

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ МЕТОДАМИ МОНТЕ - КАРЛО

Для розв'язування лінійних стохастичних рівнянь з випадковими коефіцієнтами розроблено статистичний алгоритм моделювання розв'язків. Розроблений алгоритм моделювання використовує різницеву схему знаходження розв'язку та спектральне представлення вінерівського процесу. Вінерівський процес моделюється з заданими точністю і надійністю в деякому функціональному просторі. Приведено результати моделювання розв'язку лінійного стохастичного рівняння з випадковими коефіцієнтами для якого відома асимптотична поведінка середнього значення і дисперсії. Отримані реалізації розв'язку і їх статистичні характеристики співпадають з теоретичними результатами.

For solutions of linear stochastic equations with random coefficients a statistical algorithm for simulation of solutions was developed. This algorithm is based on simulation of solutions for difference scheme and using spectral representation of the Wiener process. Wiener process is modeled with given accuracy and reliability in some functional spaces. The results of numerical modeling solutions of linear stochastic equations with random coefficients for which the known asymptotic behavior of the mean and variance. The resulting solutions and their statistical characteristics are consistent with the theoretical results.

Вступ

Методи статистичного моделювання випадкових процесів та полів використовується в багатьох прикладних задачах. Розширення області використання тісно пов'язане з швидким розвитком обчислювальної техніки, впровадженням GRID – технологій та обчислювальних систем великої потужності. Це дозволяє паралельно моделювати незалежні реалізації випадкових процесів та полів. З іншої сторони методи статистичного моделювання як найкраще підходять до розв'язування стохастичних задач. Серед таких задач і розв'язування диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами.

В більшості випадків метод статистичного моделювання використовується як альтернатива класичним чисельним методам. Так, статистичне моделювання використовується при розв'язанні задач переносу випромінювання, обчисленні кратних інтегралів та інтегралів з параметрами, при розв'язанні крайових задач та задач математичної фізики [1-3].

В обчислювальних задачах для оцінки точності моделювання використовуються оцінки моментів, швидкість слабкої збіжності та збіжність за ймовірністю [3-4]. Використання

збіжності в нормах функціональних просторів для оцінювання точності і надійності моделювання гаусових процесів та полів досліджується в роботі [4]. В якості моделі розглядаються субгаусові випадкові ряди.

Метою даної роботи є продовження досліджень методів моделювання субгаусових випадкових вінерівських процесів та використання алгоритмів статистичного моделювання для розв'язування стохастичних рівнянь. Актуальність досліджень пояснюється необхідністю розробки алгоритмів та оцінювання їх точності при розв'язуванні лінійних стохастичних рівнянь.

1. Основні поняття та означення

Нехай $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ - стандартний ймовірнісний простір. Нехай $(T, \mathcal{E}, \mu)$ - деякий вимірний простір, $X(t)$, $t \in T$ - строго субгаусовий випадковий процес.

Для моделювання гаусових випадкових процесів використовується представлення процесу у вигляді стохастичного ряду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k, \text{ де } \{X_k\} - \text{послідовність не-}$$

залежних гаусових випадкових величин з нульовим середнім та $EX_k^2 = \sigma_k^2$. Модель буду-

ється у вигляді $S_M(t) = \sum_{k=1}^M f_k(t)X_k$.

Нехай T - деяка параметрична множина, всі $S_M(t)$ та $X(t)$ належать деякому функціональному простору $A(T)$.

Означення 1. Модель $S_M(t)$ наближає процес $X(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю $0 < \varepsilon < 1$ в нормі функціонального простору $A(T)$, якщо $P\{\|\xi(t) - S_M(t)\|_A > \delta\} \leq 1 - \varepsilon$.

При реальному моделюванні послідовності $\{X_k\}$ отримуємо строго субгаусові випадкові величини.

Простір субгаусових випадкових величин є банаховим. Властивості субгаусових та строго субгаусових випадкових величин досліджувались в роботі [5].

2. Лінійні стохастичні рівняння з випадковими коефіцієнтами

Нехай $X(t)$ – векторний випадковий процес із простору R^m , що є розв'язком рівняння $dX(t) = A(t, \xi(t))X(t)dt +$

$$+ \sum_{j=1}^r B_j(t, \xi(t))X(t)dW_j(t), \quad (1)$$

$$X(0) = \zeta,$$

де $\xi(t)$ – неперервний справа марковський процес, що приймає скінчене число значень $\theta_1, \dots, \theta_q$, $A(t, \theta_s), B_j(t, \theta_s), s = \overline{1, q}$, - неперервні на відрізку $[0, T]$ функції, $W_1(t), \dots, W_r(t)$ – незалежні між собою скалярні вінерівські процеси, причому величини $(W_1(t), \dots, W_r(t), \xi(t), \zeta)$ - незалежні.

Позначимо через $P_s(t) = P\{\xi(t) = \theta_s\}$, $P_{kj}(t, s) = P\{\xi(t) = \theta_k \mid \xi(s) = \theta_s\}$. Будемо припускати, що існують неперервні на відрізку $[0, T]$ функції $\alpha_{kj}(t)$ такі, що

$$P_{kj}(t+h, t) = \delta_{kj} + \alpha_{kj}(t)h + o(h), \quad (2)$$

де δ_{kj} – символ Кронекера,

$$h > 0, \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Нехай

$$F_k(t, x) = P\{X(t) < x, \xi(t) = \theta_k\},$$

$$m_k(t) = \int_{R^m} x dF_k(t, x), \quad D_k(t) = \int_{R^m} x x^* dF_k(t, x).$$

Назвемо функції $m_k(t), D_k(t)$ частковими середніми та частковими матрицями других моментів відповідно.

В роботі [6] була доведена теорема.

Теорема 1. Нехай $X(t)$ є розв'язком рівняння (1), $E|\zeta|^2 < \infty$, а перехідні ймовірності марковського процесу $\xi(t)$ задовольняють умові (2). Тоді мають місце рівняння

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m(t) + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks}m_s(t), \quad (3)$$

$$m_k(0) = E\zeta P_k(0), \quad k = \overline{1, q},$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k(t)D_k(t) + D_k(t)A_k^*(t) + \sum_{j=1}^r B_{jk}(t)D_k(t)B_{jk}^*(t) + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks}D_s(t), \quad (4)$$

$$D_k(0) = E\zeta\zeta^* P_k(0), \quad k = \overline{1, q},$$

$$\text{де } A_k(t) = A(t, \theta_k), B_{jk}(t) = B_j(t, \theta_k).$$

Припустимо далі, що $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N \leq T$ є стрибки процесу $\xi(t)$ на проміжку $[0, T]$. $X(t)$ – розв'язок стохастичного рівняння (1) з умовами

$$X(\tau_j) = C(\xi(\tau_j), \xi(\tau_j - 0))X(\tau_j - 0), \quad (5)$$

де $C_{ks} = C(\theta_k, \theta_s)$ – деякі матриці.

Нехай $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq T$ точки розбиття відрізка $[0, T]$ з кроком h , так що $t_n = nh$, $t_{k+1} - t_k = h$. Поставимо у відповідність рівнянню (1) з умовами (5) різницеве рівняння

$$X_{n+1} = X_n + [hA(t_n, \xi_{n+1}, \xi_n) + \sum_{j=1}^r B_j(t_n, \xi_{n+1}, \xi_n)\Delta W(t_n)]X_n, \quad (6)$$

$$X(0) = \zeta,$$

де

$$\xi_n = \xi(t_n),$$

$$X_n = X(t_n),$$

$$A(t_n, \theta_s, \theta_s) = A(t_n, \theta_s),$$

$$B_j(t_n, \theta_s, \theta_s) = B_j(t_n, \theta_s),$$

$$B_j(t_n, \theta_k, \theta_s) = 0, k \neq s,$$

$$E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s) = C(\theta_k, \theta_s), k \neq s.$$

Запишемо рівняння для часткових моментів вектора X_n .

$$\begin{aligned} m_k(n+1) &= \sum_{s=1}^q P_{ks}(n)[E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s)]m_s(n) = \\ &= P_{kk}(n)[E + hA(t_n, \theta_k)]m_k(n) + \\ &+ \sum_{s \neq k} P_{ks}(n)C(\theta_k, \theta_s)m_s(n) = \\ &= (1 + \alpha_{kk}(n)h)[E + A(t_n, \theta_k)h]m_k(n) + \\ &+ h \sum_{s \neq k} \alpha_{ks}(n)C(\theta_k, \theta_s)m_s(n) = \\ &= m_k(n) + h\alpha_{kk}(n)m_k(n) + hA(t_n, \theta_k)m_k(n) + \\ &+ h \sum_{s \neq k} \alpha_{ks}(n)C(\theta_k, \theta_s)m_s(n) + o(h). \end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ одержимо рівняння

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_k(t)m_k(t) + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks}C_{ks}m_s(t), \quad (7)$$

$$m_k(0) = E\zeta P\{\xi(0) = \theta_k\},$$

$$\text{де } A_k(t) = A(t, \theta_k), \quad C_{ks} = C(\theta_k, \theta_s)$$

при $k \neq s$, $C_{kk} = E$.

Запишемо рівняння для часткових других моментних матриць. Зауважимо, що $D_k(n)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} D_k(n+1) &= \sum_{s=1}^q P_{ks}(n)\bar{A}_{ks}D_s(n)\bar{A}_{ks}^* + \\ &+ \sum_{s=1}^q P_{ks}(n) \sum_{j=1}^r B_{jks}D_s(n)B_{jks}^*h, \end{aligned}$$

де

$$\bar{A}_{ks} = E + hA(t_n, \theta_k, \theta_s), \quad B_{jks} = B_j(t_n, \theta_k, \theta_s).$$

Далі перепишемо рівняння $D_k(n)$ у вигляді

$$\begin{aligned} D_k(n+1) &= P_{kk}(n)\bar{A}_{kk}D_k(n)\bar{A}_{kk}^* + \\ &+ \sum_{s \neq k} P_{ks}(n)C_{ks}D_s(n)C_{ks}^* + \\ &+ P_{kk}(n) \sum_{j=1}^r B_{jkk}D_k(n)B_{jkk}^*h + \\ &+ \sum_{s \neq k} P_{ks}(n) \sum_{j=1}^r B_{jks}D_s(n)B_{jks}^*h = \\ &= D_k(n) + hA(t_n, \theta_k)D_k(n)A^*(t_n, \theta_k) + \\ &+ h \sum_{s \neq k} \alpha_{ks}(n)C_{ks}D_s(n)C_{ks}^* + \\ &+ \alpha_{kk}D_k(n)h + h \sum_{j=1}^r B_{jkk}D_s(n)B_{jkk}^* + o(h). \end{aligned}$$

При $h \rightarrow 0$ одержимо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dD_k(t)}{dt} &= A_k(t)D_k(t) + D_k(t)A_k^*(t) + \\ &+ \sum_{s=1}^q \alpha_{ks}C_{ks}D_k(t)C_{ks}^* + \\ &+ \sum_{j=1}^r B_j(t, \theta_k)D_k(t)B_j^*(t, \theta_k), \end{aligned} \quad (8)$$

$$D_k(0) = E\zeta\zeta^* P\{\xi_k(t) = \theta_k\},$$

де $C_{kk} = E$.

3. Моделювання розв'язків лінійних стохастичних рівнянь з випадковими коефіцієнтами

Для отримання реалізацій процесу $X(t)$ для різницевого рівняння (6) потрібно моделювати:

- вінерівський випадковий процес $W(t)$,
- ланцюг Маркова $\xi_n = \xi(t_n)$, з початковим станом $\xi_0 = \xi(0)$ заданим початковим розподілом $P\{\xi(0) = \theta_k\}$, заданою матрицею переходів $MP(x, y)$,
- випадкову величину ζ , що визначає початкові умови $X(0) = \zeta$.

Для моделювання початкових умов достатньо знати щільність або функцію розподілу. Методи моделювання випадкових величин з заданими законами розподілу розглядаються в [1].

Вінерівський процес можна представити у вигляді випадкового ряду. Так, розклад за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту для $t \in [0, 1]$ має вигляд

$$W_1(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i, \quad (9)$$

де $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots\}$ - незалежні стандартні гаусові випадкові величини, $\lambda_i = i\pi$ - власні числа кореляційного оператора [7]. Розклад у ряд Фур'є на $t \in [0, 1]$ має вигляд [7]

$$\begin{aligned} W_2(t) &= t\eta_0 + \\ &+ \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

де $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ - незалежні стандартні гаусові випадкові величини.

Якщо в представленнях $W_1(t)$ та $W_2(t)$ використати строго субгаусові випадкові величини-

ни, тоді процеси $W_1(t)$ та $W_2(t)$ будуть строго субгаусовими випадковими процесами [4]. При моделюванні вінерівських процесів в якості моделі, в залежності від представлення, можна використовувати або модель

$$S_1(t, M) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i, \quad (11)$$

або модель

$$S_2(t, M) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right). \quad (12)$$

Скористаємось результатами роботи [8].

Твердження 1. Модель $S_1(t, M)$ наближає процес $W_1(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю ε , $0 < \varepsilon < 1$ в $L_2([0, 1])$, якщо виконуються нерівності $\delta^2 > J1_{M+1}$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{J1_{M+1}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2J1_{M+1}}\right\} \leq 1 - \varepsilon$$

$$\text{де } J1_{M+1} = \sum_{i=M+1}^{\infty} (i\pi)^{-2}.$$

Твердження 2. Модель $S_2(t, M)$ наближає процес $W_2(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю ε , $0 < \varepsilon < 1$ в $L_2([0, 1])$, якщо виконуються нерівності $\delta^2 > J2_{M+1}$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{J2_{M+1}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2J2_{M+1}}\right\} \leq 1 - \varepsilon$$

$$\text{де } J2_{M+1} = 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} (i\pi)^{-2}.$$

Таблиця 1

Значення M для різних значень точності $\delta > 0$ та надійності $0 < \varepsilon < 1$ $M1$ - для першої моделі,

$M2$ - для другої моделі

δ	ε	$M1$	$M2$
0.1	0.95	110	400
0.05	0.95	750	1500
0.01	0.95	20000	40000
0.1	0.99	260	400
0.05	0.99	1100	2100
0.01	0.99	26000	60000

В таблиці 1 наведені значення M для різних моделей та заданих точності $\delta > 0$ і надійності ε , $0 < \varepsilon < 1$.

4. Розв'язок різницевого рівняння методом Монте-Карло

Нехай $X(t)$ – скалярний випадковий процес, що задовольняє рівнянню

$$dX(t) = -\frac{1}{2} X(t) dt + \sigma(\xi(t)) dW(t) X(t),$$

$$X(0) = \zeta_0.$$

де $W(t)$ – скалярний вінерівський процес, ζ_0 – випадкова величина, що не залежить від $W(t)$. Припустимо також, що $\xi(t)$ марковський процес, що не залежить від $W(t)$ та ζ_0 і який приймає значення θ_1, θ_2 , причому матриця інтенсивностей має вигляд

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{а}$$

$$P\{\xi(0) = \theta_1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\xi(0) = \theta_2\} = \frac{1}{2}, \quad E\zeta_0 = m_0.$$

Розглянемо рівняння на відрізку $t \in [0, 1]$.

Нехай випадкова величина ζ_0 має рівномірний розподіл на відрізку $[0, 1]$.

$E\zeta_0 = \frac{1}{2}$, $E\zeta_0^2 = \frac{1}{3}$. Для її моделювання скористаємось звичайним датчиком випадкових чисел та перетворенням $\zeta_0 = \sqrt{12}\alpha$.

Для моделювання вінерівського процесу використаємо його представлення (11) та (12). На рис. 1. представлені реалізації вінерівського процесу: а) - для першої моделі, б) - для другої моделі.

Для моделювання марківського процесу використаємо алгоритм, описаний в [1].

Послідовність строго субгаусових випадкових величин будемо за формулою

$$\eta_i = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \left(\alpha_j - \frac{1}{2} \right),$$

де α_j - послідовність псевдовипадкових чисел, рівномірно розподілених в $[0, 1]$.

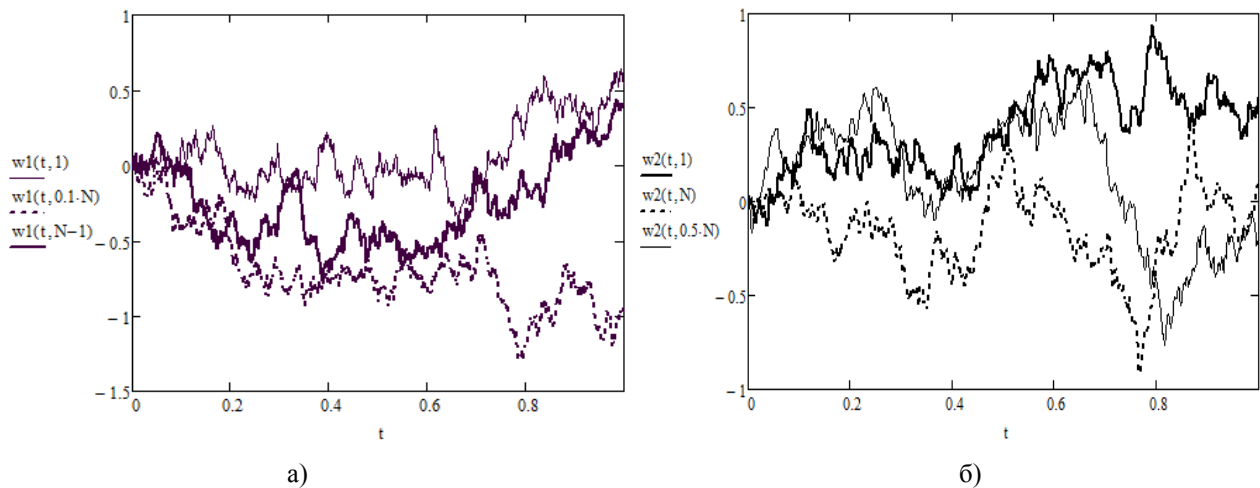


Рис.1. Реалізації вінерівського процесу: а) для першої моделі, б) для другої моделі

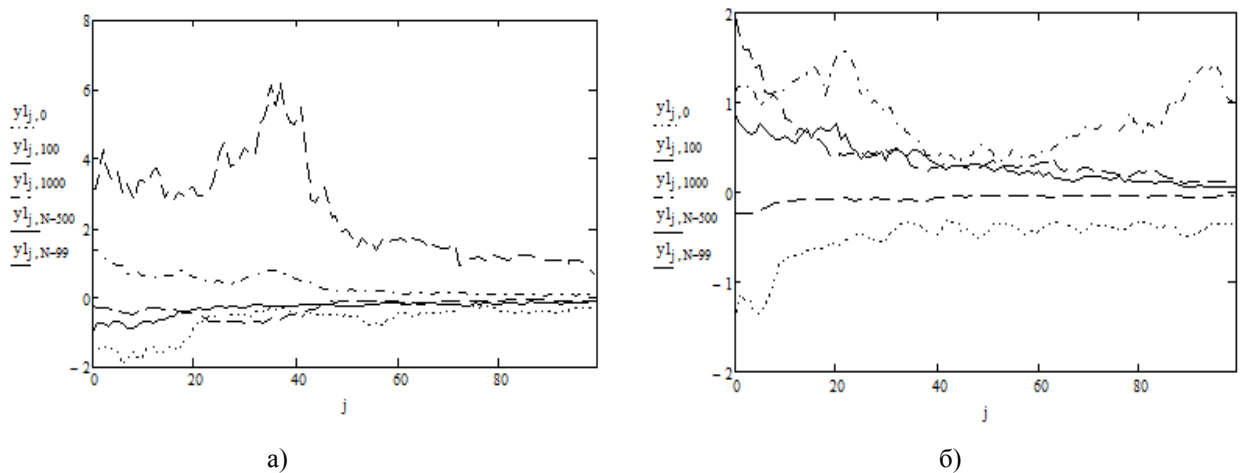


Рис. 2. Реалізації розв'язку лінійного стохастичного рівняння з випадковими коефіцієнтами: а) для першої моделі, б) для другої моделі.

На рис. 2. представлено реалізації процесу $X(t)$ при моделюванні вінерівського процесу за представленням (11) та (12).

Для середнього $m(t) = EX(t)$ будемо мати рівняння

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{1}{2}m(t), \quad m(0) = m_0$$

і $m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тобто $X(t)$ – асимптотично стійкий в середньому.

Запишемо рівняння для часткових других моментів

$$\frac{dD_1(t)}{dt} = \left(-\frac{3}{2} + \sigma_1^2\right)D_1 + \frac{1}{2}D_2, \quad D_1(0) = 1,$$

$$\frac{dD_2(t)}{dt} = \left(-\frac{3}{2} + \sigma_2^2\right)D_2 + \frac{1}{2}D_1, \quad D_2(0) = 1.$$

$$\text{Покладемо } \sigma_1^2 = \frac{3}{2}, \quad \sigma_2^2 = \frac{3}{2}.$$

Тоді $D_1(t)$ та $D_2(t)$ будуть мати вигляд

$$D_1(t) = e^{\frac{t}{2}}, \quad D_2(t) = e^{\frac{t}{2}}, \quad \text{тобто}$$

$$EX^2(t) = D_1(t) + D_2(t) = 2e^{\frac{t}{2}} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Тобто $X(t)$ не є асимптотично стійким в середньому квадратичному.

Для лінійного стохастичного рівняння побудовано 10000 реалізацій та отримано оцінку середнього значення і дисперсії розв'язку.

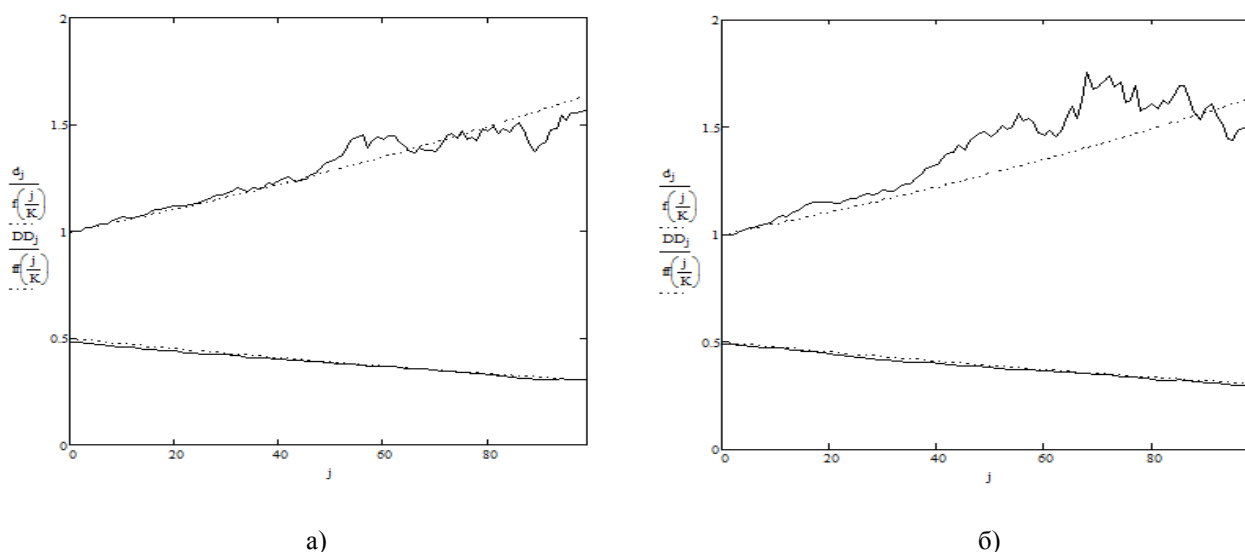


Рис. 3. Оцінка середнього значення і дисперсії та їх порівняння з теоретичними результатами: а) для першої моделі, б) для другої моделі.

На рис. 3. представлені результати оцінювання середнього значення і дисперсії розв'язку лінійного стохастичного рівняння та їх порівняння з теоретичними результатами.

При необхідності розглядати вінерівський процес і розв'язок на відрізку $T = [0, T]$. Представлення (11)-(12) в цьому випадку переписуються за формулою $W(t) = \frac{1}{T} W\left(\frac{t}{T}\right), t \in [0, T]$.

Висновки

В роботі розроблено статистичний алгоритм моделювання розв'язків лінійних стохастичних рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Вінерівський процес моделюється з заданими точністю і надійністю в функціональному просторі $L_2([0, 1])$.

Отримані реалізації розв'язку лінійного стохастичного рівняння з випадковими коефіцієнтами для якого відома асимптотична поведінка середнього значення і дисперсії.

Результати моделювання підтверджують теоретичні розрахунки.

При побудові реалізацій випадкових процесів використовувались паралельні алгоритми.

Отримані результати є новими.

A.A. Pashko, Yu.V. Shusharin. **Solution of linear stochastic equations with random coefficients by Monte - Carlo methods**

А.А. Пашко, Ю.В. Шушарін. **Решение линейных стохастических уравнений со случайными коэф-**

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ермаков С.М. , Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
2. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989. – 280 с.
3. Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. – Новосибирск, 2005. – 259 с.
4. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. Моделювання випадкових процесів і полів. – К.: Задруга, 2007. – 230 с.
5. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К.: ТВиМС, 1998. – 289 с.
6. Шушарін Ю.В. Дослідження стійкості розв'язків системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з марковськими коефіцієнтами / Шушарін Ю.В. // Обчислювальна та прикладна математика, 2011. – №3. – С.183 – 189.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 570 с.
8. Пашко А.О. Моделювання субгаусових випадкових процесів в інформаційних технологіях / А.О. Пашко // Науковий вісник Чернівецького університету. Комп'ютерні системи та компоненти, 2014, - Т.5. Вип. 1. – С.48-54.

фициентами методами Монте-Карло.

Для решения линейных стохастических уравнений со случайными коэффициентами разработан статистический алгоритм моделирования решений. Разработанный алгоритм базируется на моделировании решений за разностной схемой с использованием спектрального представления винеровского процесса. Винеровский процесс моделируют с заданной точностью и надежностью в некотором функциональном пространстве. Приведено результаты численного моделирования решения линейного стохастического уравнения со случайными коэффициентами для которого известно асимптотическое поведение среднего значения и дисперсии. Полученные реализации решения и их статистические характеристики согласуются с теоретическими результатами.