

12. Вітлінський В. В. Адаптивні економіко-математичні моделі / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда // Тези доповідей: Х наук.-метод. конф. «Проблеми економічної кібернетики» з нагоди 40-ї річниці «Економічної кібернетики» в Україні, (Київ 15—17 вересня, 2005 р.) / Укр. асоціація екон. кібернетики. — Донецьк: Апекс, 2005. — С. 105—107.

13. Новиков М. Д. Об одной нелинейной модели со сложной динамикой / М. Д. Новиков, Б. М. Павлов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн. — 2000. — № 2. — С. 3—7.

14. Захарченко В. П. Модели экономики курортно-рекреационных систем: Монография / Науч. ред. проф. А. И. Черняк. — Бердянск: Издатель Ткачук А. В., 2010. — 392 с.

Стаття надійшла до редакції 05.05.2011 р.

УДК 519.7

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

НА ШЛЯХУ ДО КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

АНОТАЦІЯ. Наведено результати дослідження нового напрямку сучасної науки — комп'ютерної математики — з точки зору історичних, філософських, психологічних, методологічних та інших аспектів. Узагальнено різні підходи до побудови комп'ютерної математики, її місце в системі математичних дисциплін і місце в ній математичного моделювання, інформаційних технологій, системного аналізу, експертних систем, методів індуктивного висновку, теорії та методів оптимізації.

ANNOTATION. The results of the study the new trend of modern science — computer mathematics — in terms of historical, philosophical, psychological, methodological and other aspects. Generalized different approaches to building computer mathematics and its place in mathematics and place it in mathematical modeling, information technology, systems analysis, expert systems, and methods of inductive conclusion, theory and optimization methods.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Комп'ютерна математика, інформаційні технології, системний аналіз, експертні системи, методи індуктивного висновку, теорія та методи оптимізації, САЕ-програми, кібернетика, «комп'ютерний розум».

Вступ

Комп'ютерна математика — новий науковий і прикладний напрям, який виник на перетині математики і інформати-

© І. А. Джалладова, 2011

ки. Основним змістом комп'ютерної математики з одного боку є вивчення основ інтерфейсу, теорії і застосування ряду новітніх масових систем *Excel*, *Derive*, *MuPad*, *MathCAD*, *Mathematica*, *Maple V* і *MATLAB*, а з іншого — ця назва об'єднує кілька сучасних самостійних наукових напрямів: *математичне моделювання, інформаційні технології, системний аналіз, експертні системи, методи індуктивного висновку, теорія та методи оптимізації*. Вивчення комп'ютерної математики полегшує оптимальний вибір систем і їх інтеграцію з метою ефективного розв'язання різних задач. У комп'ютерній математиці відображено особливості інтерфейсу систем користувача, техніка підготовки висококласних електронних документів, математичні і графічні можливості систем візуалізації всіх етапів обчислень, оператори і функції систем і їх можливості в Internet.

Комп'ютерна математика — це світ так званих САЕ-програм (САЕ — Computer Audio Engineer), маленькою, але не другорядною частиною якого є пакети математичного моделювання. Деякі задачі взагалі не можливо розв'язати без комп'ютера. До того ж, як правило, САЕ-системи охоплюють усі розділи математики.

Що ж може комп'ютерна математика? Давно пройшли часи, коли користувач сам писав програми на алгоритмічних мовах «високого рівня», відловлював помилки, витрачаючи багато часу. Зараз у математичних пакетах користувач для розв'язання задач використовує принципи конструювання моделі, а не традиційне «мистецтво програмування». Користувач ставить задачу, а методи і алгоритми розв'язування знаходить сама система. Патріархом МП можна назвати *Derive*. Це була DOS-програма з набором функцій, яка реалізує числові методи і побудови графіків. Зробити що-небудь істотне в цьому пакеті не було можливості. Існували й інші програми, але всі їх можна було реалізовувати за допомогою числових методів. Може виникнути питання: чи може комп'ютер розв'язувати задачу, якщо це не числовий метод? Виявляється може!

На зміну числовим методам прийшли символічні методи — найточніші алгоритми обчислень, тому що розв'язування задач відбувається в аналітичному вигляді. **Це приголомшливо! Вводиться в комп'ютер диференціальне рівняння і наказується комп'ютеру кліканням кнопки розв'язати його, — і комп'ютер це робить! Через лічені секунди маємо розв'язок в аналітичному вигляді**

І все ж таки: з чого все починалось?

1. КІБЕРНЕТИКА

Все починалось с того, що зараз стало знайомим кожному школяру: *кібернетики*. У далекій давнині термін «кібернетика» використовувався Платоном у сенсі «дослідження самокерування» в «Законах» для позначення керування людьми. Слово «cybernetique» використовувалось практично у сучасному значенні з 1830 року французьким фізиком і систематизатором наук Андре Ампером, для позначення науки керування в його системі класифікації людського знання: «...тільки після всіх наук, які займаються різними об'єктами, треба поставити ту, про яку зараз йде мова і яку я називаю *кібернетикою*, від давньогрецького слова *κῠβερνητική* і це слово, яке спочатку застосовувалось у вузькому сенсі для позначення мистецтва кораблеводіння, потім застосовувалось самими греками в непорівняно більш широкому значенні як *мистецтво керування взагалі*».

Перша штучна автоматична регулююча система, водяні годинники, була винайдена давньогрецьким механіком Ктезібій. У його годинниках вода витікала із джерела в басейн, а потім з басейна — на механізми годинників. Це було першим штучним дійсно автоматичним саморегульованим пристроєм, яке не потребувало ніякого зовнішнього втручання між оберненим зв'язком і керуючими механізмами. Ктезібій, Герон Александрійський, китайський учений Су Сун вважаються одними з перших, хто вивчав кібернетичні принципи. Дослідження механізмів у машинах з корегуючим оберненим зв'язком датуються ще кінцем XVIII ст., коли паровий двигун Джеймса Ватта був облаштований керуючим пристроєм, центробіжним регулятором оберненого зв'язку для того, щоб керувати швидкістю двигуна. А. Уолмс описав обернений зв'язок як «необхідну дію принципу еволюції» у відомій роботі 1958 року.

В 1868 році великий фізик Дж. Максвелл надрукував теоретичну статтю по керуючим пристроям, одним з перших розглянув і вдосконалив принципи самокеруючих пристроїв. Я. Ікскюль застосував механізм оберненого зв'язку в моделі функціонального циклу для пояснення поведінки тварин.

Сучасна кібернетика почалась в 1940-х роках, як міждисциплінарна галузь дослідження, що об'єднує системи керування, теорії електричних ланцюгів, машинобудування логічного моделювання, еволюційної біології, неврології в працях Гарольда Блека, Людвіга фон Бергаланфі, Джей Форрестера, Гордона С. Брауна,

І. Лемінга, П. К. Анохіна, А. Розенблюта, Н. Вінера, Дж. Бігелоу, У. Мак-Каллока, У. Піттса.

Кібернетика, як наука, була заснована в роботах Н. Вінера, Мак-Каллока, У. Р. Ємбі, У. Г. Уолтера та ін.

В 1947 році Вінер отримав пропозицію написати твір про об'єднання цієї частини прикладної математики, яка знайдена в дослідженні броунівського руху (тобто вінеровський процес) і в теорії телекомунікацій. Через рік він уже використав термін «*кібернетика*», як назву *наукової теорії* [3, 4].

На початку 1940-х років Джон фон Нейман вніс унікальне і надзвичайне доповнення в світ кібернетики: поняття клітинного автомата й універсального конструктора. Результатом цих простих розумових експериментів стає поняття *самовідтворення*, яке кібернетика прийняла за *основне поняття*.

У 30-х роках ХХ ст. все більшого впливу на становлення кібернетики починає мати розвиток теорії дискретних перетворювачів інформації. Цей розвиток направляли два основних джерела ідей і проблем. По-перше, задача побудови основ математики. Ще в середині минулого століття Дж. Буль заклав фундаменти *сучасної математичної логіки*. У 20-ті роки ХХ ст. було закладено фундаменти *сучасної теорії алгоритмів*. У 1934 році К. Гьодель показав обмеженість можливостей замкнених пізнавальних систем. У 1936 році А. М. Тьюрінг описав гіпотетичний універсальний перетворювач дискретної інформації, що отримав потім назву *машина Тьюрінга*. Ці два результату, отримані в межах чистої математики, впливали і продовжують впливати на становлення основних ідей кібернетики.

Іншим джерелом ідей і проблем кібернетики слугувала практика створення реальних *дискретних перетворювачів інформації*. Простий механічний арифмометр був винайдений Б. Паскалем (Франція) ще в XVII ст. Лише в XIX ст. Ч. Беббідж (Англія) зробив першу спробу створення автоматичного цифрового обчислювача — прообразу сучасної ЕОМ. На початку ХХ ст. було створено перші зразки електромеханічних числово-аналітичних машин, які дозволили автоматизувати прості перетворення дискретної інформації. Різке посилення інтересу до теорії дискретних перетворюючих інформації в 30-х роках було обумовлено необхідністю створення складних релейно-контактних пристроїв, перш за все для потреб автоматичних телефонних станцій. У 1938 К. Шеннон (США), а в 1941 В. І. Шестаков (СРСР) показали можливість використання для синтезу і аналізу релейно-кон-

тактних схем апарату математичної логіки. Тим самим було покладено початок розвитку сучасної *теорії автоматів*.

Вирішальне значення для становлення кібернетики мало створення у 40-х роках ХХ ст. електронно-обчислювальних машин (Дж. фон Нейман і ін.). Завдяки ЕОМ виникли принципово нові можливості для дослідження і фактичного створення дійсно складних керуючих систем. Залишалось об'єднати увесь отриманий до цього часу матеріал і дати назву новій науці. Цей крок був зроблений М. Вінером, який надрукував у 1948 свою відому книгу «Кібернетика».

М. Вінер запропонував називати кібернетикою «науку про управління і зв'язки в тварині і машині». У першій і в другій своїй книзі [3, 4] М. Вінер надав велике значення загально філософським і соціальним аспектам нової науки, трактуючи їх найчастіше досить повільно. У результаті подальший розвиток кібернетики пішов двома різними шляхами. У США і Західній Європі стало переважати вузьке розуміння кібернетики, концентруючи увагу на суперечках і сумнівах, піднятих Вінером, на аналогіях між процесами управління в технічних засобах і живих організмів. У СРСР після періоду відмов і сумнівів затверджувалось більш природне і змістовне визначення кібернетики, яке включало всі досягнення, накопичені до того часу в теорії перетворення інформації і управляючих систем. При цьому особлива увага зверталась на нові проблеми, які виникли у зв'язку з широким упровадженням ЕОМ у теорію управління і теорію перетворення інформації.

2. РОЗВИТОК КІБЕРНЕТИКИ В УКРАЇНІ

На початку 50-х років, як відомо, кібернетика в СРСР піддавалася гонінням як буржуазна лженаука, створена М. Вінером — американським ученим. Разом з тим у наукових лабораторіях Америки, Англії й інших держав інтенсивно проводились розробки конструкцій електронних обчислювальних машин, здатних автоматично виконувати складні розрахунки по раніше заданим програмам. Аналогічна лабораторія існувала і в Україні у Феюфанії, на території колишнього монастиря під Києвом. Під керівництвом академіка Академії наук України С. А. Лебедева тут була створена діюча модель обчислювальної машини МЕСМ (перша в континентальній Європі). Але у зв'язку з переїздом С. А. Лебедева в Москву,

де він очолив Інститут обчислювальної техніки, організований для ефективнішого подальшого розвитку обчислювальної техніки, яка мала безсумніву перспективи в забезпеченні рішення проблем воєнно-промислового комплексу, Київська лабораторія обчислювальної техніки Інституту електротехніки залишилась без наукового керівництва.

Б. В. Гнеденко домігся переведення лабораторії в Інститут математики і сам її очолив. Розуміючи, що для відродження досліджень в області обчислювальної техніки необхідно залучити нові творчі сили, Б. В. Гнеденко запропонував своїм учням Є. Л. Рвачовій, В. С. Михайловичу, В. С. Королюку, а також професору КДУ Л. А. Калужніну прийняти участь у розробці нової обчислювальної машини широкого профілю. Інженерні кадри були цілком працездатні. Необхідно було лише забезпечити належне наукове керівництво. Після енергійного пошуку Б. В. Гнеденко запросив В. М. Глушкова (доктора фізико-математичних наук по алгебрі) переїхати в Київ і очолити лабораторію.

В. М. Глушков деякий час сумнівався (він займався абстрактними алгебраїчними проблемами і отримав блискучий результат по 23-й проблемі Гілберта), чи варто переходити на прикладні дослідження з обчислювальної математики, але таке рішення їм було прийнято.

Життя лабораторії швидко ожило. Інженери, яких С. А. Лебедев залишив у Києві, з ентузіазмом прийняли за розробку схем нових обчислювальних машин «Київ», «Дніпро» й ін. Б. В. Гнеденко разом з Л. А. Калужніним організував семінар у КДУ по теорії алгоритмів і алгебрі логіки для студентів старших курсів. В. С. Королюку Б. В. Гнеденко запропонував читати курс програмування для ЕОМ на 5-му курсі, щоб через рік отримати підготованих до роботи в лабораторії молодих спеціалістів.

Б. В. Гнеденко не тільки створив платформу для навчання нових кадрів обчислювачів-програмістів — він організував перезд у Феюфанію. Почався дивовижний період феюфанівського життя, період «бурі і натиску». В. М. Глушков незабаром активно включився в роботу лабораторії, визначивши свій науковий напрям — *теорія абстрактних автоматів*. Це був дуже вдалий вибір. Зберігаючи абстрактний рівень розглянутих завдань і разом з тим, маючи цілком конкретні реальні системи — ЕОМ у якості об'єктів математичного аналізу, В. М. Глушков стає науковим лідером лабораторії. Цікавість Президиуму АН до кібернетики зросла.

Намагаючись стати єдиним лідером у розвитку кібернетики в Україні, В. М. Глушков незабаром після створення Обчислювального центру АН України відтиснув Б. В. Гнеденко від участі в організації дослідження по кібернетиці, відторгнув від Б. В. Гнеденко і його учнів: Є. Л. Рвачову (Ющенко по чоловіку) і В. С. Михайлевича, запропонувавши їм завідування відділами в ЦВ. Б. В. Гнеденко повернувся у Москву.

На початку 60-х років Б. В. Гнеденко отримав уперше асимптотичні результати в аналізі дубльованих систем з довільно розподіленими часом роботи і відновлення пристроїв. У той же час в Інституті математики, на семінарі, обговорювалась теорія напівмарковських процесів, викладена в статтях Р. Пайпа. Аналізуючи результати, отримані Б. В. Гнеденко, В. С. Корольок прийшов до висновку, що проблема аналізу часу безвідмовної роботи відновлюваних систем може бути сформульована в загальному вигляді, як проблема вивчення часу перебування напівмарковського процесу в підмножині станів. Так, під впливом робіт Б. В. Гнеденко виник новий напрям теорії надійності — асимптотичний аналіз напівмарковських процесів у схемі фазового укрупнення. До речі, і уточнення назви цього напрямлення належить Борису Володимировичу Гнеденко, який при обговоренні попередніх результатів указав, що розглянута схема укрупнення є, звичайно, схемою фазового укрупнення, оскільки в асимптотичному аналізі укрупнюються (зливаються, об'єднуються) фазові стани напівмарковського процесу.

Зрозуміло, творче життя в Україні проходило по своїм внутрішнім законам, зберігаючи і примножуючи традиції, закладені Б. В. Гнеденко і його учнями.

У сучасних прикладних дослідженнях широко вживаються імовірнісні моделі, які достатньо повно та точно відбивають реальні процеси в техніці, природі, суспільстві, економіці тощо.

Дослідження цих моделей приводить до розгляду практично важливих класів звичайних диференціальних та різницевих рівнянь, коефіцієнтами яких є випадкові функції від часу. Під час застосування реальних процесів основна увага приділяється стійкості і керованості цих моделей, які розуміються в різних сенсах. Тому вивчення ймовірнісних моделей із застосуванням методів комп'ютерної математики обумовило створення різних напрямів у теорії стійкості та тісно пов'язаної з нею теорії оптимального керування випадковими процесами.

3. МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ

Розвиток радіофізики, електротехніки, автоматичного регулювання та інших наук привів до необхідності враховувати вплив різного роду випадкових сил на динамічні системи. Ця обставина стала підштовхом до створення загальної теорії випадкових функцій, зокрема, теорії стохастичних диференціальних рівнянь. Основні результати в цій області містяться у роботах А. М. Колмогорова [21, 22], С. Н. Бернштейна [1], Й. І. Гіхмана [7, 8], В. С. Королюка [17—20], Є. Б. Динкіна [11], А. В. Скорохода [29], І. Я. Каца [14, 15], В. С. Пугачова [26, 27], А. Я. Хінчина [33], Дж. Дуба [10], М. Винера [5], В. Феллера [34], К. Іто [12] та ін.

Значна кількість робіт присвячена дослідженню диференціальних рівнянь, які містять у якості параметрів узагальнені випадкові процеси типу білого шуму. Їх можна розглядати як рівняння, що отримані граничним переходом від рівнянь, які знаходяться під імпульсними впливами, наприклад, дробовий ефект у радіосистемах. Для таких рівнянь розроблена спеціальна теорія стохастичних диференціальних рівнянь.

У роботі Й. І. Гіхмана і А. В. Скорохода [7], що присвячена стохастичним диференціальним рівнянням, розглядаються питання існування та єдиності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь; зв'язок розв'язків з процесами Маркова, отримано рівняння Колмогорова для перехідних імовірностей розв'язків, вивчається асимптотична поведінка розв'язків при $t \rightarrow \infty$ та властивості розв'язків цих рівнянь.

У роботі Р. З. Хасьмінського [33] досліджено стохастичні диференціальні рівняння та інші класи диференціальних рівнянь, що містять випадкові параметри. При цьому широко використовується метод допоміжних функцій, тобто другий метод Ляпунова. Автор отримує умови стійкості розв'язків відповідних стохастичних рівнянь, вивчає властивості розв'язків різних стохастичних рівнянь. У цій роботі приведено величезну бібліографію, проведено ретельний огляд робіт по дослідженню лінійних систем з випадковими параметрами.

Більша частина робіт присвячена дослідженню параметричного впливу випадкових сил на лінійні і нелінійні коливні системи. Серед них відмітимо роботи Д. Г. Коренівського [16] та інших авторів.

Значна частина літератури присвячено властивостям стаціонарних процесів, а також дослідженню стаціонарних і періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з випадковими правими частинами. Вкажемо на роботи Дж. Дуба [10], Є. Ф. Царкова,

В. К. Ясинського [37, 38] та ін. Цікаві результати при дослідженні стійкості різних стохастичних систем отримано в роботах А. А. Мартинюка [25].

Велика кількість робіт присвячена застосуванню загальної теорії випадкових функцій, зокрема, теорії диференціальних рівнянь з випадковими функціями до задач механіки, автоматичного керування, радіотехніки, теоретичної фізики. Тут потрібно вказати на роботи І. Е. Казакова і В. М. Артемьєва [23], Б. Р. Левіна [24], А. А. Свешнікова [30], В.І. Тіхонова [31] та ін.

У роботі Я. Н. Ройтенберга [28] перелічено роботи, які присвячені дослідженню руху гіроскопічних систем, що знаходяться під впливом випадкових сил.

У роботах В. С. Королюка [17—20] розвивається теорія випадкових еволюцій. Загальне означення марковських випадкових еволюцій введено в роботі Грегора і Херша. При цьому термін «випадкові еволюції» запропоновано Лаксом. Розвиток теорії випадкових еволюцій отримала дякуючи роботам Папаніколау, Пінського, Кертца, Киплера, Королюка В. С. [18] та ін. У співвідношенні із загальним визначенням випадкових еволюцій запропоновано їх класифікацію. Передусім, випадкові еволюції розрізняються між собою по типу перемикаючих процесів: марковські процеси, процеси відновлення. Потім можна розрізнити між собою еволюції розривні (при наявності операторів стрибків), неперервні (при відсутності операторів стрибків) і стрибкоподібні. Далі, випадкові еволюції розглядаються з неперервним часом, а дискретні в моменти відновлення τ_n . У теорії випадкових еволюцій значне місце займають граничні теореми в схемі серій. Граничні теореми усереднення у схемі АФУ (асимптотичне фазове укрупнення) для марковських випадкових еволюцій отримані в роботі [3]. Дифузійна апроксимація еволюцій розглядалась у роботах [8, 9], а в схемі фазового усереднення — в [9]. Для неоднорідних процесів марковських еволюцій запропоновані алгоритми усереднення і дифузійної апроксимації [34]. Цікавий аспект вивчення марковських еволюцій як мультиплікативних операторних функціоналів запропонований М. Пінським.

Застосування мартингальних методів до вивчення випадкових еволюцій дозволило вирішити питання компактності випадкових еволюцій у схемі серій, а також знайти подання граничних еволюцій у теоремах усереднення і дифузійної апроксимації. Крім цього, мартингальний підхід дозволяє отримати оцінки швидкості збіжності в граничних теоремах. Мартингальний підхід до вивчення процесів марковських стаціонарних

еволюцій запропонований у роботі [20]. Випадковим еволюціям, які описуються системами стохастичних диференціальних рівнянь зі швидкими марковськими перемиканнями, присвячена монографія А. В. Скорохода, в якій також використовується мартингальний підхід. Розв'язанню мартингальної проблеми для випадкових процесів в різних просторах присвячено багато робіт [30, 38]. Розв'язанню проблеми мартингалів для незалежних випадкових еволюцій присвячена робота [19]. Значне місце серед публікацій по випадковим еволюціям займають роботи по застосуванню цих еволюцій [5, 15, 18, 22, 37]. Більша їх частина пов'язана з ім'ям Папаніколау.

Розглядається застосування граничних теорем для випадкових еволюцій до процесів запасів [3, 27, 26, 30], переносу розгалужених [9], дифузійних адитивним функціоналам [12] і U -статистичними процесами], випадковими рухами на групах Лі [4, 10] і розповсюдженню хвиль у хвилеводах та брусах, а також коливанням гармонічного осцилятора у випадковому середовищі. Існують стохастичні моделі систем, які не описуються випадковими еволюціями. Огляд результатів і задач у теорії марковських випадкових еволюцій, а також мультиплікативних операторних функціоналів від марковських процесів викладений відповідно в роботі [38]. У роботі М. Пінського розглядаються операторні мультиплікативні функціонали і випадкові еволюції від марковських процесів, а також їх застосування.

Особлива роль марковських процесів у сучасній теорії випадкових процесів і в її застосуванні спільно визнана, і їх дослідженню присвячено велику кількість робіт, різних як по постановкам задач, так і по методам їх розв'язування. Часто ці методи використовують наявність у процесі деякої послідовності моментів зупинки, яка розбиває часову вісь на інтервали з достатньо простою поведінкою траєкторій. Найбільш вивченими процесами такого типу є стрибкоподібні процеси, теорія яких викладена в класичних монографіях Й. І. Гіхмана і А. В. Скорохода, Д. Дуба [10], М. Лоева, М. Розенблатта, Чхун Кай-лая [36] і роботах Є. Б. Динкіна [11], А. М. Колмогорова [21], В. Феллера [35]. Спроба побудувати основи теорії марковських процесів, поведінка яких на інтервалах між стрибками не тривіальна, була зроблена в роботах Ш. Ватанабе, Н. Ікеда [2] та ін. У цих роботах розглядаються різні процедури побудови марковського процесу з частин. Ці побудови виявилися плідними в роботах Б. А. Севаст'янова, А. В. Скорохода й інших авторів, спом'янутих вище, які вивчали дифузійні розгалужені процеси. Обмеження, яким за-

довольняють характеристики цих процесів, дозволили отримати ряд істотних результатів, наявність яких пов'язана не тільки з достатньо складною поведінкою дифузійних розгалужених процесів між своїми стрибками і не тільки з многовидом явищ, що обумовлено розгалуженням. Складні пуассоновські процеси із затримкою в нулі, а також спільні кусково-лінійні процеси, детально досліджені в роботах В. С. Королюка [8], Б. В. Гнеденко та ін.

Особливе місце серед розглянутих процесів займають так звані процеси зберігання запасів з адитивним входом, які мають кінцеву інтенсивність стрибків. Піонерською роботою, у якій досліджувались такі процеси, по всій імовірності, є стаття Дж. Кейлсона і І. Д. Мемрина про дробовий ефект, опублікована в 1959 році. Увагу математиків до таких процесів було притягнуто в 1969 році І.А. Кораном, який вказав на їх важливість у теорії водосховищ. Починаючи з цього часу, досліджені умови існування мір Леві в одновимірних процесах із простим зносом, встановлений вид інфінітезимального оператора.

У розглянутих роботах при дослідженні систем, що зазнають випадкових впливів, використовуються асимптотичний та мартингальний методи. У роботах [9, 34, 38] вивчаються звичайні диференціальні рівняння, коефіцієнти яких залежать від випадкових процесів, застосовуються ідеї частинного усереднення і побудова рівнянь для стохастичного оператора або генератора.

При розв'язуванні багатьох задач можна зменшити кількість розглянутих рівнянь, тобто звести систему рівнянь до системи меншого порядку, що спрощує розв'язок розглянутої задачі.

Ідею зменшення числа рівнянь називають принципом зведення [25]. Ці основні ідеї покладено в зміст курсу «Багатомірний аналіз даних», що викладається на факультеті ІСІТ.

У багатьох задачах небесної механіки і теорії керування виникає задача про стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь, яка після перетворень приймає вид

$$\frac{dX}{dt} = AX + \mu F(X, \mu), \quad F(0, \mu) \equiv 0, \quad (1)$$

де $F(X, \mu)$ — вектор-функція, яка розкладається в ряд по степенях малого параметра μ і диференційована достатню кількість разів по X, μ . Було доведено, що велику роль при поданні розв'язку у вигляді розкладу в ряд по малому параметру грає стійкість розв'язків породжуючої системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (2)$$

яка у свою чергу залежить від розташування на комплексній площині коренів характеристичного рівняння

$$\det(E\lambda - A) = 0. \quad (3)$$

У роботі О.М. Ляпунова [25] був зазначений метод побудови системи диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, \mu), \quad \dim X_1 < \dim X, \quad (4)$$

меншої розмірності, ніж розмірність системи рівнянь (1). При цьому стійкість нульового розв'язку системи (1) еквівалентна стійкості нульового розв'язку системи (4). Усі власні числа матриці A_1 лежать на уявній осі і збігаються із суто уявними числами матриці A . Змінні X_1 одержали назву критичних змінних. Звичайне дослідження стійкості нульового розв'язку системи (4) принципово простіше, ніж дослідження стійкості нульового розв'язку системи (1).

Перехід від системи рівнянь (1) до системи рівнянь меншої розмірності (4) був названий зведенням, а сама ідея зменшення розмірності системи рівнянь (1) зі збереженням властивості стійкості одержала назву **принципу зведення Ляпунова**. Основна ідея Ляпунова полягає в побудові інтегрального многовиду розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, X_2, \mu), \quad \operatorname{Re} \lambda_j(A_1) = 0, \\ \frac{dX_2}{dt} &= A_2 X_2 + \mu F_2(X_1, X_2, \mu), \quad \operatorname{Re} \lambda_j(A_2) = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

виду $X_2 = \mu \Phi(X_1, \mu)$. Некритичні змінні X_2 подаються за критичними змінними X_1 на многовиді $X_2 = \mu \Phi(X_1, \mu)$. Для цього шукається вектор-функція $\Phi(X_1, \mu)$ із системи рівнянь:

$$\frac{dX_2}{dt} = \mu \frac{D\Phi(X_1, \mu)}{DX_1} \cdot \frac{dX_1}{dt},$$

що на многовиді $X_2 = \mu \Phi(X_1, \mu)$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & A_2 \Phi(X_1, \mu) + F_2(X_1, \mu \Phi(X_1, \mu), \mu) = \\ & = \frac{D\Phi(X_1, \mu)}{D X_1} (A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, \mu \Phi(X_1, \mu), \mu)). \end{aligned}$$

Для критичних змінних X_1 отримано систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, \mu \Phi(X_1, \mu), \mu). \quad (6)$$

О. М. Ляпунов довів, що стійкість нульового розв'язку системи рівнянь (5) еквівалентна стійкості нульового розв'язку системи (6).

Багато з наведених результатів можна було би отримувати простіше, якщо б раніше була би комп'ютерна математика...

Певний симбіоз дослідження економічних задач з використанням теорії випадкових процесів, теорії стійкості, теорії стохастичних диференціальних рівнянь і методів комп'ютерної математики запропоновано нами в роботі [9], що демонструє наступний приклад. Дійсно, краще один раз побачити ніж багато разів почути.

1. На валютному ринку певний комерційний банк здійснює валютні операції у трьох валютах: доларах США, євро та російських рублях. Банк щомісяця отримує загальні доходи від валютних операцій $x(t)$ гр. од, за весь період T загальні доходи від операцій з валютою становлять X гр. од.

Комерційний банк функціонує на валютному ринку, який може перебувати в трьох станах: стабільний валютний ринок, ринок з кризовими явищами та ринок з валютними обмеженнями.

2. Нехай модель функціонування валютних операцій банку на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ описується наступним лінійним диференціальним рівнянням з випадковими коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t).$$

3. Нехай випадковий напівмарковський процес набуває трьох станів:

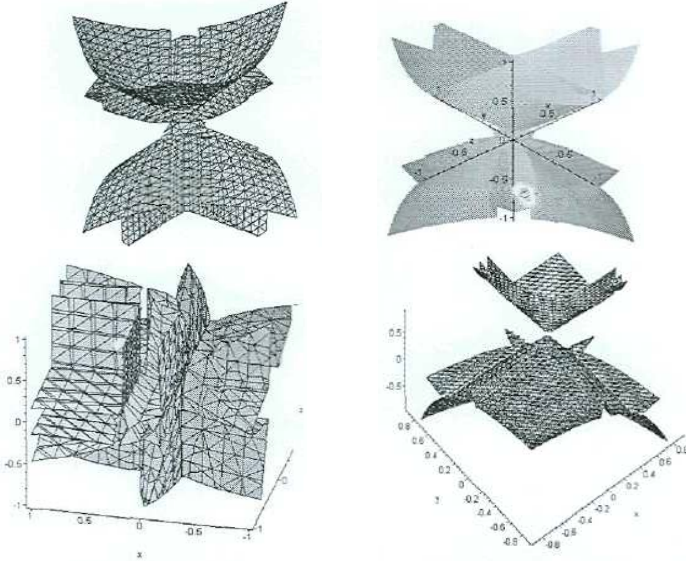
θ_1 — банк функціонує в умовах валютної кризи;

θ_2 — банк функціонує в умовах стабільного валютного ринку;

θ_3 — банк функціонує в умовах ринку з валютними обмеженнями;

з інтенсивностями:

$$\begin{aligned}
 q_{11}(t) &= q_{22}(t) = q_{33}(t) \equiv 0, \\
 q_{12}(t) &= q_{21}(t) = q_{23}(t) = q_{32}(t) = q_{13}(t) = q_{31}(t) = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{T} \text{ при } 0 \leq t \leq T; \\ 0 \text{ при } t \geq T. \end{cases}
 \end{aligned}$$



Тоді рівняння для меж області нестійкості набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix}
 1 & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2a_2)}}{T(p-2a_2)} & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2a_3)}}{T(p-2a_3)} \\
 -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2a_1)}}{T(p-2a_1)} & 1 & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2a_3)}}{T(p-2a_3)} \\
 -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2a_1)}}{T(p-2a_1)} & -M_2 \frac{1 - e^{-T(p-2a_2)}}{T(p-2a_2)} & 1
 \end{vmatrix} = 0$$

де M_2 — є середнім значенням доходів банку від валютних операцій за час T .

При $p = 0$ побудовано межі області нестійкості розв'язків рівняння на площині параметрів a_1, a_2, a_3 при різних значення коефіцієнта M_2 . Усі допоміжні обчислення і побудова графіків зроблено за допомогою засобів комп'ютерної математики.

4. ЩО ОЧІКУВАТИ ВІД КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ?

Важко сказати, скільки школярів страждали з приводу неправильно зроблених математичних перетворень на контрольних роботах і іспитах, і скільки школярів сприйняли математику як заклятого ворога із-за перших невдач у її вивченні. Ще більших збитків народному господарству завдає невміння випускників шкіл і вузів застосовувати сучасні математичні методи на практиці, хоча саме це і є кінцевою метою фундаментального математичної освіти. Багато студентів запам'ятовують математичні істини від сили на кілька днів під час іспитів.

Як же знайти вихід з цього тупика? Одна з можливостей — застосування досить універсальних методів КМ, які автоматизують більшу частину математичних обчислень. Такі системи дозволяють користувачеві — як студенту, так і науковцю — швидко згадати отримані у вузі знання і легко використовувати їх на практиці без етапу нудних і трудомістких рутинних обчислень і перетворень. До того ж засвоїти нові для себе методи і розділи сучасної математики. На жаль, за межами можливостей чисельних математичних систем виявилися великі області математики, пов'язані з проведенням аналітичних розрахунків — від простих підстановок і скорочень до аналітичної обробки математичних виразів і функцій і навчання комп'ютера новим математичним закономірностям і співвідношенням. Усією цією роботою, що відноситься в основному до розділів елементарної та вищої алгебри, були змушені займатися математики-аналітики.

На жаль, у нашій системі освіти недостатнє знайомство з сучасними методами КМ характерно не лише для студентів, а й для викладачів. Серед них добре володіння методів КМ швидше виняток, ніж правило. Це серйозно перешкоджає вирішенню ряду першорядних проблем освіти — підвищенню його фундаментальності і входженню нашої освітньої системи в загальноосвітноту,

де комп'ютерні системи символічної математики в останні роки знайшли саме широке застосування. Очевидно, що чим раніше користувач ПК почне знайомитися з СКМ, тим більше математичних знань він отримає. Хоча, безумовно, бажано, щоб таке використання йшло під контролем досвідченого викладача.

На жаль, у нас є серйозна причина, що перешкоджає широкому застосуванню методів КМ в освіті, — слабкість матеріально-технічної бази шкіл, вузів та й багатьох університетів. Класи з сучасними ПК багато наших освітніх установ не мають. Тим не менш, це чисто технічна проблема, яка поступово вирішується.

Математика безперервно розвивається, і жоден самий здатний учень не в змозі вмістити в звивини свого мозку всі математичні закони і правила, створені за багатовікову історію людства. Сотні років тому такі завдання, як рішення квадратного рівняння в загальному вигляді, були в числі найскладніших математичних задач, а зараз їх розв'язують майже всі школярі. Навіть багатомні довідники з математики не гарантують повного опису всіх її можливостей. Отже, немає нічого страшного в тому, що в наш час обчислення похідних або первісних функцій в аналітичному вигляді бере на себе комп'ютер. І їх застосування зовні стають такими ж простим, як таблиця множення.

Зараз слова «*комп'ютерний розум*» зазвичай беруть у лапки, всіляко підкреслюючи, що комп'ютер сам по собі не здатний дати принципово нові результати. Для багатьох, що в цілому справедливо, питання про те, розумна чи система символічної математики, подібне питанню про те, розумний чи хороший і повний довідник з математики.

І все ж, стосовно сучасних систем комп'ютерної математики така аргументація, мабуть, не цілком прийнятна. Так, основні формули і правила символічних перетворень у математичні системи комп'ютерної алгебри закладені їхніми творцями. Тому принципово нових наукових даних система сама по собі начебто і не дає. Але хіба не така в цілому і ситуація зі звичайним використанням математичного апарату будь-яким математиком-аналітиком?

Тим часом більшості конкретних користувачам системи комп'ютерної математики дають нові знання у вигляді далеко не очевидних для них математичних та інших закономірностей. Результат складних і багато етапних рекурентних символічних перетворень, навіть за відомими правилами може бути дійсно новим, тобто раніше не опублікованим, заздалегідь не передбачуваним і далеко не очевидним. Цим системи комп'ютерної математики

принципово відрізняються від звичайних довідників. Вони дають інформацію не тільки по жорсткому набору формул, але й за тими аналітичним співвідношенням, які в такий набір не увійшли.

Подібні результати нерідко можуть підштовхнути наукового працівника до відкриття невідомих закономірностей у досліджуванних явищах — у них можна вводити нові закономірності і зв'язки (часом самі сміливі й божевільні), а потім досліджувати маловідомі або взагалі невідомі перетворення. Отже, цілком допустимо вважати такі системи розумними і здатними допомогти користувачеві в створенні нових теоретичних положень і навіть наукових теорій.

Важливий аргумент на користь певної розумності сучасних систем комп'ютерної математики полягає в особливому призначенні прикладів їх застосування, яких у довідковій базі даних можуть нараховуватися тисячі. Тут доречно згадати вислів І. М. Гельфанда: «Теорії приходять і йдуть, а приклади залишаються».

Свого часу нас вчили, що кількість переходить у якість. Прикладів цього в природі безліч. Системи комп'ютерної математики по великій кількості вмонтованих у них функцій, правил перетворень і конкретних прикладів застосування вийшли вже за межі, які здатний оцінити індивідуальний користувач, навіть якщо він досить досвідчений математик. Наприклад, ядро Mathematica 4 зберігає дані про приблизно 5 тисячах інтегралів! Це говорить про те, що СКМ знаходяться вже на порозі того, що їх кількісні характеристики переростуть у якісні. Серед них може виявитися і **розум систем комп'ютерної математики** — цього разу без будь-яких застережень.

5. ВИСНОВКИ або ПЕРЕВАГИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1. У кінцевому рахунку, СКМ — не більш аніж зручний і потужний інструмент для учня, педагога, інженера або наукового працівника. Як його застосовувати — залежить уже від користувача. Проте важливо і приємно те, що системи комп'ютерної математики знімають з користувачів психологічний бар'єр у реальному застосуванні математики, особливо вищої.

2. Треба враховувати, що ефективне застосування систем комп'ютерної алгебри практично неможливо без чіткого розуміння основ елементарної та вищої математики. Нemoжливо воно і без творчої участі користувача як у постановці вирішення завдань, так і в контролі і відборі результатів їх вирішення. У більшості математичних систем використовуються спеціальні опції і директиви,

що направляють рішення в потрібне русло. У яке саме — має визначити користувач, який володіє потрібними для цього математичними поняттями. Крім того, саме користувачеві необхідно перевірити отримані результати і переконатися в їх достовірності.

3. В наших економічних умовах особливо велика роль систем комп'ютерної математики як потужних електронних довідників, переваги яких в наступному:

- вміщують у себе об'єми інформації, еквівалентні часом десяткам книг;
- акумулюють знання, отримані за багато тисячоліть розвитку математики;
- мають бездоганне оформлення документів (кольорові тексти та ілюстрації, всілякі виділення, якісні ілюстрації і т. ін.);
- мають різну організацію змісту (індексний, пошук по контексту і т. ін.); Відрізняються дуже швидким пошуком потрібної інформації по ряду критеріїв;
- мають «живі» приклади, які можна змінювати в ході перегляду довідкових даних;
- довідкові матеріали можуть супроводжуватися звуковими та відео коментаріями;
- дозволяють готувати високоякісні та наочні уроки не тільки з будь-яких розділів математики, а й із багатьох дисциплін, що базуються на застосуванні математичного апарату;
- дозволяють швидко розмножити цікаві для користувача матеріали;
- володіють можливістю оновлення та поповнення з мережі Інтернет.

4. Сучасні СКМ варто розглядати не тільки, як електронні довідники нового покоління, але й як системи для самонавчання та дистанційного навчання математиці. Проте для цього вони повинні бути забезпечені електронними уроками або підручниками. У той же час, при відсутності таких уроків застосування математичних систем може мати негативні наслідки для освіти — небезпечна підміна навчання основам математики — навчанням основам роботи з математичними системами.

5. Багато видів обчислень, навіть елементарних, досить трудомісткі. Наприклад, побудова тривимірної поверхні вимагає найчастіше сотень одноманітних обчислень, виконувати які вкрай клопітно навіть при застосуванні калькуляторів. Сучасні СКМ роблять це за лічені секунди, а то й за долі секунди. До того ж вони відразу ж будують графіки поверхонь з різноманітним функціональним забарвленням і дозволяють інтерактивне обертати їх, домагаючись кращої

виразності і кращого огляду фігур. Застосування СКМ в освіті позбавляє користувачів від маси рутинних обчислень і вивільняє їх час для обдумування алгоритмів вирішення задач, більш обґрунтованою постановки їх вирішення, багатоваріантного підходу і представлення результатів у найбільш наочній формі. Таким чином, СКМ не тільки не позбавляє користувачів серйозних математичних навичок, а й, навпаки, здатне їх розширити і поглибити.

6. Важливим фактором є те, що новітні СКМ належать до найсерйозніших програмних продуктів, які мають сучасний інтерфейс і потужні засоби візуалізації всіх етапів роботи — причому, в області математики більш виразні, ніж ті, які дають текстові процесори класу Word 95/97.

Отже, працюючи з ними, користувач мимоволі засвоює роботу з комп'ютером і пізнає тонкощі інтерфейсу сучасних програм.

7. Найбільш популярними напрямками комп'ютерної математики зараз є комп'ютерна алгебра (КА) і комп'ютерна геометрія (КГ). Необхідність у спеціалістах по КГ дуже велика бо сьогодні КГ використовується практично в будь-якій інженерній і науково-дослідній діяльності. Фундаментальна компонента КА складається із алгоритмів символічних перетворень, а технологічна база — з широкого спектру застосувань розвинутих систем КА в математики, природовничих, гуманітарних науках, в інженерній справі, в економічних задачах.

Література

1. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей / С. Н. Бернштейн. — М. — Л. : ОГИЗ, 1946. — 556 с.
2. *Ватанабе Ш.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ш. Ватанабе, Н. Кеда. — М. : Мир, 1984. — 445 с.
3. *Винер Н.* «Кибернетика, или управление и связь в живом и машине» Herman & Cie. — Париж, 1948.
4. *Винер Н.* «Кибернетика и общество». The Human Use of Human Beings: Cybernetics and Society Houghlton-Mifflin, 1950.
5. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. — М. : ИЛ, 1960. — 160 с.
6. *Вонем В. М.* Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления / В. М. Вонем // Математика. — 1973. — Т. 17. — № 4. — С. 59—167; Т. 5. — С. 82—114.
7. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1987. — 65 с.
8. *Гихман И. И.* Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 567 с.

9. Джалладова И. А. Оптимізація стохастичних систем / И. А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 2005. — 284 с.
10. Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — 605 с.
11. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М.: Физматгиз, 1963. — 659 с.
12. Ито К. Вероятностные процессы / К. Ито. — М.: ИЛ, 1960. — 133 с.
13. Зубов В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
14. Кац И. Я. Об устойчивости систем со случайными параметрами / И. Я. Кац, Н. Н. Красовский // Прикладная математика и мех. — 1960. — Т. 24. — № 5. — С. 809—823.
15. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург: Изво УГА путей сообщ., 1998. — 232 с.
16. Кореневский Д. Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах / Д. Г. Кореневский. — К.: Академперіодика, 2008. — 58 с.
17. Королюк В. С. Стохастические модели систем / В. С. Королюк. — К.: Наукова думка, 1989. — 210 с.
18. Королюк В. С. Полумарковские процессы и их приложение / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. — К.: Наукова думка, 1976. — 182 с.
19. Королюк В. С. Теория U — статистик / В. С. Королюк, Ю. В. Боровских. — К.: Наукова думка, 1989. — 384 с.
20. Королюк В. С. Эволюция систем в полумарковской случайной среде / В. С. Королюк // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 106—109.
21. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // Успехи матем. науки. — 1938. — Вып. 5. — С. 5—41.
22. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: [Сб. статей] / А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1986. — 35 с.
23. Казаков И. Е. Оптимизация динамических систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев. — М.: Наука, 1980. — 382 с.
24. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике / Б. Р. Левин. — М.: Сов. радио, 1957. — 496 с.
25. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: Ростехиздат, 1950. — 472 с.
26. Мартынюк А. А. Практическая устойчивость движения / А. А. Мартынюк. — К.: Наукова думка, 1983. — 248 с.
27. Пугачев В. С. Стохастические дифференциальные системы / В. С. Пугачев, И. Н. Сеницын. — М.: Наука, 1990. — 692 с.
28. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. — М.: Наука, 1979. — 496 с.
29. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

30. *Скорород А. В.* Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скорород. — К. : Наукова думка, 1987. — 328 с.

31. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций / А. А. Свешников. — Л. : Судпромгиз, 1961. — 252 с.

32. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. — М. : Сов. Радио, 1966. — 678 с.

33. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М.: Наука, 1969. — 365 с.

34. *Хинчин А. Я.* Асимптотические законы теории вероятностей / А. Я. Хинчин. — М.: ОНТИ, 1936. — 98 с.

35. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах / В. Феллер. — М. : Мир, 1984. — Т. 1. — 528 с.; Т. 2. — 752 с.

36. *Чхун К.* Введение в стохастическое интегрирование: Пер. с англ. / К. Чхун, Р. Уилямс. — М. : Мир, 1987. — 152 с.

37. *Царьков Е. Ф.* Квазилинейные стохастические функционально-дифференциальные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига: Ориентир, 1992. — 328 с.

38. *Ясинський В. К.* Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський. — К. : Вид-во «ТВІМС», 2005. — 578 с.

Стаття надійшла до редакції 10.05.2011 р.

УДК: 336.71: 004.73

Н. В. Ситник, канд. екон. наук,

доц. кафедри ІСЕ,

Є. А. Труш, аспірантка кафедри ІСЕ,

ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

СХОВИЩЕ ДАНИХ — ДЖЕРЕЛО БАГАТОВИМІРНОГО OLAP-АНАЛІЗУ В БАНКАХ

АНОТАЦІЯ. У даній статті розкрито питання побудови сховищ даних для аналізу банківської діяльності. Проаналізовано основні види архітектур побудови сховищ даних та обґрунтована необхідність побудови корпоративного сховища банківської інформації. Розглянуто та проаналізовані концептуальні підходи до побудови моделі сховища даних. Визначено основні види аналізу банківської діяльності на основі сховищ даних та підходи до побудови інформаційно-аналітичної системи банку на основі OLAP.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Сховище даних, вітрина даних, OLAP-система, ETL-система, OLTP-система, аналітична задача.