

МОДЕЛЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТА, ЩО ОПИСУЄ СТАВЛЕННЯ ІНВЕСТОРА ДО РИЗИКУ

Розроблений Марковіцем у 1952 році метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів [1] і досі залишається стандартною основою для побудови портфеля. У фінансовій літературі запропоновано також інші методи побудови оптимальних портфелів. Особливої уваги заслуговує портфель максимальної очікуваної корисності [2]. Структура портфеля з максимальною корисністю залежить від коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. У класичній теорії портфеля припускається, що значення коефіцієнта, який описує ставлення до ризику, є відомим. Таке припущення зазнає критики на практиці. У [3], за припущення нормальності дохідностей з параметрами μ та Σ , з яких сформовано портфель (k — їх кількість), отримано вираз для обчислення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику

$$\beta = \sqrt{\frac{z_{\alpha}^2 - s}{V_{GMV}}}, \quad (1)$$

де $V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$ — очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією, $s = \mu'R\mu$, $R = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$, $z_{\alpha} = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ — α -квантиль стандартного нормального розподілу, $\mathbf{1}$ — k -вимірний вектор, елементами якого є одиниці.

Перед використанням виразу (1) для β на практиці, інвестор змушений оцінити параметри μ та Σ . Ми використаємо вибіркові оцінки параметрів розподілу. З вибірки значень векторів дохідностей акцій $X_1, X_2, \dots, X_n$ ми будемо вибіркові оцінки невідомих параметрів, тобто

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})'. \quad (2)$$

Підставивши оцінки (2) в (1), отримаємо вибірккову оцінку коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику $\hat{\beta}$. Оцінка $\hat{\beta}$ є випадковою величиною, тому для її моделювання необхідно дослідити її імовірнісні властивості.

Теорема 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо $\mathbf{X}_t$ — k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t$ є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями $\mathbf{X}_t$, $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}1$ і $n > k$. Тоді*

$$f_{\hat{\beta}|\hat{s} < z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{\beta}|\hat{s}=s^*}(x | s^*) ds^*, \quad (3)$$

де $K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)}$, $F_{a,b;\lambda}(x)$ та $f_{a,b;\lambda}(x)$ є

відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ , $f_{\hat{\beta}|\hat{s}=s^*}(x) = \frac{1}{2^{(n-k-2)/2} \Gamma((n-k)/2)} x^{-n+k-1} a_\beta(s^*)^{(n-k)/2} e^{-a_\beta(s^*)/2x^2}$,

$\Gamma(\cdot)$ — гамма функція $a_\beta(y) = (n-1)z_\alpha^2 / V_{GMV}$.

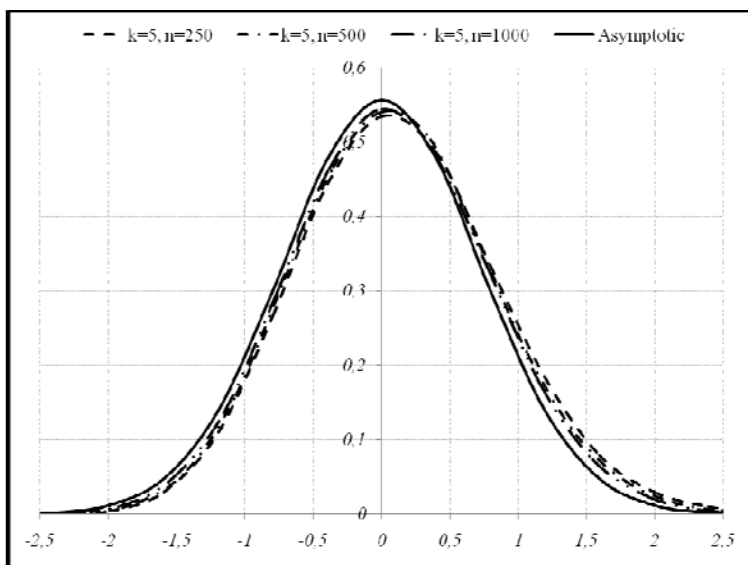
Густина вибіркової оцінки $\hat{\beta}$ (3) є доволі складною для моделювання. Виникає запитання, чи можна на практиці замінити густину (3) на простішу. Ми знайдемо асимптотичний розподіл вибіркової оцінки $\hat{\beta}$.

Теорема 2. *В умовах теореми 1, при $n \rightarrow \infty$,*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\beta^2), \quad \sigma_\beta^2 = \frac{(z_\alpha^2 - s)^2 + 2s + s^2}{2(z_\alpha^2 - s) V_{GMV}}. \quad (4)$$

Дослідимо результати попередньої теореми. Ми виберемо щотижневі спостереження 5 акцій, що входять до індексу Dow Jones, а саме, *Microsoft* (0.091, 0.102), *Coca-Cola* (0.618, 0.892), *Walt Disney* (0.773, 0.342), *Boeing* (0.774, 0.228), *McDonald's* (0.582, 0.173) за період часу з 25.11.2013 до 28.12.2015 (110 спостережень). В дужках після назв компаній вказано p -значення тестів Колмогорова-Смірнова на нормальність розподілу дохідностей та Бокса-Пірса на неавтокорельованість (зі зміщенням 1)

дохідностей. При рівні довіри 95% для проведених тестів наше припущення про незалежність та неавтокорельованість дохідностей є коректним.



Джерело: розроблено автором

Рис. 1. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000\}$ та $k=5$.

На рис. 1 представлено емпіричні та асимптотичну густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000\}$ та $k=5$. Швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної є доволі швидкою, отже інвестор при управлінні своїм портфелем фінансових активів може використовувати результати теореми 2.

Список використаних джерел

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. — 1952. — № 7. — P. 77–91.
2. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of econometrics. — 2006. — № 134. — P. 235–256.
3. Alexander G. J. Portfolio selection with mental accounts and delegation / G. J. Alexander, A. M. Baptista // Journal of banking and finance. — 2011. — № 35. — P. 2637–2656.