Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2011, 4

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 512.54

О.Н. Тузов, к.ф.-м.н., доц.

Про одне узагальнення сервантних підгруп.

В роботі вводиться поняття k-сервантної підгрупи і вивчаються k-сервантні підгрупи k-регулярних p-груп.

Ключові слова: k-регулярна p-група, k-сервантна підгрупа, доповнення.

A.N. Tuzov, Ph.D., associate prof.

On one generalization of serving subgroups.

A notion of k-serving subgroups is introduced and k-serving subgroups of k-regular p-groups are studied in the paper.

Key Words: k-regular p-group, k-serving subgroup, complemented subgroup.

E-mail: antuzov@yandex.ru
Статтю представив д.ф.-м.н. Кириченко В.В.

Важливе місце в теорії p-груп займають регулярні p-групи, введені Ф.Холлом [1]. Клас регулярних p-груп достатньо широкий і в той же час близький до класу примарних абелевих груп. В роботі [2] введено поняття k-регулярних p-груп, які є узагальненням регулярних p-груп.

Нехай G – скінчена p-група, k – натуральне число. Група G називається [2] k-регулярною, якщо для будь-яких $a, b \in G$ виконується рівність $(ab)^{p^k} = a^{p^k} b^{p^k} s_1^{p^k} \cdots s_t^{p^k}$, де $s_1, \ldots, s_t$ належать комутанту групи $\langle a, b\rangle$. При $k = 1$ це співпадає з означенням регулярності, даним Ф.Холлом.

Очевидно, будь-яка підгрупа k-регулярної p-групи k-регулярна. Позначимо $G^{(k)} = \langle x^{p^k} | x \in G\rangle$, $G_{(k)} = \langle x \in G | x^{p^k} = 1\rangle$. Якщо G – k-регулярна p-група, то всі елементи $G^{(k)}$ є k-ми степенями елементів групи G і $\exp G_{(k)} \le p^k$ [2]. Таким чином, група G k-регулярна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $a, b \in G$ виконується рівність $(ab)^{p^k} = a^{p^k} b^{p^k} s^{p^k}$, де s належить комутанту групи $\langle a, b\rangle$. Зауважимо, що, якщо G k-регулярна, то вона і $(k+1)$-регулярна [2].

Означення 1. Підгрупу A p-групи G будемо називати k-сервантною в G, якщо для довільного $a \in A$ із розв'язності рівняння $a = x^{p^k}$ в групі G випливає розв'язність цього рівняння і у підгрупі A.

Теорема 1. *Підгрупа A k-регулярної p-групи G k-сервантна в G тоді і тільки тоді, коли $A^{(k)} = A \cap G^{(k)}$.*

Доведення. Нехай підгрупа A k-регулярної p-групи G k-сервантна в G. Очевидно, $A^{(k)} \subseteq A \cap G^{(k)}$. Візьмемо довільний елемент $a \in A \cap G^{(k)}$. Тоді $a = g^{p^k}$ і $a \in A$. Підгрупа A k-сервантна і тому в A знайдеться такий елемент a_1 що $a = a_1^{p^k}$. Таким чином, $a \in A^{(k)}$ і $A^{(k)} = A \cap G^{(k)}$. Нехай тепер $A^{(k)} = A \cap G^{(k)}$. Доведемо, що підгрупа A k-сервантна в G. Візьмемо довільний елемент $a \in A$. Якщо $a = g^{p^k}$, то $a \in A^{(k)}$ і, враховуючи k-регулярність групи G, $a = a_1^{p^k}$, де $a_1 \in A$. Доведено, що підгрупа A k-сервантна в G. □

Твердження 1. *(див.[2]). Якщо G – k-регулярна p-група і $a, b \in G$, то $a^{p^k} = b^{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли $(ab^{-1})^{p^k} = 1$.*

Теорема 2. *Якщо A є k-сервантною підгрупою k-регулярної p-групи G і $G_{(k)} \subseteq A$, то $A = G$.*

Доведення. Припустимо, $A \ne G$. Нехай p^n – найменший порядок елементів групи G, що не належать A, і g – один з таких елементів порядку p^n. За умовою теореми $G_{(k)} \subseteq A$, тому $n > k$. Порядок елемента g^{p^k} менше p^n, тому $g^{p^k} = a$, де $a \in A$. Зважаючи на k-сервантність підгрупи A, знайдеться такий елемент $a_1 \in A$, що $a_1^{p^k} = a$ і тому $g^{p^k} = a_1^{p^k}$. За твердженням 1, $(ga_1^{-1})^{p^k} = 1$ і $ga_1^{-1} \in G_{(k)} \subseteq A$. Таким чином, $ga_1^{-1} = a_2$, де $a_2 \in A$, і тому $g = a_2 a_1 \in A$, що неможливо. Теорему доведено. □

Нехай g – відмінний від одиниці елемент p-групи G. Якщо рівняння $x_1^{p^n} x_2^{p^n} \ldots x_t^{p^n} = g$ має розв'язок у групі G тільки при $n \le k$, то висота елемента g у групі G дорівнює k. Наступні твердження одержуємо,враховуючи властивості k-регулярних p-груп.

Твердження 2. *Нехай A – k-сервантна підгрупа k-регулярної p-групи G. Якщо висота* *елемента $a \in A$ у групі G дорівнює k, то висота елемента a у підгрупі A також дорівнює k.*

Твердження 3. *Нехай A – k-сервантна підгрупа k-регулярної p-групи G. Якщо висота елемента $a \in A$ у групі G не менше k, то висота елемента a у підгрупі A також не менше k.*

Твердження 4. *Для k-сервантності підгрупи A в k-регулярній p-групі G достатньо, щоб кожен елемент підгрупи A, висота якого в G не менше k, мав і в A висоту не менше k.*

Теорема 3. *Для k-сервантності підгрупи A в k-регулярній p-групі G достатньо, щоб кожен елемент підгрупи $A_{(k)}$, висота якого у групі G не менше k, мав таку ж висоту і у підгрупі A.*

Доведення. Враховуючи твердження 4, покажемо, що кожен елемент підгрупи A, висота якого в G не менше k, має і в A таку ж висоту. Проведемо індукцію по порядку елементів підгрупи A. Якщо елемент $a \in A$ має порядок p і його висота в групі G не менше k, то $a \in A_{(k)}$ і тому має в A таку ж висоту, як в G. Нехай твердження доведено для всіх елементів $a \in A$, порядок яких не більше p^n, і нехай елемент $a \in A$ порядку p^{n+1} має в G висоту l, де $l \geq k$. Якщо $a \in A_{(k)}$, то його висота в A, за умовою, також l. Якщо $a \notin A_{(k)}$, то, за властивостями k-регулярних p-груп, в групі G знайдеться такий елемент g, що $a = g^{p^l}$. Очевидно, $a^{p^k} = g^{p^{l+k}}$ і порядок елемента a^{p^k} не більше p^n. Висота елемента a^{p^k} в групі G не менше $l+k$, тому, за індуктивним припущенням, елемент a^{p^k} має і в A таку ж висоту. Таким чином, знайдеться такий елемент $a_1 \in A$, що $a^{p^k} = a_1^{p^{l+k}} = (a_1^{p^l})^{p^k}$. За твердженням 1, $(a^{-1}a_1^{p^l})^{p^k} = 1$, тобто $a^{-1}a_1^{p^l} \in A_{(k)}$. Але $a = g^{p^l}$, тому висота елемента $a^{-1}a_1^{p^l}$ в групі G не менше l і, за умовою, $a^{-1}a_1^{p^l}$ має таку ж висоту в A, тобто $a^{-1}a_1^{p^l} = a_2^{p^l}$ для деякого $a_2 \in A$. Але тоді $a = a_1^{p^l}(a_2^{-1})^{p^l}$ і висота елемента a у підгрупі A дорівнює l. Теорему доведено. □

Теорема 4. *Якщо висота елемента g k-регулярної p-групи G не менше k, то g міститься у циклічній k-сервантній підгрупі групи G.*

Доведення. Нехай висота елемента g у групі G дорівнює $l \geq k$. Тоді, враховуючи, що група G l-регулярна, $g = g_1^{p^l}$ для деякого $g_1 \in G$ і l – найбільше таке число. Покажемо, що циклічна підгрупа $\langle g_1 \rangle$ k-сервантна в G. Візьмемо довільний елемент $a \in \langle g_1 \rangle$. Тоді $a = g_1^{rp^m}$ для деякого m і $(p, r) = 1$. Якщо рівняння $a = x^{p^k}$ має розв'язок в G, тобто $g_1^{rp^m} = g_2^{p^k}$ для $g_2 \in G$, то $g_1^{rp^l} = g_2^{p^{k+l-m}}$ і $g^r = g_2^{p^{k+l-m}}$. Але тоді $g = (g_2^n)^{p^{k+l-m}}$ для деякого n. Висота елемента g у групі G дорівнює l, тому $k + l - m \leq l$ і $k \leq m$. Але тоді $(g_1^{rp^{m-k}})^{p^k} = g_1^{rp^m} = a$, тобто рівняння $a = x^{p^k}$ має розв'язок в $\langle g_1 \rangle$. Таким чином, підгрупа $\langle g_1 \rangle$ k-сервантна в G. Теорему доведено. □

Теорема 5. *Нехай $\langle a \rangle$ – циклічна підгрупа k-регулярної p-групи G, $|a| = p^l$, $l \geq k$. Якщо підгрупа $\langle a \rangle$ k-сервантна в G, то $\langle a \rangle$ – максимальна циклічна підгрупа.*

Теорема 6. *Якщо $\langle a \rangle$ – максимальна циклічна підгрупа найбільшого можливого порядку k-регулярної p-групи G, то $\langle a \rangle$ – k-сервантна в G.*

Теорема 7. *Якщо інваріантна підгрупа A k-регулярної p-групи G має в G доповнення B, то підгрупи A і B k-сервантні в G.*

Доведення. Нехай інваріантна підгрупа A k-регулярної p-групи G має в G доповнення B. Якщо для елемента $a \in A$ існує такий елемент $g \in G$, що $a = g^{p^k}$, то, очевидно, $g = a_1 b_1$, де $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ і тому $(a_1 b_1)^{p^k} = a$. Враховуючи k-регулярність групи G, $a_1^{p^k} b_1^{p^k} s^{p^k} = a$, де s належить комутанту групи $\langle a_1, b_1 \rangle$ і тому $s \in A$. Але тоді $b_1^{p^k} = a_1^{-p^k} a s^{-p^k} \in A$, тобто $b_1^{p^k} = 1$ і $a_1^{p^k} s^{p^k} = a$. Підгрупа A k-регулярна, тому існує такий елемент $a_2 \in A$, що $a_2^{p^k} = a$. Таким чином, k-сервантність підгрупи A доведена. Аналогічно доводиться k-сервантність підгрупи B. □

Теорема 8. *Якщо G – k-регулярна p-група і комутант G' належить $G_{(k)}$, то будь-яка підгрупа, яка має в G доповнення, k-сервантна в G.*

Доведення. Нехай $G = A \cdot B$ і $A \cap B = 1$. Якщо для $a \in A$ виконується рівність $a = g^{p^k}$, де $g \in G$, то, очевидно, $g = a_1 b_1$ $(a_1 \in A,\ b_1 \in B)$ і тому $a = (a_1 b_1)^{p^k} = a_1^{p^k} b_1^{p^k} s^{p^k}$, де $s \in G'$. Але

$G' \subseteq G_{(k)}$ і тому $s^{p^k} = 1$, тобто $a = a_1^{p^k} b_1^{p^k}$. Враховуючи, що $A \cap B = 1$, $b_1^{p^k} = 1$. Таким чином, $a = a_1^{p^k}$, де $a_1 \in A$. Теорему доведено. $\square$

Твердження 5. *Нехай G – k-регулярна p-група і $a, b \in G$. Тоді, якщо $[a^{p^k}, b] = 1$, то $[a, b]^{p^k} = 1$.*

Доведення. Для абелевих груп твердження виконується. Доведення проводимо по індукції – припустимо, що твердження вірне для всіх власних підгруп неабелевої k-регулярної p-групи G. Очевидно, $a^{-p^k} b^{-1} a^{p^k} b = (a^{-1})^{p^k} (b^{-1}ab)^{p^k} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{p^k} s^{p^k}$, де s – елемент комутанта групи $\langle a, b^{-1}ab \rangle$. Таким чином, $[a^{p^k}, b] = [a, b]^{p^k} s^{p^k}$. Якщо $[a^{p^k}, b] = 1$, то a^{p^k} належить центру групи $\langle a, b \rangle$. Підгрупа $\langle a, b^{-1}ab \rangle$ – власна підгрупа групи $\langle a, b \rangle$. За індуктивним припущенням, $[a, b^{-1}ab]^{p^k} = 1$. Будь-який комутатор з $\langle a, b^{-1}ab \rangle$ є добутком елементів, спряжених комутатору $[a, b^{-1}ab]$ та їм обернених, тобто елементів, порядок яких не перевищує p^k. Таким чином, комутант групи $\langle a, b^{-1}ab \rangle$ належить $G_{(k)}$ і тому $s^{p^k} = 1$, тобто $[a, b]^{p^k} = [a^{p^k}, b] = 1$. Твердження доведено. $\square$

Теорема 9. *Якщо підгрупа A k-регулярної p-групи G має в G доповнення B і при цьому $A^{(k)} \subseteq Z(G)$, то підгрупи A і B k-сервантні в G.*

Доведення. Нехай a – довільний елемент підгрупи A і $a = g^{p^k}$ для деякого $g \in G$. Очевидно, $g = a_1 b_1$, де $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Враховуючи, що $a_1^{p^k} \in Z(G)$ і тому, за твердженням 5, $[a_1, b_1]^{p^k} = 1$, одержуємо рівність $g^{p^k} = (a_1 b_1)^{p^k} = a_1^{p^k} b_1^{p^k} = a$. Але $A \cap B = 1$, тому $b_1^{p^k} = 1$ і $a = a_1^{p^k}$, тобто підгрупа A k-сервантна в G. Аналогічно доводиться k-сервантність підгрупи B. $\square$

Твердження 6. *Якщо G – k-регулярна p-група і $G^{(k)} \subseteq Z(G)$, то будь-яка підгрупа, яка має в G доповнення, k-сервантна в G.*

Теорема 10. *Якщо нетривіальна підгрупа A k-регулярної p-групи G має в G доповнення B, то A містить k-сервантну в G нетривіальну циклічну підгрупу.*

Доведення. Нехай елемент $a \in A$ має найбільший можливий порядок p^n. Розглянемо циклічну підгрупу $\langle a \rangle$. Якщо $n \leq k$, то рівняння $a^r = x^{p^k}$ $(a^r \neq 1)$ не має розв'язків в G. Дійсно, якщо знайдеться такий елемент $g \in G$, що $g^{p^k} = a^r$, то $g = a_1 b_1$, де $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, і тому $(a_1 b_1)^{p^k} = a^r$. Враховуючи, що $a_1^{p^k} = 1$, за твердженням 5, $[a_1, b_1]^{p^k} = 1$ і тому $(a_1 b_1)^{p^k} = a_1^{p^k} b_1^{p^k}$. Таким чином, $a^r = a_1^{p^k} b_1^{p^k}$ і тому $b_1^{p^k} = 1$. Але тоді $a^r = 1$. Отже, при $n \leq k$ підгрупа $\langle a \rangle$ k-сервантна в G. Нехай тепер $n > k$. Відразу відмітимо, що група G n-регулярна. Якщо для деякого елемента $a^r \neq 1$ підгрупи $\langle a \rangle$ виконується рівність $a^r = g^{p^k}$, де $g \in G$, то $(a^r)^{p^{n-k}} = (g^{p^k})^{p^{n-k}} = g^{p^n}$. Але $g = a_1 b_1$ для деяких $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, тому $a^{rp^{n-k}} = (a_1 b_1)^{p^n}$. Враховуючи, що $a_1^{p^n} = 1$, за твердженням 5, $[a_1, b_1]^{p^n} = 1$ і тому $(a_1 b_1)^{p^n} = a_1^{p^n} b_1^{p^n}$, тобто $a^{rp^{n-k}} = a_1^{p^n} b_1^{p^n}$. Але $A \cap B = 1$, тому $a^{rp^{n-k}} = 1$ і $r = mp^k$. Таким чином, $a^r = (a^m)^{p^k}$, тобто рівняння $a^r = x^{p^k}$ має розв'язок у підгрупі $\langle a \rangle$. Отже, підгрупа $\langle a \rangle$ k-сервантна в G. $\square$

Твердження 7. *Кожна максимальна циклічна підгрупа найбільшого можливого порядку k-регулярної p-групи G k-сервантна в G.*

Твердження 8. *Якщо циклічна підгрупа k-регулярної p-групи G має доповнення в G, то вона k-сервантна в G.*

Використовуючи властивості k-регулярних p-груп, можна довести наступне твердження.

Теорема 11. *Якщо G – k-регулярна p-група і комутант $G' \subseteq Z(G)$, то будь-яка підгрупа, яка має в G доповнення, k-сервантна в G.*

Список використаних джерел

1. *Hall Ph.* A contribution to the theory of groups of prime-power order. - Proc. London Math. Soc., 1933, **36**, p. 29-95.
2. *Bannuscher Wolfgang*, Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen. **I** – „Wiss. Beitr. M. – Luther – Univ. Halle - Wittenberg“, 1981, **M**, №21, 51-63.

Надійшла до редколегії 17.03.2011