Martynova M.
PhD student / dokdorantka
Univercity of West Bohemia
martynov@kiv.zcu.cz

НОВЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ТА ПРАКТИЧНИЙ ДОКАЗ МЕТОДУ АБСОЛЮТНОЇ НАЙМЕНШОЇ КВАДРАТИЧНОЇ ПОМИЛКИ В N-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ З ВІДОБРАЖЕННЯМ НА ПАРАМЕТРИЧНУ ЛІНІЮ

Нове формулювання методу TLSE (Total Least Square Error), що було приведене в 2016 року має теоретичну базу для використання з точками, що лежать в евклідовому просторі на прямій лінії. Було необхідно привести практичну реалізацію рішення та отестувати спрацювання методу для оцінки його практичної цінності (актуальність, точність, швидкодію та інші параметри).

Стандартна апроксимація методом найменшої похибки для явно заданої функції:

$$y = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta},$$

де: $\boldsymbol{x}$ - n-мірне значення, ξ - вектор невизначених коефіцієнтів в загальному випадку.

Система визначених рівнянь для розрахунку ξ:

$$\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{b},$$

де: $\boldsymbol{A}$ – матриця значень x, $\boldsymbol{b}$ – матриця значень y для кожної даної точки.

Визначення похибки:

$$r = ||\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\,||,$$
$$r^2 = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b})\,.$$

Після чого приведемо похибку в матричну форму та знайдемо екстремум, що приведе до системи лінійних рівнянь, якщо матриця $\boldsymbol{A}$ симетрична.

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}$$

На основі даних тверджень розглянемо задачу пошуку прямої, що має найкраще приближення з точками $\{< \boldsymbol{x}_p >\}_{p=1}^{N}, \boldsymbol{x}_p \in E^n$ в n-мірному евклідовому.

З базисної статті [1] в якості кінцевого формулювання:

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_p \boldsymbol{x}_p \otimes \boldsymbol{x}_p = \sum_p \boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{x}_p{}^T$$
$$\boldsymbol{\Omega\, s} - \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\Omega\, s\, s} = \boldsymbol{0}$$

і, якщо потребуєме простіший запис:

$$(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\Omega\, s} \cdot \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0},$$

де: $\boldsymbol{\Omega}$ – матриця, $\boldsymbol{s}$ – нормалізований вектор прямої $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{s}t$ з параметрем t, $\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\Omega\, s}$ – скалярні значення, $\boldsymbol{I}$ – одинична квадратна матриця.

Для доказу даного методу необхідно взяти деякі точки, що лежать на прямій в тримірному просторі, і показати, що приведена вище система нелінійних рівнянь має значення нормованого вектору в якості коренів рішення.

З стандартного рівняння прямої в 3-мірному просторі:

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{p}\,,$$

очевидно, що існує точка $\boldsymbol{x}_0$ *(x = 0, y = 0, z = 0)*. Далі генеруєме 3 точки на лінії і спрацюєме дані згідно зі сформульованим методем. В результаті маємо систему нелінійних рівнянь, далі розрахуємо нормований вектор $\boldsymbol{s}$ і з його допомогою вирішуемо ліву частину отриманої системи:

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{s}) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{s}) = 0 \\ f_3(\boldsymbol{s}) = 0 \end{cases}$$

Оскільки функції предетерміновані, то розрахуємо похибку знайдених рішень:

$$r(s) = [f_1(s), f_2(s), f_3(s)]^T [f_1(s), f_2(s), f_3(s)].$$

Скрипти доказу можна знайти в додатках базової статті. Результати спрацювання говорять, що приведені формулювання вірні, що приводить нас до рішення системи нелінійних рівнянь з n невідомими членами. Оптимальним рішенням є скористатися методом оптимізації, такими як метод Ньютона, оскільки задача зводиться до мінімалізації функції:

$$f_1(s)^2 + f_2(s)^2 + f_3(s)^2 = f(s)$$

Для багатомірного випадку метод Ньютона має наступний вигляд:

$$x_{i+1} = x_i - J^{-1}[f(x_i)]\, f(x_i),$$

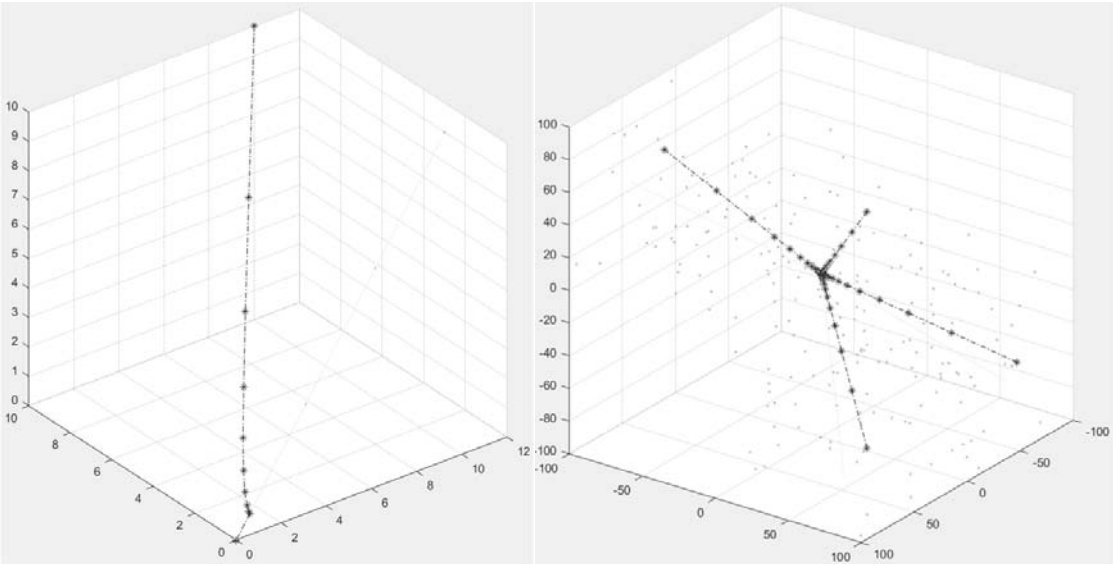

Рис. 1. Тримірний (зліва) і чотиримірний (зправа) випадки зпрацювання жовта лінія – віднайдена пряма, синій штрих – спрацювання алгоритму метода Ньютона, червені зірки – конкретні значення кроків алгоритму, зелені точки – вигенеровані данні для випадку, коли точки лежать не на лінії.

Список використаних джерел

1. Skala V. A New Formulation for Total Least Square Error Methodin d-dimensional Space with Mappingto a Parametric Line, 2016, ICNAAM 2015, AIP Conf. Proc.1738, pp.480106-1 - 480106-4. http://dx.doi.org/10.1063/1.4952342.
2. Avriel M. NonlinearProgramming: AnalysisandMethods. Mineola, NewYork: Dover Publications, 2003. 544 pp3. ISBN-10: 0486432270, ISBN-13: 978-0486432274.
3. Bonnans, J.-F., Gilbert, J.C., Lemarechal, C., Sagastizábal, C.A. Numerical optimization: Theoretical and practical aspects. Universitext (1st ed. 2004. 2nd printing 2008 edition). Berlin: Springer-Verlag. MR 2265882, 21.11.2008. 574 pp. doi:10.1007/978-3-540-35447-5. ISBN-10: 3540874518. ISBN-13: 978-3540874515.
4. Zhang W. Methods for Solving Non linear Systems of Equations, 1135940, University of Washington 12.08.2013. https://sites.math.washington.edu/~wcasper/math326/ projects/wanjie_zhang.pdf.
5. Sureshkumar R., Rutledge G. C., SolutionofNon-LinearAlgebraicEquations, 10.01.1998. http://web.mit.edu/10.001/Web/Course_Notes/NLAE/index.html.
6. Алгоритм Левенберга – Марквардта для нелинейного метода наименьшихквадратов и его реализация на Python, 26.08.2016. https://habrahabr.ru/post/308626/.
7. Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O. METHODS FOR NON-LINEARLEAST SQUARES PROBLEMS 2nd Edition, 04.2004. http://soe.rutgers.edu/~meer/GRAD561/ADD/nonlinadvanced.pdf.
8. Brunet F. ContributionstoParametricImageRegistrationand 3D SurfaceReconstruction, 30.11.2010. http://www.brnt.eu/phd/manuscript-html.html

Науковий керівник: prof. Ing. Vaclav Skala, CSc., University of West Bohemia