

VI. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

УДК 519.863

Є. М. Борисов, канд. фіз.-мат. наук,
асистент кафедри вищої математики КНЕУ

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НАБЛИЖЕНИМ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРУ

Знайдено наближений розв'язок нелінійної задачі пошуку мінімуму функції прогнозованих витрат. Задача зводиться до розв'язання нелінійної системи рівнянь, що містить параметр. Для розв'язання цієї системи застосовується наближений аналітичний метод малого параметру, який ефективно застосовується для розв'язання багатьох задач механіки, фізики тощо. Розв'язки будуються у вигляді розкладів по степеням малого параметру. Похибка розрахунків для розглянутих у роботі прикладів у середньому не перевищує 1 %.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійна задача, функція, метод малого параметру.

Сучасні економічні та техніко-економічні системи характеризуються з одного боку складними математичними моделями, а з іншого — підвищеними вимогами щодо точності їх дослідження. Однією із основних причин, що суттєво ускладнює розв'язання, є наявність нелінійності, яка, як і для більшості задач природничих галузей, притаманна й економічним задачам [6].

Як відомо, лінійні методи моделюють будь який економічний процес чи систему лише наближено, при цьому похибки в таких дослідженнях можуть бути настільки великими, що унеможливають використання в подальшому отриманих результатів. Крім того лінійні моделі, як правило, є занадто громіздкими, так як для отримання більш точних результатів досліднику необхідно враховувати велику кількість параметрів [7].

З іншого боку економічні та техніко-економічні системи, як правило, є настільки складними за своєю структурою, що співвідношення витрат на експлуатацію цих систем до коштів, які витрачено на створення систем може коливатися в межах одного-двох порядків. Такі дані вказують на актуальність проблеми дослідження витрат на експлуатацію таких систем, про що докладно йдеться у роботі [4].

З математичного боку, як правило, такі системи описуються нелінійними функціями багатьох змінних, що приводить до необхідності розв'язання нелінійних систем рівнянь.

Відомо, що розв'язання нелінійних задач пов'язано з великими труднощами — насамперед з математичними розрахунками. Точні розв'язки таких задач вдається отримати тільки в деяких найпростіших випадках. Тому дослідники звертаються до різних наближених методів — чисельних, чисельно-аналітичних та аналітичних. Перевага аналітичних методів полягає у тому, що у розв'язках можна утримувати необхідні параметри (один або декілька), присутність яких у результаті дає можливість отримати відразу цілу множину розв'язків.

В даній статті розглянуто застосування наближеного аналітичного методу малого параметру (метод збурення по параметру) для знаходження мінімуму функції прогнозованих витрат на експлуатацію складної системи при заданих обмеженнях. Слід зауважити, що подібна задача розглянута в роботі [4], де для пошуку мінімуму функції витрат застосовується модифікований метод невизначених множників Лагранжа.

В роботі отримані наближені розв'язки та проведено аналіз числових результатів.

Розглянемо деяку функцію витрат $f(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$. Нехай $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ — надійність роботи відповідно i -го елементу системи $0 \leq x_i \leq 1$, $i = \overline{1-n}$.

В якості функції витрат, що дозволяє з необхідним рівнем точності апроксимувати емпіричну залежність витрат від надійності $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$, виберемо нелінійну функцію у вигляді многочлена по цілим степеням порядку k з додатними коефіцієнтами.

Будемо виходити з того, що на досліджувану систему накладені деякі обмеження, які в даному випадку запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n x_i = A. \quad (1)$$

Нехай залежність витрат на експлуатацію системи від надійності $\bar{x}$ визначено експериментально, тобто функцію витрат задано. Поставимо за мету знайти такий набір $\bar{x}$, щоб функція витрат набувала найменшого значення при заданих обмеженнях (1). Фактично маємо задачу оптимізації деякої економічної (технічної) системи. При цьому припускається, що функція $f(\bar{x})$ має наступні властивості:

1) функція $f(\bar{x})$ монотонно спадна для будь-яких значень змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ з проміжку $0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, n}$;

2) при $\bar{x} = 1$ $f(\bar{x}) = A$, де A — константа.

Зауважимо, що в якості аргументів функції витрат можуть бути й інші характеристики системи.

Нехай функція витрат має наступний вигляд

$$f(\bar{x}) = f_0(\bar{x}) + \varepsilon f^*(\bar{x}), \quad (2)$$

де ε — малий параметр, $f^*(\bar{x})$, $f_0(\bar{x})$ — деякі функції, які мають вигляд многочленів порядку не більше k . У цьому випадку кажуть, що другий член в (2) вносить збурення до функції $f_0(\bar{x})$. Причому функція $f_0(\bar{x})$ така, що для неї можна знайти точний аналітичний розв'язок поставленої задачі. Іншими словами, якщо покласти в рівнянні (2) $\varepsilon = 0$, то функція витрат прийме вигляд

$$f(\bar{x}) = f_0(\bar{x}). \quad (3)$$

Ця ситуація відповідає простішому (як приклад лінійному) випадку роботи системи.

Нехай вимоги точності до розрахунків підвищились або сама система за своєю структурою вимагає розгляду складнішої функції витрат порівняно з функцією $f_0(\bar{x})$. Нехай нова функція витрат має вигляд (2). При цьому другий доданок у цій формулі називають збуренням. Природно очікувати, що другий доданок $\varepsilon f^*(\bar{x})$ вносить поправку або доповнення до основного $f_0(\bar{x})$. Зупинимось на цьому детальніше. Дійсно, якщо доданок $\varepsilon f^*(\bar{x})$ за своєю величиною такий, як основний або навіть і більший, то приходимо до висновку, що функція витрат $f_0(\bar{x})$ задана не коректно і вона вимагає змін.

Будемо розглядати функцію витрат на експлуатацію всієї системи як суму витрат на експлуатацію її окремих елементів x_i , кожний з яких у даному випадку представимо у вигляді многочлена третього степеня.

Нехай функція витрат є функцією n змінних і має такий вигляд:

$$f(\bar{x}) = A + a_1(1 - x_1) + a_2(1 - x_1)^2 + a_3(1 - x_1)^3 + b_1(1 - x_2) + b_2(1 - x_2)^2 + b_3(1 - x_2)^3 + \dots + c_1(1 - x_n) + c_2(1 - x_n)^3 + c_3(1 - x_n)^3.$$

Очевидно, що властивості (1, 2) для даної функції виконуються автоматично для всіх додатних коефіцієнтів.

Зауважимо, що головна мета цієї роботи полягає в тому, щоб продемонструвати застосування методу малого параметру для розв'язання нелінійних задач оптимізації. В зв'язку з цим, для того, щоб конкретизувати дану задачу, надамо числовим коефіцієнтам деяких значень (які в даному випадку вибрані довільним чином). Для прикладу розглянемо функцію витрат, що залежить від п'яти змінних x, y, z, v, w і має такий вигляд

$$f(x, y, z, v, w) = x + 2x^2 + y + 3y^2 + z + 2z^2 + w + 3w^2 + v + 4v^2 + \varepsilon(4x^3 + y^3 + 4z^3 + w^3 + v^3), \quad (4)$$

де нові змінні виражаються через попередні наступним чином:

$$x = 1 - x_1, \quad y = 1 - x_2, \quad z = 1 - x_3, \quad v = 1 - x_4, \quad w = 1 - x_5.$$

Обмеження (1) запишемо у вигляді

$$x + y + z + v + w = A. \quad (5)$$

Дане рівняння дозволяє виразити одну змінну через інші. Скористаємося цим і запишемо

$$w = A - x - y - z - v. \quad (6)$$

Тоді, якщо підставимо вираз (6) у функцію (4), отримаємо функцію чотирьох змінних. При цьому немає необхідності застосовувати метод Лагранжа для розв'язання даної задачі. Для знаходження точок екстремуму знайдемо частинні похідні функції (4). З урахуванням (6) будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, z, v)}{\partial x} &= 10x - 6A + 6y + 6z + 6v + \varepsilon(12x^2 - 3(A - x - y - z - v)^2), \\ \frac{\partial f(x, y, z, v)}{\partial y} &= 12y - 6A + 6x + 6z + 6v + \varepsilon(3y^2 - 3(A - x - y - z - v)^2), \\ \frac{\partial f(x, y, z, v)}{\partial z} &= 10z - 6A + 6x + 6y + 6v + \varepsilon(12z^2 - 3(A - x - y - z - v)^2), \\ \frac{\partial f(x, y, z, v)}{\partial v} &= -6A + 6x + 6y + 6z + 14v + \varepsilon(-3(A - x - y - z - v)^2 + 3v^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Прирівнюючи знайдені частинні похідні до нуля, отримаємо нелінійну алгебраїчну систему рівнянь, що містить параметр A .

$$\begin{cases} 10x - 6A + 6y + 6z + 6v + \varepsilon(12x^2 - 3(A - x - y - z - v)^2) = 0, \\ 12y - 6A + 6x + 6z + 6v + \varepsilon(3y^2 - 3(A - x - y - z - v)^2) = 0, \\ 10z - 6A + 6x + 6y + 6v + \varepsilon(12z^2 - 3(A - x - y - z - v)^2) = 0, \\ -6A + 6x + 6y + 6z + 14v + \varepsilon(-3(A - x - y - z - v)^2 + 3v^2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Якщо покласти в системі (8) $\varepsilon = 0$, то отримаємо лінійну алгебраїчну систему, яка має такий розв'язок:

$$x_0 = \frac{6}{23}A, \quad y_0 = \frac{4}{23}A, \quad z_0 = \frac{6}{23}A, \quad v_0 = \frac{3}{23}A. \quad (9)$$

Метод розв'язання. Для знаходження розв'язків нелінійної задачі скористаємось методом малого параметру [1 — 3, 5]. При цьому наближені розв'язки будуються у вигляді розкладів або рядів по змінним, що входять у систему.

Припустимо, що функція витрат (4) задана коректно і адекватно відображає економічну систему чи процес. Тоді постає питання — на яку частину в порівнянні з основним (3) дає доповнення або уточнення другий член у (2). Відповідь на це питання не є однозначним і залежить від багатьох факторів конкретної задачі. При цьому слід зауважити, що у більшості задач [1 — 3, 5] де застосовувався цей метод, член збурення становив у середньому від 10 до 40 % від загальної суми (2). Іншими словами, даний метод малого параметру дає уточнення до відомого результату (як правило лінійного) до 40 %. При цьому похибка при розрахунках знаходиться, як правило, в межах одного відсотка.

Згідно методу малого параметру представимо шукані розв'язки у вигляді розкладів

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon \cdot x_1 + \varepsilon^2 \cdot x_2 + \varepsilon^3 \cdot x_3 + \varepsilon^4 \cdot x_4 + \dots \\ y &= y_0 + \varepsilon \cdot y_1 + \varepsilon^2 \cdot y_2 + \varepsilon^3 \cdot y_3 + \varepsilon^4 \cdot y_4 + \dots \\ z &= z_0 + \varepsilon \cdot z_1 + \varepsilon^2 \cdot z_2 + \varepsilon^3 \cdot z_3 + \varepsilon^4 \cdot z_4 + \dots \\ v &= v_0 + \varepsilon \cdot v_1 + \varepsilon^2 \cdot v_2 + \varepsilon^3 \cdot v_3 + \varepsilon^4 \cdot v_4 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Перший член розкладу (x_0, y_0, z_0, v_0) називається членом нульового порядку, другий член $\varepsilon(x_0, y_0, z_0, v_0)$ — членом першого порядку і т. д.

Вкажемо на ще одну особливість цього методу. Метод малого параметра з математичної точки зору є асимптотичним, тобто ряди (10) не мають абсолютної збіжності. Постає питання — скільки треба взяти членів ряду, щоб, з одного боку отримати точніший результат, а з іншого — не потрапити в область, де ряд починає розбігатися. На жаль чіткої відповіді на це питання не існує. Але слід відмітити, що в більшості задач досить висока точність (похибка менше одного відсотка) забезпечувалась вже декількома першими членами ряду [2, 3, 5] (як правило не більше чотирьох). Також зауважимо, що у багатьох задачах, де застосовувався цей метод, дослідники обмежувались першими трьома і навіть двома членами ряду [1].

Перший крок полягає в підстановці розкладу (10) у систему (8). На другому кроці виконуємо елементарні перетворення і групування коефіцієнтів при однакових степенях ε . Зауважимо, що для даного випадку будемо зберігати лише члени порядку не вище ε^4 . На третьому кроці прирівнюємо до нуля всі коефіцієнти при степенях ε . Таким чином, отримаємо рекурентну послідовність лінійних систем рівнянь (які через громіздкість тут не приводимо). Далі розв'язуємо послідовно ці системи рівнянь. На останньому кроці підставляємо отримані розв'язки в початковий розклад (10). Тоді, для даного прикладу, отримаємо такі розв'язки:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 - \frac{4287}{48668} \varepsilon A^2 + \frac{1877031}{25745372} \varepsilon^2 A^3 - \frac{957549627}{13619301788} \varepsilon^3 A^4 + \\
 &\quad + \frac{537342884775}{7204610645852} \varepsilon^4 A^5, \\
 y &= y_0 - \frac{1515}{24334} \varepsilon A^2 - \frac{696915}{12872686} \varepsilon^2 A^3 + \frac{355471605}{6809650894} \varepsilon^3 A^4 + \\
 &\quad + \frac{198269355015}{3602305322926} \varepsilon^4 A^5, \\
 z &= z_0 - \frac{4287}{48668} \varepsilon A^2 + \frac{1877031}{25745372} \varepsilon^2 A^3 - \frac{957549627}{13619301788} \varepsilon^3 A^4 + \\
 &\quad + \frac{537342884775}{7204610645852} \varepsilon^4 A^5, \\
 v &= v_0 + \frac{1257}{24334} \varepsilon A^2 - \frac{483201}{12872686} \varepsilon^2 A^3 + \frac{246606417}{6809650894} \varepsilon^3 A^4 - \\
 &\quad - \frac{140804174745}{3602305322926} \varepsilon^4 A^5.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Зауважимо, що значення для п'ятої змінної тут і далі знаходимо з рівності (6). Нижче наведені декілька прикладів числових розрахунків для різних значень параметра A та малого параметра ε .

Приклад 1. Нехай $A = 1$, $\varepsilon = 0,6$. Тоді вирази (9), (11) приймуть такі значення:

$$\{z_0 = 0,2608695652; v_0 = 0,1304347826; y_0 = 0,1739130435; x_0 = 0,2608695652\},$$

$$\{x = 0,2287436871; y = 0,1959204456; z = 0,2287436871; v = 0,1506717345\}.$$

Слід відмітити, що знайти точний розв'язок для нелінійної системи рівнянь (8) не вбачається можливим. Для того, щоб перевірити точність отриманих результатів, пропонується підставляти отримані наближені розв'язки (11) в кожне із рівнянь системи (8). Для спрощення позначимо рівняння системи (8) відповідно q_1, q_2, q_3, q_4 . Тоді для даного прикладу отримаємо наступні значення:

$$q_1 = 0,0470898528; q_2 = -0,6 \cdot 10^{-10}; q_3 = 0,0470898528; q_4 = 0,00162207398.$$

Приклад 2. Нехай $A = 1$, $\varepsilon = 0,4$. Розв'язки лінійної задачі при цьому не зміняться, а наближені наближенні розв'язки будуть такими:

$$\{x = 0,2347097160; y = 0,1920860832; z = 0,2347097160; v = 0,1464084016\}.$$

Критерії точності в даному випадку будуть:

$$q_1 = 0,0064714123; q_2 = -0,4 \cdot 10^{-9}; q_3 = 0,0064714123; q_4 = 0,00019674103.$$

Приклад 3. $A = 0,5$, $\varepsilon = 0,4$. Тоді отримаємо:

$$\{z_0 = 0,1304347826; v_0 = 0,06521739130; y_0 = 0,08695652175; x_0 = 0,1304347826\};$$

$$\{x = 0,1228627035; y = 0,09226437051; z = 0,1228627035; v = 0,06974585200\};$$

$$q_1 = 0,00010650488; q_2 = 0,4 \cdot 10^{-11}; q_3 = 0,00010650498; q_4 = 0,2716768 \cdot 10^{-5}.$$

Приклад 4. Нижче наведені відповідні числові розрахунки для випадку, коли $A = 1,3$, $\varepsilon = 0,4$.

$$\{z_0 = 0,3391304348; v_0 = 0,1695652174; y_0 = 0,2260869566; x_0 = 0,3391304348\};$$

$\{x = 0,2994498528; y = 0,2534530916; z = 0,2994498528;$
 $v = 0,1941941115\};$
 $q1 = 0,0304117295; q2 = 0,228 \cdot 10^{-8}; q3 = 0,0304117295;$
 $q4 = 0,00100180524.$

Приклад 5. Зафіксуємо значення малого параметру $\varepsilon = 0,2$ і будемо змінювати параметр A .

а) Якщо покласти $A = 1,5$, то відповідно отримаємо:

$\{z0 = 0,3913043478; v0 = 0,1956521739; y0 = 0,2608695653;$
 $x0 = 0,3913043478\};$
 $\{x = 0,3595665799; y = 0,2830225650; z = 0,3595665799;$
 $v = 0,2148217103\};$
 $q1 = 0,0023613676; q2 = 0,6 \cdot 10^{-10}; q3 = 0,0023613676;$
 $q4 = 0,00006624902.$

б) Нехай $A = 2$. Тоді вирази (9), (11) приймуть такі значення:

$\{z0 = 0,5217391304; v0 = 0,2608695652; y0 = 0,3478260870;$
 $x0 = 0,5217391304\};$
 $\{x = 0,4694194321; y = 0,3841721662; z = 0,4694194321;$
 $v = 0,2928168032\};$
 $q1 = 0,0129428254; q2 = -0,124 \cdot 10^{-8}; q3 = 0,0129428254;$
 $q4 = 0,00039348392.$

Як видно з приведених результатів, отримані розв'язки відрізняються від розв'язків відповідної лінійної задачі у середньому на 10—15 %. При цьому слід відмітити, що точність розрахунків залежить від числових значень параметрів A та ε . Слід відмітити, що із збільшенням малого параметру точність розрахунків відповідно зменшується (якщо значення параметру A залишається незмінним). Зауважимо, що для всіх знайдених наближених і точних розв'язків (розв'язки, які відповідають випадку, коли малий параметр дорівнює нулю) системи виробнича функція набуває свого мінімального значення при заданих обмеженнях. У цьому неважко переконатись, провівши відповідні стандартні розрахунки (наприклад за допомогою матриці Гессе) для кожного із знайдених розв'язків системи.

Таким чином за допомогою аналітичного методу малого параметру в роботі знайдені наближені розв'язки нелінійної задачі оптимізації при заданих обмеженнях.

У роботі знайдено наближений розв'язок нелінійної задачі пошуку мінімуму функції прогнозованих витрат на експлуатацію складної системи. Задача зводиться до розв'язання нелінійної системи рівнянь, що містить параметр. Для розв'язання цієї системи застосовується наближений аналітичний метод малого параметру, який ефективно застосовується для розв'язання багатьох

задач механіки, фізики тощо. Розв'язки будуються у вигляді розкладів по степеням малого параметру. При цьому у розкладі (10) утримується члени порядку не вище ε^4 . Похибка розрахунків для розглянутих у роботі прикладів залежить від обраних параметрів A та ε і для більшості прикладів не перевищує 1 %.

За допомогою цього методу були знайдені наближені розв'язки нелінійної системи рівнянь, що містить параметр, який можна інтерпретувати як параметр керування. Проведені чисельні експерименти підтверджують високу ефективність методу. Запропонований у роботі метод малого параметру може бути розповсюджений на інші нелінійні економічні задачі, зокрема на задачі пошуку максимуму або мінімуму функцій різного аналітичного вигляду (наприклад із більшою кількістю змінних або із більшим порядком многочлена) та при різних обмеженнях.

Література

1. *Борисов Е. Н.* Приближенное аналитическое решение физически нелинейной пространственной задачи упругого равновесия слоистой прямоугольной плиты // Прикладная механика. — 2003. — Т. 39, № 8. — С. 104—112.
2. *Борисов Є. М., Кулик А. Б.* Наближений розв'язок задачі знаходження розподілу функції випадкового аргументу методом малого параметру // Вчені записки. Науковий збірник. — В. 7. — К. — С. 167—174.
3. *Борисов Є. М., Кулик А. Б.* Знаходження щільності розподілу функції випадкового аргументу наближеним методом малого параметру // Моделювання та інформаційні системи в економіці.- Міжвідомчий науковий збірник. — В. 72. — К., 2005. — С. 114—124.
4. *Наконечний С. І., Совтус І. К., Капишон В. Г.* Критерії прогнозованих витрат у нелінійній економіко-математичній моделі оптимізації структури складних проєктованих систем // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Міжвід. наук. зб./ — К.: КНЕУ Вип. 67. — 2002. — С. 53—70.
5. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений //— М.: Мир. — 1984. — 535 с.
6. *Корнійчук М. Т., Кубрушко Ю. О.* Регресійна економічна модель лінійного прогнозу з коригованою поправкою на нелінійність // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Міжвід. наук. зб./ — К.: КНЕУ.— Вип. 70. — 2003. — С. 58—63.
7. *Саркисян С. А., Кастин В. И., Лисичкин В. А.* Теория прогнозирования и принятия решений. — М.: Высш. школа, 1977. — 352 с.

Стаття надійшла до редакції 31.01.2006