

Література

1. *Hurst H. E.* Long-term Storage of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers. — 1951. — Vol. 116. — P. 776—808.
2. *Mandelbrot B.* The Variation of Certain Speculative Prices. — Cambridge: MIT Press, 1964.
3. *Боровиков В. П., Івченко Г. І.* Прогнозирование в системе STATISTICA в среде WINDOWS. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 368 с.
4. *Граничин О. Н.* Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания. — СПб.: СПб. ун-т, 2003.
5. *Джалладова І. А.* Оптимізація стохастичних систем. — К.: КНЕУ, 2005. — 284 с.
6. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. — М.: Мир, 2000. — 333 с.
7. *Вітлінський В. В., Грицюк П. М.* Дослідження динаміки урожайності озимої пшениці для областей України // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб.наукових праць. — К.: КНЕУ, 2007. — Вип. 76.
8. *В. І. Найденов, В. І. Швейкина.* Гидрологическая теория глобального потепления климата Земли // Метеорология и гидрология. — 2005. — №2. — С. 63—76.
9. <http://imaging.mrc-cbu.cam.ac.uk/imaging/PrinciplesSmoothing>
10. *Грицюк П. М.* До питання про циклічність урожайності зернових // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб.наукових праць. — К.: КНЕУ, 2008. — Вип. 77 (**в друці**).
11. *Яновский Л. П.* Теория и практическое использование гипотезы когерентных рынков на основе модели Вега—Изинга. — www.som.pu.ru/upload/niim/publishing/2007/Yanovskiy.pdf
12. *Макшишко Н. К., Перепелиця В. О.* Аналіз і прогнозування еволюції економічних систем. — Запоріжжя: Поліграф, 2006. — 236 с.
13. *Олійник О. В.* Циклічність у динаміці урожайності сільськогосподарських культур // Економіка АПК. — 2003. — № 3. — С. 52—57.
14. *Грицюк П. М.* Дослідження циклічності природних процесів методом полігармонічного аналізу // Штучний інтелект. — 2006. — № 2. — С. 294—297.
15. *В. В. Вітлінський, П. М. Грицюк.* Аналіз і прогноз динаміки урожайності озимої пшениці для областей України // Проблеми економічної кібернетики: Матеріали XII Всеукраїнської науково-методичної конференції. Львів, 2007.
16. *Грицюк П. М.* Застосування R/S-аналізу для перевірки гіпотези про циклічність урожайності зернових культур // PDMU-2007: Тези доповідей міжн. конф. Крим (Новий світ), 2007. — С. 52—54

Надійшла до редакції: 14.12.2007

УДК 336.221:519.86

Ю. В. Коляда, канд. техн. наук., доц.,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ПРОСТОРОВІ МОДЕЛІ МІГРАЦІЇ ТРУДОВИХ РЕСУРСІВ

З макроекономічної точки зору пошук робочого місця описується математичними моделями (ММ) з розподіленими параметрами — рівняннями в частинних похідних з однією та двома просторовими координатами (змінними) та в залежності від часу. Первинні результати моделювання ґрунтуються на аналітичних розв'язках рівнянь ММ.

Ключові слова: математична модель, рівняння в частинних похідних, аналітичні розв'язки.

Дана праця логічно продовжує попереднє дослідження [1] проблеми зайнятості населення, виконане в припущенні рівномірного розподілу робочої сили та однорідності простору подій. Такий підхід сприяв утворенню класу ММ з зосередженими параметрами, тобто звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку та їх систем мінімальної розмірності. По-іншому, ММ такого роду описують процеси

розвитку подій у часі. Але пошук робочого місця перш за все передбачає пересування від одного місця перебування до іншого, що само по собі займає певний час. Отже, міграційні процеси населення в пошуку місця трудової діяльності відбуваються в просторі і часі. Їх адекватне математичне відтворення з метою вивчення та прогнозування (інших можливостей просто нема) досягається застосуванням диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Ретроспектива проблеми [2]. Вперше, ґрунтуючись на логістичних уявленнях про ріст популяції (робочої сили), просторова модель з'явилась ще в 1921 р. і набула вигляду

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (1-p) * p + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

де залежна змінна p описує популяцію (її щільність), незалежні змінні: t — час, x і y — просторові координати належним чином нормовані.

Автор ММ (1) розглядав різні варіанти лінеаризації рівняння (1) для однієї просторової змінної x , щоб можна було записати аналітичні розв'язки.

Спеціальним переходом від рівняння

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (1-p) * p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (1a)$$

з частиною похідною до системи розміру два для ЗДР першого порядку та наступним числовим її інтегруванням була встановлена наявність періодичних розв'язків початкової ММ (1). Їх найменші значення заходять в область від'ємних значень, що не відповідає предмету дослідження. Також вони не задовольняють вимозі стійкості. Таким чином, спостерігаються ареали — місця, де результати моделювання узгоджуються з дійсністю.

З-за умови стаціонарності ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$) для ММ (1a) було записано так званий інтеграл енергії $E = \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2$.

Також була встановлена асимптотична стійкість розв'язків, яка має місце при перевищенні половини насиченості щільності популяції.

Для вивчення росту популяції модель Хотеллінга (1a) модифікувалась, враховуючи найпростішу виробничу функцію $q = \alpha * (\beta * p^2 - p^3)$, де коефіцієнт α визначається технологічною ефективністю, коефіцієнт β — масштабом виробництва. Міграція пояснюється просторовими відмінностями у щільності населення та виробництві товару на душу населення. Вона відбувається в напрямі найбільшого росту (градієнта) виробництва на душу населення, а її інтенсивність пропорційна різниці життєвих рівнів у різних місцевостях (точках чи областях простору). Щільність населення відповідає кількості потенційних мігрантів, спроможних відкликнутися на зазначені вище відмінності. Математично цей факт відтворюється так званим дифузійним членом $\nabla \left(\frac{q}{p} \nabla p \right)$, де символ ∇ є градієнт виразу чи змінної p .

Тоді модифікована ММ, що описує зростання і розповсюдження, тобто відтворює міграційні процеси, приймає вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p * (1 + q - \gamma * p) + \nabla * \left(\frac{q}{p} \nabla p \right), \quad (16)$$

де коефіцієнт γ являє собою прийнятний доход на душу населення, що призводить до стаціонарності. Для останнього рівняння етапи дослідження початкової ММ (1)

повторюються. Наведемо деякі результати: у фазовому просторі періодичні стаціонарні розв'язки ($\alpha = 1,2$; $\beta = 3$; $\gamma = 3,4$) являють собою дві неперетинні множини замкнених траєкторій, які розподілені сідловою точкою і не заходять в область від'ємних значень; період росте разом з амплітудою стійкість має місце на інтервалах $[1,21; 0,78]$ і $[1,25; \infty)$ для стаціонарного розв'язку; дифузійний член сприяє затуханню коливного розв'язку.

Згідно модифікованого (за допомогою явної виробничої функції) рівняння Хотеллінга динаміка міграційних процесів графічно включає: чотири стійких вузли, серед яких знаходяться два просторово однорідних та два просторово неоднорідних, причому кожен розв'язок (однорідний чи ні) володіє своїм басейном тяжіння; також чотири нестійкі вузли і чотири сідлові точки.

Модель Хотеллінга характеризується як структурно нестійка, що являє собою онтологічну її властивість. Щоб зробити модель внутрішньо стійкою, розглядався її так званий стабілізаційний варіант

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1-p) * p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (\delta + \varepsilon) * \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1b)$$

де величини δ і ε досить малі. Більш загально, додатковий член для моделі Хотеллінга має вигляд $(\bar{u} + p * \bar{v}) * \nabla p$, де постійні вектори \bar{u} та \bar{v} визначають інтенсивність і напрямки автономних компонент переміщення.

З точки зору економіки перший доданок $\delta * \frac{\partial p}{\partial x}$ з'являється, коли число мігрантів пропорційне чисельності популяції, тобто загальному числу переселенців, а другий доданок $\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}$, коли потік пропорційний швидкості росту. Для $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$ у фазовому просторі можуть бути області, в одній з яких енергія процесу приростає, а в іншій — убуває. Появляються граничний цикл, спіралі — геометричне зображення розв'язків ММ.

Коли визначальні для напряму автономного пересування постійні переходять через нуль, то граничний цикл співпадає з гомоклінною сідловою петлею. При зміні спрямованості автономних пересувань можна спостерігати періодичні розв'язки, що набувають стійкості та її втрачають.

Математична постановка проблеми трудової міграції. Правомірно розглядати пересування членів популяції як у часі, так і в просторі, відслідковувати змінюваність щільності популяції в різних точках або областях скінченного простору — ареалах. Для випадку однорідного простору або його малості має місце змінюваність чисельності від часу [1]. Але важливо знати просторову змінюваність щільності популяції, бо для різноманітних областей неоднорідного простору популяція може розвиватися по-різному, приймаючи на межах ареалу певні значення. Поіншому, розв'язок ММ (1) має підчинятися початковій $p(0, x, y) = f(x, y)$ і крайовій $p(t, M) = \varphi(t, M)$, де $M \in$ точка $M(x, y)$ на межі області, а $f(\cdot)$ і $\varphi(\cdot)$ — задані функції, умовам. Якщо популяція пробуває в обмеженій області і не виходить за її межі, то граничні (крайові і початкова) умови приймають вигляд: $p(M, 0) = f(x, y)$; $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$,

де вираз $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma}$ означає похідну в напрямі, перпендикулярному дотичній у тій точці межі, в котрій обчислюється похідна.

У випадку ММ явища з однією просторовою координатою зазначені граничні умови мають місце, але спрощується їх запис.

Наразі слушно зауважити наступне. Обмежене використання в економіко-математичному моделюванні рівнянь у частинних похідних зумовлене, головним чином, наступними причинами: 1) по-перше, принципово значно більшою складні-

стю ММ з розподіленими параметрами та меншим ступенем розробки методів їх розв'язання, ніж моделей з зосередженими параметрами; 2) по-друге, суттєві труднощі моделювання викликані нелінійністю шуканої характеристики та граничних умов.

Свою роль також відіграє наявність потужних пакетів програм числового інтегрування систем ЗДР [3, 4]. Але суттєво на користь переходу до моделювання з використанням в якості ММ рівнянь з частинними похідними ситуація змінилась в останні роки — на початку ХХІ ст. [5], коли з'явилися довідники з точними розв'язками великого числа рівнянь у частинних похідних, накопиченими в різноманітних сферах природознавства і техніки.

На завершення розділу вкажемо, що ММ (1) у літературі по синергетиці називаються рівняннями дифузійного типу, оскільки ними описуються процеси переміщення групи людей (популяції) у просторі та часі. Також відомо, що міграційні процеси можуть у силу певних причин (внутрішнього чи зовнішнього походження) підсилюватися або придушуватися (вгамовуватися). З огляду на дійсність прийдеться розглядати системи дифузійних рівнянь. Окрім цієї причини до ММ такого типу можна прийти, розділяючи за деякими ознаками популяцію на складові її частини.

Послідовно розглядаються всі відомі типи ММ проблеми міграції трудових ресурсів — дифузійні рівняння з однією та двома просторовими змінними, ретельно виписуються їх точні розв'язки.

Рівняння параболічного типу з однією просторовою змінною (в іноземній літературі рівняння Фішера, в нашій — рівняння Колмогорова—Петровського—Піскунова (КПП)), яке має різноманітні сфери застосування в природознавстві та техніці, а тепер — в економіці, записується

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a * p * (1 - p). \quad (1a)$$

Його точні розв'язки мають вигляд:

$$p(x, t) = [1 + C * \exp(-\frac{5}{6} * a * t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 * a} * x)]^{-2};$$

$$p(x, t) = [-1 + C * \exp(-\frac{5}{6} * a * t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 * a} * x)]^{-2};$$

$$p(x, t) = \frac{1 + 2 * C * \exp(-\frac{5}{6} * a * t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 * a} * x)}{\left[1 + C * \exp(-\frac{5}{6} * a * t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 * a} * x)\right]^2},$$

де величина C — довільна стала.

Більш загальне рівняння з нелінійною функцією $F(p)$ має вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F(p). \quad (2)$$

Його точні розв'язки з функціональним виокремленням змінних

$$p = p(x), \quad z = \varphi(t) * x + \psi(t) \quad (3)$$

зображуються системою ЗДР:

$$\begin{cases} \psi'_t + \frac{\Psi}{\varphi} * \varphi'_t = A_1 * \varphi^2 + A_2; -\frac{\Phi'_t}{\varphi} = A_3 * \varphi^2 + A_4; \\ \frac{p''_{zz}}{p'_z} = -A_1 - A_3 * z; \frac{F(p)}{p'_z} = -A_2 - A_4 * z, \end{cases} \quad (4)$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 — довільні сталі, розв'язки якої записуються:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \pm(C_1 * \exp(-2 * A_4 * t) - \frac{A_3}{A_4})^{-1/2}; \\ \psi(t) &= -\varphi(t) \left[A_1 * \int \varphi(t) dt + A_2 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2 \right]; \\ p(z) &= C_3 * \int \exp(-\frac{1}{2} * A_3 * z^2 - A_1 * z) dz + C_4; \\ F(p) &= -C_3(A_4 * z + A_2) * \exp(-\frac{1}{2} * A_3 * z^2 - A_1 * z), \end{aligned}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі.

Найбільш загального типу рівняння, що включає в себе (1в), записується

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a * \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(t) * \frac{\partial p}{\partial x} + g(p), \quad (5)$$

де a — стала, $f(t)$ — довільна функція.

Заміною змінною $y = x + \int f(t) dt$ отримується більш просте рівняння (типу (2))

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a * \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + g(p), \quad (5a)$$

яке володіє точним розв'язком типу біжучої хвилі: $p = p(z)$, $\pm z = y + \lambda * t$, де λ — довільна стала; функція $p = p(z)$ описується автономним ЗДР

$$a * p''_{zz} - \lambda * p'_z + g(p) = 0.$$

Перетворенням $z = \left(\frac{a}{\lambda}\right) * \xi$, $U(p) = p'_\xi$ воно зводиться до рівняння Абеля

$$U * U'_p - U + a * \lambda^{-2} * g(p) = 0,$$

яке володіє багатьма точними розв'язками для різних залежностей $g = g(p)$ [6].

Розглянемо ММ трудової міграції з використанням двох просторових координат та наведемо їх точні розв'язки.

Узагальнене рівняння Хотеллінга набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a * \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + f(p). \quad (6)$$

Його розв'язок типу біжучої хвилі записується: $p = p(\xi)$, де $\xi = A * x + B * y + \lambda * t$, де A, B, λ — довільні сталі, функції $p(\xi)$ описуються автономним ЗДР

$$a * (A^2 + B^2) * p''_{\xi\xi} - \lambda * p'_{\xi} + f(p) = 0,$$

точні розв'язки якого відомі [6].

ММ стаціонарного процесу трудової міграції являє собою рівняння (6) для $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, тобто

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(p).$$

Його розв'язок типу біжучої хвилі в неявній формі має вигляд:

$$\int \left[C + \frac{2}{A^2 + B^2} * F(p) \right]^{-1/2} dp = A * x + B * y + D, \text{ де } A, B, C, D \text{ — довільні сталі,}$$

$$F(p) = \int f(p) dp.$$

Точний розв'язок останньої ММ записується: $p = p(\xi)$, $\xi = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2}$, де C_1, C_2 — довільні сталі, а функція $p(\xi) = p$ описується ЗДР

$$p''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} * p'_{\xi} = f(p),$$

розв'язки якого для різних нелінійностей $f(p)$ відомі [6].

Для просторово-часових моделей міграції трудових ресурсів виписані алгоритми аналітичних розв'язків. Моделювання міграційних процесів вимагає програмної реалізації точних розв'язків, що спряжене з числовим інтегруванням ЗДР, до яких зводяться початкові ММ.

Викладене в статті сприяє більш повному онтологічно і адекватному моделюванню проблеми пересування популяції трудових ресурсів у межах держави, регіону або адміністративної одиниці. При цьому прийдеться щоразу налаштовувати коефіцієнти ММ і вибирати нелінійні залежності, вказуючи належні початкові та крайові (на межах областей переміщення) умови.

Література

1. Коляда Ю. В. Вивчення проблеми зайнятості на підставі математичної моделі // Вчені записки: Зб. наук. Праць / Відп. ред. А. Ф. Павленко. — 2006. — Вип. 8. — С. 165—170.
2. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 198 с.
3. Чернов В. П. Математическое и компьютерное моделирование экономической динамики. — СПб.: Наука, 2001. — 224 с.
4. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB и Scilab. — СПб.: Наука, 2001.
5. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.
6. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

Надійшла до редакції: 17.12.2007