

УДК 519.866:336.77

А. Б. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
кафедра вищої математики ФУГПМ,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Представлено економіко-математичну модель функціонування виробничих комплексів. Залежно від властивостей виробничих функцій досліджено динаміку змін економічних характеристик виробництва.

Представлена экономико-математическая модель функционирования производственного комплекса. В зависимости от свойств производственных функций исследована динамика изменений экономических характеристик производства.

Economic-mathematical model of production complex functioning is presented. Depending on properties of production functions the dynamics of changes production economic characteristics is investigated.

Ключові слова: економіко-математична модель, виробнича функція, економічна система.

Ключевые слова: экономико-математическая модель, производственная функция, экономическая система.

Key words: economic-mathematical model, production function, business system.

Актуальність теми. Однією з актуальних проблем сучасного розвитку українських реформ є стимулювання підприємницької активності, що забезпечує стабільні і прогнозовані показники підйому економіки. Одна з головних ланок у розв'язанні цієї проблеми — створення умов для інвестицій в економіку. Важливою ланкою в цьому процесі є аналіз і дослідження властивостей економічної системи [1, 2]. Доля підприємств в Україні у випуску продукції з 2000 року до 2009 року невпинно знижувалась [3], що свідчить про несприятливу динаміку розвитку вітчизняного бізнесу.

До числа основних факторів, що стримують розвиток української економіки відноситься недостатність інвестиційної діяльності і чітко прогнозоване стимулювання бізнесу. Досвід країн з розвинутою ринковою економікою свідчить про те, що дослідження можливостей об'єкту (підприємство, галузь) істотно стимулює розвиток в них підприємництва.

Метою даної роботи є аналіз математичної моделі розвитку виробництва з урахуванням особливостей виробничих функцій.

Виробничі функції. В макроекономічному аналізі об'єктів виробництва (підприємств, галузей, виробничої сфери економічної діяльності тощо) широкое застосування отримали виробничі функції (ВФ). Виробничою функцією називають математичну залежність граничних можливостей об'єкта згідно з випуском продукції (товарів, послуг) від факторів виробництва. Факторами виробництва є різноманітні ресурси: трудові, фінансові, виробничі фонди тощо.

Якщо граничні можливості підприємства позначити через M , то фактичний випуск продукції визначається співвідношенням:

$$y \leq M = f(x),$$

де $x = x_1, x_2, \dots, x_n$; $x_i, i = \overline{1, n}$ — кількість ресурсів i -го виду.

Як правило, припускають, що граничні можливості реалізуються повністю, тому

$$y = f(x). \quad (1)$$

При моделюванні валової продукції окремих виробничих комплексів або сукупного суспільного продукту галузей економіки факторами зазвичай приймають ос-

новні виробничі фонди (ОВФ), трудові ресурси (ТР) і засоби обігу. При моделюванні кінцевого продукту або національного доходу — виробничі фонди або капітал і трудові ресурси. В цьому випадку моделлю є виробнича функція

$$y = f(F, L), \quad (2)$$

яка залежить від двох факторів: F — вартість виробничих фондів або величина капіталу, L — чисельність трудових ресурсів.

До математичних формул ВФ застосовуються певні вимоги з метою досягнення відповідності властивостей цієї моделі властивостям реального виробництва. До таких властивостей, як правило, відносяться наступні: один і той самий об'єм випуску продукції може бути забезпечений при різних комбінаціях ресурсів; при відсутності хоча б одного з ресурсів випуск неможливий; при зростанні споживання ресурсів об'єм випуску не скорочується, тобто виробництво функціонує в економічній площині.

Одна з важливих властивостей ВФ характеризує її спроможність відображати зміну масштабів виробництва. Під змінами масштабів виробництва розуміють пропорційне зростання ресурсів у λ разів. Пропорційне зростання всіх ресурсів призводить до деякої зміни випуску продукції. Отриманий в результаті збільшення ресурсів об'єм випуску y_λ можна порівняти з попереднім випуском наступним чином:

$$y_\lambda = f(\lambda x) = \lambda^k y.$$

Виробничі функції, які мають такі властивості, які виражені останньою рівністю, називаються однорідними. Степінь однорідності дорівнює k . Однорідність ВФ свідчить про те, що при розширенні масштабів виробництва в λ разів об'єм продукції збільшується в λ^k разів. Це означає, що можуть бути різні варіанти ефективності розширення виробництва, якому відповідають різні значення k .

Можливі три випадки. При збільшенні масштабів виробництва його ефективність не змінюється ($k = 1$), зростає ($k > 1$) або спадає ($k < 1$).

Модель у вигляді ВФ дає можливість визначати дві групи економічних характеристик виробництва: характеристики ефективності використання ресурсів і характеристик співвідношення ресурсів.

Для зміни ефективності використання ресурсів застосовують наступні показники.

1. Середня продуктивність ресурсів $\mu_i = \frac{f(x)}{x_i}$, що виражає кількість виробленої продукції за рахунок одиниці i -го ресурсу. Серед показників μ_i широке застосування отримала продуктивність праці $\mu_L = \frac{f(F, L)}{L}$ і фондоддача $\mu_F = \frac{f(F, L)}{F}$.

2. Гранична продуктивність ресурсів $\gamma_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, що відповідає приросту об'єму виробництва продукції залежно від додаткового застосування малої одиниці ресурсу.

3. Коефіцієнт еластичності об'єму виробництва за ресурсом $E_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{f(x)}{x_i}$, який визначає, на скільки відсотків збільшується виробництво продукції при прирості ресурсу x_i на 1 %.

Характеристики співвідношення ресурсів зручно розглядати за допомогою графіків ізоквант. Ізокванта відображає еквівалентну взаємозамінність ресурсів у виробництві при постійному випуску продукції у відповідності з властивостями об'єкта — оригінала. Графіки ізоквант різного вигляду проілюстровано на рис. 1.

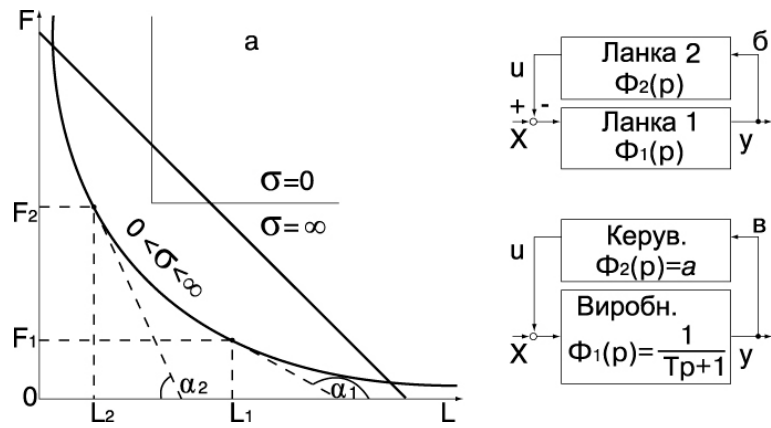


Рис. 1

У випадку, коли ресурси у виробництві доповнюють один одного, ізокванта має вигляд прямого кута зі сторонами, паралельними осям F і L . У випадку абсолютної взаємозамінності вона має вигляд прямої, що перетинає обидві осі.

Застосовують наступні показники співвідношення ресурсів.

1. Основний показник — фондоозброєність $\varphi = \frac{F}{L}$.

У різні моменти часу значення фондоозброєності у виробництві може не співпадати. В точці (L_1, F_1) (рис. 1, а) — фондоозброєність $\varphi_1 = \frac{F_1}{L_1}$, у точці (L_2, F_2) — фондоозброєність $\varphi_2 = \frac{F_2}{L_2}$. Другі два показники характеризують процеси еквівалентної взаємозаміни факторів.

2. Гранична норма заміщення $h = \frac{dF}{dL}$ при $y = const$ відображає, на скільки одиниць потрібно збільшити вартість виробничих фондів F для скорочення чисельності трудових ресурсів на малу одиницю. Тому гранична норма заміщення має від’ємне значення. Чисельно величина h дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної (α_1, α_2) до ізокванти в точках, що відповідають значенням фондовіддачі (L_1, F_1) , (L_2, F_2) . У загальному випадку зі зміною фондоозброєності змінюється значення граничної норми заміщення.

3. Еластичність еквівалентної взаємозамінності ресурсів σ . Значення цього показника обчислюється за формулою еластичності фондоозброєності за граничною нормою заміщення

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial h} \cdot \frac{\varphi}{h}$$

Цей показник означає, на скільки відсотків зміниться фондоозброєність при одновідсотковій зміні граничної норми заміщення. Характерна особливість показника σ полягає в тому, що його значення при зміні фондоозброєності залишається сталим. Разом з тим, формули виробничих функцій можуть відповідати об’єктам з різними характерами взаємозамінних ресурсів. Так, на рис. 1, а наведено ізокванти трьох типів, що відповідають різним типам ВФ. Випадок $\sigma = \infty$ характеризує виробництво, у якого повна взаємозамінність ресурсів. При цьому гранична норма заміщення залишається сталою величиною при довільному значенні фондоозброєності, для скорочення чисельності трудових ресурсів (L) на малу одиницю завжди потрібно збільшувати вартість виробничих фондів (F) на h одиниць. У випадку $\sigma = 0$ ресурси можуть лише взаємодоповнюватись, а будь-яка точка ізокванти, за винятком вершини кута, відповідає наявності у виробництві зайвої кількості того або іншого ресурсу. Виділені випадки є граничними для виробничих функцій зі

сталою еластичністю заміщення, яка може прийняти будь-яке значення з проміжку $(0, \infty)$.

Загально відомою моделлю виробництва зі сталою еластичністю заміщення є ВФ Кобба–Дугласа

$$y = aF^\alpha L^\beta, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (3)$$

де a — коефіцієнт загальної ефективності ресурсів, α, β — коефіцієнти еластичності об'єму виробництва по F і L відповідно ($E_F = \alpha, E_L = \beta$). Особливість ВФ Кобба–Дугласа полягає в тому, що еластичність еквівалентної взаємозаміни ресурсів у цій моделі дорівнює одиниці і коефіцієнт однорідності дорівнює одиниці. Для показників ефективності використання ресурсів характерні наступні співвідношення:

$$\mu_F = a\varphi^{-\beta}, \quad \mu_L = a\varphi^\alpha, \quad \gamma_F = \alpha\mu_F, \quad \gamma_L = \alpha\mu_L.$$

Взаємозамінність між фондоозброєнням і граничною нормою заміщення виражається формулою:

$$\beta\varphi = \alpha h,$$

з якої безпосередньо випливає, що еластичність взаємозамінності ресурсів $\sigma = 1$.

Необхідно звернути увагу на специфіку ВФ як ланки економічної системи в динамічних моделях. Її особливість полягає в тому, що фактор часу в ній у явному вигляді не міститься. Але ця модель дає можливість обчислювати ряд показників (граничні корисності факторів, еластичність виробництва за факторами тощо), які відображають динамічні властивості виробництва. Тому при чисельному відтворенні динамічних систем з врахуванням ВФ виникають ситуації, при яких відбуваються несуттєві стрибки таких важливих економічних характеристик, як продуктивність праці, фондоозброєння та фондовіддача.

Інша особливість цієї моделі полягає в тому, що показник y характеризує інтенсивність процесу виробництва (інтервальний показник), і тому в окремі моменти часу його значення не можуть бути виміряні, а фактори x відображають стан виробництва, вимірюються в довільний момент часу (миттєвий показник) і в інтервалі часу їх значення не можуть бути визначені точно. Звідси випливає, що синтезувати ВФ, що відповідає конкретному об'єкту, без додаткового узгодження відносно часового інтервалу і способу вимірювання факторів виробництва неможливо.

У зв'язку з тим, що ВФ у математичній формі не є диференціальним рівнянням, включати її як ланку моделі, що описується системою диференціальних рівнянь, неможливо. Тому для аналітичного розв'язку економічних систем потрібно вивести ВФ у формі диференціального рівняння. Разом з цим, для чисельного відтворення поведінки (імітації) можна скористатися формою ВФ (2) у вигляді:

$$y(t) = f[F(t), L(t), t] \quad (4)$$

з накладанням додаткових обмежень, що забезпечують адекватність поведінки моделі.

Динамічні виробничі функції з врахування досягнень сучасних технологій. ВФ (4) дозволяє розширити можливості відображення виробництва, включивши до моделі зміну ефективності використання факторів. Оновлення виробничих фондів шляхом заміни застарілих технологій більш досконаліми, запровадження досягнень сучасної науки і техніки збільшує ефективність факторів виробництва, а довготривала експлуатація і амортизація технологій — зменшує ефективність. Додатковий внесок у розвиток ефективності додає удосконалення економічного механізму, організації і керування в виробництві, підвищення професіоналізму працюючих тощо, що в явному вигляді в даній моделі не відображено. Але вказані процеси являють собою вплив техногенної цивілізації на виробництво продукції. Моделювання сучасних технологій пов'язують з моделюванням виробництва у вигляді

ВФ. Відомі наступні методи моделювання таких технологій: екзогенний, матеріалізований, індукційний і у вигляді окремої галузі. При екзогенному методі моделювання припускають, що аналітична форма ВФ не змінюється, а змінюються значення її параметрів. Розрізняють дві основні форми екзогенного методу: нейтральний або такий що не відноситься до визначених факторів виробництва і матеріалізований в конкретних факторах. Якщо застосовується ВФ Кобба–Дугласа, то у випадку нейтрального методу в модель вводиться функція $A(t)$, у випадку матеріалізованого методу — функції $\alpha(t)$ і $\beta(t)$. ВФ відповідно мають наступний вигляд:

$$y_1(t) = A(t)F(t)^\alpha L(t)^\beta, \quad y_2(t) = aF(t)^{\alpha(t)} L(t)^{\beta(t)}.$$

Надалі будемо застосовувати для імітації нейтральну форму екзогенного методу, а для аналітичного розв'язку — матеріалізований метод у вигляді однофакторної ВФ

$$y(t) = \mu(t)F(t). \quad (5)$$

Під впливом досягнень сучасних технологій змінюється ефективність використання виробничих фондів μ (фондовіддача). Функція зміни фондовіддачі задається екзогенно і зазвичай має експоненціальний вигляд.

Тоді ВФ з екзогенним методом виражається формулою:

$$y(t) = \mu_0 e^{\lambda t} F(t), \quad (6)$$

де μ_0 — фондовіддача в нульовий момент часу ($t = 0$), λ — показник степені методу, індекс зростання або темп приросту фондовіддачі.

Фізична заміна елементів виробничих фондів новими або попередніми технологіями, збільшення або скорочення кількості цих елементів здійснюється в економічному процесі репродукцією. Тому процес оновлення тісно пов'язаний з репродукцією виробничих фондів.

У процесі репродукції, з однієї сторони, здійснюється капіталовкладення і введення виробничих фондів в експлуатацію. Цим процесом обумовлюється збільшення виробничих фондів. З іншої сторони, відбувається зменшення виробничих фондів у результаті амортизації і вибуття. Якщо в якості моделі руху виробничих фондів прийняти інерційну ланку першого порядку [4, 5], у якій зовнішній вплив $x(t)$ — інтенсивність потоку капіталовкладень, $s(t)$ — інтенсивність потоку амортизації і T — лаг експлуатації виробничих фондів, тоді поточна вартість виробничих фондів визначається операторним рівнянням:

$$F(p) = \frac{1}{p} [X(p) - S(p) + F_0], \quad (7)$$

де F_0 — початкова вартість виробничих фондів.

Зображення процесу амортизації можна записати у вигляді:

$$S(p) = \frac{1}{p} F(p) = nF(p),$$

тобто амортизація пропорційна поточній вартості виробничих фондів і складає її частину. Частку амортизованих фондів n називають нормою амортизації. Підставляючи реакцію $S(p)$ в (7) і розв'язуючи дане рівняння відносно $F(p)$, отримаємо наступну операторну залежність нагромадженої кількості виробничих фондів від капіталовкладень:

$$F(p) = \frac{1}{p+n} [X(p) + F_0]. \quad (8)$$

Звідси, замість (5) однофакторну динамічну ВФ можна записати у вигляді інтенсивності випуску продукції від інтенсивності потоку капіталовкладень в операторній формі:

$$Y(p) = \Phi(p)[X(p) + F_0], \quad \Phi(p) = \frac{\mu}{p+n}, \quad (9)$$

де $\Phi(p)$ — передавальна функція виробничої ланки.

Варіант моделі випуску продукції з врахуванням екзогенного методу не важко отримати, якщо оригінал вартості виробничих фондів (8) підставити в (6).

Література

1. Галабурда М. К., Кулик А. Б. Проблеми оптимізації системи диференціального оподаткування в Україні // Стратегія економічного розвитку України. — К.: КНЕУ, 2004. — Вип. № 15. — С. 44–49.
2. Кулик А. Б. Моделювання інвестиційної стратегії при взаємодії малих підприємств // Економіка: проблеми теорії та практики. — ДНУ, 2009. — Вип. 251, Т. II. — С. 373–378.
3. Статистичний щорічник України за 2007 рік. Державний комітет статистики України. — К., 2008.
4. Каданэр Э. Д. Динамическое моделирование экономических систем: Уч. пос. — Пермь: ПГУ, 1990.
5. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. — К.: Вища школа, 1990.

Надійшла до редакції: 09.02.2010

УДК 330:51(075.8)

Ю. В. Коляда, докторант,
кафедри економіко-математичного моделювання
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ЕКОНОМІЧНЕ ПАРТНЕРСТВО: МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ЇЇ ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ

Розглянуто сценарії можливої співпраці двох країн (союзів) на підґрунті «м'якого» моделювання. Розкрито адаптивну природу механізму взаємодії. Альтернатива доцільної поведінки визначається не стільки стартовими умовами, скільки коефіцієнтами математичної моделі, серед яких визначальними є боротьба за якість продукції галузі та ступінь міжгалузевих зв'язків.

Рассмотрены сценарии возможного экономического сотрудничества двух стран (союзов) на основании «мягкого» моделирования. Раскрыта адаптивная природа механизма взаимодействия. Альтернатива целесообразного поведения определяется не столько стартовыми условиями, сколько коэффициентами математической модели, среда которых определяющими есть борьба за качество продукции отрасли и степень межотраслевых связей.

Scripts of possible{probable} economic cooperation of two countries (unions) on the basis of «soft» modelling are considered. The adaptive nature of the mechanism of interaction is opened. The alternative of expedient behaviour is determined not so much by starting conditions, how many factors of mathematical model which environment determining is struggle for quality of production of branch and a degree of interbranch communications.

Ключові слова: моделювання партнерської співпраці, математична модель, якісний аналіз, економічне тлумачення.

Ключевые слова: моделирование партнерского сотрудничества, математическая модель, качественный анализ, экономическая интерпретация.

Key words: modelling of partner cooperation, mathematical model, the qualitative analysis, economic interpretation.

© Ю. В. Коляда, 2010