|_{z_{j_1}=1,z_{j_2}=1},$$

то, враховуючи значення похідних (11), (12), обчислюємо моментні характеристики УТП $\widetilde{\mathcal{D}}=(\mathcal{E},\mathfrak{X},P)$ точок положень:

$$\nu^{(h)}_{\widetilde{\mathcal{D}}}(B_X^{j_1}\times...\times B_X^{j_h})=\mu_1(B_X^{j_1})...\mu_1(B_X^{j_h})\Pi_N^{(h)}(1), \tag{13}$$

$$\alpha_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(h)}(B_X^j) = \mu_1^h(B_X^j)\Pi_N^{(h)}(1),\ \nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^j) = \mu_1(B_X^j)\Pi'_N(1), \tag{14}$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(2)}(B_X^j) = \mu_1^2(B_X^j)\Pi''_N(1) + \mu_1(B_X^j)\Pi'_N(1), \tag{15}$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(2)}(B_X^{j_1} \times B_X^{j_2}) = \mu_1(B_X^{j_1})\mu_1(B_X^{j_2})\Pi''_N(1), \tag{16}$$

$$D(N(B_X^j)) = \mu_1^2(B_X^j)[\Pi''_N(1) - \{\Pi'_N(1)\}^2] + \mu_1(B_X^j)\Pi'_N(1), \tag{17}$$

$$cov[N(B_X^{j_1}), N(B_X^{j_2})] = \mu_1(B_X^{j_1})\mu_1(B_X^{j_2})[\Pi''_N(1) - \{\Pi'_N(1)\}^2]. \tag{18}$$

Зауваження 4.1. Якщо $s = 2$, то із формули (10) одержуємо сумісну твірну функцію лічильних мір $N(B_X^1)$ і $N(B_X^2) : \Pi_{N(B_X^1),N(B_X^2)}(z_1, z_2) = \Pi_N(z_1\mu_1(B_X^1) + z_2\mu_1(B_X^2))$ і маргінальні твірні функції випадкових величин $N(B_X^1), N(B_X^2)$ [25]

$$\Pi_{N(B_X^1)}(z_1) = \Pi_{N(B_X^1),N(B_X^2)}(z_1, 1) = \Pi_N(1 + \mu_1(B_X^1)(z_1 - 1)),$$

$$\Pi_{N(B_X^2)}(z_2) = \Pi_{N(B_X^1),N(B_X^2)}(1, z_2) = \Pi_N(1 + \mu_1(B_X^2)(z_2 - 1)).$$

Оскільки $m_{[2]} = M[N^{[2]}] = \Pi''_N(1)$, $M[N(B_X^1)] = \Pi'_{N(B_X^1)}(1) = \mu_1(B_X^1)\Pi'_N(1)$, $M[N(B_X^2)] = \Pi'_{N(B_X^2)}(1) = \mu_1(B_X^2)\Pi'_N(1)$, то із формули (9) маємо

$$cov[N(B_X^1), N(B_X^2)] = \mu_1(B_X^1)\mu_1(B_X^2)[\Pi''_N(1) - \{\Pi'_N(1)\}^2]. \tag{19}$$

Зауваження 4.2. [21] Якщо довільна скінченна послідовність обмежених вимірних множин $B_X^1, ..., B_X^s$ простору X, що попарно не перетинаються, не є розбиттям простору $X(\bigcup\limits_{j=1}^{s} B_X^j \neq X)$, то сумісна твірна функція

$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1, ..., z_s) = \Pi_N\left(\sum_{j=1}^{s}(z_j - 1)\mu_1(B_X^j) + 1\right). \tag{20}$$

У випадку розподілу випадкової величини по однорідному закону Пуассона з параметром λ сумісна твірна функція (20) має вигляд [24]:

$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1, ..., z_s) = exp\{\sum_{j=1}^{s}\lambda\mu_1(B_X^j)(z_j - 1)\}. \tag{21}$$

5. Простий змішаний емпіричний пуассонівський випадковий УТП

Побудуємо випадкову емпіричну лічильну міру $N(B_X)$ УТП $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P)$:

$$N(B_X) = N(E, B_X) = card[E \bigcap B_X] = \sum_{i=1}^{\nu} I_{B_X}(x_i)\ (B_X \in \mathfrak{E}_X).$$

Теорема 5.1. [20]. *Якщо*

1. Об'єм вибірки $\nu = \nu(\omega) = N$ простого змішаного емпіричного УТП $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P)$ є випадкова величина, що розподілена по однорідному закону Пуассона з параметром λ :

$$P_\nu\{\nu = k\} = P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k = 0, 1, 2, ...);$$

2. Випадкова величина ν незалежна від випадкових величин $\{x_i(\omega);\ i = \overline{1, \nu(\omega)}\}$;

3. $\{B_X^j : \ j=\overline{1,s}, \ s \geq 2\}-$ *довільна скінченна послідовність обмежених вимірних множин простору* X, *що попарно не перетинаються, то*

1. Емпірична лічильна міра* $N(B_X^j)(j=\overline{1,s})$ *розподілена по закону Пуассона із параметричною мірою* $\lambda\mu_1(B_X^j)$:

$$P\{N(B_X^j)=k_j\}=\frac{[\lambda\mu_1(B_X^j)]^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda\mu_1(B_X^j)},$$

де $\mu_1(B_X^j)=P_x(B_X^j), \ k_j=0,1,2,...;$

2. Емпіричні лічильні міри* $N(B_X^1),...,N(B_X^s)$ *є незалежними в сукупності випадковими величинами:*

$$P\{N(B_X^j)=k_j, \ j=\overline{1,s}\}=\prod_{j=1}^{s}P\{N(B_X^j)=k_j\}.$$

Доведення. Доведемо перше твердження, використовуючи формулу повної ймовірності і біноміальний закон розподілу (2).

$$P\{N(B_X^j)=k_j\}=\sum_{n\geq k_j}P\{N(B_X^j)=k_j|N=n\}P\{N=n\}=$$

$$=\sum_{n\geq k_j}C_n^{k_j}\mu_1^{k_j}(B_X^j)(1-\mu_1(B_X^j))^{n-k_j}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{(n-k_j)\geq 0}\frac{n!}{k_j!(n-k_j)!}\mu_1^{k_j}(B_X^j)(1-\mu_1(B_X^j))^{n-k_j}\frac{\lambda^{n-k_j}\lambda^{k_j}}{n!}e^{-\lambda}=$$

$$=\frac{[\lambda\mu_1(B_X^j)]^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda}\sum_{m\geq 0}\frac{[\lambda(1-\mu_1(B_X^j))]^m}{m!},$$

$m=n-k_j$. Оскільки $\sum\limits_{m\geq 0}\frac{[\lambda(1-\mu_1(B_X^j))]^m}{m!}=e^{\lambda}e^{-\lambda\mu_1(B_X^j)}$, то

$$P\{N(B_X^j)=k_j\}=\frac{[\lambda\mu_1(B_X^j)]^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda\mu_1(B_X^j)}.$$

В цьому випадку твірна функція лічильної міри $N(B_X^j)$ має вигляд [24]:

$$\Pi_{N(B_X^j)}(z_j)=exp\{\lambda\mu_1(B_X^j)(z_j-1)\}. \tag{22}$$

Для доведення другого твердження використаємо сумісну твірну функцію (21) пуассонівських лічильних мір $\{N(B_X^j), \ j=\overline{1,s}\}$:

$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1,...,z_s)=exp\{\sum_{j=1}^{s}\lambda\mu_1(B_X^j)(z_j-1)\}=\prod_{j=1}^{s}\Pi_{N(B_X^j)}(z_j). \tag{23}$$

Оскільки сумісна твірна функція (23) розкладається в добуток твірних функцій (22) компонент, то $N(B_X^1),...,N(B_X^s)-$ незалежні в сукупності випадкові величини [25].

□

Зауваження 5.1. Аналогічні результати одержуємо також у випадку, коли $\bigcup\limits_{j=1}^{s}B_X^j=$ $=X(B_X^i\bigcap B_X^r=\varnothing, 1\leq i,r\leq s, i\neq r)$.

Означення 5.1. Випадковий процес $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P)$, що задовольняє теорему 4.1, називатимемо простим змішаним емпіричним пуассонівським УТП точок положень в ОП $(X, \mathfrak{A}_X, \mathcal{B}_X)$.

Наслідок 5.1. *Розподіленій по однорідному закону Пуассона з параметром λ випадковій величині N відповідає твірна функція $\Pi_N(z) = exp\{\lambda(z-1)\}$, похідні якої мають вигляд: $\{\Pi_N^{(h)}(1) = \lambda^h : h = 1, 2, ...,\}$; тому із формул (13) - (18) одержуємо:*

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^j) = \lambda\mu_1(B_X^j), \tag{24}$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(h)}(B_X^{j_1} \times ... \times B_X^{j_h}) = \lambda^h\mu_1(B_X^{j_1})...\mu_1(B_X^{j_h})) = \nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^{j_1})...\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^{j_h}), \tag{25}$$

$$\alpha_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(h)}(B_X^j) = \lambda^h\mu_1^h(B_X^j) = \left[\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^j)\right]^h, \tag{26}$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(2)}(B_X^j) = \lambda^2\mu_1^2(B_X^j) + \lambda\mu_1(B_X^j), \tag{27}$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(2)}(B_X^{j_1} \times B_X^{j_2}) = \lambda^2\mu_1(B_X^{j_1})\mu_1(B_X^{j_2}), \tag{28}$$

$$D(N(B_X^j)) = \lambda\mu_1(B_X^j), \quad cov[N(B_X^{j_1}), N(B_X^{j_2})] = 0. \tag{29}$$

Зауваження 5.2. Якщо випадкова величина N має складний розподіл Пуассона з твірною функцією $\Pi_N(z) = exp\{\lambda(\Pi(z) - 1)\}$, де $\Pi(z) = q + pz(q = 1 - p)-$ твірна функція бернуллієвої випадкової величини з параметром p [25], то сумісна твірна функція лічильних мір $\{N(B_X^j), j = \overline{1, s}\}$, для яких $\bigcup\limits_{j=1}^{s} B_X^j = X,\ B_X^i \bigcap B_X^r = \varnothing$ $(1 \le i,\ r \le s,\ i \ne r)$, має вигляд:

$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1, ..., z_s) = exp\{\sum_{j=1}^{s} \lambda p\mu_1(B_X^j)(z_j - 1)\}.$$

6. Змішаний емпіричний негативний біноміальний випадковий УТП

Нехай об'єм вибірки $\nu = \nu(\omega) = N$ є випадкова величина, що розподілена по негативному біноміальному закону з параметрами α, p [24, 26]:

$$P_\nu\{\nu = k\} = P\{N = k\} = C_{\alpha+k-1}^k p^\alpha q^k (k \in Z_+;\ q = 1 - p),$$

має твірну функцію $\Pi_N(z) = p^\alpha(1 - qz)^{-\alpha}$ та незалежна від випадкових величин (1). Шляхом елементарних перетворень $\Pi_N(z)$ можна подати в зручнішому вигляді:

$$\Pi_N(z) = \frac{p^\alpha}{[p + q(1-z)]^\alpha} = \frac{1}{[1 + \beta(1-z)]^\alpha} \left(\beta = \frac{q}{p} > 0\right). \tag{30}$$

Означення 6.1. Випадковий процес $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{E}, \mathfrak{X}, P)$ називатимемо простим змішаним емпіричним негативним біноміальним УТП в ОП $(X, \mathfrak{A}_X, B_X)$, якщо об'єм вибірки N є випадкова величина, що розподілена по негативному біноміальному закону.

Тоді із формул (10), (13)- (18) і (30) одержуємо:

$$\Pi_{N(B_X^1),...,N(B_X^s)}(z_1, ..., z_s) = \left[1 + \beta\sum_{j=1}^{s} \mu_1(B_X^j)(1 - z_j)\right]^{-\alpha}, \tag{31}$$

$$\Pi_{N(B_X^j)}(z_j) = [1 + \beta\mu_1(B_X^j)(1 - z_j)]^{-\alpha} \ \ (j = \overline{1, s}), \tag{32}$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(h)}(B_X^{j_1}\times ...\times B_X^{j_h})=\beta^h\prod_{i=1}^{h}(\alpha+i-1)\mu_1(B_X^{j_1})...\mu_1(B_X^{j_h}),$$

$$\alpha_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(h)}(B_X^{j})=\beta^h\prod_{i=1}^{h}(\alpha+i-1)\mu_1^h(B_X^{j}),\quad \nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^{j})=\alpha\beta\mu_1(B_X^{j}),$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(2)}(B_X^{j})=\alpha\beta\mu_1(B_X^{j})[(\alpha+1)\beta\mu_1(B_X^{j})+1],$$

$$\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(2)}(B_X^{j_1}\times B_X^{j_2})=\alpha(\alpha+1)\beta^2\mu_1(B_X^{j_1})\mu_1(B_X^{j_2}),$$

$$D(N(B_X^{j}))=\alpha\beta\mu_1(B_X^{j})[\beta\mu_1(B_X^{j})+1],$$

$$cov[N(B_X^{j_1}),N(B_X^{j_2})]=\alpha\beta^2\mu_1(B_X^{j_1})\mu_1(B_X^{j_2})\ (1\le j_1,j_2\le s,\ j_1\ne j_2). \tag{33}$$

Аналіз формул (31) - (33) дає можливість зробити такі висновки:

а) лічильні міри $N(B_X^1),...,N(B_X^s)$ утворюють сукупність взаємно корельованих випадкових величин, кожна з яких розподілена по негативному біноміальному закону з параметрами $\beta\mu_1(B_X^j)>0,\ \alpha>0\ \ (j=\overline{1,s})$.

б) між лічильними мірами $N(B_X^{j_1}),N(B_X^{j_2})$ існує позитивний коваріаційний зв'язок.

Література

[1] Н.Г. Семейко, Ю.И. Петунин, В.П. Яценко, *Исследование морфометрических характеристик поровых комплексов ядерной оболочки сенсорного нейрона методами сферической стохастической геометрии*, Кибернетика и системный анализ, **42** (2006), №6, 175–182с.

[2] A. Baddeley, E.B. Vedel Jensen, *Stereology for Statisticians*, "Chapman and Hall / CRC", New York, (2005), 395p.

[3] G.S. Watson, *Mathematical Morfology (Ed. I.N. Srivastava, A Survey of Statistical Design and Linear Models)*, "North - Holland Publishing Company", (1975), 547-553p.

[4] A.F. Karr, *Point Processes and Their Statistical Inference*, "Marcel Dekker", New York, (1991), 490p.

[5] M. Csörgö, P. Revesz, *Strong Approximation in Probability and Statistics*, "Academic Press", New York, (1981).

[6] P. Gaenssler, *Empirical Processes: On Some Basic Results from the Probabilistic Point of View,*, "Institute of Mathematical Statistics", Hayward, CA, (1984).

[7] P. Gaenssler, W. Stute, *On uniform convergence of measures with application to uniform convergence of empirical distribution*, Lect. Notes Math., 566 (1976), 45-56p.

[8] D. Pollard, *Convergence of Stochastic Processes,*, "Springer-Verlag", New York, (1984).

[9] R. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics,*, "Wiley", New York, (1980).

[10] Ю.І. Петунін, М.Г. Семейко, *Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах.1*,Теорія ймовірностей та математична статистика, **74** (2006), 98–107с.

[11] Ю.І. Петунін, М.Г. Семейко, *Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах.2*,Теорія ймовірностей та математична статистика, **75** (2006), 121–126с.

[12] Н.Г. Семейко, *Смешанный эмпирический пуассоновский случайный процесс сферических сегментов*, Кибернетика и системный анализ, (2011), №5, 119-130с.

[13] J.E. Moyal, *The general theory of stochastic population processes*, Acta Math., 108 (1962), №1, 1-31p.

[14] B.D. Ripley, *Locally finite random sets: foundation for point process theory,* Ann. Probab., 4 (1976), №6, 983-994p.

[15] Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, *Безгранично делимые точечные процессы*, "Наука", Москва, (1982), 391с.

[16] O. Kallenberg, *Random Measures,* "Akademic Verlag", Berlin, 1975, 104p.

[17] P.I. Daley, *Various concepts of orderlines for point processes (Ed. R.F. Harding, P.G. Kendall, Stochastic Geometry),* New York, 1974, 148-164p.

[18] Г. Биркгоф, *Теория структур*, "Изд. иностр. лит.", Москва, (1952), 407с.

[19] Ю.И. Петутин, Н.Г. Семейко, *Случайный процесс сегментов на двумерной эвклидовой сфере I,* Теория вероятностей и мат. статистика, **39** (1988), 107–113с.

[20] P.Gaenssler, *Empirical Processes,*Munich, 1982, 179с.

[21] D.I.Daley, D.Vere-Iones, *An Introduction to the Theory of Point Processes,* "Springer – Verlag", New York, 1988.

[22] Р.Л. Бишоп, Р.Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий,* "Мир", Москва,1967.

[23] Х. Уитни, *Геометрическая теория интегривования,* "Изд. иностр. лит.", Москва,1960.

[24] В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин, *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, "Наукова думка", Киев, 1978, 582с.

[25] В.Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.1* , "Мир", Москва, 1984, 527с.

[26] Н. Хастинг, Дж.Пикок, *Справочник по статистическим распределениям* , "Статистика", Москва, 1980, 95с.

Кафедра вищої математики, факультет управління персоналом та маркетингу, Київський Національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана, проспект Перемоги, 54/1, Київ 03680, Україна

E-mail address: `semejko@ukr.net`