6. *Пунков С. П., Стародубцева А. И.* Хранение зерна // Элеваторно-складское хозяйство и зерносушение. — М. : Агропромиздат, 1990.

7. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М. : Советское радио; 1965. — 510 с.

Стаття надійшла до редакції 12.06.2014 р.

УДК 519.8(075)

Манжос Т. В., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики,
Мельник О. О., к.ф.-м.н.,
старший викладач кафедри вищої математики,
Луцишина Ж. В., доктор філософії в галузі економіки,
старший викладач кафедри вищої математики,
Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана

ОПТИМАЛЬНІ ЦІНОВІ СТРАТЕГІЇ У МОДЕЛЮВАННІ ПОПИТУ НА ІННОВАЦІЙНИЙ ПРОДУКТ

АНОТАЦІЯ. Вивчено питання прогнозування попиту на інноваційний продукт. Зважаючи на відсутність статистичних даних із минулих періодів, побудовано модель росту попиту на основі моделі дифузії Басса. Досліджено вплив цінового фактору на швидкість росту попиту на інноваційний продукт; побудовано оптимальні цінові стратегії у деяких частинних випадках. Теоретичний матеріал проілюстровано числовими прикладами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дифузія інновацій, модель Басса, оптимальна цінова стратегія.

АННОТАЦИЯ. Исследуется задача прогнозирования спроса на инновационный продукт. Учитывая отсутствие статистических данных из предыдущих периодов, построена модель роста спроса на основании модели диффузии Басса. Исследовано влияние ценового фактора на скорость роста спроса на инновационный продукт; построены оптимальные ценовые стратегии в некоторых отдельных случаях. Теоретический материал проиллюстрирован числовыми примерами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: диффузия инноваций, модель Басса, оптимальная ценовая стратегия.

ABSTRACT. We study the question of forecasting the demand for a new product. Given the lack of historical data of demand the diffusing model of innovation is finding on the base of the Bass model. The influence of price factor on the rate of demand for a new product is investigated. The optimal price strategies are built in some cases. Numerical examples are given to illustrate the model.

KEY WORDS: diffusion of innovations, the Bass model, optimal pricing policy.

Постановка проблеми й аналіз основних джерел. Процес виведення на ринок інноваційних продуктів пов'язаний зі знач-

© Т. В. Манжос, О. О. Мельник, Ж. В. Луцишина, 2014

ними ризиками, оскільки вимагає інвестиційних вкладень, чітко спланованих організаційних та інших дій. Зокрема виникає потреба у прогнозуванні темпів та обсягів продажу такої продукції, адже статистичних даних про попит у минулому в наявності, як правило, немає.

Сучасні методи економетричного прогнозування життєвого циклу товару неможливі без застосування новітніх маркетингових прогностичних моделей, які дозволять дослідити процес поширення інноваційного товару на основі теорії складних систем. Однією з таких моделей є дифузійна модель Ф. Басса [1], яка досить широко використовується в прогнозуванні попиту на нові види продукції.

Модель Басса побудована на припущенні, що на потенційних споживачів інноваційного продукту впливають два типи каналів передачі інформації: медіа та міжособистісні комунікативні канали. Основна ідея моделі полягає в тому, що ймовірність $h(t)$ обрання покупцем даного продукту за умови, що він не знав про нього раніше, є лінійною функцією кількості попередніх покупців. Більш точно,

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = p + qF(t), \qquad (1)$$

де параметри p і q є коефіцієнтами інновації (або зовнішнього впливу) та імітації (або внутрішнього впливу) відповідно; $F(t)$ — функція розподілу числа покупців за час t, $f(t) = dF / dt$. Рівняння (1) можна переписати у вигляді :

$$\frac{dF(t)}{dt} = p + (q - p)F(t) = q[F(t)]^2. \qquad (2)$$

Параметр p представляє зовнішній вплив, зазвичай це медіа, тоді як параметр q відображає вплив міжособистісних каналів, тобто оточуючих людей на потенційних покупців.

Інтерпретація вказаної ймовірності $h(t)$ полягає у тому, що якщо її помножити на dt, вона описуватиме умовну ймовірність того, що випадковий покупець, який не здійснив покупку, зробить це у наступний малий період часу dt.

Нехай $N(t)$ — сукупне число тих, хто обере новий продукт за час t, dN / dt — кількість покупців, які придбають новий продукт у момент часу t, m — потенціал ринку продукту. Оскільки $\frac{dN(t)}{dt} = mf(t)$, з рівняння (2) отримаємо іншу форму рівняння Басса:

$$\frac{dN(t)}{dt} = pm + (q - p)N(t) - \frac{q}{m}[N(t)]^2 . \qquad (3)$$

Інтегруючи рівняння (3) при початковій умові $N(0) = 0$, отримаємо

$$N(t) = m\frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + (q/p)e^{-(p+q)t}} . \qquad (4)$$

Оцінка параметрів моделі Басса може бути здійснена різними способами. Якщо відомі деякі дані про попередні продажі, то можна використати лінійну або нелінійну регресію [2]. Також існує багато сучасних підходів для оцінки цих параметрів, наприклад, оцінка максимальної правдоподібності [3] та оцінка Байєса [4]. Крім того, вказані параметри можна оцінити методом аналогій або дельфі-методом.

Після появи моделі Басса у 1969 році почали з'являтися складніші моделі, що враховували вплив різних екзогенних факторів на швидкість дифузії. Деякі дослідники узагальнили початкову модель шляхом введення таких змінних, як, наприклад, ціна і реклама.

Робінсон і Лакані [5] були першими, хто ввів у початкову модель фактор ціни у вигляді експоненти, помноженої на вираз Басса:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left(p + (q - p)F(t) = q[F(t)]^2\right)e^{-k\,\mathrm{Pr}(t)} ,$$

де $Pr(t)$ — ціна продукту, k — коефіцієнт.

Горскі та Саймон [6] модифікували модель Басса шляхом введення коефіцієнта інновації p, як логарифмічної функції рекламних витрат:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\alpha + \beta \ln\left(A(t)\right) + qN(t-1)\right]\left[m - N(t)\right],$$

де $A(t)$ — рекламні витрати протягом часу t, β — ефективність реклами.

Каліш [7] побудував двокрокову теоретичну модель, яка ґрунтується на принципі максимізації корисності. У цій моделі реклама та ціна теж були враховані:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[g\left(\frac{\mathrm{Pr}(t)}{uN(t)/m}\right) \cdot I - N(t) \right]k ,$$

$$\frac{dI}{dt} = [1 - I] \cdot \left[f(A(t)) + bI + b' \frac{N(t)}{m} \right],$$

тут I — рівень інформованості, g і u — функціональні оператори, b, b', k — параметри.

Басс, Крішнан і Джейн [8] запропонували узагальнену форму, яка показує вплив маркетингових змінних на кількість покупців. Вони досягли цього шляхом додання до класичної моделі множника

$$x(t) = 1 + \frac{\alpha \Pr'(t)}{\Pr(t)} + \frac{\beta A'(t)}{A(t)},$$

де α, β — коефіцієнти, $\Pr(t)$, $A(t)$ — ціна та рекламні витрати за час t відповідно.

Усі розглянуті узагальнення класичної моделі Басса певним чином відображають вплив маркетингових змінних на дифузію інноваційного продукту. У даній же роботі зроблено спробу розв'язати задачу пошуку оптимальної стратегії для однієї з таких змінних — ціни. Зокрема розглянуто випадки, коли ціна на інноваційний продукт стала протягом певного періоду та лінійно-спадна.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу прогнозування попиту на інноваційний продукт з урахуванням цінового фактору. Зрозуміло, що розглядаючи ціну як змінну, що впливає на темпи росту дифузії інновації та, відповідно, на попит, можна дослідити різні види цінових політик (стратегій). Це, в свою чергу, дозволить виробнику коригувати рівень ціни залежно від обраної стратегії, яка є оптимальною в тому чи іншому сенсі.

Беручи за основу класичну модель Басса, побудуємо модель росту попиту на інноваційний продукт в часі, враховуючи ціну на цей продукт. Основні припущення збігаються з загальними припущеннями до моделі дифузії:

1) процес є бінарним (тобто покупець купує одиницю продукту на проміжку часу dt або з різних причин не купує);

2) потенціал ринку сталий і дорівнює N;

3) зрештою, можливий випадок, що усі N покупців придбають даний товар;

4) немає повторних покупок, тобто кожен покупець може придбати лише одну одиницю продукту.

Варто зазначити, що при побудові моделі не буде враховано такі фактори, як наявність конкуруючого продукту на ринку, вплив рекламної політики тощо. Зважаючи на складність моделей, де враховано багато змінних рішень і зовнішніх випадкових впливів, для досягнення балансу між складністю та можливістю

знайти розв'язки в явному вигляді дослідимо виключно вплив цінової стратегії на рівень попиту. Крім того, включення до моделі інших факторів впливу на дифузію і попит на інновацію може стати предметом подальших досліджень, зокрема і з використанням нечіткої логіки для врахування невизначеності.

Отже, введемо основні позначення:

α, β — параметри моделі Басса, тобто коефіцієнти інновації та імітації відповідно;

$p(t)$ — функція ціни від часу t (у даній моделі незростаюча по t);

$f(p)$ — функція від ціни, що відображає частку покупців, які готові придбати даний інноваційний продукт за ціною, не більшою за p;

c — собівартість інноваційного продукту (у даній моделі виробнича функція лінійна; це спрощення зроблене задля побудови базової моделі, в подальшому можна розглядати випадки інших залежностей собівартості від обсягу продукції, що виготовляється);

r — облікова ставка;

$x(t)$ — кількість здійснених покупок на проміжку часу $[0; t]$, тоді $x'(t)dt$ приблизно дорівнює кількості покупок у момент часу t;

$y(t)$ — кількість покупців, що знають про даний інноваційний продукт на момент часу t.

Залежність між $y(t)$ і $x(t)$ має вигляд:

$$x(t) = f(p(t)) \cdot y(t), \tag{5}$$

і, відповідно,

$$x'(t) = \left[f(p(t))\right]'_t \cdot y(t) + f(p(t)) \cdot y'(t). \tag{6}$$

Рівність (6) відображає той факт, що приріст покупців за малий проміжок часу dt дорівнює сумі кількості покупців, що дізналися про продукт у цей момент часу та готові придбати його за встановленою ціною, та кількості покупців, які знали про існування даного продукту раніше, але чекали зниження ціни до її рівня на момент часу $t + dt$.

Зазначимо, що аналітичний вигляд функції $f(p)$ можна знайти на основі вибіркових даних у результаті опитування або експертних оцінок з використанням історії продаж аналогічного продукту. Як правило, область визначення цієї функції $0 \le p \le p_1$, де p_1 — максимальна ціна, за якою даний продукт готовий придбати хоча б один покупець, причому $f(0) = 1$ і $f(p_1) = 0$. Варто звернути увагу на те, що при $p(t) \equiv 0$ отримаємо класичну модель Басса.

Тоді, беручи до уваги розв'язок моделі Басса (4) та рівняння (5) і (6) отримаємо:

$$x(t) = f(p(t)) \cdot N \frac{e^{(\alpha+\beta)t} - 1}{\beta/\alpha + e^{(\alpha+\beta)t}}, \quad (7)$$

$$x'(t) = \left(\alpha + \frac{\beta}{N} \cdot \frac{x(t)}{f(p(t))}\right)\left(N \cdot f(t)) - x(t)\right) + \frac{x(t)}{f(p(t))}\left[f(p(t))\right]'_t. \quad (8)$$

Цільову функцію визначимо як дисконтований прибуток на проміжку часу від $t = 0$ до $t = T$:

$$J = \int_0^T e^{-rt}(p(t) - c)x'(t)dt,$$

де $x'(t)$ визначається рівняннями (7) і (8).

Таким чином, оптимальна цінова стратегія $p(t)$ є такою, що максимізує функцію J. Розв'язання цієї оптимізаційної задачі в загальному випадку методами варіаційного числення (такими, як метод максимуму Понтрягіна [9]) суттєво ускладнюється через наявність у правій частині рівності (8) похідної шуканої функції $p(t)$. Тому розглянемо ряд частинних випадків, які дещо спрощують модель.

1. Нехай ціна стала $p(t) \equiv p_0$, $0 \le t \le T$. У цьому випадку рівняння (8) набере вигляду:

$$x'(t) = \left(\alpha + \frac{\beta}{N} \cdot \frac{x(t)}{f(p_0)}\right)\left(N \cdot f(p_0) - x(t)\right). \quad (9)$$

Тоді, враховуючи, що у цьому випадку

$x(t) = f(p_0) \cdot N \frac{e^{(\alpha+\beta)t} - 1}{\beta/\alpha + e^{(\alpha+\beta)t}}$, отримаємо

$$J = (p_0 - c)f(p_0)\int_0^T Ne^{-rt}\left(\alpha + \beta\frac{e^{(\alpha+\beta)t} - 1}{\beta/\alpha + e^{(\alpha+\beta)t}}\right) \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha e^{(\alpha+\beta)t} + \beta}dt. \quad (10)$$

Позначимо інтеграл у правій частині функції (10) через $I = I(\alpha, \beta, T, r, N)$, він не залежить від змінної p_0. Зазначимо, що $I > 0$ при будь-яких допустимих значеннях параметрів.

Отже, максимум функції (10) збігається з максимумом функції $J_1 = (p_0 - c)f(p_0)$, тому оптимальне значення $p_0^{\max}$ залежатиме від аналітичного вигляду $f(p_0)$.

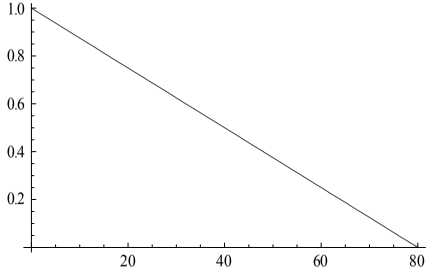
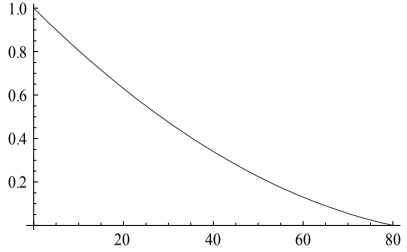
Наприклад, у випадку лінійної функції $f(p_0) = 1 - \frac{p_0}{p_1}$ отримаємо

$$J_1 = -\frac{p_0^2}{p_1} + \left(\frac{c}{p_1} + 1\right) p_0 - c\,,\ p_0^{\max} = \frac{p_1 + c}{2}\,.$$

У табл. 1 наведено приклади оптимальних значень ціни залежно від того, якою є функція $f(p_0)$ — лінійною чи квадратичною.

Таблиця 1

ПРИКЛАДИ ОПТИМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ЦІНИ

$p_1 = 80,\ c = 25$		
$f(p_0)$	Лінійна, $f(p_0) = 1 - p_0 / 80$ 	Квадратична, $f(p_0) = 0.0001p_0^2 - 0.0205p_0 + 1$ 
$J_1(p_0)$	$J_1 = -0.0125p_0^2 + 1.3125p_0 - 25$	$J_1 = (p_0 - 25) \times (0.0001p_0^2 - 0.0205p_0 + 1)$
$p_0^{\max}$	52.5	47.75

1. Нехай ціна є лінійно-спадною: $p(t) = a + bt$, $b \le 0$, $0 \le a \le p_1$, $a + b \ge 0$, функція f теж лінійна: $f(p) = 1 - \frac{p}{p_1}$. Тоді цільова функція набуде вигляду:

$$J = N \int_0^N e^{-rt}(a + bt - c)\left[\left(\alpha + \beta \frac{e^{(\alpha+\beta)t} - 1}{\beta/\alpha + e^{(\alpha+\beta)t}}\right) \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha e^{(\alpha+\beta)t} + \beta} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(1 - \frac{a + bt}{p_1}\right) - \frac{e^{(\alpha+\beta)t} - 1}{\beta/\alpha + e^{(\alpha+\beta)t}} \cdot \frac{b}{p_1}\right] dt \,. \qquad (11)$$

Інтеграл у правій частині (11) не виражається аналітично через елементарні функції, тому знайти точку максимуму $(a;b)$ функції J в явному вигляді достатньо складно. Скориставшись пакетом програм *Wolfram Mathematica* [10], при заданих значеннях вхідних параметрів можна отримати оптимальні значення змінних a і b.

Наприклад, при вхідних даних $N = 80000$, $\alpha = 0{,}04$, $\beta = 0{,}001$, $r = 0{,}08$, $T = 1$, $p_1 = 50$, $c = 10$, отримаємо такі оптимальні значення $a_{opt} = 50$, $b_{opt} = -30{,}175$, $J_{\max} = 35924{,}1$. Тобто оптимальна лінійна функція ціни в часі з точки зору максимізації дисконтованого прибутку в цьому випадку така: $p(t) = 50 - 30{,}175t$. Зазначимо, що стала ціна протягом часу $T = 1$ не приводить до максимізації прибутку, тобто оптимальною є стратегія спадної ціни протягом вказаного проміжку часу.

Висновки з проведеного дослідження. У роботі побудовано модель росту попиту на інноваційний продукт залежно від ціни. Крім того, визначено оптимальні цінові стратегії з точки зору максимізації прибутку в ряді частинних випадків.

Напрямками подальших досліджень з цієї тематики може бути вивчення поведінки попиту у загальнішому випадку та пошук відповідної оптимальної цінової стратегії. Також цікавим є дослідження одночасного впливу на попит цінового фактору та рекламних заходів, здійснених протягом часу існування інноваційного продукту на ринку.

Література

1. *Bass F. M.* A new product growth for model consumer durables [Text]/ F.M. Bass // Management Science. — 1969. — v.15(5). — P. 215–227.

2. *Kenneth D. L.* Forecasting new adoptions: A comparative evaluation of three techniques of parameter estimation. [Text]/ D. L. Kenneth, R. P. Dinesh, M. L. Sheila // Advances in Business and Management Forecasting. — 2009. — v.6. — P. 81–91.

3. *Srinvasan V.* Nonlinear least squares estimation of new product diffusion models [Text]/ V. Srinvasan, C. H. Mason // Marketing Science. — 1986. — v.5(2). — Pp. 169–178.

4. *Lenk P. J.* New models from old: forecasting product adoption by Hierarchical Bayes procedure [Text] / P. J. Lenk, A. Rao // Marketing Science. — 1990. — v.9(1). — Pp. 42–53.

5. *Robinson B.* Dynamic Price Models for New Product Planning [Text] / B. Robinson, C. Lakhani // Management Science. — 1975. — v.10. — Pp. 1113–1122.

6. *Horsky D.* Advertising and the diffusion of new products [Text] / D. Horsky, L. S. Simon // Marketing Science. — 1983. — v.2. — Pp. 1–18.

7. *Kalish S.* A New Product Adoption Model with Pricing, Advertising, and Uncertainty [Text] / S. Kalish // Management Science. — 1985. — v.31. — Pp. 1569–1585.

8. *Bass F. M., Jain D., Krishnan T.* (1994). Why the Bass model fits without decision variables [Text] / F. M. Bass, D. Jain, T. Krishnan // Marketing Science. — 1994. — v.13. — Pp. 204–223.

9. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, 4-е изд. — М. : Наука, 1983. — 393 с.

10. http://www.wolfram.com/mathematica/ [Електронний ресурс]

Стаття надійшла до редакції 15.06.2014 р.

УДК 519.866:330.115

Бойчук М. В., к.ф.-м.н., доцент,
Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича
Семчук А. Р., к.ф.-м.н., доцент,
Чернівецький національний торговельно-економічний інститут

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ ІЗ НЕЛІНІЙНИМ КРИТЕРІЄМ, ЗАПІЗНЕННЯМ І ВІНЕРІВСЬКИМ І ПУАССОНІВСЬКИМ ПРОЦЕСАМИ

АНОТАЦІЯ. Запропоновано стохастичну модель однопродуктової макроекономіки зростання із інвестиційним запізненням і вінерівським і пуассонівським процесами, проведено її дослідження та на модельному прикладі проведено числове моделювання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стохастична модель, вінерівський і пуассонівський процеси, магістральне керування, праве керування, стохастична та се-

© М. В. Бойчук, А. Р. Семчук, 2014