Література

1. *Зайчук Б. О., Зарудний О. Б., Березіна С. Б., Александров В. Т., Недбаєва С. М.* Загальнообов'язкове державне пенсійне страхування: Навчальний курс. — К.: НВП «АВТ», 2004. — 256 с.

2. *Колесник А. П.* Тенденция развития пенсионной системы и ее адаптация к условиям рыночной экономики // Пенсия. — № 1 (4). — 1997.

3. Закон України «Про загальнообов'язкове державне пенсійне страхування» // Відомості Верховної Ради. — 2003. — № 49—51. — Ст. 376.

4. Постанова Кабінету Міністрів України від 4 червня 1998 р. № 794 «Про затвердження Положення про організацію персоніфікованого обліку відомостей у системі загальнообов'язкового державного пенсійного страхування» // Офіційний вісник України. — 1998. — № 22. — С. 37.

5. Постанова правління Пенсійного фонду України від 10.06.2004 № 7-6 «Про затвердження Порядку формування та подання органам Пенсійного фонду України відомостей про застраховану особу, що використовуються в системі загальнообов'язкового державного пенсійного страхування», зареєстровано в Міністерстві юстиції України 10 серпня 2004 р. За № 1000/9599 // Офіційний вісник України, 2004. — 03.09.2004. — № 33. — Ст. 2226. — С. 89.

6. Постанова Кабінету Міністрів України від 22.08.2000 р. № 1306 «Про затвердження Порядку видачі та зразка свідоцтва про загальнообов'язкове державне соціальне страхування» // Офіційний вісник України від 08.09.2000. — 2000. — № 34. — С. 50. — Ст. 1452.

Статтю подано до редакції 09.04.10 р.

УДК 517.9

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана», Україна,
М. Ружечкова, канд. фіз.-мат. наук, проф.,
Жілінський університет, Словаччина

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПОБУДОВА МОДЕЛІ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СІТУАЦІЇ З БЕЗРОБІТТЯМ

АНОТАЦІЯ. В роботі розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського випадкового процесу, при умові, що одночасно зі стрибками напівмарковського випадкового процесу відбуваються випадкові перетворення розв'язків. Для *розв'язків таких систем виведено моментні рівняння першого й другого порядку. Ці рівняння застосовано для дослідження модельних задач, зокрема модельної задачі, що пов'язана з ситуацією із безробіттям у державі.*

ANNOTATION. In article considering the system of linear differential equations with coefficients that depending from Semi-Markov random process as conditions that simultaneous with jump of semi Markov process occurred random transformation of solutions. For solutions that systems received Moments equations first and second order. That equations using for investigating model problem, in particular, research problem unemployment in country.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Моментні рівняння, стійкість розв'язків, напівмарківські процеси, стабільність життя.

Вступ. Розвиток сучасного виробництва та збільшення його ефективності засновано на стрімкому покращенні якості автоматизованих систем, які застосовуються для керування різними процесами. Автоматизація складних процесів приводить до необхідності використання систем з випадковою структурою. Структура та конструкція таких систем різноманітні. Основною загальною їх особливістю є зміна параметрів або структури в цілому за випадковим законом; деякі із систем, що розглядаються, мають детерміновані структури, але включення різних структур відбувається в випадкові моменти часу і залежить від випадкового керування та випадкових зовнішніх керованих сигналів. Більш складні і удосконалені системи будуються на базі довільної стохастичної структури зі спеціальною логікою її зміни за адаптивними алгоритмами. Це клас найбільш складних кібернетичних систем, які мають випадкову структуру [6—9,13—16, 20]. Їх розгляд приводить до необхідності застосування теоретико-ймовірносного підходу при розгляду їх динаміки. Задачі теоретико-ймовірностного аналізу та синтезу таких систем у сучасний період є актуальними і недостатньо вивченими. В даній роботі дослідження цих моделей пов'язано з розглядом практично важливих класів звичайних диференціальних та різницевих рівнянь, коефіцієнтами яких є випадкові функції від часу. Під час застосування реальних процесів основна увага приділяється стійкості і керованості цих моделей, які розуміються в різних сенсах..

Теоретичні засади дослідження стійкості для систем диференціальних рівнянь з випадковими процесами були започатковані А. М. Колмогоровим 1938 року [19].

Надалі підходи А. М. Колмогорова розвинули у своїх працях, багато вчених [1, 9—12, 17—20]. Праці більшості дослідників спираються або на вивчення рівняння типу рівнянь Фокера—Планка—Колмогорова та ймовірнісні властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, або на аналіз моментних рівнянь з наступним застосуванням методів А. М. Ляпунова. Автори пропонують підхід заснований на побудові моментних рівнянням з подальшим дослідженням стійкості розв'язків отриманих детермінованих рівнянь рівняння для стохастичного оператора

Постановка задачі. На ймовірносному базисі $(\Omega, \Im, \mathsf{P}, \mathsf{F})$ розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t, \xi(t))X(t), \qquad (1)$$

з початковою умовою $X(0) = X_0.$, де $\xi(t)$ — напівмарковський випадковий процес, якій набуває скінченої кількості станів $\theta_1, ..., \theta_n$, визначається матрицею інтенсивностей.

$$Q(t) = [q_{sk}(t) : s, k = 1, 2, \dots, n \ ] : q_{sk}(t) \geq 0;$$
$$\int_0^\infty q_k(t)dt = 1;\ q_k(t) \equiv \sum_{s=1}^n q_{sk}(t)\ . \qquad (2)$$

Система рівнянь (1) визначає n детермінованих систем рівнянь

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = A_k(t)X_k(t) \ \ (k = 1,\ ...,\ n), \qquad 3$$

які при $t \geq 0$ мають розв'язки $X_k(t) = N_k(t)X_k(0) \ \ (k = 1,\ ...,\ n)$.

Припустимо, що $N_k(t) \ \ (k = 1,\ ...,\ n)$ — фундаментальні матриці розв'язків системи (3), тобто $X_k(t) = N_k(t)X_k(0),\ \ N_k(0) = E$ відомі. Нехай при $t_j \leq t < t_{j+1}$ виконується рівність $\xi(t) = \theta_1$. Припустимо, що якщо виконано умови $t_{j-1} \leq t < t_j,\ \ \xi(t) = \theta_1;\ t_j \leq t < t_{j+1},$ $\xi(t) = \theta_r,$ то в момент t_j розв'язок $X(t)$ системи (1) зазнає випадкового перетворення виду

$$X(t_j + 0) = \Phi_{r1}(X(t_j - 0),\ \ \eta_{rl}) \ \ (r,\ l = 1,\ ...,\ n). \qquad (4)$$

Позначимо через $f(t,\ x,\ \xi)$ щільність імовірностей векторного випадкового процесу $(X(t),\ \xi(t))$. Оскільки $\xi(t)$ набирає лише дискретних значень $\theta_1, ..., \theta_n$, то маємо аналітичний вираз для щільності

$$f(t, x, \xi) = \sum_{s=1}^{n} f_s(t, x)\delta(\xi - \theta_s),$$

де $\delta(\xi)$ — дельта-функція Дірака. Введемо вектор частинних щільностей імовірностей $F(t, x) = (f_1(t, x) \ ... \ f_n(t, x))^*$.

Випадковий процес $(X(t), \xi(t))$ є напівмарковським і, таким чином, існує оператор $L(t)$, такий що $F(t_j + t, X) = L(t)F(t_j, X)$ $(t \geq 0, \ j = 0, 1, 2, ...)$., де

$$L(t) = \begin{pmatrix} L_{11}(t) & L_{12}(t) & ... & L_{1n}(t) \\ L_{21}(t) & L_{22}(t) & ... & L_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1}(t) & L_{n2}(t) & .... & L_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Введемо стохастичні оператори S_{rl} $(r, l = 1, ..., n)$, які відповідають випадковим перетворенням (4). Вважатимемо, що оператори S_{rl} $(r, l = 1, ..., n)$ мають явний вираз

$$S_{rl} f(\mathrm{y}) \equiv \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,\ l,\ s} f\left(\psi_{r,\ l,\ s}(y)\right) \left| \det \frac{D\Psi_{r,\ l,\ s}(y)}{Dy} \right|.$$

Аналогічно вводимо стохастичні оператори $R_k(t)$, які визначають зсув на час t впродовж розв'язків системи рівнянь (3):

$$R_k(t) f(x) \equiv f\left(N_k^{-1}(t)x\right) \det N_k^{-1}(t) \quad (k = 1, ..., n).$$

Виведемо систему рівнянь, яка визначає оператор $L(t)$. Вважаємо, що в момент $t = 0$ відбувається стрибок випадкового процесу $\xi(t)$. При цьому отримаємо системи рівнянь

$$f_k(t, x) = \psi_k(t) R_k(t) f_k(0, x) + \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{sk}(\tau) L_{ks}(t - \tau) S_{sk} R_k(\tau) f_k(0, x) d\tau;$$

$$f_l(t, x) = \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{sk}(\tau) L_{ls}(t - \tau) S_{sk} R_k(\tau) f_k(0, x) d\tau \quad (k, l = 1, ..., n). \qquad (5)$$

Скориставшись нерівностями

$$f_k(t,\ x)=L_{kk}(t)f_k(0,\ x),\quad f_1(t,\ x)=L_{lk}(t)f_k(0,\ x)\quad (k,\ l=1,\ \ldots,\ n),$$

подамо систему рівнянь (5) у вигляді:

$$L_{lk}(t)f_k(0,\ x)=\sigma_{lk}\psi(t)R_k(t)f_k(0,\ x)+$$
$$+\int_0^t\sum_{s=1}^n L_{ls}(t-\tau)q_{sk}(\tau)S_{sk}R_k(\tau)f_k(0,\ x)d\tau\quad (l,\ k=1,\ \ldots,\ n).$$

Звідси знаходимо систему операторних рівнянь

$$L_{lk}(t)=\delta_{lk}\psi_k(t)R_k(t)+\int_0^t\sum_{s=1}^n L_{ls}(t-\tau)q_{sk}(\tau)S_{sk}R_k(\tau)d\tau\quad (l,\ k=1,\ \ldots,\ n),$$

яку записуємо в матричній формі

$$L(t)=\psi(t)R(t)+\int_0^t L(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau, \tag{6}$$

де $R(t)=\|\ \delta_{lk}R_k(t)\|_1^n$;

$$S(t)=\begin{pmatrix} q_{11}(t)S_{11} & q_{12}(t)S_{12} & \ldots & q_{1n}(t)S_{1n} \\ q_{21}(t)S_{21} & q_{22}(t)S_{22} & \ldots & q_{2n}(t)S_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ q_{n1}(t)S_{n1} & q_{n2}(t)S_{n2} & \ldots & q_{nn}(t)S_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отже, розв’язок системи (5) можна подати у вигляді:

$$L(t)=\psi(t)R(t)+\int_0^t \psi(\tau)R(\tau)U(t-\tau)d\tau,$$

де оператор $U(t)$ є розв’язком інтегрального рівняння

$$U(t)=S(t)R(t)+\int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)U(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Моментні рівняння для випадкового розв'язку системи (1). Використовуючи рівняння (6) і (7) можна отримати моментні рівняння для випадкового розв'язку (1). Вважатимемо, що оператори S_{rl} відповідають лінійним однорідним випадковим перетворенням:

$$S_{rl} f(Y) \equiv \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,\,l,\,s} f\left(A_{r,\,l,\,s}^{-1}\right) \left|\det A_{r,\,l,\,s}^{-1}\right| \quad (r,\ l = 1,\ ...,\ n). \tag{8}$$

Система рівнянь

$$\begin{aligned} L(t)F(0,\ x) &= \psi(t)R(t)F(0,\ x) + \int_0^t \psi(\tau)R(\tau)U(t-\tau)F(0,\ x)d\tau; \\ U(t)F(0,\ x) &= S(t)R(t)F(0,\ x) + \int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)U(\tau)F(0,\ x)d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

помножується на вектор X і інтегрується по всьому простору E_m. Позначаючи

$$F(t,\ x) = L(t)F(0 < x), \quad H(t,\ x) = U(t)F(0,\ x)$$

і

$$M_k(t) = \int_{E_m} x f_k(t,\ x)dx, \quad V_k(t) = \int_{E_m} x h_k(t,\ x)dx \quad (k = 1,\ ...,\ n),$$

де $F(t,\ x) = (f_1(t,\ x)\ \ldots\ f_n(t,\ x))$, $H(t,\ x) = (h_1(t,\ x)\ \ldots\ h_n(t,\ x))$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} M_k(t) &= \psi_k(t)N_k(t)M_k(0) + \int_0^t \psi_k(t-\psi)N_k(t-\tau)V_k(\tau)d\tau; \\ V_k(t) &= \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t)C_{ks}N_s(t)M_s(0) + \\ &+ \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau)C_{ks}N_s(t-\tau)V_s(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (k = 1,\ ...,\ n); \tag{10}$$

$$C_{ks} \equiv \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,\ s,\ l} A_{k,\ s,\ l} \quad (k,\ s = 1,\ ...,\ n).$$

Визначивши $M_k(t)$, знайдемо $M(t) \equiv \langle X(t) \rangle = \sum_{k=1}^{n} M_k(t)$.

Аналогічно для матриці моментів другого порядку знаходимо вираз

$$D(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k(t), \quad D(t) = \left\langle X(t) X^*(t) \right\rangle.$$

Вводимо позначення

$$D_k(t) = \int_{E_m} x x^* f_k(t,\ x) dx,$$
$$W_k(t) = \int_{E_m} x x^* h_k(t,\ x) dx \quad (k = 1,\ ...,\ n). \tag{11}$$

Помножуючи рівняння (10) на матрицю xx^* й інтегруючи за X, отримуємо систему матричних інтегральних рівнянь:

$$D_k(t) = \psi(t) N_k(t) D_k(0) N_k^*(t) +$$
$$+ \int_0^t \psi_k(t-\tau) N_k(t-\tau) W_k(\tau) N_k^*(t-\tau) d\tau \quad (k = 1,\ ...,\ n);$$
$$W_k(t) = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,\ s,\ l} A_{k,\ s,\ l} N_s(t) D_s(0) N_s^*(t) A_{k,\ s,\ l}^* +$$
$$+ \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,\ s,\ l} A_{k,\ s,\ l} N_s(t-\tau) W_s(\tau) N_s^*(t-\tau) A_{k,\ s,\ s}^* d\tau \tag{12}$$
$$(k = 1,\ ...,\ n).$$

За означенням, умова асимптотичної стійкості нульового розв’язку системи рівнянь (1) у середньому квадратичному, має вигляд:

$$\lim_{t \to +\infty} D(t) = \lim_{t \to +\infty} \left\langle X(t) X^*(t) \right\rangle = 0. \tag{13}$$

Ситуація ускладнюється тим, що розв'язки системи рівнянь (1) зазнають випадкових перетворень, а отже, її розв'язки розривні.

Дослідження стійкості розв'язків лінійного диференціального рівняння з випадковим перетворенням розв'язків

На ймовірносному просторі (Ω, F, P) розглянемо лінійне диференціальне рівняння з випадковими параметрами

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \tag{14}$$

де $\xi(t)$ — випадковий напівмарковський процес, що набуває n станів $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ з інтенсивностями

$$q_{jj}(t) \equiv 0, \quad q_{js}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_{js}} & \text{при } 0 \le t < T_{js}, \\ 0 & \text{при } t \ge T_{js} \end{cases} \tag{15}$$
$$(j, \ s = 1, \ ..., \ n).$$

Нехай випадкова величина $\alpha(\xi(t))$ набуває значення $\alpha(\xi(t)) = \alpha_k$ при $\xi(t) = \theta_k$ $(k = 1, \ ..., \ n)$.

Припускаємо, що в моменти стрибків t_j розв'язки (14) зазнають випадкових перетворень

$$x(t_j + 0) = p_1 x(t_j - 0), \quad p_1 \neq 0 \quad (l = 1, \ ..., \ N) \tag{16}$$

з імовірностями p_l $(l = 1, \ ..., \ N)$.

Використовуючи рівняння (6) і (7) можна вивести моментні рівняння для випадкового розв'язку (1). Вважатимемо, що оператори S_{rl} (4) відповідають лінійним однорідним випадковим перетворенням

$$S_{rl} f(y) \equiv \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,\ l,\ s} f\left(A^{-1}_{r,\ l,\ s}\right) \left|\det A^{-1}_{r,\ l,\ s}\right| \quad (r, \ l = 1, \ ..., \ n),$$

і вводимо стохастичні оператори S_{rl} $(r, \ l = 1, ..., \ n)$, які відповідають перетворенням

$$S_{sl}f(y)=\begin{cases} f(y), & r=l, \\ \sum_{s=1}^{N}\frac{p_s}{p_s}f\left(\frac{y}{p_s}\right), & r\neq 1. \end{cases}$$

Введемо рівняння для моментів другого порядку розв'язків лінійного диференціального рівняння (14). Попередньо за формулою (10) обчислимо C_{ks} $(k,\ s=1,\ ...,\ N)$:

$$C_{ks}=\begin{cases} 1, & k=s, \\ \sum_{l=1}^{N}p_1p_1, & k\neq s. \end{cases}$$

Визначимо функції W_{ks} $(k,\ s=1,\ ...,\ n)$, що входять у систему рівнянь (12). Рівняння (12) запишуться у вигляді:

$$W_k(t)=M_2\left[\sum_{\substack{s=1\\ k\neq s}}^{n}q_{ks}(t)e^{2a_s t}ds(0)+\int_0^t\sum_{s=1}^{n}q_{ks}(t-\tau)e^{2a_s(t-\tau)}W_s(\tau)d\tau\right]; \quad (17)$$

$$(k=1,\ ...,\ n),\ \ M_2\equiv\sum_{l=1}^{N}\rho_1^2p_1=\left\langle\rho^2\right\rangle.$$

Тут M_2 — математичне сподівання квадрата коефіцієнта ρ при випадкових перетвореннях; $d_k(0)$ $(k=1,\ ...,\ n)$ — моменти другого порядку в момент часу $t=0$; $N_k(t)=e^{\alpha_k t}$ — розв'язок рівняння (14); $W_k(t)$ — моменти другого порядку, що визначаються за формулою (10).

Розв'язуватимемо систему моментних рівнянь (17), використовуючи перетворення Лапласа. Позначимо

$$f_k(p)\equiv\int_0^{\infty}W_k(t)e^{-pt}dt\ \ (k=1,\ ...,\ n).$$

Помножимо систему рівнянь (17) на e^{-pt} і інтегруємо від 0 до ∞. Дістанемо систему рівнянь для зображень $f_k(p)$:

$$f_k(p) = M_2 \left[\int\limits_0^\infty \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n q_{ks} e^{2a_s t} e^{-pt} ds(0) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n q_{ks}(t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} e^{-pt} W_s(\tau) d\tau\, d\tau \right] \quad (k = 1,\ \dots,\ n). \tag{18}$$

Оскільки справджується рівність

$$\int\limits_0^\infty q_{ks} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT_{ks}}}{T_{ks} p} \quad (k,\ \ s = 1,\ \dots,\ n;\quad k \neq s),$$

то з урахуванням властивості запізнення [4] дістанемо:

$$\int\limits_0^\infty q_{ks} e^{2a_s t} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p - 2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)} \quad (k,\ \ s = 1,\ \dots,\ n;\quad k \neq s).$$

Згідно з властивістю згортки [4] обчислимо

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^t q_{ks}(t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} e^{-pt} W_s(\tau) d\tau\, dt = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p - 2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)}.$$

Систему рівнянь (18) можна записати у вигляді:

$$f_k(p) = M_2 \left[\sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p - 2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n f_s(p) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p - 2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)} \right] \quad (k = 1,\ \dots,\ n) \tag{19}$$

або

$$f_k(p) = M_2\left(b_k(p) + \sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n} a_{ks} f_s(p) \right) \quad (k = 1, \ ..., \ n),$$

де

$$b_k(p) \equiv \sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n} d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p - 2a_s)};$$

$$a_{ks}(p) \equiv \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T(p - 2a_s)} \quad (k, \ s = 1, \ ..., \ n; \ \ k \neq s).$$

Розв'яжемо систему рівнянь (19) за теоремою Крамера. Особливі точки розв'язку будуть визначатися коренями рівняння

$$\det \left\| 1 - M_2 a_{ks}(p, \ T_{ks}) \right\|_{k, \ s}^{n} = 0, \quad M_2 a_{kk}(p, \ T_{ks}) \equiv -1. \tag{20}$$

Нулі рівняння (20) є характеристичними показниками розв'язків системи інтегральних рівнянь (17). Якщо всі корені рівняння (20) мають від'ємні дійсні частини, то розв'язки рівнянь (19) асимптотичне стійкі. Якщо хоча б один із коренів рівняння (20) має додатну дійсну частину, то розв'язки системи рівнянь (19) нестійкі.

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (20) чисельними методами, визначимо характер залежності між параметрами p і T_{ks}.

Модельна задача. Розглянемо частинний випадок, коли випадковий напівмарковський процес набуває двох станів θ_1, θ_2 з інтенсивностями

$$q_{11}(t) = q_{22}(t) \equiv 0,$$

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{при } 0 \leq t < T; \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Нехай у моменти стрибків t_j розв'язки рівняння (14) зазнають випадкових перетворень

$$x(t_j+0)=\rho_1 x(t_j-0),\ \ \rho_1\neq 0\ \ (l=1,\ ...,\ N) \tag{21}$$

з імовірностями p_1 $(l=1,\ ...,\ N)$. Зазначимо, що справджуються рівності

$$S_{rl}f(y)\equiv S_{ji}f(y),\ \ C_{rl}=C_{ji}\ \ (r\neq l,\ \ j\neq i).$$

Тоді рівняння (20) набирає вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -M_2\dfrac{1-e^{-T(p-2a_2)}}{T(p-2a_2)} \\ -M_2\dfrac{1-e^{-T(p-2a_1)}}{T(p-2a_1)} & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{22}$$

При $p=0$ розв'язок системи (22) знаходять на межі області нестійкості на площині параметрів $a_1,\ a_2$. Розкривши визначник (22), дістанемо рівняння

$$\left(\frac{1}{M_2}\right)^2=\frac{1-e^Y}{Y}\frac{1-e^X}{X},\ \ X\equiv 2Ta_1,\ \ Y\equiv 2Ta_2. \tag{23}$$

Позначимо через

$$\alpha=\left(\frac{1}{M_2}\right)^2\frac{Y}{1-e^Y}=\mathrm{const},$$

тоді рівняння (23) набере вигляду:

$$\alpha X+e^X-1=0.$$

Побудовано межі області нестійкості розв'язків рівняння (23) на площині параметрів $a_1,\ a_2$ при різних значеннях коефіцієнта M_2 $(M_2=0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0;\ 1{,}2;\ 1{,}4)$ (рис. 1).

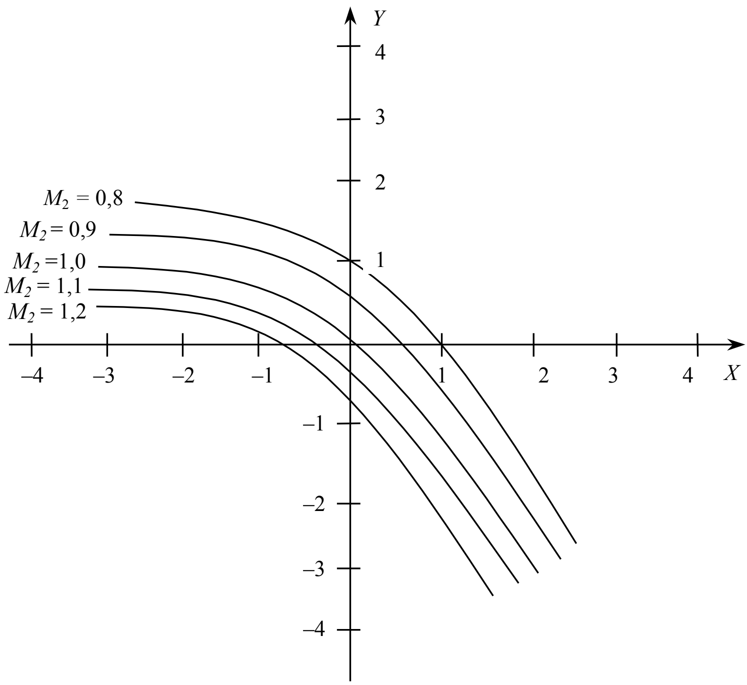

Рис. 1. Межі області нестійкості розв'язків рівняння (14) при різних значеннях коефіцієнта M_2

Модельна задача. Досліджується стійкість у середньому квадратичному розв'язку рівняння (14) зі стрибками, що відбуваються у випадкові моменти часу з випадковим розміром стрибка. Припускається, що час між стрибками розподіляється за експоненціальним законом, а розмір стрибка розподілений за степеневим законом**.** Здобуто в явному вигляді умови стійкості випадкового розв'язку [2; 12; 19]. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t) \tag{24}$$

з випадковим коефіцієнтом $a(\xi(t))$, що залежить від марковського процесу $\xi(t)$, який набуває двох різних значень θ_1, θ_2 з імовірностями

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\} \quad (k = 1,\ 2).$$

Припустимо, що ймовірності $p_k(t)$ $(k=1,\ 2)$ задовольняють систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + v p_2(t),$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - v p_2(t), \qquad (25)$$

де $\lambda > 0$, $v > 0$. Візьмемо $a(\theta_k) = a_k$ $(k=1,\ 2)$ і знайдемо в явній формі моментні рівняння для моментів другого порядку $m_k^{(2)}(t)$. З [12] маємо рівняння:

$$\frac{dm_1^{(2)}(t)}{dt} = 2a_1 m_1^{(2)}(t) - \lambda m_1^{(2)} + v m_2^{(2)}(t),$$
$$\frac{dm_2^{(2)}(t)}{dt} = 2a_2 m_2^{(2)}(t) + \lambda m_1^{(2)}(t) - v m_2^{(2)}(t).$$

Складемо характеристичне рівняння системи (25)

$$\begin{vmatrix} p - 2a_1 + \lambda & -v \\ -\lambda & p - 2a_2 + v \end{vmatrix} = 0. \qquad (26)$$

Розв'язки системи (25) будуть асимптотично стійкими, якщо виконуються умови Гурвіца [18]

$$\lambda + v - 2a_1 - 2a_2 > 0;$$
$$2a_1 a_2 - \lambda a_2 - v a_1 > 0.$$

Тепер візьмемо в рівнянні (26) $a_1 = a$, $a_2 = \dfrac{v}{\gamma}$ $(\gamma > 0)$ і виконаємо граничний перехід при $v \to +\infty$. При цьому дістанемо рівняння зі сталим коефіцієнтом

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \qquad (27)$$

яке має стрибки розв'язку у випадкові моменти часу t_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$,

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots .$$

При цьому часові інтервали між стрибками: $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ $(k = 1,\ 2,\ ...)$ розподілені за експоненціальним законом

$$f_1(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}. \qquad (28)$$

Знайдемо закон розподілу випадкового розміру стрибка в моменти t_k. Нехай:

$$x(t_k + 0) = b_k x(t_k - 0) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$$

і знайдемо закон розподілу величини b_k. При скінченому значенні $\nu > 0$ час τ перебування $\xi(t)$ у стані θ_2 розподіляється за законом

$$f_2(\tau) = \nu e^{-\nu\tau}.$$

У цьому разі (27) набирає вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\nu}{\gamma} x(t), \quad T \le t \le T + \tau \qquad (29)$$

і виконується нерівність

$$x(T+\tau) = \exp\left\{\frac{\nu\tau}{\gamma}\right\} x(T).$$

Знайдемо математичне сподівання при $\gamma > 1$

$$\langle b_k \rangle = \lim_{\nu\to+\infty} \int_0^\infty e^{\nu\tau\gamma^{-1}} \nu e^{-\nu\tau} d\tau = \frac{\gamma}{\gamma - 1} > 1 \qquad (30)$$

і закон розподілу величини b. Знайдемо при $y \ge 1$ імовірність події [12]

$$P\left\{e^{\nu\tau\gamma^{-1}} < y\right\} = P\left\{\nu\tau\gamma^{-1} < \ln y\right\} = \int\limits_0^{\nu^{-1}\gamma\ln y} \nu e^{-\nu t} dt = 1 - y^{-\gamma}.$$

Закон розподілу не залежить від ν, а отже, справджується рівність:

$$P\{b < y\} = 1 - y^{-\gamma} \quad (y \geq 1),$$

а щільність імовірності стрибка розміром $b = y$ визначається функцією

$$f_3(y) = \gamma y^{-\gamma - 1} \quad (y \geq 1).$$

Умова стійкості (30) розв'язків рівняння (29) з випадковими стрибками при $\nu \to +\infty$ набирає вигляду

$$\gamma > 2; \quad a < -\frac{-\lambda}{\gamma - 2}.$$

Припустимо тепер у рівнянні (29) $a_1 = a$, $a_2 = \dfrac{\nu}{\gamma}$ $(\gamma > 0)$ і виконаємо граничний перехід при $\nu \to +\infty$. При $\xi(t) = \theta_2$ рівняння (29) набирає вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\nu}{\gamma} x(t), \quad T \leq t < T + \tau. \tag{31}$$

.

Знайдемо математичне сподівання

$$\langle b_k \rangle = \lim_{\nu \to +\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{-\nu\gamma^{-1}\tau} \nu e^{-\nu\tau} d\tau = \frac{\gamma}{\gamma + 1} < 1,$$

а далі при $0 < y \leq 1$ — імовірність події

$$P\left\{e^{-\nu\tau\gamma^{-1}} < y\right\} = P\left\{-\nu\tau\gamma^{-1} < \ln y\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\gamma\nu^{-1}\ln Y}^{\infty} \nu e^{-\nu\tau} dt = y^{\gamma} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Таким чином, щільність імовірності стрибка розміром $b = y$ визначається функцією

$$f_4(y) = \gamma y^{\gamma-1}, \quad 0 < y \le 1.$$

Умови стійкості (30) розв'язків рівняння (31) з випадковими стрибками при $v \to +\infty$ набирають вигляду нерівностей:

$$2 + \gamma > 0; \quad a < \frac{\lambda}{2+\gamma}.$$

$$(s = 1, \ \ldots, \ n).$$

Модель стабільності соціального життя держави. Розглянемо просту модель ситуації з безробіттям у державі, яка описується простим диференціальним рівнянням:

$$x_{n+1} = a_n(\xi_n)x_n, \qquad x_n > 0, \tag{32}$$

де значення x_n описує стан безробіття у будь-якої державі, Марковський процес ξ_n приймає два стани $\xi_n = a > 1, \xi_n = b < 1.$ З імовірністю $p_1(n) = P\{\xi_n = a\}$, $p_2(n) = P\{\xi_n = b\}$, яка задовольняє рівняння

$$p_1(n+1) = (1-\lambda)p_1(n) + vp_2(n), \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$p_2(n+1) = \lambda p_2(n) + (1-v)p_2(n) \ \ 0 < v < 1.$$

Якщо $\xi_n = b < 1 \ \ (b > 0)$, тоді із рівняння (32) випливає, що безробіття зростає бо $x_{n+1} > x_n$.

Якщо $\xi_n = b < 1 \ \ (b > 0)$, тоді безробіття у державі зменшується.

Ми припускаємо що міри уряду по боротьбі з безробіттям ефективні, тоді $\xi_n = a > 1.$ Якщо міри уряду по боротьбі з безробіттям неефективні, тоді $\xi_n = b < 1.$ Іншими словами, ефективний уряд з імовірністю effective government with probability $(1-\lambda)$ залишається ефективним, та з імовірністю v стає не ефективним. Не ефективний уряд з імовірністю $(1-v)$ стає ефективним і з імовірністю $m(n) =< x_n >$ залишається неефективним.

Математичне сподівання $m(n) = < x_n >$ задовольняє наступні різницеві моментні рівняння:

$$m_1(n+1) = (1-\lambda)am_1(n) + vbm_2(n),$$
$$m_2(n+1) = \lambda am_1(n) + (1-v)bm_2(n).$$

.

Для того щоб математичне сподівання $m(n) = m_1(n) + m_2(n)$ збільшувалось, необхідно і достатньо щоб максимальне власне число матриці:

$$A = \begin{pmatrix} (1-\lambda)a & vb \\ \lambda a & (1-v)b \end{pmatrix}$$

було більше 1.

Розв'язки рівняння

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z-(1-\lambda)a & -vb \\ -\lambda a & z-(1-v)b \end{vmatrix} = 0$$

описують рівняння межі, яка поділяє ефективне керування від неефективного:

$$\Delta(1) = (1-a+\lambda a)(1-b+vb) - \lambda vab = 0 .$$

Для зменшення безробіття у державі повинна бути достатньо малою ймовірність переходу

$$\lambda < \frac{a-1}{a}\left(1 + v\frac{b}{1-b}\right)$$

від ефективного керування до неефективного або повинна бути достатньо великою ймовірність переходу

$$v > \frac{1-b}{b}\left(\frac{\lambda a}{a-1} - 1\right)$$

від неефективного керування до ефективного.

Наприклад, якщо $a = 1{,}2; b = 0{,}8,$ тоді ми матимемо нерівність:

$$\lambda \le \frac{1}{6}(1+4v), \ v \ge \frac{1}{4}(6\lambda - 1).$$

Якщо ця нерівність не виконується, то безробіття зменшується.

Висновки. У роботі отримано моментні рівняння для розв'язків систем лінійних диференціальних, коефіцієнти яких залежать від напівмарковських процесів, і стрибками розв'язків, що відбуваються одночасно зі стрибками випадкового процесу. Обґрунтовано дослідження L_2 – стійкості нульового розв'язку лінійних систем диференціальних та різницевих рівнянь через знаходження відповідних момент них рівнянь. Отримано необхідні та достатні умови L_2 – стійкості та стійкості у середньому квадратичному розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від напівмарківського випадкового процесу та випадковими перетвореннями розв'язків, які відбуваються одночасно зі стрибками напівмарковського випадкового процесу. У випадку, коли випадкові перетворення є лінійними, отримано моментні рівняння першого та другого порядку. Досліджено стійкість у середньому квадратичному розв'язку зі стрибками, що відбуваються у випадкові моменти часу з випадковою величиною стрибка, де припущено, що час між стрибками розподіляється за експоненціальним законом, а величина стрибка розподілена за степеневим законом. Отримано в явному вигляді умови стійкості випадкового розв'язку. Отримало подальший розвиток застосування результатів, щодо розв'язання модельних задач різної природи: економічної, соціологічної, технічної і т. п. Зокрема, досліджено модель щодо керування урядом ситуації з безробіттям на базі марковський та напівмарковський моделі**.**

Робота виконана в межах національної програми для підтримки мобільності студентів, аспірантів, викладачів університету, науковців, затвердженої урядом республіки Словаччина, резолюція № 557, 13.07.05

Література

1. *Валеев К. Г.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами: Монография / К. Г. Валеев, О. Л. Карелова, В. И. Горелов. — М.: Изд-во РУДН, 1996. — 258 с.

2. *Валеев К. Г.* Метод моментных уравнений / К. Г. Валеев, О. Л. Стрижак. — К., 1985. — 56 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т электродинамики; 467).

4. *Валєєв К. Г.* Операційне числення та його застосування / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. — К. : КНЕУ, 2003. — 295 с.

5. *Валєєв К. Г.* Оптимізація випадкових процесів / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. —К. : КНЕУ, 2006. — 310 с.

6. *Ватанабе Ш*. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ш. Ватанабе, Н. Кеда. — М. : Мир, 1984. — 445 с.

7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М.: Наука, 1964. —576 с.
8. *Винер Н*. Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. — М.: ИЛ, 1960. — 160 с.
9. *Вольтер Я.* Стохастические модели в экономике / Я. Вольтер. — М.: Статистика, 1967. — 320 с.
10. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 612 с.
11. *Гихман И. И.* Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 567 с.
12. *Джалладова І. А*. Оптимізація стохастичних систем / И. А. Джалладова.— К.: КНЕУ, 2005. — 284 с.
13. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы / Дж. Дуб. — М. : Изд-во иностр. лит. 1956. — 605 с.
14. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М.: Физматгиз, 1963. — 659 с.
15. *Ито К.* Вероятностные процессы / К. Ито. — М.: ИЛ, 1960. — 133 с.
16. *Ито К.* О стохастических дифференциальных уравнениях / К. Ито // Математика: сб. переводов. — 1957. —Т. 1. — № 1. — С. 78—116.
17. *Казаков И. Е.* Оптимизация динамических систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев. — М. : Наука, 1980. — 382 с.
18. *Квакернаак Х.* Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
19. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: [Сб. статей]/ А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1986. — 535 с.
20. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем / В. С. Королюк. — К.: Наук. думка, 1989. — 210 с.

Статтю подано до редакції 29.04.10 р.

УДК 303.732.4

О. І. Бабинюк, асистент кафедри вищої математики ФІСІТ, ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЇ І ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ЧУТЛИВАОСТІ

АНОТАЦІЯ. Досліджено модель популяції за допомогою традиційних методів, за допомогою функції чутливості першого порядку. А також запропоновано метод дослідження за допомогою функції чутливості другого порядку, проведено порівняння точності оцінок за традиційними методами та новими.