

ПЕРЕДПРОГНОЗНИЙ АНАЛІЗ РЯДІВ УРОЖАЙНОСТІ ОЗИМОЇ ПШЕНИЦІ

Робота присвячена дослідженню ступеня стохастичності та періодів трендостійкості часових рядів на прикладі рядів урожайності озимої пшениці в областях України. Основними інструментами досліджень виступають два варіанти R/S-аналізу: загальний (інтегральний) алгоритм Херста та його локальний варіант. Запропонована нова методика оцінки періоду трендостійкості часового ряду.

Ключові слова: часові ряди врожайності, R/S-аналіз, гармонічний аналіз, метод ковзаючого тренду, період трендостійкості.

Еволюція економічних систем відображається у вигляді часових рядів параметрів функціонування цих систем. Отримані ряди служать основою для аналізу, моделювання та прогнозування подальшого розвитку систем. Якість прогнозування буде залежати від того, наскільки правильно проведена оцінка системи з точки зору її детермінованості. Сучасний математичний інструментарій, зокрема R/S-аналіз, запропонований Херстом і Мандельбротом [1, 2], є потужним засобом, який дозволяє встановити «ступінь хаотичності» системи. Якщо часовий ряд є випадковим процесом типу «випадкового блукання», до його моделювання слід застосовувати стохастичні методи та оцінки [3—5]. Інші підходи використовують у випадку, коли ряд виявляє довготермінову пам'ять, тобто відповідна система є в значній мірі детермінованою. Зазвичай динамічна математична модель системи в силу її складності недоступна дослідникам, і до прогнозування еволюції таких систем найчастіше застосовують трендові методи. Для застосування трендових методів прогнозування необхідно передусім провести тестування ступеня хаотичності досліджуваного часового ряду та адекватно оцінити його період трендостійкості. Поставлена таким чином задача вирішується нами із застосуванням методів R/S-аналізу. Цей метод, як і запропонований нами метод ковзаючого тренду, дозволяє досліджувати ефекти довготривалої пам'яті у часових рядах врожайності. Вихідними даними служили значення врожайності озимої пшениці за останніх 52 роки для областей України.

1. R/S-аналіз часових рядів. Поряд із кореляційним та спектральним аналізом одним із потужних методів дослідження довготривалої пам'яті у часових рядах та з'ясування ступеня їх фрактальності є застосування R/S аналізу (R — розмах, S — стандартне відхилення). Вперше запропонований Херстом алгоритм R/S -аналізу [1] обчислює середнє значення показника Херста $H \in (0,1)$, глибину пам'яті часового ряду і довжини характерних циклів. Якщо показник H приблизно дорівнює 0,5 — це свідчить про те, що ряд описує випадкове блукання. Коли H відрізняється від 0,5 — це означає, що кожне спостереження містить «довгострокову пам'ять» про минулу поведінку ряду. Якщо $0,5 \leq H \leq 1$ — ряд буде додатньокорельованим (персистентним), або ж трендостійким. Чим більшими є глибина пам'яті і показник Херста, тим кращою є трендостійкість часового ряду і тим більше підстав для його надійного прогнозування. Дослідження, проведені останнім часом, свідчать, що багато фінансово-економічних часових рядів (курси акцій, валютні курси, фондові індекси та інші економічні індикатори) мають статистику Херста більшу від 0,5, тобто мають фрактальну структуру, або довгострокову пам'ять.

Згідно з методикою, описаною в [6], нами виконані розрахунки показника Херста H для рядів урожайності для всіх областей України. Результати наведені в табл. 1 (колон-

ка 3). Области розбиті на дві групи, якісно різні за динамікою врожайності [7]. Для ілюстрації методики аналізу слід вибрати одну з областей України, для якої властива велика варіативність врожайності у поєднанні з великим її середнім значенням. Саме такі області цікаві з погляду значного ризику зерновиробництва. Характерною в цьому відношенні є Полтавська область (рис. 1), урожайність у якій є однією з найвищих, а значення стандартного відхилення врожайності — максимальним серед усіх областей [7].

Таблиця 1

**РЕЗУЛЬТАТИ R/S-АНАЛІЗУ ДЛЯ РЯДІВ
ВРОЖАЙНОСТІ ОЗИМОЇ ПШЕНИЦІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ УКРАЇНИ**

		Значення коефіцієнта Херста (інтегральний R/S-аналіз)		Значення періоду трендостійкості (глибини пам'яті), в роках	
		Початковий ряд	Згладжений ряд	Послідовний R/S-аналіз	Метод ковзаючого тренду
1	АР Крим	0,58	0,64	7	10
2	Вінницька	0,57	0,65	10	10
3	Дніпропетровська	0,56	0,65	7	10
4	Донецька	0,57	0,66	6	11
5	Житомирська	0,56	0,65	10	11
6	Запорізька	0,59	0,68	10	6
7	Київська	0,58	0,63	10	10
8	Кіровоградська	0,57	0,65	10	10
9	Луганська	0,59	0,67	9	11
10	Миколаївська	0,62	0,68	11	10
11	Одеська	0,56	0,64	10	10
12	Полтавська	0,57	0,65	10	10
13	Сумська	0,54	0,62	10	10
14	Харківська	0,58	0,67	8	10
15	Херсонська	0,58	0,66	11	6
16	Черкаська	0,61	0,67	10	10
17	Чернівецька	0,58	0,64	10	10
18	Чернігівська	0,58	0,64	10	11
1	Волинська	0,60	0,66	10	8
2	Закарпатська	0,63	0,67	7	7
3	Івано-Франківська	0,56	0,62	10	9
4	Львівська	0,59	0,64	7	10
5	Рівненська	0,59	0,67	10	13
6	Тернопільська	0,58	0,64	10	14
7	Хмельницька	0,57	0,65	10	14
	Середнє	0,58	0,65		

Динаміка врожайності, яка представлена на рисунку, є характерною для всіх областей України. Її основні риси: зростання врожайності на відрізку 1955—1990 роки; спадання врожайності на відрізку 1990—2000 роки; різке збільшення дисперсії врожайності на заключному етапі спостережень. Зміну тренду на початку 90-х ро-

ків можна пояснити економічною кризою, пов'язаною із становленням нової держави, збільшення дисперсії — природно-кліматичними процесами, які зазнають аналогічних змін [8].

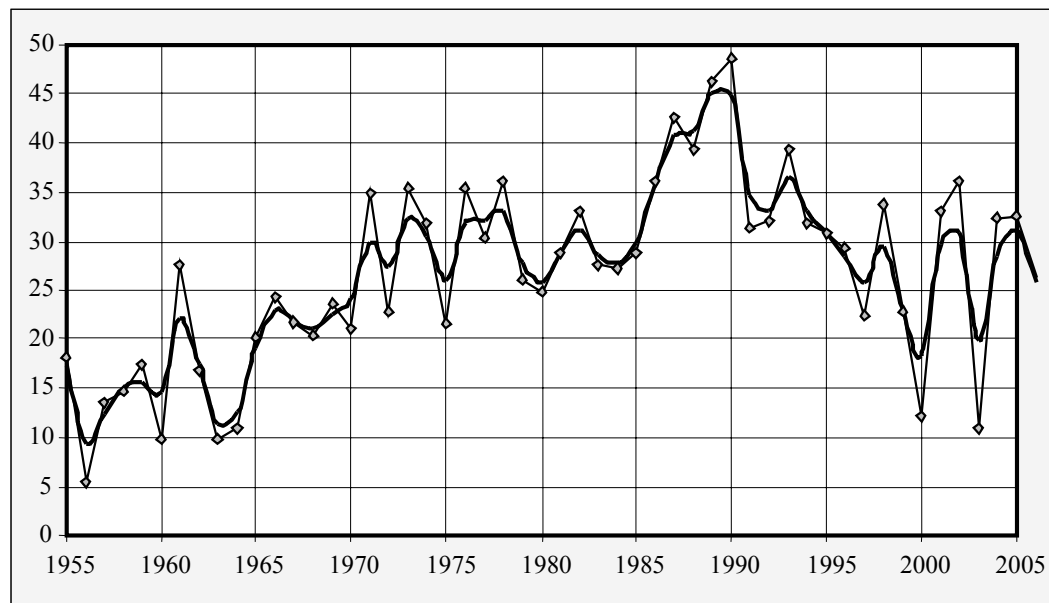


Рис. 1. Динаміка врожайності озимої пшениці для Полтавської області
Горизонтальна вісь — час (у роках), вертикальна вісь — цн/га.
Жирна лінія — результат згладжування

Кожен часовий ряд, який генерується природною чи економічною системою, є у значній мірі «зашумленим» стохастичними збуреннями. Для виявлення прихованої динаміки слід згладити часовий ряд, тобто відфільтрувати високочастотні шуми. Одним з найпоширеніших методів фільтрування сигналу є метод віконного перетворення Фур'є [9]. Алгоритм фільтрування складається з наступних кроків:

1. Перетворення Фур'є початкового ряду.
2. Перетворення Фур'є ядра згортки.
3. Множення отриманих перетворень.
4. Обернене Фур'є-перетворення добутку.

Розрахунки були виконані нами [10] з використанням пакету Mathematica 4.1 при значенні параметра $w=1$ для всіх областей України. Результат фільтрування для Полтавської області представлений на рис. 1 (жирна лінія). Згладжування значно підвищує оцінку детермінованості ряду, і це яскраво ілюструє табл. 1 (колонка 4).

Необхідно дати узагальнену оцінку результатів отриманих нами. При цьому ми будемо слідувати методиці, викладеній у роботі [11]. Автор даної роботи вказує, що на коротких часових рядах (а саме такі ряди ми досліджуємо) показник Херста рідко перевищує значення $H = 0,7$. Тому значення H , близьке до $0,5$, можна вважати ознакою стохастичної поведінки системи. Якщо ж значення H є близьким до $0,6$ — це вказує на те, що в часовому ряду є значні інтервали трендостійкої поведінки. Отже можна зробити висновок, що в досліджуваних нами рядах є значні фрагменти детермінованої поведінки, які перемежуються хаотичними вставками. Це є підставою (тим більш обґрунтованою, чим вищий показник Херста) для застосування трендових методів прогнозування. Згладжування часового ряду у значній мірі збільшує ступінь його детермінованості. Тому його можна розглядати як ефективний інструмент передпрогнозної підготовки ряду.

2. Послідовний R/S-аналіз. Відрізняють кілька варіантів R/S-аналізу. Оригінальний варіант R/S-аналізу, описаний вище, виконує інтегральну оцінку часового ряду на предмет його хаотичності. В низці робіт В. А. Перепелиці із співавторами [12]

розвинуто варіант локального R/S-аналізу, який автори назвали «послідовний R/S-аналіз». Дана методика використовується з метою виявлення циклів у часовому ряду та нижньої оцінки глибини пам'яті ряду. Така постановка задачі є тотожною до постановки задачі оцінки періоду трендостійкості ряду. Суть методу полягає у візуальному дослідженні динаміки R/S-траєкторії та H -траєкторії на заданому часовому інтервалі. Після певного періоду монотонної поведінки обох траєкторій спостерігається явище «зриву з тренду», яке характеризується наступною парою подій: R/S-траєкторія змінює тренд і до попереднього вже не повертається; H -траєкторія отримує сильний від'ємний приріст.

Зрив з тренду означає втрату пам'яті про початкові умови; довжина початкової ділянки з монотонною поведінкою траєкторій відповідає періоду трендостійкості часового ряду. Оскільки графіки R/S-траєкторії та H -траєкторії не завжди однозначно дозволяють визначити глибину пам'яті, доводиться багаторазово повторювати цю процедуру, щоразу виключаючи перший елемент попереднього ряду. Результати досліджень узагальнюють статистичними методами.

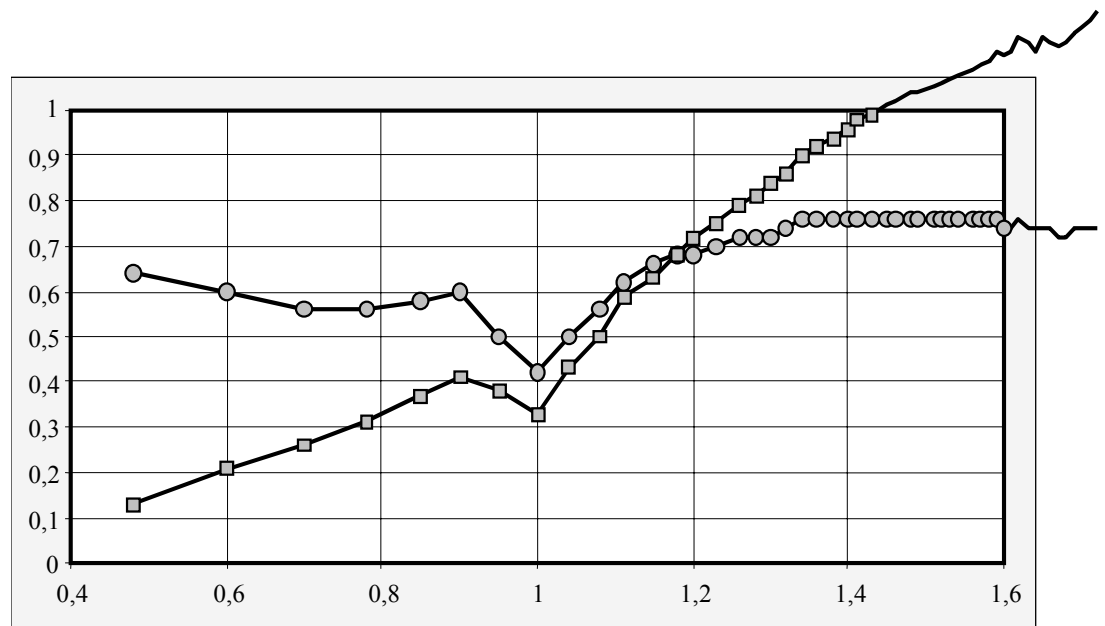


Рис. 2. R/S-траєкторія (нижня) і H -траєкторія (верхня, з коефіцієнтом 2) для ряду врожайності озимої пшениці для Полтавської області.
Горизонтальна вісь — $\lg(T)$

На рис. 2 представлена ілюстрація одного з кроків послідовного R/S-аналізу для Полтавської області. Перша точка відповідає 5-му елементу часового ряду. Оскільки явище зриву з тренду відбувається на шостій точці, це дозволяє оцінити глибину пам'яті як $L = 10$. У найпростіших випадках глибину пам'яті можна оцінити за результатами кількох послідовних розрахунків, якщо всі вони дають однакову оцінку цього показника. Проте, в більшості випадків, повторні розрахунки дають дещо різні оцінки глибини пам'яті. Тому в [12] запропоновано для оцінки глибини пам'яті використовувати методи теорії нечітких множин. Використовуючи обидва підходи ми отримали результати, наведені у п'ятій колонці табл. 1. Як видно з таблиці, період трендостійкості для більшості областей складає 10 років. Лише для п'яти областей він скорочується до 6—7 років. Розрахунки, проведені нами для згладжених рядів, показали, що процедура згладжування не впливає на ефективність послідовного R/S-аналізу. Отримані нами результати є позитивною основою для наступного трендового прогнозування досліджуваних рядів.

3. Метод ковзаючого тренду. Найпростішим методом прогнозування трендостійких рядів є метод екстраполяції лінійного тренду. Виникає питання: яку довжину ділянки ряду слід вибирати для побудови трендової моделі? Є підстави сподіватися, що найкращі результати прогнозування ми отримаємо при умові, що довжина базової ділянки буде співпадати з періодом трендостійкості ряду. Перевіримо цю гіпотезу за допомогою наступних розрахунків (алгоритм оптимізованого методу ковзаючого тренду).

1. Вибираємо довжину базової ділянки $L = 3$.

2. Будуємо модель лінійного тренду для відрізка часового ряду x_1, x_2, \dots, x_L . Виконуємо прогноз x_{L+1}^* і оцінюємо його похибку. Залежно від виду ряду в якості оцінки похибки може виступати модуль відносної чи абсолютної похибки прогнозу, або ж квадрат відхилення прогнозу від фактичного значення.

3. Циклічно повторюємо п.2, змінюючи початковий елемент базового відрізка в межах від 1 до $N - L - 1$ (N — довжина часового ряду). Визначаємо середню похибку по циклу e_L .

4. Збільшуємо довжину базової ділянки на одиницю. Повторюємо пункти 2—3 до того часу, поки довжина базової ділянки не досягне значення $L = N - 10$.

5. Серед всіх значень середньої похибки e_L вибираємо мінімальне. Відповідна довжина базової ділянки і буде оцінкою періоду трендостійкості ряду L^* (оцінкою глибини пам'яті ряду)

$$L^* = \arg \min_{L \in (3, N-10)} e_L . \quad (1)$$

Розрахунки, виконані нами згідно з описаним алгоритмом, дозволили отримати значення періоду трендостійкості, поміщені в шосту колонку табл. 1. Результати, отримані методом ковзаючого тренду, практично співпали з результатами, отриманими методом послідовного R/S-аналізу, що підтверджує висунуту нами гіпотезу. Але безумовною перевагою методу ковзаючого тренду є його простота у поєднанні із можливістю однозначної ідентифікації періоду трендостійкості лише з одного графіка — графіка залежності середньої похибки прогнозу від довжини базового відрізка ряду. Підтвердженням виступає рис. 3, який ілюструє застосування методу ковзаючого тренду до ряду врожайності для Полтавської області.

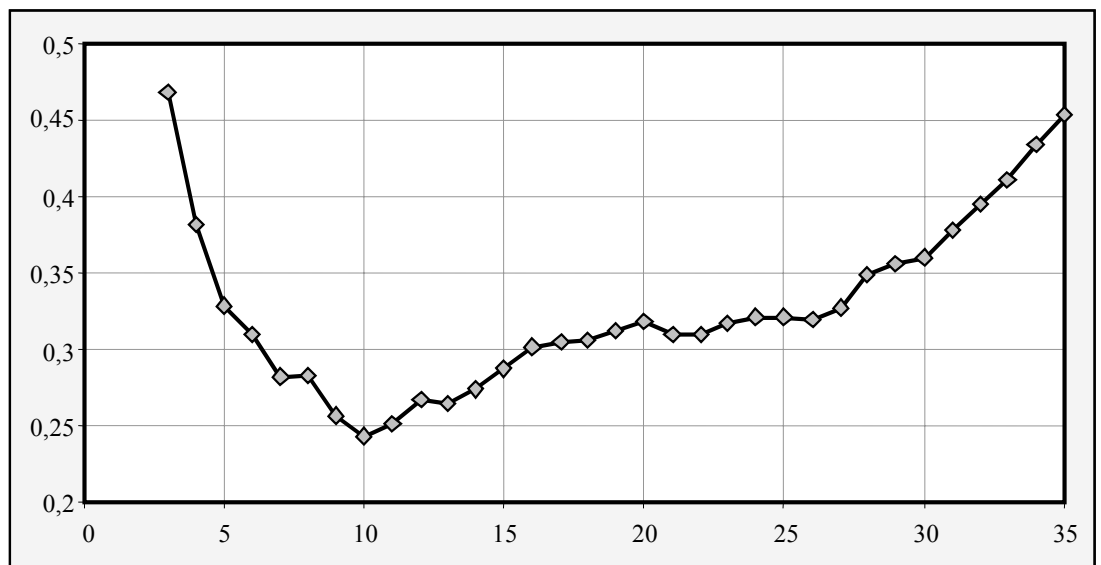


Рис. 3. Залежність середньої відносної похибки прогнозування методом екстраполяції лінійного тренду від довжини базового відрізка ряду врожайності (Полтавська область). Мінімальна середня похибка відповідає значенню періоду трендостійкості $L^* = 10$

4. Обґрунтування полігармонічної моделі за допомогою R/S-аналізу. В роботах [7, 13, 14] була підтверджена гіпотеза про циклічність урожайності зернових культур. Є підстави вважати, що полігармонічна модель урожайності є однією з найефективніших моделей у плані прогнозування [15]. Суть цієї моделі полягає в тому, що з початкового ряду послідовно виділяються гармоніки з періодами, які є найхарактернішими для досліджуваного ряду. Виникає питання: скільки гармонік слід включити в полігармонічну модель, щоб досягнути її максимальної адекватності. Практика гармонічного аналізу [10] дозволяє вказати кілька критеріїв статистичної достовірності виділеної гармоніки.

1. Амплітуда виділеної гармоніки повинна бути значно меншою (у півтора — два рази) від амплітуди попередньої гармоніки.

2. Середньоквадратичне відхилення ряду залишків, який отримується після вилучення гармоніки, не повинно перевищувати амплітуду гармоніки.

R/S-аналіз дозволяє отримати ще один критерій статистичної достовірності для виділеної гармоніки [16].

3. Значення коефіцієнта Херста H часового ряду повинно монотонно спадати після вилучення кожної гармоніки. Це положення є відображенням того факту, що вилучення гармоніки (якщо вона дійсно є детермінованою складовою ряду) робить ряд більш хаотичним.

Застосуємо комбінований метод дослідження, який полягає у почерговому застосуванні гармонічного аналізу та R/S-аналізу до ряду урожайності для Полтавської області. Результати розрахунків показника Херста є наступними. Початковий ряд урожайності: $H = 0,57$. Ряд перших залишків (від початкового ряду віднімається перша гармоніка): $H = 0,54$. Ряд других залишків: $H = 0,46$. Ряд третіх залишків: $H = 0,49$. Отже, згідно з критерієм коефіцієнта Херста, перші дві гармоніки адекватно відображають детерміновану поведінку ряду. Таким чином, полігармонічна модель повинна бути побудована з перших двох гармонік.

Отримані оцінки показника Херста свідчать про наявність у досліджуваному ряду значних ділянок трендостійкої поведінки, що забезпечує можливість трендового прогнозування часового ряду. Підтвердженням такого висновку є тест на перемішування початкового ряду, після якого було отримано значення $H = 0,48$. Це означає, що після перемішування внаслідок руйнування структури ряд повністю втрачає довгострокову пам'ять.

На значення показника Херста великий вплив чинять стохастичні шуми, присутні у досліджуваному ряду. Результати розрахунків показника Херста для згладженого ряду урожайності для Полтавської області дали наступні результати. Згладжений ряд урожайності: $H = 0,65$. Ряд перших залишків (від згладженого ряду віднімається перша гармоніка): $H = 0,62$. Ряд других залишків: $H = 0,56$. Ряд третіх залишків: $H = 0,59$. Отже, згідно з критерієм коефіцієнта Херста, як і для незгладженого ряду, лише перші дві гармоніки адекватно відображають детерміновану поведінку ряду. Як бачимо, згладжування ряду урожайності підвищує значення коефіцієнта Херста від $H = 0,57$ до $H = 0,65$. Це є підтвердженням тези, яка виписана нами вище і полягає у наступному. Згладжування часового ряду збільшує ступінь його детермінованості. Тому його можна використовувати як ефективний інструмент передпрогнозної підготовки ряду.

Таким чином, використання інструментів R/S-аналізу дозволило нам вказати ще один критерій статистичної достовірності для полігармонічної моделі часових рядів — критерій спадання коефіцієнта Херста.

5. Висновки. У даній роботі викладена методика передпрогнозної діагностики часових рядів урожайності озимої пшениці. В якості основного інструмента був використаний R/S-аналіз часових рядів. Інтегральний варіант R/S-аналізу дозволив нам оцінити ступінь хаотичності (детермінованості) кожного ряду. В результаті застосування диференціального варіанту R/S-аналізу були отримані оцінки періодів трендостійкості рядів урожайності. Запропонований новий ефективний метод оцінки періоду трендостійкості часових рядів — метод ковзаючого тренду. Сформульовані критерії статистичної достовірності для полігармонічної моделі часового ряду.

Література

1. *Hurst H. E.* Long-term Storage of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers. — 1951. — Vol. 116. — P. 776—808.
2. *Mandelbrot B.* The Variation of Certain Speculative Prices. — Cambridge: MIT Press, 1964.
3. *Боровиков В. П., Івченко Г. І.* Прогнозирование в системе STATISTICA в среде WINDOWS. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 368 с.
4. *Граничин О. Н.* Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания. — СПб.: СПб. ун-т, 2003.
5. *Джалладова І. А.* Оптимізація стохастичних систем. — К.: КНЕУ, 2005. — 284 с.
6. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. — М.: Мир, 2000. — 333 с.
7. *Вітлінський В. В., Грицюк П. М.* Дослідження динаміки урожайності озимої пшениці для областей України // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб.наукових праць. — К.: КНЕУ, 2007. — Вип. 76.
8. *В. І. Найденов, В. І. Швейкина.* Гидрологическая теория глобального потепления климата Земли // Метеорология и гидрология. — 2005. — №2. — С. 63—76.
9. <http://imaging.mrc-cbu.cam.ac.uk/imaging/PrinciplesSmoothing>
10. *Грицюк П. М.* До питання про циклічність урожайності зернових// Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб.наукових праць. — К.: КНЕУ, 2008. — Вип. 77 (**в друці**).
11. *Яновский Л. П.* Теория и практическое использование гипотезы когерентных рынков на основе модели Вега—Изинга. — www.som.pu.ru/upload/niim/publishing/2007/Yanovskiy.pdf
12. *Макшишко Н. К., Перепелиця В. О.* Аналіз і прогнозування еволюції економічних систем. — Запоріжжя: Поліграф, 2006. — 236 с.
13. *Олійник О. В.* Циклічність у динаміці урожайності сільськогосподарських культур // Економіка АПК. — 2003. — № 3. — С. 52—57.
14. *Грицюк П. М.* Дослідження циклічності природних процесів методом полігармонічного аналізу // Штучний інтелект. — 2006. — № 2. — С. 294—297.
15. *В. В. Вітлінський, П. М. Грицюк.* Аналіз і прогноз динаміки урожайності озимої пшениці для областей України // Проблеми економічної кібернетики: Матеріали XII Всеукраїнської науково-методичної конференції. Львів, 2007.
16. *Грицюк П. М.* Застосування R/S-аналізу для перевірки гіпотези про циклічність урожайності зернових культур // PDMU-2007: Тези доповідей міжн. конф. Крим (Новий світ), 2007. — С. 52—54

Надійшла до редакції: 14.12.2007

УДК 336.221:519.86

Ю. В. Коляда, канд. техн. наук., доц.,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ПРОСТОРОВІ МОДЕЛІ МІГРАЦІЇ ТРУДОВИХ РЕСУРСІВ

З макроекономічної точки зору пошук робочого місця описується математичними моделями (ММ) з розподіленими параметрами — рівняннями в частинних похідних з однією та двома просторовими координатами (змінними) та в залежності від часу. Первинні результати моделювання ґрунтуються на аналітичних розв'язках рівнянь ММ.

Ключові слова: математична модель, рівняння в частинних похідних, аналітичні розв'язки.

Дана праця логічно продовжує попереднє дослідження [1] проблеми зайнятості населення, виконане в припущенні рівномірного розподілу робочої сили та однорідності простору подій. Такий підхід сприяв утворенню класу ММ з зосередженими параметрами, тобто звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку та їх систем мінімальної розмірності. По-іншому, ММ такого роду описують процеси