3. *Jorion, Philippe,* Value at risk: the new benchmark for managing financial risk, 2nd ed. — McGraw-Hill, 2001. — 543 p.

4. Банковские риски : учебное пособие / кол. Авторов ; под ред. д-ра экон. наук, проф. О. И. Лаврушина и д-ра экон. наук, проф. Н. И. Валенцевой. — М. : КНОРУ : Сб 2007. — 232 с.

**УДК 311.76(477)(048)**

***Д. О. Пирх***,
Криворізький економічний інститут
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

# R/S-АНАЛІЗ ДИНАМІКИ КУРСІВ АКЦІЙ

*АНОТАЦІЯ. Досліджується внутрішня структура часового ряду курсів акцій «Arcelor Mitall Corporation» за допомогою апарату фрактального аналізу. Виявлено ключові особливості при використанні методів, які базуються на коефіцієнті Херста.*

*ANOTATION. The underlying structure of sentinel row of prices of equities of «Arcelor Mitall Corporation» is in-process investigated by the vehicle of fractal analysis. Were found out key features at the use of methods which are based on the coefficient of Hurts.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: коефіцієнт Херста, площа мінімального покриття, R/S-аналіз, мультифрактальний спектр, фрактальна розмірність, фондовий ринок, котирування акцій, структура часового ряду.*

*Вступ.* Кризи, які переживає економіка, зумовлюють непередбачуваність ринків капіталу, несподівані стрибки цін і, як наслідок, незрозумілі тренди. Явища трансформаційної економіки є предметом дослідження вчених-економістів.

Здебільшого наукова література, що присвячена аналізу ринків капіталу, ґрунтується на лінійних моделях, які не пояснюють зміни на фондових ринках. Такі моделі здатні адекватно описати окремі складові ринків цінних паперів. На противагу цьому, теорія хаосу і фрактальна геометрія представляє ринок як складну систему, здатну адаптуватися до змін у навколишньому середовищі в процесі своєї еволюції в часі. Такі процеси вирізняються довготривалою стійкістю. Проте умовами цієї стійкості є невизначеність у короткотерміновій перспективі. Існуючі теорії пояснюють великі падіння і дають результати досить переконливі, вони дозволяють з упевненістю сказати, що обґрунтоване передбачення тут не тільки можливе, але і є потужним чинником в управління інвестиційним процесом.

Щоб заповнити проміжок між довготривалою стійкістю і короткотерміновою перспективою нелінійних моделей, запропоновано алгоритм розрахунку фрактальної розмірності з використанням котирувань цін акцій. Якщо буде виявлена фрактальна структура фондового ринку, це стане доказом того, що ринок є нелінійною системою, а відтак для вивчення його властивостей слід використовувати нелінійні моделі.

*Мета статті.* Висувається гіпотеза про те, що український фондовий ринок є фрактальним і в своїй основі визначається процесом узагальненого броунівського руху. Як наслідок має властивість симетрії і довгострокової пам'яті, тобто підпорядковується постулатам одного з напрямків нелінійної економічної теорії — Гіпотези фрактального ринку (FMH).

В статті пропонується три алгоритми дослідження фрактальних властивостей за допомогою коефіцієнта Херста, для виявлення нелінійності українського фондового ринку на прикладі котирування акцій «Arcelor Mitall Corporation».

Поставлена задача проаналізувати методи визначення фрактальності ряду і виявити більш адекватну оцінку фрактальної розмірності $D_0$ з використання таких методів:

- нормованого розмаху ($R/S$-аналіз)
- площі мінімального покриття;
- мультифрактального спектру.

*Результати аналізу.* Ряд стохастичних моделей поведінки ціни акцій $S_t$ має таку властивість, як масштабна симетрія (властивість автомодельності) [3]. В такому разі симетрія означає збереження статистичних характеристик процесів при мультиплікативних перетвореннях $t \to \beta \cdot t$. До них відносяться, зокрема, узагальнений (дробове) броунівський рух $S_{H,t}$ (FBM, Fractional Brownian Motion; $H$-коефіцієнт Херста, $t$ — час), іноді — розподіл Парето-Леві $S_{\alpha,\,t}$ (PLs, Pareto-Levy stable distribution; тут $\alpha$-індекс стійкості).

Значення параметра Херста (Hurst) $H$ може залежати від часу, тобто $H = H(t)$. Це дає гнучкіші можливості обліку змін структури процесу. Ця модель відноситься до узагальненого броунівського руху $S_{H,\theta(t)}$, де $\theta(t)$ — функція часу; у одному з варіантів $\theta(t)$ називається мультифрактальним торгівельним часом. Відносно недавно з'явилась мультифрактальна модель прибутковості активів (MMAR, Multifractal Model of Asset Returns) [5].

Більш детально розглянемо таку характеристику часового ряду, як коефіцієнт Херста (*H*). Е. Федер [2] показав, що цей коефіцієнт пов'язаний з традиційною «клітинною» фрактальною розмірністю ($D_0$) простим співвідношенням:

$$D_0 = 2 - H. \tag{1}$$

Відповідно до формули (1), розглядаються «… клітинки, розміри яких малі порівняно, як з тривалістю процесу, так і з діапазоном зміни функції; тому співвідношення справедливе, коли структура кривої, що описує фрактальну функцію, досліджується з високим дозволом, тобто в локальній межі». А отже, при розрахунку коефіцієнта Херста можна визначити таку властивість часового ряду, як фрактальна розмірність.

Г. Херст, ґрунтуючись на великому фактичному матеріалі спостережень за стоками Нила, виявив, що для великих значень $n$ статистика $R_n / S_n$ веде себе наступним чином [3]:

$$\frac{R_n}{S_n} \sim cn^H ,$$

де $R_n$ — розмах ряду;

$S_n$ — стандартне відхилення ряду;

$c$ — деяка константа;

$H$ — коефіцієнт Херста.

Цей метод дослідження не повною мірою висвітлений у статистичній практиці, хоча заслуговує на увагу. Пояснюється це тим, що метод Херста дозволяє виявляти в статистичних даних такі властивості, як кластерність, тенденцію слідувати за напрямом тренду (persistence), швидку зміну фаз регулярної і хаотичної динаміки (autipersistence) послідовних значень, фронтальність, наявність періодичних і неперіодичних циклів, здатність розрізняти «стохастичну» і «хаотичну» природу шуму і тому подібне [3].

Окрім роботи Г. Херста [7], в розвитку теорії $R/S$-аналізу, його методології і використання значну роль зіграли роботи Б. Мандельброта і його співавторів [5], а також роботи Е. Петерса [1, 8], що містять великий (описовий) матеріал, який відноситься до застосувань $R/S$-аналізу на фінансових ринках.

Зважаючи на це, припустимо, що $S = (S_n)_{n \geq 0}$ — деякий фінансовий індекс, $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$, $n \geq 1$.

Суть $R/S$ — аналізу стосовно дослідження властивостей послідовності $h = (h_n)_{n\ge1}$ полягає в наступному.

Утворюємо величину $H_n = h_1 + ... + h_n,\ n \ge 1$.

$$R_n = \max_{k\le n}\left(H_k - \frac{k}{n}H_n\right) - \min_{k\le n}\left(H_k - \frac{k}{n}H_n\right). \qquad (2)$$

Величина $\bar{h}_n \equiv \frac{H_n}{n}$ емпірична середня, побудована за даними вибірки $(h_1,\ h_2,\ ...,\ h_n)$. Звідси $H_k - \frac{k}{n}H_n = \sum_{i=1}^{k}(h_i - \bar{h}_n)$ є величиною відхилення $H_k$ від емпіричного середнього значення $\frac{k}{n}H_n$. Сама ж величина $R_n$ характеризує міру «розмаху» цих відхилень $H_k - \frac{k}{n}H_n,\ k \le n$.

Тоді

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(h_k - \bar{h}_n\right)^2. \qquad (3)$$

Г. Херст експериментально довів, що для часових рядів справедливо:

$$R_n / S_n = (N/2)^H. \qquad (4)$$

Зазначимо також, що коефіцієнт Херста є мірою варіабельності ряду — схильності процесу до трендів (на відміну від звичайного броунівського руху) [1]. Значення $H > 0{,}5$ означає, що спрямована в певний бік динаміка процесу у минулому, найімовірніше, спричинить продовження руху в тому ж напрямі. Якщо $H < 0{,}5$, то прогнозується, що процес змінить спрямованість, $H = 0{,}5$ означає невизначеність, тобто броунівський рух.

Розглянемо ряд котирувань акцій «Arcelor Mitall Corporation» за період з 02.01.1998 р. по 07.11.2008 р. (рис. 1).

Розраховані за даними ряду котирувань значення коефіцієнта Херста (рис. 2) свідчать про фрактальну структуру, оскільки можна простежити наявність тренду. Розрахунок коефіцієнта Херста вимагає значного обсягу висхідної інформації, а тому використання його для прогнозування короткострокових перспектив малоефективне.

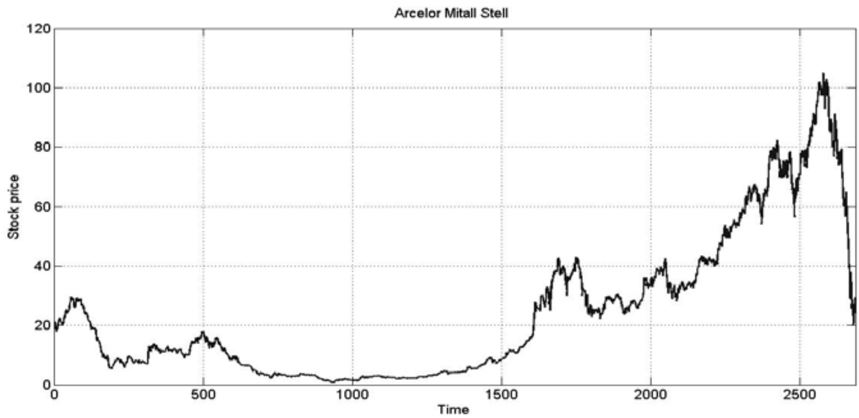


Рис. 1. Ряд котирувань акцій «Arcelor Mitall Corporation»
за період з 02.01.1998 р. по 07.11.2008 р.

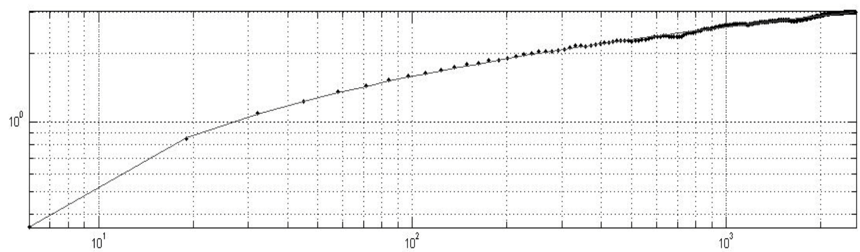


Рис. 2. Розрахунок коефіцієнта Херста для
«*Arcelor Mitall Corporation*» у подвійному логарифмічному масштабі

На рис. 2. видно, що фрактальна розмірність становить $D_0 = 0{,}99027$, проте зі зміною кількості точок, що потрапляють в інтервал, фрактальна розмірність також змінюється. Це ще один недолік цього методу.

Окрім узагальненої фрактальної розмірності, для характеристики ряду можна використати функцію мультифрактального спектру $f(\alpha)$ (або спектр сингулярностей мультифрактала) [4].

Річ в тім, що однією з основних характеристик мультифрактала є набір ймовірностей $p_i$, які показують відносну насиченість комірок ε, які покривають цю множину. Чим менший розмір комірки, тим менша величина її населеності. У такому разі статистична сума має вигляд [4]:

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon^{Dq} \approx \varepsilon^{D(q-1)} \,. \tag{5}$$

де $Z(q,\varepsilon)$ — загальна статистична сума, яку характеризує показник міри $q$, і може приймати будь які значення на проміжку $-\infty < q < +\infty$;

$D_q$ — спектр загальних фрактальних розмірностей.

Коли $\tau(q) = D(q-1)$, усі узагальнені фрактальні розмірності $D_q = D$ співпадають і не залежать від $q$. Але для мультифракталу типовою є ситуація, коли $\alpha \in [\alpha_{\min},\ \alpha_{\max}]$.

Знайдемо розподіл ймовірних значень $\alpha_i$. Нехай $n(\alpha)d\alpha$ є ймовірність того, що $\alpha_i$ знаходиться на проміжку від $\alpha$ до $\alpha + d\alpha$, причому $n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}$ встановлює зв'язок функції $f(a)$ із функцією $Z(q,\,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon)$. Обчислимо для цього статистичну суму $Z(q,\varepsilon)$. Підставляючи ймовірності $p_i \approx \varepsilon^{\alpha_i}$ і переходячи від суми по *i* до інтегрування по $\alpha$, одержимо

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q (\varepsilon\varepsilon \approx \int d\alpha \alpha n(\alpha)^{q\alpha} \approx \int d\alpha \alpha^{q\alpha - f(\alpha(} . \qquad (6)$$

Проводячи оцінку інтегралу, можна дійти висновку, що

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)). \qquad (7)$$

Звідси

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq}. \qquad (8)$$

Рівняння (7) і (8) задають перетворення Лежандра від змінних $\{q, \tau(q)\}$ до змінних $\{\alpha, f(\alpha)\}$

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq}; \qquad (9)$$

$$f(\alpha) = q\frac{d\tau}{dq} - \tau. \qquad (10)$$

Саме це рівняння покладено в основу методів дослідження мультифрактальних властивостей складних систем.

Мультифрактальний спектр для ряду котирувань цін акцій «Arcelor Mitall Corporation» зображено на рис. 3. На рисунку видно, що $f(\alpha) = 1$, а для коефіцієнта Херста фрактальна розмірність була $D_0 = 0{,}99027$. Тобто можна стверджувати, що мультифрактал адекватніше описує часовий ряд. Однією з особливостей мультифрактального спектру $f(\alpha)$ є те, що для нього не потрібна велика вибірка даних, проте на результат розрахунків впливає вибір форми вейвлет-функції [6].

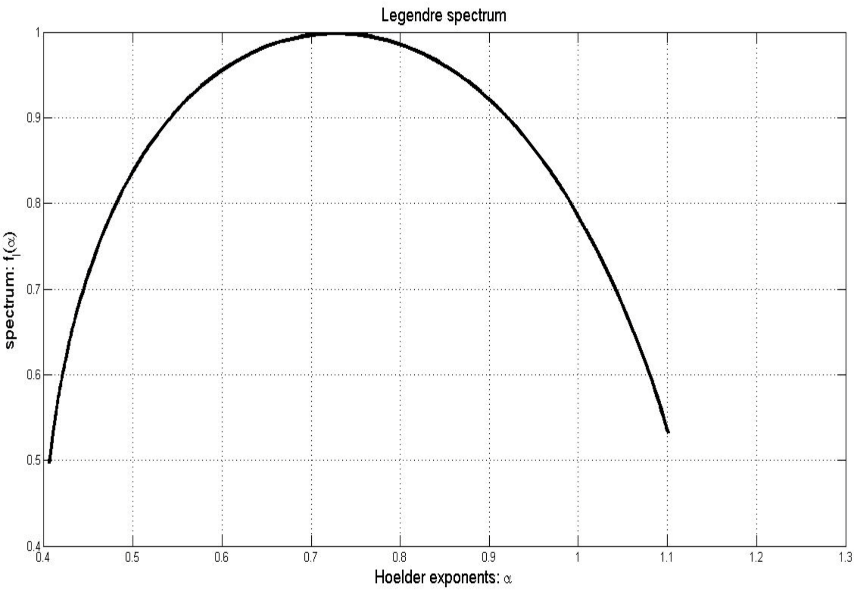


Рис. 3. Мультифрактальний спектр
для котирування цін акцій «Arcelor Mitall Corporation»

Фрактальна розмірність часового ряду може бути обчислена безпосередньо через клітинну розмірність $D_c$. Для визначення розмірності $D_c$ площина, на якій визначений графік часового ряду, розбивається на клітинки розміром $\delta$ і визначається число клітинок $N(\delta)$, де знаходиться бодай одна точка цього графіка. Потім міняється $\delta$ і в подвійному логарифмічному масштабі будується графік функції $N(\delta)$, який апроксимується прямою за допомогою методу найменших квадратів (МНК). Тоді $D_c$ визначається по куту нахилу цієї прямої. Проте для надійного обчислення, як $D_c$, так і коефіцієнта $H$ потрібний дуже великий репрезентативний масштаб, що містить кілька тисяч даних [2]. У середині цього масштабу часовий ряд, як правило, неодноразово міняє характер своєї поведінки. Щоб пов'язати локальну динаміку відповідного процесу з фрактальною розмірністю часового ряду, необхідно визначити розмірність $D$ локально. Для цього необхідно знайти послідовність апроксимацій, яка при фіксованому δ була б певною мірою оптимальною.

Введемо величину:

$$V_f \equiv \sum_{i=1}^{m} A_i(\delta) \qquad (11)$$

і назвемо $V_f(\delta)$ амплітудною варіацією функції $f(t)$, відповідною масштабу розбиття δ на відрізку $\lfloor a,\ b \rfloor$. Тоді повну площу покриття $S_\mu(\delta)$ можна записати у вигляді:

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta)^\delta . \qquad (12)$$

Зазначимо, що $S_\mu(\delta)$ є мінімальною площею покриття графіка з класу прямокутників, назовемо таке покриття мінімальним.

Далі випливає, що:

$$N(\delta) \sim \delta^{-\mu} \text{ при } \delta > 0 , \qquad (13)$$

де

$$\mu = D_\mu - 1 , \qquad (14)$$

де μ — індекс фрактальності, а $D_\mu$ — розмірність мінімального покриття.

Результати розрахунку зображено на рис. 4. Нехай $N_i(\delta)$ — число клітинок, що покривають графік $f(t)$ на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$.

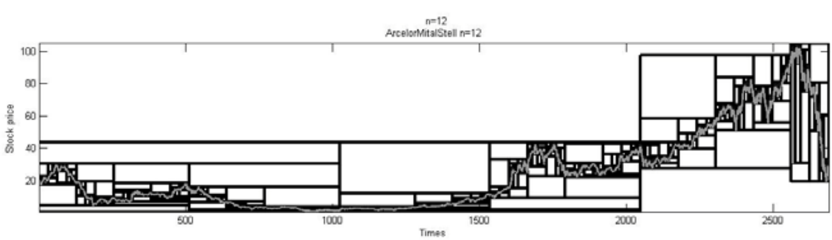


Рис. 4. Фрагмент мінімального (чорний прямокутник) покриття графіка фрактальної функції на відрізку $[t_{i-1}, t_i]$

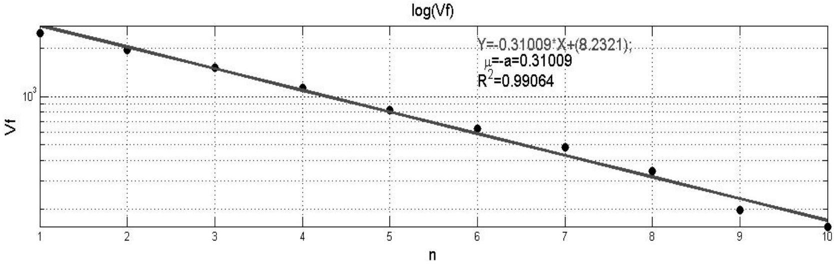


Рис. 5. Результати обчислення Vf(δ)у подвійному логарифмічному масштабі для часового ряду «Arcelor Mitall Corporation»

Пряма $y = ax + b$ на рис. 5 побудована методом МНК. На основі рис. 4. та 5 можна зробити висновок, що фрактальна розмірність при мінімальному покритті визначається більш точно, ніж при використанні перших двох методів. Це пояснюється тим що $D_\mu$ має швидкий вихід на степеневий асимптотичний режим для $D$. Таким чином, фрактальна розмірність для мінімального покриття $D_0 = D_\mu - 1{,}31$.

*Висновки.* Результати дослідження ряду котирувань цін акцій «Arcelor Mitall Corporation» за допомогою методів: коефіцієнта Херста *H*, мультифрактального спектру $f(\alpha)$ та площини мінімального покриття $S_\mu$ дозволяють зробити такі висновки: ряд котирувань акцій має чітко виражений тренд, це дає підстави стверджувати, що ринок цінних паперів є нелінійною системою, а відтак цю систему треба досліджувати нелінійними методами.

Порівняння трьох методів дослідження часового ряду засвідчує, що площа мінімального покриття $S_\mu$ адекватніше описує структуру ряду. Головна перевага досліджуваного методу — швидкий вихід на степеневий асимптотичний режим. Це забезпечує обґрунтоване передбачення змін у часі на фондовому ринку, що важливо для пошуку оптимальних управлінських рішень щодо інвестиційного процесу.

## ***Література***

1. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. — М.: Интернет-трейдинг, 2004. — 304 с.

2. *Федер Е.* Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

3. *Ширяев А.*Н. Основы стохастической финансовой математики. — Т. 1. Факты. Модели. Т. 2. Теория. — 1998.
4. *Божокин С.В*. Фракталы и мультифракталы // Божокин С.В. Паршин Д.А. — М.: R&C Dinamics, 2001. — 128с.
5. *Mandelbrot B. B*. // Mandelbrot B. B., Fisher A., Calvet L. A. Multifractal Model of Asset Returns / Cowles Foundation Discussion Paper. — September 15. 1997.-№ N1164.
6. *I. Daubechies*: Ten lectures on wavelets. — 1992.
7. *Hurst H*. Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770-808.
8. *Peters E. E*. Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility. New York: Wiley, 1991.

**УДК 519.866**

***О. В. Стець***, *доцент,*
***Г. В. Гладківська***, *студентка,*
*Національній технічний університет України «КПІ»*

# МОДЕЛЬ ОЦІНКИ ІНВЕСТИЦІЙНОГО РИЗИКУ ТА ПРОГНОЗ КОТИРУВАННЯ АКЦІЙ НА ПФТС

*АНОТАЦІЯ. На основі імітаційного моделювання та систем штучного інтелекту розроблено модель оцінювання фінансових ризиків Value at Risk.Розроблено програмний продукт, який дозволяє оцінювати майбутню піну акцій та ризик інвестора за показником вартісної міри ризику Value at Risk. Аналоги приведеному методу розрахунку в літературі знайдені не були.*

*SUMMARY. In the presented work, on the basis of imitation design and intelligence systems, the model of evaluation of financial risks was developed.*
*A software product was developed which allows to conduct the risk of investor is estimated after the index of Value at Risk. Analogus to the resulted method of calculation in literature were not found.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: котирування, нейронна мережа, інвестиційний ризик, прогнозування.*

**Вступ**. Під інвестиційною стратегією розуміють формування системи довготермінових цілей інвестиційної діяльності підприємства та вибір й обґрунтування найбільш ефективних шляхів їх досягнення [1].

Для формування стратегії своєї поведінки інвестору важливо оцінити ризики втрат при виборі того чи іншого активу до свого