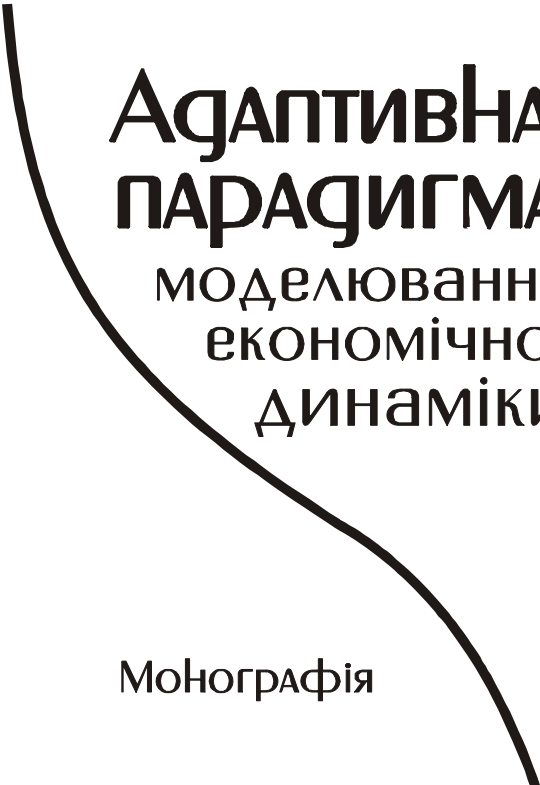


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Державний вищий навчальний заклад  
«КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

**Ю. В. КОЛЯДА**



# **Адаптивна парадигма**

**МОДЕЛЮВАННЯ  
ЕКОНОМІЧНОЇ  
ДИНАМІКИ**

**Монографія**

УДК 519.86  
К 62

*Рецензенти*

**М. М. Семко**, д.ф.-м.н., проф.  
(Національний університет ДПА України)

**І. Г. Лук'яненко**, д.е.н., проф.  
(Національний університет «Києво-Могилянська академія»)

**В. К. Галіцин**, д.е.н., проф.  
(Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана)

*Рекомендовано до друку Вченою радою КНЕУ  
Протокол № 1 від 29.08.2019*

**Коляда Ю. В.**

К 62 Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки :  
монографія / Ю. В. Коляда. — 2-ге вид., перероб. і доп. — К. :  
КНЕУ, 2019. — 367, [1] с.  
ISBN 978-966-926-297-4

Досліджується нелінійна динаміка економічної системи на підґрунті математичного і комп'ютерного моделювання, на всіх етапах котрого (отримання рівнянь економічного стану та якісний і кількісний аналіз математичної моделі, апостеріорний розрахунок економічного ризику) відбувається адаптація, дотримуючись певних концептів гнучкого використання теоретичних і практичних засобів та інструментарію вивчення. Спостерігається апіорна і апостеріорна адаптація з урахуванням екзо- та ендогенних умов процесу моделювання. Обстоюється наскрізне адаптивне економіко-математичне моделювання.

Монографія рекомендується усім тим економістам (студентам, аспірантам, фахівцям), хто не байдужий або кого реалії економічного буття змусили підійти впритул до математичного моделювання динамічних процесів нелінійної економіки, різноманітність яких визначально впливає на прийняття економічних рішень.

УДК 519.86

*Розповсюджувати та тиражувати  
без офіційного дозволу КНЕУ забороняється*

ISBN 978-966-926-297-4

© Ю. В. Коляда, 2011  
© КНЕУ, 2011  
© Ю. В. Коляда, 2019  
© КНЕУ, 2019

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Передмова</b> . . . . .                                                                                       | 6   |
| <b>Вступ. Моделювання та адаптація</b> . . . . .                                                                 | 11  |
| В.1. Елементи математичного моделювання: проекція на економіку . . . . .                                         | 11  |
| В.2. Парадигма адаптації . . . . .                                                                               | 14  |
| <b>РОЗДІЛ 1. Гносеологія трансформаційної економіки як об'єкта математичного моделювання</b> . . . . .           | 23  |
| 1.1. Економічна еволюція: патерни системності і нелінійності. Іманентність адаптації . . . . .                   | 24  |
| 1.2. Кібернетичний і синергетичний аспекти нелінійного економічного аналізу . . . . .                            | 33  |
| 1.3. Концепти адаптації в економіці з огляду на моделювання . . . . .                                            | 41  |
| Висновки . . . . .                                                                                               | 46  |
| <b>РОЗДІЛ 2. Синергетичні моделі динаміки макроекономічних процесів</b> . . . . .                                | 47  |
| 2.1. Класична система рівнянь Вольтерра—Лотки: економічне тлумачення і синергетичні концепти утворення . . . . . | 47  |
| 2.2. Урахування деяких характерних рис економіки . . . . .                                                       | 54  |
| 2.2.1. Насиченість економічних процесів . . . . .                                                                | 54  |
| 2.2.2. Спадковість економіки . . . . .                                                                           | 61  |
| 2.2.3. Моделювання флуктуацій економіки . . . . .                                                                | 69  |
| 2.2.4. Узагальнення моделі Гудвіна . . . . .                                                                     | 80  |
| 2.3. Еволюція економіки в координатах «корупція — тіньова економіка — легальна економіка» . . . . .              | 87  |
| 2.3.1. Математична модель та оцінювання змінних . . . . .                                                        | 88  |
| 2.3.2. Модифікована модель та її оцінки . . . . .                                                                | 91  |
| 2.4. Кінетичні макроекономічні моделі . . . . .                                                                  | 94  |
| 2.5. Множина математичних моделей економічного стану . . . . .                                                   | 105 |
| 2.5.1. Однопараметричні моделі . . . . .                                                                         | 105 |
| 2.5.2. Двопараметричні моделі . . . . .                                                                          | 114 |
| 2.6. Універсальна адаптивна математична модель економічного стану . . . . .                                      | 122 |
| 2.6.1. Принципологія побудови ММ економічних процесів і явищ . . . . .                                           | 123 |
| 2.6.2. Проблемно-орієнтована адаптація моделей . . . . .                                                         | 127 |
| 2.7. Синергетична модель економічної структури суспільства . . . . .                                             | 129 |
| Висновки . . . . .                                                                                               | 133 |

|                                                                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>РОЗДІЛ 3. Комп'ютерне моделювання економічних процесів . . .</b>                                                | <b>135</b> |
| 3.1. Якісний аналіз математичних моделей нелінійної економічної динаміки . . . . .                                 | 135        |
| 3.1.1. Фазові описи. . . . .                                                                                       | 139        |
| 3.1.2. Параметричні портрети. . . . .                                                                              | 142        |
| 3.1.3. Характеристика описів (портретів) і біфуркацій . . .                                                        | 148        |
| 3.2. Синергетичне моделювання економічного стану . . . . .                                                         | 151        |
| 3.3. Про динаміку неформальної економічної популяції . . . . .                                                     | 161        |
| 3.4. Вивчення проблеми зайнятості членів суспільства . . . . .                                                     | 166        |
| 3.5. Просторові моделі міграції трудових ресурсів . . . . .                                                        | 174        |
| 3.6. Функціонування фірми в економічному просторі . . . . .                                                        | 182        |
| 3.6.1. Моделювання діяльності економічного агента . . . . .                                                        | 183        |
| 3.6.2. Комп'ютерне моделювання маркетингу і менеджменту фірми. . . . .                                             | 191        |
| Висновки . . . . .                                                                                                 | 200        |
| <b>РОЗДІЛ 4. Моделювання економічної динаміки та адаптація . . .</b>                                               | <b>203</b> |
| 4.1. Кластер-процедура моделювання динаміки деяких соціально-економічних явищ як приклад ендогенної адаптації. . . | 203        |
| 4.2. Адаптивний якісний аналіз економічного партнерства . . .                                                      | 212        |
| 4.3. Адаптивний кількісний аналіз математичної моделі нелінійної економічної динаміки . . . . .                    | 220        |
| 4.4. Математичне моделювання інфляції в Україні . . . . .                                                          | 226        |
| 4.5. Інтерактивна нелінійна динаміка макроекономіки . . . . .                                                      | 243        |
| 4.6. Апостеріорне визначення деяких факторів економіки на підґрунті моделювання . . . . .                          | 258        |
| 4.6.1. Визначення темпу еволюції економічної структури суспільства. . . . .                                        | 259        |
| 4.6.2. Щомоментне визначення еластичності . . . . .                                                                | 262        |
| Висновки . . . . .                                                                                                 | 264        |
| <b>РОЗДІЛ 5. Вибір траєкторій нелінійної економічної динаміки. . .</b>                                             | <b>266</b> |
| 5.1. Алгоритмізація математичної теорії оптимальних процесів на прикладі точкової (скупченої) моделі. . . . .      | 267        |
| 5.2. Кероване досягнення траєкторії найкращого економічного зростання . . . . .                                    | 270        |
| 5.3. Моделювання оптимального розподілу капіталовкладень. . . . .                                                  | 276        |
| Висновки . . . . .                                                                                                 | 282        |
| <b>РОЗДІЛ 6. Динамічні моделі ризику в системі економічної безпеки . . . . .</b>                                   | <b>283</b> |
| 6.1. Аналіз ризику та безпеки економічних систем . . . . .                                                         | 283        |
| 6.2. Числове (комп'ютерне) оцінювання траєкторії економічної еволюції та ризиків . . . . .                         | 286        |

|                                                                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3. Числова міра поведінки розв'язку деяких моделей економічної динаміки. . . . .                                                   | 288        |
| 6.3.1. Класичні динамічні моделі економіки. . . . .                                                                                  | 289        |
| 6.3.1.1. Оцінювання економічного ризику на підґрунті моделі Харрода — Домара. . . . .                                                | 289        |
| 6.3.1.2. Оцінювання ризику на підґрунті неокласичного рівняння Солоу. . . . .                                                        | 292        |
| 6.3.1.3. Оцінювання ступеня ризику розвитку вітчизняної економіки . . . . .                                                          | 299        |
| 6.3.1.4. Моделювання динаміки ризику зростання економік країн світу. . . . .                                                         | 308        |
| 6.3.2. Площинні динамічні моделі . . . . .                                                                                           | 312        |
| 6.3.2.1. Аналітичне моделювання коеволюції офіційної й нелегальної економік. . . . .                                                 | 312        |
| 6.3.2.2. Оцінювання ризику в контексті еволюції макроекономічної системи на підґрунті матричної лінійної динамічної моделі . . . . . | 319        |
| 6.4. Деякі аспекти економічної безпеки суспільства . . . . .                                                                         | 331        |
| 6.4.1. Прогнозування ризику валютної паніки за допомогою динамічної моделі . . . . .                                                 | 331        |
| 6.4.2. Аналітичне оцінювання динаміки ризику економічної еволюції з урахуванням корупції та тіньової економіки . .                   | 335        |
| Висновки . . . . .                                                                                                                   | 342        |
| <b>Післямова . . . . .</b>                                                                                                           | <b>344</b> |
| <b>Список використаних джерел. . . . .</b>                                                                                           | <b>346</b> |
| <b>Додатки. . . . .</b>                                                                                                              | <b>364</b> |

*Світлий пам'яті батьків — сільських учителів  
Євгенії Федорівни (1919—1980)  
і Василя Костянтиновича (1917—2007)*

## **П**ередмова

---

Чиста теорія економіки є наука, що нагадує у  
всьому фізико-математичні науки.

*Л. Вальрас*

Все адаптується, справа в тому, що і як.

*Л. Заде*

**Д**о звичного лексикону (моделі, методи, оптимізація, статична рівновага, економетричний аналіз, статистична інформація) ортодоксального економіко-математичного моделювання (далі — ЕММод), яке характеризується використанням алгоритмів із жорсткою структурою, наприкінці ХХ ст. долучились нові ключові слова: нелінійна динаміка, адаптація, нерівноважність, відкрита система, нестационарна і необоротної дії, зворотні зв'язки, складка, катастрофа, біфуркація тощо, які притаманні природничим наукам. Головним словом також стає поняття стану (становища) економіки, яке несе більш повну інформацію про динаміку економічної системи.

Взагалі кажучи, останнім часом спостерігається експансія результатів (також методів, підходів, фахівців) природознавства в економічну науку, яка ще донедавна вважалась гуманітарною. Цьому, безумовно, позитивному процесу сприяли зміст актуальних проблем сучасної економіки (зародження і динаміка перебігу все більш частих кризових явищ), їх складність і соціальна гострота — значущість наслідків.

Застосування в економіці (не механічне, а творче) загальноновизнаних вагомих здобутків математичного моделювання у сфері природничих наук і техніки дає надію на успішне розв'язання повсталих в економіці (теорії та практиці) проблем, що в свою чергу сприятиме розробці адекватних управлінських рішень у практичній економіці (економічній політиці) суспільства, які зазвичай приймаються в різноманітних умовах швидкоплинних подій калейдоскопічного характеру. Саме

комп'ютерні сценарії розвитку подій сприяють отриманню виважених раціональних і своєчасних знань, які необхідні для прийняття раціональних управлінських рішень у сфері економіки.

Адаптація, будучи однією з доктрин теорії систем, у монографії постає як перебудова не тільки структури алгоритмів моделювання, вона означає також глибоку варіацію параметрів математичної моделі (далі — ММ) у середовищі обраної схеми моделювання. По-іншому вбачається гнучке використання наявних засобів на всіх етапах моделювання, тобто адаптація носить наскрізний характер. Таким чином, у кожному конкретному випадку досягатиметься якомога кращий у певному сенсі результат моделювання — отримуватимуться якісні та кількісні оцінки стосовно об'єкта дослідження, яких раніше не могло бути принципово. Налаштування алгоритму моделювання (його морфогенез) продиктовані самим ходом обчислювального експерименту, відкликаючись на проблеми з комп'ютерної точки зору. У цілому зазначена адаптація співзвучна з самонавчанням, певною мірою також відповідає самоорганізації комп'ютерного моделювання.

Економіці, що завжди є, за своєю сутністю, нелінійно трансформаційною, в епоху глобальних кардинальних змін у суспільстві характерні практично непередбачувані процеси, глибока змінюваність зовнішнього середовища та перебіг внутрішніх економічних механізмів. Тільки на підґрунті моделювання, використовуючи адаптивні математичні моделі, можна пізнати нелінійну динаміку, здобуваючи футурологічні оцінки — сценарії можливої поведінки економічних процесів у певних умовах. У цьому полягає головне призначення адаптивного економіко-математичного моделювання нелінійних процесів макроекономічної динаміки — зазирнути в найближче майбуття економічної системи і бути, як дбайливий господар, готовим до можливих ризиків і негативних впливів, прагнучи максимально зменшити їх наслідки, якщо не уникнути їх.

*Мета монографії* полягає у розробленні ключових елементів теорії та методологічних концептів адаптивного економіко-математичного моделювання динаміки нелінійних систем.

Досягнення мети вимагає розв'язання таких задач:

- критичного аналізу ретроспективи моделювання нелінійної економічної динаміки;
- обґрунтування необхідності побудови і застосування неперервних динамічних моделей економіки (систем звичайних диференціальних рівнянь) на відміну від економетричних;
- створення теоретичних засад побудови рівнянь математичної моделі економічної динаміки;

- розроблення техніки м'якого моделювання нелінійних проблем економіки;
- розкриття змісту адаптології економіки;
- детермінації економіко-математичного моделювання як наскрізного адаптивного процесу (адаптація або гнучке використання моделей та інструментарію їх дослідження);
- виконання закону Ешбі про необхідну різноманітність засобів та інструментів у пізнанні складної системи, економічної зокрема.

У *першому розділі монографії* уявлення про трансформаційну економіку розглядаються з позиції комп'ютерного моделювання. Акцентується увага на патернах системності, нелінійності та адаптації як рушійних у поведінці економічної системи. Кібернетичний і синергетичний підходи у сучасному економічному аналізі позиціонуються як взаємодоповнюючі, підкреслюючи їх особливості та відмінності. Розкривається зміст адаптивних механізмів економіки, глибоке і повне пізнання котрих можливо здійснити лише шляхом побудови та застосування аналітичного (математичного) і комп'ютерного моделювання.

*Другий розділ* присвячений синергетичним моделям різноманітних явищ і процесів нелінійної трансформаційної економіки. Спочатку відомі рівняння Вольтерра—Лотки тлумачаться з економічної точки зору, потім концепти їх одержання узагальнюються і поширюються на побудову рівнянь ММ нелінійної економічної динаміки. У новостворених моделях ураховано деякі характерні риси економіки (насиченість, спадковість, флуктуації). Класична модель Гудвіна набула подальшого розвинення, ураховуючи людський капітал і різні способи його інвестування. Економіка суспільства описана в координатах «корупція — тіньова економіка — легальна економіка», оцінювання змінних якої надало умови зменшення негативних явищ (корупції) або їх співіснування з легальною економікою. Визначено поняття економічної кінетики та запропоновано деякі кінетичні моделі макроекономіки.

Отримано альтернативну множину ММ економічного стану (однопараметричних і двопараметричних моделей), на підґрунті якої запропоновано універсальну адаптивну модель нелінійної економічної динаміки: вказано принципи її побудови; розглянута так звана проблемно-орієнтована адаптація ММ. Розділ завершується модифікацією класичної моделі Лоренца в координатах «платоспроможний попит — виробнича функція — умовна ціна», якою описується економічна структура суспільства.

У *третьому розділі* здійснено якісний аналіз ключових ММ нелінійної економічної динаміки — розвинуто техніку побудови фазових і



параметричних описів, котрим надано економічне тлумачення. Вперше у моделюванні економіки вводиться поняття структурного портрету, який являє собою об'єднання площин змінюваності коефіцієнтів моделі, в яких поведінка фазових траєкторій якісно міняється (від м'якого до жорсткого збурення — плавного і стрибкоподібного нарощування).

Виконано моделювання економічної структури суспільства у системі координат «капітал — платоспроможний попит — норма прибутку», розглядаючи площинні ММ, в яких дві змінні є функціями третьої. Таким чином, вперше у нелінійному економічному аналізі кількісно вивчаються нові нелінійні залежності, доповнюючи традиційне «попит — пропозиція». По-іншому досліджується взаємна еволюція факторів економічної системи — їх співіснування за збереження цілісності економічної системи.

Розглянута поведінка неформальної економічної популяції (на зразок маркетингової мережі) з урахуванням у ММ фактора запізнення.

Проблема зайнятості членів суспільства вивчається із застосуванням точкової (скупченої) моделі, її якісного аналізу. Міграція трудових ресурсів описується моделлю з розподіленими параметрами і двома просторовими координатами, використовуючи аналітичні наближені розв'язки, тобто має місце аналітичне моделювання.

З використанням ММ у координатах «власний капітал — кількість працюючих — запозичений (залучений) капітал» аналізується поведінка фірми у ринковій економіці. Здійснено комп'ютерне моделювання маркетингу і менеджменту фірми.

*Розділ 4* починається з моделювання динаміки деяких соціально-економічних явищ (різних за змістом, але описуваних одним класом диференційних рівнянь). ММ об'єднане у межах кластер-процедури, що є прикладом ендегенної адаптації як моделей, так і результатів їх вивчення (спостерігається взаємозбагачення).

Вперше в економічній літературі проблема економічного партнерства досліджується з позицій математичного моделювання — запропоновано ММ і виконано її якісний аналіз: вказано нерівності (ділянки варіації) для коефіцієнтів моделі, за числових значень яких матиме місце взаємовигідне співробітництво або один із партнерів пригнічуватиме іншого.

Детально описано процедуру адаптивного кількісного аналізу ММ нелінійної економічної динаміки, якою передбачаються вмотивований вибір числового методу і гнучка стратегія кроку інтегрування жорстких рівнянь.

Прагматичним наслідком попередніх теоретичних розробок стало комп'ютерне моделювання інфляції в українському суспільстві.

Результати модельного (обчислювального) експерименту досить вдало описують економічні реалії.

Інтерактивна нелінійна макроекономічна динаміка розглядається в просторі з координатами «платоспроможний попит  $Q$  — виробнича функція  $F$  — умовна ціна  $p$ », де будуються площинні моделі — системи рівнянь:  $Q(p)$  і  $F(p)$ ;  $Q(F)$  і  $p(F)$ ;  $p(Q)$  і  $F(Q)$ , які кількісно вивчаються. Серед зазначених нелінійних залежностей тільки одна  $Q(p)$  [або  $p(Q)$ ] традиційно відома, всі інші вперше пропонуються до вивчення у нелінійному економічному аналізі.

На завершення розділу 4 наводяться формули: а) темпу еволюції економічної системи загалом, володіючи темпом розвитку структурних її складових; б) щомоментної еластичності. Згідно з цими формулами відбуваються обчислення апостеріорного характеру, в яких суттєво використовується числова інформація про моделювання нелінійної економічної динаміки.

У розділі 5 обґрунтовується потреба в оптимізації траєкторій нелінійної економічної динаміки, використовуючи ММ та методи пошуку оптимальних розв'язків. Для прикладу розглянуто модель Солоу з урахуванням інвестиційного лагу та здійснення контролю за траєкторією, застосовуючи відомий OGY-метод. Запропоновано узагальнену модель неокласичної теорії економічного розвитку, у котрій системно ураховуються темп використання трудових ресурсів, рівень міжнародної допомоги та лаговий характер введення фондів. Стабілізація траєкторії найкращого росту здійснюється за допомогою OGY-методу — процесу послідовних наближень (простой ітерації).

Монографія завершується *розділом 6*, де викладено основи комп'ютерного моделювання динаміки економічного ризику: а) на підґрунті класичних (одновимірних) моделей економічної динаміки розроблено спосіб числового оцінювання поведінки розв'язку; б) для моделей економічної динаміки вимірності два і три запропоновано методіку апостеріорного покоординатного розрахунку числової міри ризику.

Приймаючи до уваги роль людини у розвитку економічної системи, цілком логічно надавати особі, що приймає рішення (ОПР) не тільки сценарії еволюції, але й пропонувати найкращий результат моделювання при певних формалізованих обставинах, надаючи числову оцінку ступеню економічного ризику. Остаточне рішення, правда, завжди лишатиметься за ОПР, котра оцінює цілу низку неформалізованих у ММ умов і привхідних обставин.

Автор висловлює сердечну подяку членам кафедри економікоматематичного моделювання за сприяння і всіляку допомогу у дослідженні нелінійної економіки.

### **МОДЕЛЮВАННЯ ТА АДАПТАЦІЯ**

#### **В.1. Елементи математичного моделювання: проекція на економіку**

Як конструктивний спосіб пізнання зовнішнього середовища математичне моделювання суттєво розвинулось [100, 101, 119, 124, 144] у другій половині ХХ ст., досягнувши вражаючих результатів у фізиці, автоматизації проектування в електроніці та інших сферах. Були сформовані фундаментальні поняття, підходи, вимоги щодо об'єкта і предмета моделювання, його інструментарію, призначення яких має міждисциплінарний характер.

До моделювання, зокрема математичного, спонукує ціла низка підстав:

а) значна нелінійна динаміка та калейдоскопічний характер подій у деяких сферах буття;

б) існують такі ділянки наукових досліджень, в яких можливості проведення натурного експерименту або розгляд матеріальних моделей вкрай обмежені чи навіть неможливі. До числа таких галузей належить економіка, якій притаманна наближеність даних, неповнота статистичної інформації, дрейф параметрів і лаговий характер подій;

в) бажання чи потреба з будь-яких причин відновити деякі ситуації з метою їх скрупульозного аналізу;

г) виробнича необхідність в оперативному вивченні певних процесів, щоб встановити наявні тенденції (тренди) та вибудувати сценарії розвитку подій;

д) своєчасно і всебічно виконати дослідження (у повному обсязі), на підставі результатів якого прийматимуться управлінські рішення.

Наведемо загальноприйняте [144, 172, 175] у науці визначення моделювання: вивчення предмета пізнання не безпосередньо, а опосередковано, на основі аналізу деяких інших допоміжних конструкцій, які називаються моделями.

Слушно нагадати, що німецький філософ І. Кант ще у ХVІІІ ст. говорив: «Будь-яке людське пізнання починається зі споглядання, переходить від нього до понять і закінчується ідеями». За суттю, вербалізація предмета моделювання передуює формалізації проблеми — початковому етапу математичного моделювання як методу пізнання.

Фізик Кельвін також у XVIII ст. стверджував, що зрозуміти явище — це означає, побудувати його механістичну модель. Очевидно, що нині треба володіти математичною моделлю (ММ), яка сприяє точному і цілком визначеному опису об'єкта моделювання. Отже, для адекватного опису механізмів економіки з метою належного її регулювання та управління нею ММ мають бути динамічними, тобто систематизовано викладеними не алгебраїчними, а диференційними рівняннями — щонайменше, бути точковими моделями.

Принагідно треба зауважити, що найбільші труднощі, як і значні успіхи, математичного моделювання сьогодні зумовлені саме вибором належної ММ, перш за все адекватної і відносно простої. Більше того, нині поширена думка [38, 46, 169, 172], що саме вміння будувати і застосовувати ММ, адекватною реальному об'єктові, свідчить про зрілість конкретної науки.

Серед відомих сучасних методів моделювання найточніше визначенням і найбільш затребуваним виявилось математичне моделювання [85, 99, 100, 101, 143, 144, 163, 169, 172], в якому спочатку описується мовою математики досліджуваний об'єкт, а потім він вивчається математичними засобами, з використанням пакетів прикладних комп'ютерних програм числового аналізу.

Вкажемо на основні етапи математичного моделювання, попередньо зауваживши, що воно включає об'єкт вивчення, суб'єкт (дослідження) і модель, що стоїть між ними.

**Етап 1.** Конструюється модель об'єкта, яка відтворює суттєве з позицій суб'єкта.

**Етап 2.** Виконуються так звані *модельні експерименти*, в яких цілеспрямовано вивчаються умови функціонування моделі, добувається і систематизується інформація щодо її поведінки.

**Етап 3.** Отримане на попередньому етапі знання переноситься на реальний об'єкт уваги дослідника.

**Етап 4.** Здійснюється перевірка набутих за допомогою моделі знань, які використовуються для побудови узагальнюючої теорії реального об'єкта з метою цілеспрямованої структуризації його та доцільного управління.

Комплексно в математичному моделюванні виокремлюють дві взаємопов'язані складові (як сторони однієї медалі):

- 1) постановка проблеми і побудова її ММ;
- 2) дослідження одержаної ММ засобами математичної теорії якісного та числового аналізу.

Згадувана вище тріада (суб'єкт — об'єкт — модель) слугує каркасом комплексу, надважливого у своєчасному плануванні (горизонт прогнозу) і ефективного управління динамікою економічної системи.

Моделювання, будучи ітеративним процесом, розширює і поглиблює знання про досліджуваний об'єкт, уточнюючи їх щоразу, а інколи відкриваючи щось нове. Отже, моделювання сприяє самовдосконалюванню, самоорганізації знань.

На рис. В.1 графічно зображено сутність і послідовність процесу математичного моделювання нелінійної динаміки економічної системи:

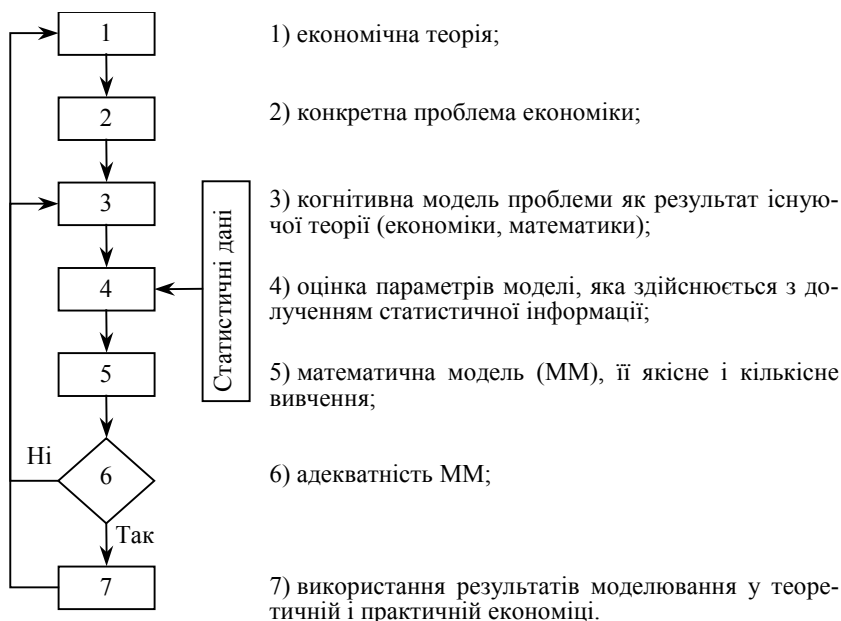


Рис. В.1. Глобальні зв'язки економіко-математичного моделювання нелінійної динаміки

Ітеративний характер, що відтворюється зворотними зв'яз-

ками від блоку  на  і від  на , сучасних економічних досліджень за допомогою математичного моделю-

вання виявляється у такому: від існуючої (панівної) теорії економічної науки способом моделювання досягається завершеність (досконалість) її теоретичних поглядів для цілеспрямованої, продуманої і відповідальної практики, економічної політики у суспільстві, особливо з глибоко трансформаційною економікою.

Загалом економіко-математичне моделювання динаміки вказує на рівень математизації економічної науки, надаючи довершеності її концепціям на підґрунті системного відтворення природи економіки адекватними ММ, їх багатоваріантного вивчення, включаючи екстремальні режими функціонування, за рахунок точності та універсальності розв'язків моделей. Доречно пригадати слова Леонардо да Вінчі: «Жодне людське дослідження не може називатись істинною наукою, якщо воно не перейшло через математичні доведення».

Варто також зазначити, що в економіко-математичному моделюванні нелінійної динаміки спостерігається певною мірою синтез різнорідних знань (економічна теорія, звичайні диференційні рівняння, інформатика, синергетика тощо), підпорядкований системному вивченню економічної дійсності, тобто має місце полідисциплінарний характер дослідження економіки. Між іншим, саме синтез наукових дисциплін сприяє сходженню до вершин знання, зокрема економічного.

## **В.2. Парадигма адаптації**

Далі стисло висвітлюється ретроспектива (віхи) адаптації, якою просякнута все суще (природні та штучно організовані системи різного призначення), привертаючи увагу до біології та техніки — перш за все до теорії автоматичного управління (ТАУ) і систем автоматичного управління (САУ), причому останнє є практичним втіленням першого.

На рис. В.2 зображено [110, с. 230] один із можливих варіантів структури (змісту) теорії систем, серед складових якої перебувають практично всі наукові дисципліни, що широко використовуються в економіці, наприклад, теорія регулювання (управління) і теорія оптимального управління — менеджмент, теорія інформації, зокрема економічної, дослідження операцій, теорія адаптації, синергетика, теорія ієрархічних систем. У фундаменті теорії систем лежать математика, знання про природу і суспільство та прикладні науки.

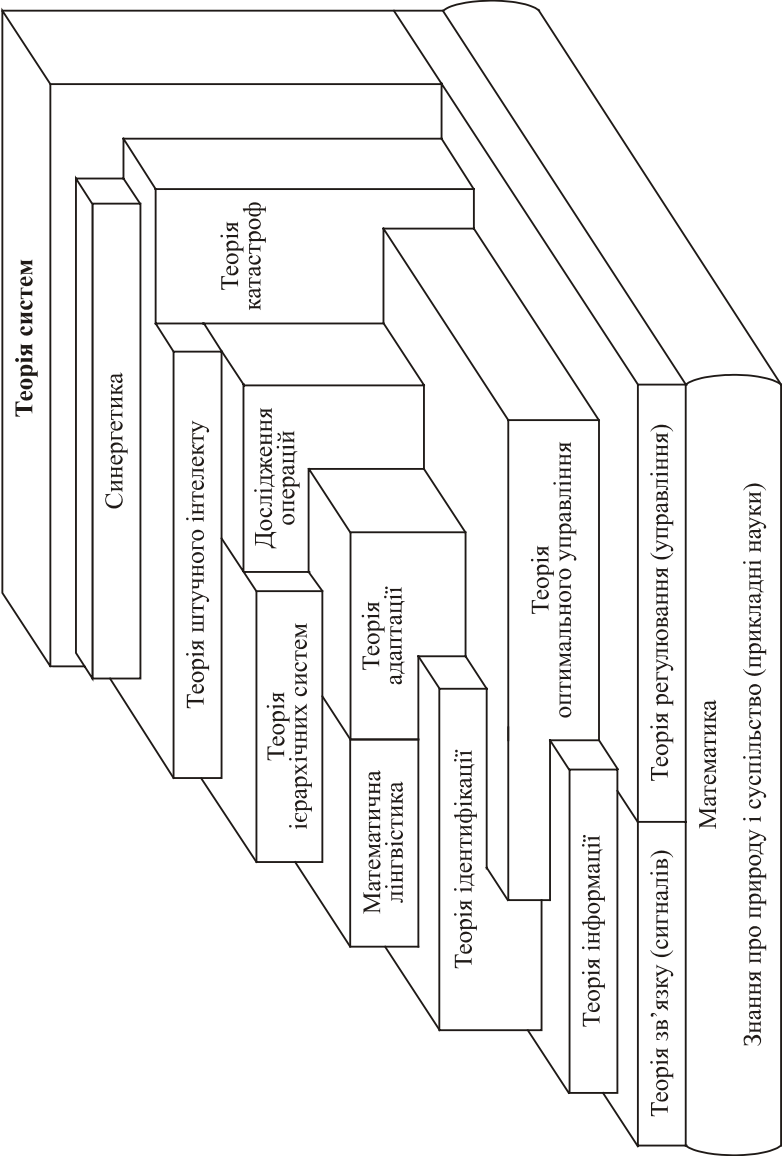


Рис. В.2. Конфігурація теорії систем (її складові)

Тепер наведемо дефініції двох важливих понять з метою подальшого викладу матеріалу монографії.

*Парадигма* (гр. *paradeigma* — приклад, взірець, патерн) — панівна концептуальна система, стиль мислення.

*Концепція* (лат. *conceptio* — розуміння) — певний спосіб розуміння, точка зору, керівна ідея, провідний задум, система поглядів.

Генезис адаптації розглядається через призму економіки, проєктуючи на неї результати.

Як іманентна й онтогенетична властивість світу адаптація вперше і цілком закономірно розглядалась у біології починаючи від епохи дарвінізму. Нижче наведено квінтесенцію результатів біокібернетики [11] з урахуванням контексту монографії. Відразу зазначимо, що в економічній літературі вже є приклади [17, 26, 50, 108, 135, 138, 165, 166] успішного використання біологічних підходів і термінів до вивчення економіки.

Спочатку постулюється таке: пристосування кожного виду до неживої природи або навколишнього середовища є адаптація, а до партнерів по спільноті — коадаптація.

Еволюцією називається закономірна змінюваність структури популяції відповідно до історичних перетворень співвідношень із зовнішнім середовищем і являє собою процес доцільної або прогресивної оптимізації інтегральної системи життя. Ця оптимізація проходить по структурному, функціональному, інформаційному полю показників на всіх рівнях ієрархічної системи. Те, що відбулося на одному з цих рівнів прогресивної адаптації, неминуче викликає зміни на всіх інших рівнях.

**Зауваження!** Так звана *прогресивна оптимізація* пов'язується з адаптацією. На сьогодні це фундаментальна істина в теорії управління [99, 150].

Велику роль відіграють міжпопуляційна взаємодія та ієрархічна організація популяцій (внутрішньовидова структура) для регуляції і гомеостазу біологічної системи.

В еволюції виду відображається інтегральний ефект перетворення популяцій. У міжвидових змаганнях виявляються якісні та кількісні показники процесів адаптації різних популяцій, котрі оцінюються у груповому природному відборі. В ці-



лому еволюція стає помітною у самоналаштуванні системи, що складається з елементарних циклів регуляції у кожній популяції.

Численні і важливі механізми еволюції у концентрованих і прискорених формах виступають у процесі онтогенетичного розвитку. Вони відповідно відрізняються способами регулювання із загальної ТАУ.

Процеси мікроеволюції переходять у макроеволюцію, причому формою такого переходу стають міжпопуляційні зв'язки.

З числа прикметних рис біологічної системи, яка вважається однією з найбільш складних, виокремимо дві, а саме: а) відкритість, пов'язана із зовнішнім середовищем вхідним і вихідним каналами зв'язку, які перебувають під контролем системи; б) здатність до саморозвитку і регуляції як внутрішніх взаємозв'язків, так і факторів зовнішнього середовища.

Принцип стійкої нерівноважності як основний в організації, як всезагальний закон існування біологічних систем формулюється так: вони ніколи не залишаються у рівноважному стані, завжди діють сили, спрямовані проти рівноваги.

Нерівноважний стан докорінно різниться від динамічної рівноваги, яка є неперервним балансуванням приходу і розходу.

Живі системи характеризуються неперервно виконуваною роботою зі створення негентропійних і нерівноважних структур, що сприяє процесам самоорганізації.

Виняткова структурна складність і множинність зворотних зв'язків у біокібернетичних системах перетворює процеси управління на процеси внутрішнього саморегулювання за власними законами організації системи (спонтанна активність розвитку).

З числа відомих [11, 31, 41] семи рівнів доцільного саморегулювання біосистеми виокремимо такі: а) адаптація шляхом перебудови внутрішньої структури і функцій системи за умови довготривалої постійної дії слабких ентропійних факторів; б) розвиток шляхом об'єднання і реалізації в одній системі всіх попередніх рівнів саморегуляції за умови дії різних ентропійних факторів; в) еволюція на шляху використання нових видів субстанції та енергії за умови дії ентропійних факторів навколишнього (зовнішнього) середовища. Безумовно, зазначене може використовуватись у моделюванні економіки.

Саморегуляція має не тільки матеріально-енергетичну, але й інформаційну складову і являє собою вид руху інформації, який зменшує невизначеність системи, зокрема економічної.

Важливо знати час релаксації, що характеризує швидкість повернення її основних змінюваних параметрів до околу початкових значень після збурення. З цим часом пов'язано співвідношення довгочасності перехідних і усталених режимів системи.

Такі складні системи, як біологічна (економічна також) багаті множиною процесів кооперативного характеру. Продукт кооперативного процесу впливає [11, с. 57] на швидкість його перебігу (рис. В.3).

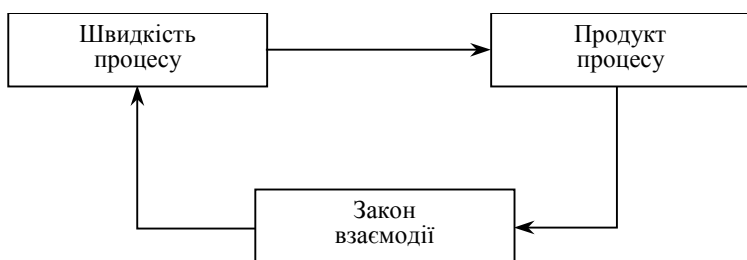


Рис. В.3. Схематичне зображення перебігу кооперативного процесу

Закон взаємодії залежить від кількості продукції.

**Зауваження!** Огляд літератури з економіко-математичного моделювання свідчить про використання головним чином білінійного закону взаємодії (одного із законів кінетики).

Нарешті, зупинимось на факторах динаміки популяцій. Вони діють як складна сукупність, в якій напрямок і характер впливу одного елемента (агента) зумовлюється співвідношенням з іншими.

Динаміка популяцій [11, 31] відображає кількісний бік боротьби за існування. Це виявляється у змінюваності в часі чисельності її індивідів. Як процесу їй притаманне таке: існування критичних (порогових) значень; ефект лага; кумуляція впливів взаємодіючих численних змінних і пов'язані з цим нелінійні залежності. Дослідження динаміки популяцій зводиться до опера-

цій вимірювання (отримання даних про залежні і незалежні змінні), аналізу (встановлення суттєво важливих змінних), опису, моделювання та оптимізації.

Складність системи визначається зростанням кількості її елементів, ступенем розгалуження (гіллястості) структури і різноманітністю внутрішніх зв'язків. Складні системи, будучи нелінійними, можуть мати кілька особливих точок і граничних циклів.

Якщо нестійка особлива точка оточена стійким циклом, то малі відхилення від положення рівноваги ведуть систему до затухаючих коливань — випадок м'якого збурення. Також мають місце системи з жорстким збуренням — поштовх достатньої сили породжує в системі незатухаючі коливання. Між точкою стійкої рівноваги і стійким циклом лежить щонайменше один нестійкий цикл.

Якщо існує кілька стійких циклів, то можлива наявність кількох досить чітко виокремлених станів, між якими допускаються переходи.

Коливання, пов'язані з наявністю стійких граничних циклів, називаються автоколиваннями. Поведінка автоколивних систем близька до стійкої нерівноважності.

Структурним підґрунтям самоорганізації слугує множинність елементів та розгалуження зв'язків між ними, що веде до появи цілісності, а функціональним фундаментом — розвиток гнучкої взаємодії між елементами за допомогою зворотних зв'язків, спрямованих на оптимізацію системи.

**Зауваження!** Сказане цілком відповідає економічній самоорганізації.

Насамкінець, адаптивні механізми біологічної системи (живого організму) не вичерпуються досягненням кінцевої мети — збереження гомеостатичного стану. Пристосування її до зовнішнього середовища відбувається як неперервний процес, під час якого збільшується рівень гомеостазу за рахунок наростаючого ускладнення.

Адаптація в біології є процес пристосування будови і функцій організмів та їх органів до умов середовища [41, 82]. Принципологія адаптації почала активно розроблятися і використовуватися в техніці, зокрема в теорії управління об'єктами значної складно-

сті через наявність неповної апріорної інформації в умовах певної невизначеності перебігу процесу [139].

Адаптація визначається як процес цілеспрямованої змінюваності параметрів і структури складної системи (об'єкта нашої уваги), котрий включає критерії функціонування та їх використання, допускаючи альтернативу їх застосування залежно від стану.

Адаптація в ситуації невизначеності середовища і породженого цим ризику та складності об'єкта покликана сприяти якомога кращому досягненню цілей існування.

Розрізняють: *пасивну адаптацію* — пристосування до фіксованого середовища, тобто система, що адаптується, діє таким чином, щоб виконувати функції якнайкраще; *активну адаптацію* — цим передбачається вплив на формування такого зовнішнього середовища, щоб ефективно досягти поставлених цілей. Обидва види адаптації одночасно взаємодіють у процесі функціонування системи, досягаючи оптимальності в певному сенсі.

Серед існуючих у техніці способів реалізації процесу адаптації приваблює цілком закономірна можливість варіативності алгоритму адаптації (використовується в техніці), і критеріїв життєдіяльності системи (змінюваність цілей притаманна біології).

Адаптація об'єкта передбачає перегляд межі, що розділяє об'єкт дослідження і зовнішнє середовище.

Адаптація цілей передбачає пристосування потреб і вимог особи, що приймає рішення (ОПР), узгоджених з можливостями системи моделювання.

Спостерігаються такі рівні адаптації: *параметрична* — викликана дрейфом характеристик керованого об'єкта і пов'язана з корекцією або підлаштуванням параметрів моделі об'єкта; *структурна* — коли відбувається перехід від одного до іншого варіанта моделі, альтернатива яких допускає різну кількість і різноманітний характер входу—виходу, можливості декомпозиції і структурної організації складових моделі. Структурну адаптацію поділяються на *альтернативну* й *еволюційну*, причому перша відрізняється незначною кількістю своїх можливих структур, а друга, тобто еволюційна, за своєю суттю відповідає еволюції в біології — плавному і поступовому, без стрибків, переходу від одного стану до іншого. Кожному рівню ієрархії адаптації влас-

тива своя часова константа, яка зростає для вищого ступеня ієрархічності.

З точки зору моделювання зазначимо таке. Алгоритмічний рівень адаптації пов'язується з пристосуванням схем обробки інформації, враховуючи специфіку розв'язуваних задач.

На програмному рівні адаптації здійснюється процес пристосування вибором потрібної програми комп'ютерного моделювання з альтернативної множини. За своєю суттю, такий процес відповідає реалізації алгоритмічного рівня адаптації, долучаючи програмне забезпечення комп'ютера.

Системний рівень адаптації покликаний покращувати дієвість всестороннього вивчення об'єкта моделювання.

Згодом з'явилась так звана *проблемно-орієнтована адаптація* [69, 145], що вельми успішно реалізована [146] і зарекомендувала у системах автоматизації проектування. Вказаний варіант адаптації являє собою цілеспрямоване самонавчання підсистеми числового аналізу динамічних режимів нелінійних електронних та електричних ланцюгів (мереж). Процес такого самонавчання формується умовами моделювання. Проблемно-орієнтована адаптація покликана здолати низку обчислювальних труднощів системи моделювання, причому вони диктують використання адекватного математичного апарату.

Адаптуватись означає перебудуватись, орієнтуючись (ставлячи за мету) на ефективне розв'язання задач, їх широкий клас. Кожного разу для нової задачі слід будувати свій адекватний алгоритм. Варіюючи структурою моделі об'єкта і алгоритмом кількісного аналізу, означає відмовитися від жорстких конфігурацій, які вичерпали свої можливості на простих задачах моделювання економіки.

Формування механізму адаптації багаторівневе: відбувається зміна мети і стратегії розвитку; здійснюється пристосування організаційної структури об'єкта як цілого і його складових.

Органічно постає проблема управління — процес організації цілеспрямованої дії на об'єкт (його математичну модель), внаслідок чого відбувається перехід до належного (бажаного) стану об'єкта. При цьому варто пам'ятати про ОПР, чий завдання (цілі) реалізуються при здійсненні управління моделюванням. Адаптація — шлях до ефективних управлінських рішень.

Наостанок зауважимо, що, незалежно від походження, системи поділяються на: 1) *ізолювані* — до них не постачається або відбирається субстанція, енергія чи інформація; 2) *закриті*, в яких не відбувається експорт або імпорт речовини, але має місце обмін енергією чи інформацією; 3) *відкриті*, в яких спостерігається обмін із зовнішнім середовищем зазначеними вище компонентами буття.

Саме до таких систем належить економіка, якій притаманна багатокритеріальність функціонування, наявність обмежень енд- і екзогенного характеру, екстремальність значень критеріїв оцінки економічного стану в цілому та його складових — природне і безмежне поле адаптації.

### **ГНОСЕОЛОГІЯ ТРАНСФОРМАЦІЙНОЇ ЕКОНОМІКИ ЯК ОБ'ЄКТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Г**рунтуючись на працях науковців: Вітлінського В., Волкової В., Делокарова К., Денісова А., Євстигнєєва В., Євстигнєєвої Л., Єрохіної Є., Клебанової Т., Князевої О., Курдюмова С., Ласло Е., Мельника Л., Моїсєєва М., Мочерного С., Нусратулліна В., Петрова А., Пономаренка О., Поспєлова І., Пригожина І., Ровінського Р., Рузавіна Г., Хайтуна С., Хакена Г., Чепєлєва В., Яковця Ю. та інших, з позицій комп'ютерного економіко-математичного моделювання (ЕММод) висвітлюються проблеми трансформаційної економіки, тобто динаміки економічних процесів (переходу від одного стану до іншого).

Стисло викладено головні на сьогодні здобутки на ниві вербального вивчення економіки, керуючись системним мисленням (аналізом) і перебуваючи на синергетичних позиціях, тобто згадуване вище розглядається через призму відтворення рівняннями математичної моделі (далі — ММ) і наступного якісного і кількісного аналізу. Прийmemo гіпотезу, що обчислювальний експеримент в економіці непідвладний уподобанням (індивідуальним або груповим), вільний від будь-яких обмежень, допускає екстремальні режими випробування; дозволяє з'ясувати всі обставини, що сприяють тим чи іншим властивостям, межах їх виявлення; виключає значні матеріальні (перш за все енергетичні) витрати і забруднення довкілля, але разом з тим не може уникнути інформаційного шуму. Таким чином з'ясовуються ключові фактори і межі їх дії.

У літературі [21] наголошувалась особлива потреба на розробленні ЕММод на підґрунті синергетичного і системного підходів. Нині спостерігається (повсюдне і всебічне) переосмислення концептуальних засад традиційного ЕММод, що викликано новими економічними проблемами — стрімкою динамікою економічних подій — перехідними процесами від одного до іншого

стану економіки. Розробляючи парадигмальні положення математичного моделювання економічних систем, варто пильно придивлятися до світу живої природи, яка продукує нові ідеї і наводить яскраві приклади.

---

### **1.1. Економічна еволюція: патерни системності і нелінійності. Іманентність адаптації**

---

Зважаючи на існуючі способи поділу [110, 131], економіка належить до числа мішаних систем (є штучні — створені людиною, і природні).

Еволюція економіки відбувається в історичному часі та економічному просторі, координатами якого слугують економічні фактори, що описують розвиток системи. Саме потоки субстанції, коштів, інформації, виробничі процеси і розподіл суспільних благ (послуг і товару) утворюють в сукупності динамічну економічну систему, структура якої характеризується постійною змінюваністю економічних зв'язків, їх інтенсивністю і силою, дрейфом елементів (складових) економіки.

З погляду математичного моделювання еволюція розкривається на основі принципів самоорганізації, на підґрунті трансформаційного потенціалу всередині системи та топології взаємодії елементів, рівня їх взаємовпливу.

Траєкторія еволюції економічної системи являє собою геометричне місце точок, що відповідають можливим значенням динамічних змінних (фазовим координатам) для довільного моменту часу в економічному (фазовому) просторі.

Фазовий портрет є графічне зображення еволюції — послідовних станів економіки за допомогою динамічних траєкторій фазового простору.

Стан економічної системи визначається сукупністю характеристик для неї величин — параметрів стану. Він детермінується обсягом товарно-грошових потоків, балансом доходів — видатків тощо. Розвиток економічної системи пов'язаний зі змінюваністю її станів. Формування узагальненої цілісної або системної картини макроекономічного розвитку зображено на рис. 1.1 [103, с. 105] за участю факторів еволюції.



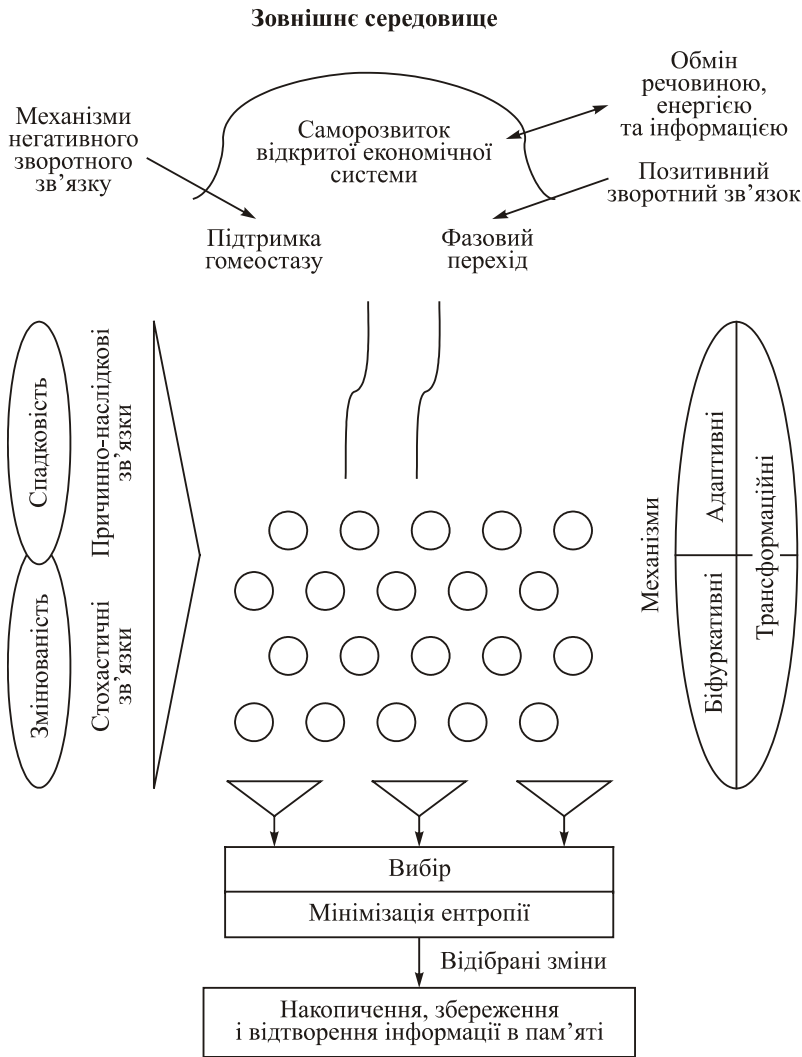


Рис. 1.1. Складові (фактори) розвитку економічної системи

Якщо Ч. Дарвін ще у середині XIX ст. відкрив три ключові фактори розвитку живих організмів, то наприкінці XX ст. вони при-

ймаються [112, 113] як фундаментальні для всього суцього. Розвиток економічної системи полягає у змінюваності — здатності системи міняти свої стани, тобто здійснювати перехід до нового економічного стану, що означає трансформацію попереднього гомеостазу.

Спадковість — це здатність системи відтворювати характерні риси і прикметні ознаки в череді послідовних змін. Це своєрідний місточок між минулим і майбутнім: не тільки здатність майбутнього залежати від минулого, також здійснювати вплив майбутнього на теперішнє (врешті-решт по місточку рухаються в обох напрямках!). Спадковість забезпечує не тільки закономірності змін, але й сприяє стійкості систем.

Відбір являє собою виокремлення чогось із деякого середовища за певною ознакою. Відбір претендує на селекцію в певному розумінні якнайкращу, що має місце у природі. Критерій і форма відбору, зважаючи на його багатоваріантність (множину можливих шляхів еволюції) є два фундаментальні поняття. У природі вони реалізуються як мінімізація дисипації енергії або збільшення ентропії.

Адаптаційні механізми засвідчують пристосування економічної системи до сигналів ззовні чи дій внутрішнього походження, зберігаючи разом з тим цілісність системи та її прикметні ознаки (система залишається в еволюційному руслі подій).

Починаючи з другої половини XX ст. стали відомими біфуркаційні механізми, що відповідають такому характеру змін економічної системи, коли вона втрачає попередню цілісність і прикметні ознаки. Пропонуються альтернативні шляхи можливостей набути іншої якості, каталізуються процеси розвитку, надаючи максимальну кількість можливих варіантів економічного стану. Як правило, спостерігається почергова дія адаптаційних і біфуркаційних механізмів економічного розвитку.

Стану економічної системи відповідає аттрактор, до якого тяжіють траєкторії (збігаються, закономірно еволюціонують).

Розрізняють такі економічні стани: стаціонарний — стійкий гомеостаз; збудження — турбулентність; коли втрачається стаціонарність і відбувається пошук нового гомеостазу; рефракторність — заспокоєння, коли досягнуто новий гомеостаз.

Стаціонарність — це такий стан, протягом якого не відбуваються принципово якісні зміни стану системи, але разом з тим відбуваються внутрішні і зовнішні взаємодії, щоб система

була стійкою (зберігала внутрішню рівновагу) при всій нерівноважності із зовнішнім середовищем. Новий стан характеризується руйнацією внутрішньої рівноваги, втратою стійкості.

Трансформація стану економічної системи інколи зазнає стрибкоподібної зміни значень своїх параметрів, що, зокрема, відповідає моменту кризи (дефолту) і називається фазовим переходом.

Критичні параметри (порогові значення) відповідають кризі, з якої вихід деструктивний — все руйнується, або конструктивний — перехід до нового стійкого стану з дещо іншими чинниками та організацією структури.

Кризою закінчується однозначність, єдиний еволюційний шлях. У відкритій системі для кризового стану за наявності зовнішнього джерела енергії прибуває негентропія: якщо цього замало, то реалізується частково або повністю деструкція, і навпаки. Самоорганізація виступає механізмом конструктивного виходу з кризи (енергія, що надходить, перекидає дисипацію, але це всього лише необхідна умова).

Зазначене вище у поєднанні із завжди не зовсім точними даними, недостатньою повнотою і визначеністю економічної інформації зумовлює значні труднощі пізнання економічної дійсності, її законів на відміну від техніки, фізики, де такого роду фактори кваліфікуються, як нештатна ситуація. Саме цим спричинено деяке безсилля класичної економічної науки у пошуку відповідей на низку проблем сьогодення.

Крім того, економіка на відміну від природничих наук, в яких структура досліджуваного об'єкта відносно жорстка (наприклад, функціональна схема), насичена активністю суб'єкта господарювання.

Стає зрозумілою потреба не тільки у принципово нових підходах до дослідження економічних процесів, але й системно узгоджених для досягнення глибини всебічного вивчення об'єкта моделювання.

Слід зауважити, що міждисциплінарний підхід несистемний, бо саме останньому належить визначальне — синтезувати розрізнені факти і висновки в єдине ціле.

Системна методика являє собою цілеспрямоване на повновагий результат об'єднання сукупності різних методів і прийомів дослідження.

На підґрунті описаного автору монографії вбачається така узагальнена схема функціонування економіки (рис. 1.2).

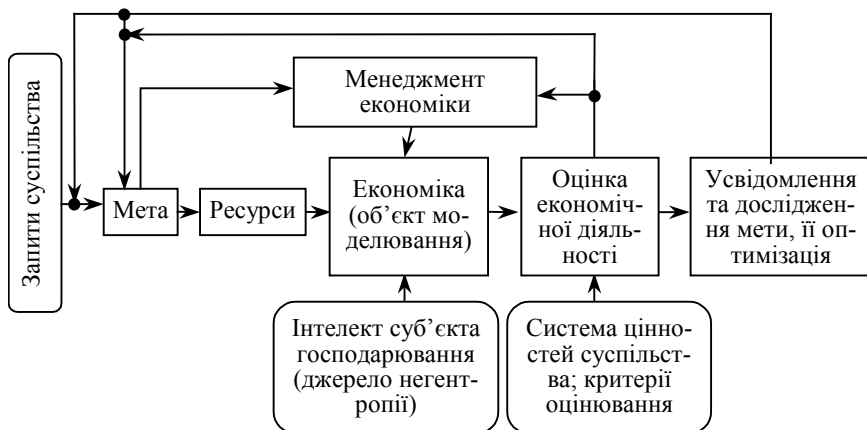


Рис. 1.2. Узагальнена схема функціонування економіки

**Патерни системності.** Фактично світ економіки — складне ціле у взаємодії: прямо чи опосередковано все залежить від усього. В теоретичній і прикладній різновидах економіки гостро відчувається потреба у новій методології та інструментарії її вивчення — спершу була нелінійна і синергетична риторика, системна рефлексія. Як свідчить історія економіки, така закономірність вчення про економічну еволюцію, можливо, прикра, коли процес вербалізації невиправдано затягується.

Основні положення системного мислення [15, 22, 103, 110, 135, 175]:

1) цілісність — міркування носить внутрішньо єдиний характер (одночасне наближення економічної структури, функцій, процесів);

2) ітеративне мислення, в процесі якого відбувається послідовне уточнення, — наближення до істини, адже економічній системі притаманні петлі зворотних зв'язків, полярних знаків;

3) самоорганізація як процес, здійснення якого зумовлено незворотним часом  $t$ , нелінійним (на відміну від зворотного лінійного) в розумінні об'єднання минулого, теперішнього і майбутнього;

4) інтерактивне моделювання, мета якого виявляється через горизонт сценаріїв майбутнього, його конструктивізація.

Загальновідомо, що цілеспрямовані дії не завжди дають бажаний результат, а інколи — навпаки, чому слугують приклади з реального життя. Тому корисним доповненням системного мислення є поняття контрінтуїтивності, сутність якого визначається таким: 1) причини і наслідок віддалені як у просторі, так і часі (уповільнена дія); 2) причина і наслідок можуть мінятися місцями; 3) одна подія викликає кілька наслідків; 4) усунення початкової причини необов'язково усуває наслідок.

Системна методологія передбачає об'єднання в єдине ціле послідовного процесу дослідження, ітеративного мислення і негентропійної поведінки.

Системний підхід до аналізу економіки означає, зокрема:

- пояснити розвиток (функціонування і поведінку) об'єкта дослідження як цілого: його не зрозуміти, вивчаючи лише частки;
- ініціюється розвиток не тільки ззовні (за рахунок відкритості), але й внутрішніми поштовхами;
- підґрунтям розвитку виступають як боротьба протилежностей (діалектика буття), так і коаліції.

У цілому патерн зазначеної системності складає прикладну теорію системного аналізу економіки. Прикладна теорія систем являє собою своєрідний системний економічний аналіз, у якому синтезуються формалізований опис об'єктів — ЕММ, методи їх всебічного аналізу, досягнення в інших сферах знань, досвід та інтуїція фахівців, підпорядковуючи все перераховане єдиній меті — моделюванню конкретної проблеми.

Феномен економічного розвитку характеризується таким: знання про предмет, який одночасно утворює середовище функціонування, є об'єктом управління і метою життєдіяльності. Фундамент теорії розвитку — економічної еволюції, складають відкриті ще Дарвіном рушійні фактори (сили), а саме: змінюваність, спадковість і вибір. Розвиток природи економіки аж ніяк не є лінійне нарощування ланок еволюційного ланцюга.

Ідея системності — провідна парадигма методології науки ХХ ст., та й наукове мислення априорі системне за визначенням.

Системне відображення організації економічної реальності постає головним завданням економічної теорії.

Фундаментальні системотвірні поняття — нелінійність, відкритість, структурна адаптація або самоорганізація, когерентність, біфуркації, атрактор, хаос тощо. Вони вимагають іншого мислення, відмінного від усталеного в економічній теорії.

Актуалізація нелінійної системної методології пов'язана з викликами економічної дійсності, однією з прикметних рис епохи — стійкою нестійкістю.

Стійкість економічної системи тлумачиться як здатність функціонувати за певних збуреннях ззовні та гнучкості структури і певною мірою малій ендогенній трансформації.

Нестійкість динамічної економічної системи пояснюється її нелінійністю. До речі, теорія нелінійних систем досить розвинута у природничих науках.

Сучасні економічні проблеми уже не вписуються в рамки звичай відомих рішень. На зміну старим підходам та інструментам треба винайти нові, більш дієві. Проблеми та їх розв'язання не можуть розглядатися без урахування зовнішнього середовища.

Математичне моделювання не тільки допомагає зробити умовлений вибір, разом з тим воно є знаряддя цілісного мислення і вивчення проблеми.

Якщо у класичній економічній теорії вивчається головним чином рівноважний стан економічної системи, то нині досліджується процес зміни (переходу від одного до іншого), тобто цікавить динаміка подій. Предметом дослідження сучасного економічного аналізу є динамічні процеси складових економіки на всіх її ієрархічних рівнях.

Існують комбінації змінних, упорядковані у просторі, але не в часі, і навпаки. Відомі чотири типи атракторів: 1) точковий; 2) циклічний (коливання між двома типами рухів); 3) тор є упорядкована складність, що повторює саму себе; 4) дивний. Їх тлумачать так: точковий атрактор відбиває односторонню спрямованість; другий тип відповідає доповнюючим один одного тенденціям стабільності та змінюваності (має місце змінюваність пріоритетів та орієнтації); торові атрактори (еквіфінальність / негентропія / самоналаштування) слугують прикладом поведінки відкритих систем; дивний атрактор (мультифінальність / самоорганізація, цілеспрямованість) відображає поведінку соціально-економічної системи з вибором мети і засобів (він сприяє реконструкції системи).

Кількісна характеристика однієї зі змінних у разі досягнення порогового значення (кризової точки) ініціює фазовий перехід стану економіки — стрибкоподібне набуття нових числових значень (якісних змін).

Закони хаосу універсальні і діють на усіх рівнях і масштабах. Тільки вивчаючи ціле, можна зрозуміти поведінку його часток.

**Патерн нелінійності.** В економіці все ще продовжуються, скоріше, за інерцією та завдяки освіті, панувати лінійні моделі, але поступово і неупинно домінуючий дух лінійного мислення відступає під натиском реалій економічного буття. Методологічно лінійна парадигма вичерпала всі свої потенції: лінійні моделі неперервної економічної еволюції не виводять з глухого кута ні теоретичну, ні прикладну економіку.

Класичне розуміння причинної залежності, коли причина виступає необхідною і достатньою умовою отримання результату, неспроможне пояснити породження однією структурою кількох функцій у фіксованому просторі.

В наше буремне (глибоко трансформаційне) економічне сьогодення викликає занепокоєння лінійне каузальне мислення: локальні лінійного характеру дії дуже часто призводять до глобального хаосу, хоча, можливо, закладались щонайкращі наміри. Спостерігаються намагання відійти від лінійної форми жорстко детермінованої причинності, адже лінійний стиль мислення працює у досить своєрідних умовах, далеких від дійсності.

Рудиментом лінійного мислення виступає монокаузальність, хоча насправді економіка багата на численні причини, взаємопов'язані між собою нелінійно, таким же чином здійснюється взаємовплив між ними. Для прикладу, незначними дозами підвищується частка якогось товару на ринку і врешті-решт таке накопичення веде до остаточного успіху. Він принципово не може пояснюватися парадигмою лінійної економічної динаміки, але цілком охоплюється іншим — нелінійною теорією: еволюція макроекономічних параметрів розвитку детермінується нелінійними мікроекономічними взаємодіями, особливо для сильно нерівноважних станів. Зазначений приклад цілком відповідає реальній ринковій ситуації.

На наших очах відбувається поворот від одновимірного лінійного мислення (причина—наслідок), характерного для класичної економічної науки, до цілісного, або холістичного, багатовимірного, нелінійного, за наявності зворотних (позитивних і негативних) зв'язків. В економіці домінують нелінійні незворотні дії процесів, що забезпечують можливість спонтанного виникнення структур в умовах сильної нерівноважності.

Якщо менеджмент економіки базується на традиційних лінійних уявленнях про їх функціонування, то результат керуючого сигналу ззовні є однозначно передбачуваний прямопропорційний ре-

зультат докладених зусиль. Як показує економічне буття, може скластися хибна думка: чим більше вкладається, тим кращий отримується результат, що зовсім не так. Схеми послідовного і поступового накопичення малих зусиль недостатньо для створення якісно нових станів, що засвідчується практичною економікою.

З числа прикметних рис лінійної парадигми виокремимо найбільш істотні в сенсі математичного моделювання: 1) існування єдиного розв'язку (економічного процесу); 2) неперервна (плавна, повільна) змінюваність характерних чинників економічної еволюції; 3) зворотність економічного стану (розглядати минуле, ретроспективний аналіз); 4) справедливий принцип суперпозиції (накладання розв'язків) — пропорційність екзогенному сигналу.

Навпаки відбувається у нелінійній економічній системі, у котрій все пов'язано зі всім: має місце багатопричинний характер змінюваності стану економіки; причини постійно змінюються з наслідками. Для ЕММ, котрими описуються економічні процеси, це означає, що аргументи міняються місцями з функціями.

Якщо раніше лінійній парадигмі науки була властива чітка відмінність суб'єкта і об'єкта, то нині спостерігається системна нелінійна взаємодія між ними. Настав час визначити економіку як складну з кількома рівнями ієрархії систему, на кожному з яких примат суб'єктивного спостерігається, можливо, домінує.

Якщо у лінійній економічній науці донедавна існували поодинокі два напрями аналізу — класична (неокласична) економічна теорія та інституціоналізм, то нині стає можливим їх синергетичне об'єднання, зважаючи на емергентність.

Елементи економічної системи мають різні темпи розвитку [37, 43] (спостерігається швидкоплинні та повільні процеси), вони перебувають у так званих *різних темпосвітах*. Всі різномасштабні системи, що розвиваються, є відкритими і нерівноважними. Нерівноважність економічної системи та нелінійність її складових і самої в цілому тісно пов'язані.

Економічний світ складний і нелінійний. Економічне буття з притаманним нелінійним характером підпорядковується законам самоорганізації, бо саме нелінійна система здатна до самодії, спонтанного зародження нових структур за рахунок внутрішніх ресурсів. Між іншим, саме нелінійність ускладнює економічну систему, не спрощуючи її.

У світі нелінійної економіки лінійна парадигма вичерпала власні потенції. Моделі з лінійно-причинними зв'язками (підходи



неокласичні, інституціональні) практично досягли стелі своїх можливостей. Як ніколи раніше сучасна економіка повинна відмовитися від методу спроб і помилок, чого вимагає сьогодення. Відчувається нагальна потреба у кардинальній зміні методології економічного аналізу, який потребує підживлення, посилення новими ідеями, інструментарієм.

Нелінійне мислення як стиль наукового економічного пошуку тільки формується. Мається на увазі фундаментальна нелінійність (глобального характеру, для системи в цілому), що притаманно економіці, але не відображається поки що економічною теорією.

Переглядаються поняття і підходи економічної науки, доповнюючи класичний арсенал. Зароджується нове бачення економічного розвитку, розуміння його процесу на відміну від класичних уявлень.

Саме внутрішньою структурою економічної системи зумовлені картини проміжних і остаточного станів та нелінійні перехідні процеси між ними. Не зрозумівши природи економічної системи, не з'ясувавши тенденції саморозвитку (її власні шляхи), не можна нав'язувати майбутнє.

Ціла низка проблем як теоретичної, так і прикладної економіки можуть стати розв'язаними, якщо долучити до своїх міркувань дещо із напрацьованого про нелінійність і поведінку складних систем (конструктивізувати і перенести на поле економіки). Економічна система, будучи завжди складною, володіє кількома можливими шляхами розвитку, але зупинитись можна тільки на одному з них, вибір якого має допомогти здійснити нелінійний економічний аналіз на підґрунті математичного (комп'ютерного) моделювання економіки.

---

## **1.2. Кібернетичний і синергетичний аспекти нелінійного економічного аналізу**

---

Економіці властива мета функціонування і наявність багатьох шляхів її досягнення, серед яких, напевно, існує найкращий у деякому сенсі.

Економічна система неперервно якісно змінюється, що виявляється через: а) її складові; б) умови і середовище діяльності та морфогенез; в) інтенсивність впливу (від домінування до латентності)

зв'язків ендо- та екзогенного походження; г) ступінь нелінійності, що докорінно впливає на життєдіяльність економіки як цілого.

Управління економічною системою — творчий незворотний процес упорядкування, набуття нею нової організації або структури внаслідок функцій управління, також використання інтелекту суспільства як джерела створення негентропії та її збільшення.

Інтелектуальна енергія — потужне джерело негентропії, являючи собою особливий вид енергії, коли має місце перетворення різноманітної інформації, чим забезпечується упорядкування різних структур — відбувається управління і регулювання. Слушно зауважити, що згадуване перетворення інформації обходиться без видимих затрат енергії та субстанції.

В управлінні економічною системою треба орієнтуватись не стільки на бажання управлінця, скільки брати до уваги тенденції розвитку, не виключаючи появи вільних від контролю зон і допускаючи моменти відсутності контролю. Існує єдиний шлях пізнати і урахувати зазначене — це сповна скористатись можливостями економіко-математичного моделювання, тобто здійснити широкомасштабний обчислювальний (модельний) експеримент в економіці.

Основні напрями удосконалення управління економічною системою формулюються так [103]:

- а) життєспроможність — через самоорганізацію;
- б) керованість — через децентралізацію;
- в) ефективність — через багатовидові можливості;
- г) прогрес — через вільну енергію;
- д) удосконалення — через відбір.

Пізнання природи економічної системи, законів її розвитку, щоб уникнути традиційного методу проб і помилок, також передбачає моделювання зазначених напрямів, серед яких ключовими, на наш погляд, є пункти а), в) і д). Тільки на підґрунті економіко-математичного моделювання можна безболісно втрутитися в таємничість економічної природи.

Економіка являє собою регульоване інтелектом утворення високоупорядкованої структури. У витоків новоутвореного порядку (економічного стану) стоїть людина зі своїми інтелектом та інтересами. Організація економічної структури (морфогенез) є результатом доцільного управління і становить кібернетичну систему.

Кібернетичний підхід спряжений з екзогенними механізмами розвитку, робить наголос на доцільну корекцію умов зовнішнього середовища, ведеться обробка метаболічних процесів.

У керуванні економічною еволюцією кібернетичний підхід виявляє себе через таке: а) досягнення стабільності за рахунок приросту негентропії (наприклад, заміна технології); б) внаслідок розумової діяльності просянуються альтернативи, долучаючи досвід, знання, інтуїцію.

Кібернетичне дослідження економіки, мета якого полягає у раціональному й ефективному управлінні економічною системою з використанням зовнішніх сигналів, здійснюється цілком логічним утворенням двох підсистем — керованої (власне об'єкт уваги) та керуючої (менеджмент об'єкта). Коли є мета розвитку економічної системи, наприклад соціальні пріоритети, то обов'язково існує оптимальна траєкторія її досягнення, що стає можливим за належного (дієвого) управління. Це досягається як прямими сигналами, так і за рахунок зворотних зв'язків (додатних і від'ємних), які сприяють локалізації прибутку як мети життєдіяльності економічної системи та пошуку оптимальної траєкторії.

Кібернетика покликана долати всілякі перешкоди й обмеження, що стоять на шляху досягнення сформульованої мети, і створювати найліпші умови одержання результатів.

Із широкого спектра визначальних рис економіки привернемо увагу до таких:

а) емерджентність — наявність в економічній системі властивостей, не характерних жодному її компоненту;

б) іманентна невизначеність і неповнота економічної інформації, щомоментно змінюваної;

в) агрегування, декомпозиція в економіці, тобто розгляд локальних економічних експериментів над підсистемою вкрай обмежені, бо спостерігаються гетерогенні зв'язки тісної та глибокої синтетичної дії між елементами економіки;

г) відокремлення деяких процесів удаване, межує зі штучною ізоляцією.

Зазначений стан справ унеможлиблює:

а) пряме або безпосереднє, експериментування;

б) проведення так званого *чистого експерименту*.

Також завжди має місце тісна взаємодія виробничих відносин і сил (тобто людей зі своїм інтелектом, індивідуальними особливостями), яку треба навчитись урахувати, щоб досягати певного успіху.

Новітній науковий стиль економічного мислення та сучасна методологія наукового пошуку в економіці пов'язується з вико-

ристанням досягнень синергетики [151, 159], концептуальні засади якої — принципи та можливості — якнайкраще відповідають економічному сьогоденню — складній, суперечливій і динамічній економічній реальності. В ній, як ніколи раніше, зростає роль не тільки тих, хто приймає рішення, але й тих, хто впроваджує в життя ухвали. Варто завжди мати на увазі ціну заходів, яку платять члени суспільства.

Останнім часом досить активно формується нелінійне економічне мислення на противагу традиційному — класичному лінійному, і спричинене нерівноважністю, нестійкістю, незворотністю відповідних процесів. До низки причин також відносять інші концепти синергетики, як от: флуктуація, біфуркація, когерентність, дисипація тощо. Найяскравішим фактором є незамкнутість економічної системи, коли відбувається циркуляція фінансових потоків, ресурсних, інформаційних, а також їхнє підживлення.

На передній план висуваються нові вимоги до результатів в економіці чи оцінок економічних факторів, які мають бути кількісного характеру. Треба завжди пам'ятати про оперативність і ймовірність отримуваних оцінок, витрати на них.

Цілком природно сприймається, що аналіз економіки як складної та надскладної системи потребує нового міждисциплінарного інструментарію, в ролі якого виступає синергетика (її парадигма), результати якої адаптуються до економічної проблематики в цілому, не тільки у вигляді окремо взятих застосувань деяких положень. За поняттям «синергетична економіка» криється полідисциплінарний характер математичних знань, засвоєння яких трансформується в потужний апарат досліджень багатьох економічних проблем, належного пояснення їх природи і наслідків. Якраз синергетика займається виявом закономірностей процесів самоорганізації дисипативних систем, до числа яких належить економіка. Між іншим, не тільки минуле економічного буття визначає його теперішній стан, а також невідоме майбутнє як аттрактор.

Слід також пам'ятати про неухильно зростаючий інформаційний обсяг мислення, на фоні якого відбувається пізнання динаміки економічного буття. На підставі паралелей з іншими предметними галузями науки і техніки та потреб власне економічної практики можна стверджувати, що вивчати проблеми нелінійної трансформаційної економіки можна тільки за допомогою комп'ютерного моделювання, використовуючи адекватні математичні моделі. Методологія проведення обчислювального експерименту

(ОЕ) в економіці жодним чином: а) не суперечить класичній економічній науці; б) не конкурує з жодною фаховою дисципліною. Скоріше навпаки, з позиції ОЕ тільки уточнюються наші знання, вимагаючи більшої конкретності. Подекуди вони поглиблюються, сприяючи постановці важливих питань, їх успішному розв'язанню.

Макроекономіка розглядається як цілісна система з властивостями, відсутніми в її складових. Розвиток економіки являє собою низку фазових переходів економічного стану, який завжди нерівноважний і нестійкий. Прикмета нестійкості — флуктуації самоорганізуючої економічної системи.

Глобально флуктуації поділяють на зовнішні та внутрішні. Джерелом перших є коливання цін, процентних ставок, темпів інфляції, зміни валютних курсів, акцій на біржах, митної політики тощо.

Множину екзогенних флуктуацій також доповнює просторова міграція — перейти туди, де краще, або створювати такі умови; використання неоднорідностей середовища проживання; міграція у часі (сезонна, циклічна); просторово-часова міграція — сезонна змінюваність обсягів капіталу, кількість працівників.

До числа причин, що породжують внутрішні флуктуації національної економіки, належать коливання доходів, попиту і пропозиції, цін, норм прибутку, інновації, інвестиції тощо.

Характерні риси довкілля (корисні копалини, клімат, ресурси) і соціального оточення (суспільні лихоліття, стратифікація населення тощо) суттєво впливають на спричинення флуктуацій.

Значна кількість причин і наслідків флуктуючих параметрів, переплетіння їх взаємодії тільки підкреслює нераціональність пошуку єдиного джерела і рушійної сили еволюції економіки — сутність справи лежить у множині факторів і наявності зворотних зв'язків та рівня їхнього взаємовпливу.

Системне дослідження ґрунтується на моделюванні як внутрішніх складових сучасної економічної організації, так і різноманітних за формою та інтенсивністю взаємодії з більш складними зовнішніми системами. Внутрішні та зовнішні зв'язки економічної системи перманентно міняються, а умови функціонування елементів та їх підпорядкування набувають іноді лавиноподібного чи калейдоскопічного характеру.

На відміну від кібернетики у синергетиці робиться акцент не на процесах управління й обміну інформацією, а на принципах

побудови структури організації, виникненні самоорганізації, саморозвитку, саморегуляції та самоускладненні.

В науці, як відомо, одночасно діють кілька парадигм. Останнім часом в економіці спостерігається зростаюче значення синергетичної парадигми разом з кібернетичною, нелінійною, системною тощо.

Нового змісту, не відкидаючи кібернетичного (якби старого), надає синергетика, яка акцентує увагу на урахуванні тенденцій еволюції самої системи, немов би закликає дослідника пізнати внутрішні процеси для належного управління. Це є своєрідним симбіозом двох наявних підходів у вивченні економіки або їх синтез. Отже, новий зміст взаємин між об'єктом і суб'єктом дослідження полягає в адаптивній організації процесу пізнання (їх моделювання).

Синергетика досліджує закони самоорганізації (саморозвитку, саморегуляції) систем різної природи. Нагадаємо визначення цих понять. Самоорганізація є процес упорядкування внутрішньої структури та проходження через систему потоків речовини, енергії та інформації, який забезпечується механізмами зворотних зв'язків, прагнучи до стійкості системи. Сутність самоорганізації виявляється в самопідтримці всього того, що відбувається у системі.

Саморозвиток є забезпечення умов для удосконалення системи або внутрішньо необхідна спонтанна трансформація системи, ініційована її суперечностями. Без самоорганізації не може бути саморозвитку.

Саморегуляція — це потреба у внесенні коректив і необхідного підлаштування механізмів у відповідь на зміни, що відбуваються.

Мають місце такі ознаки самоорганізації: 1) рух; 2) розімкненість системи; 3) кооперативнісний характер перебігу процесів; 4) нерівноважна ситуація.

Вказане спостерігається в економіці, пояснюючи її принципові характеристики як синергетичної системи. Отже, економіка має регулюватися і управлятися відповідно до синергетичних законів.

Зважаючи на одвічне прагнення суб'єктів економіки до максимального прибутку і той факт, що прогрес не має мети [158], а тільки вектор, спрямований на інтенсифікацію процесів перетворення інформації і різних форм її взаємодії, методологічною основою управління економічною системою мають слугувати об'єднані зусилля кібернетичного і синергетичного підходів.

Таким чином, за наявності множини математичних моделей нелінійної економічної динаміки, на підґрунті їх самоорганізації та адаптивного застосування для відображення тих чи інших характеристик об'єкта дослідження можна розробляти комп'ютерні сценарії гіпотетичного розвитку економічної системи, деталізуючи умови досягнення цілі. Кінцевим результатом зусиль такого роду має стати єдина методологія вивчення розвитку подій, прогнозування значень економічних факторів тощо.

Економічна еволюція не вичерпується зміною технологій, бо не може існувати виробництво заради самого себе. Адже завжди має місце споживання благ і послуг, що становить якість життя особистості. Ось чому людина не є пасивним споглядачем, а навпаки — активним співучасником майбутнього хаосу на шляху до чергової стабільності. Інтелект людини має передувати її фізичним зусиллям, спрямовуючи їх, але саме інтелект сприяє появі нерівноважного економічного стану.

**Зауваження!** Крім інтелекту як оригінальної енергії в світі економіки існує її специфічна форма — вартість і товарна ентропія: все більша кількість якісних товарів за умов зменшення витрат на створення однієї одиниці товару [103, 107].

Менеджмент економіки покликаний досягати синхронної і синфазної взаємодії чинників ендо- і екзогенного походження, сприяючи такій їх самоорганізації, щоб якомога ближче підійти до околу точки резонансу.

Управління економікою з використанням синергетичного підходу [102] ґрунтується на максимізації можливостей інтелекту, роблячи його головним у розпізнаванні моменту біфуркації — настанні економічної кризи (катастрофи) і необхідності прийняття відповідних заходів.

Дещо з економічної реальності, наприклад, «економічне чудо» або революція, добре пояснюється у контексті синергетики. У точці біфуркації відбувається руйнація попередньої економічної структури (за рахунок десинфазності і десинхронізації) і спостерігається стрімке настання і бурхливий розвиток нового економічного порядку.

Регулювання економіки в точці біфуркації мусить бути обов'язково своєчасним, носити м'який і обережний характер у вигляді виважених управлінських рішень, бажано прагнути досягнення явища резонансу щодо економічного стану, беручи до уваги зво-

ротні зв'язки обох знаків. Яким чином має здійснюватися регулювання? Припущення завжди існують, але остаточна відповідь залишається за моделюванням.

Варіюючи значення зовнішніх умов і внутрішніх параметрів системи, за допомогою синергетичного моделювання розглядаються всі доцільні економічні стани; прогнозується розвиток, вибираючи оптимальний (найменш енергомісткий, найбільш безпечний, вигідний і т. д.). Володіючи ключовими параметрами економічної системи і контролюючи їх, знаючи певні правила, можна стимулювати процес прискореного і самостимулюючого зростання або уникнути кризового шляху.

Знання того, що неможливо здійснити за даних умов у системі, надзвичайно цінні. Володіючи інформацією про майбутній економічний стан, сценарії розгортання подій і контури прийдешнього, з використанням синергетичних тенденцій самоорганізації можна уникнути звивистого шляху еволюції або випрямити його, прискорюючи рух.

На завершення параграфа слід зауважити, що сучасне моделювання економіки розвивається [134] у трьох напрямках: 1) фундаментальному, тобто на шляху досліджень основних механізмів самоорганізації (визначальних сил саморуху, саморозвитку, адаптації структури тощо); 2) прагматичному, тобто шляхом вивчення формальної структури й упорядкування (морфогенезу), об'єднання за допомогою систем підтримки прийняття рішень, успішно працюючих моделей з подальшим їх удосконаленням і можливим створенням нових моделей; 3) феноменологічному, тобто традиційному шляху створення моделей, узагальнюючого характеру.

Приєднуючись до такої думки, принагідно наголосити, що кібернетичний і синергетичний підходи у вивченні економіки обов'язково мають об'єднуватися у своїх зусиллях, оскільки за визначенням вони стосуються відповідно ззовні та з середини об'єкта моделювання.

Кібернетика і синергетика розглядаються тільки як взаємодоповнюючі інструменти дослідження і важелі управління економікою. Між ними немає і не може бути протистояння, бо досліджується об'єкт уваги (моделювання) з різних сторін, якими він характеризується як ціле.

Значення такого типу дослідження (сполучення кібернетичного і синергетичного підходів) неможливо переоцінити.



---

### 1.3. Концепти адаптації в економіці з огляду на моделювання

---

Безумовно, питання адаптації в економічних дослідженнях не могло стояти осторонь хоча б через контекст еволюції науки в цілому. Адаптивний підхід розроблявся головним чином в класичних розділах математичної економіки — теорії оптимального розподілу обмежених ресурсів і рівноважного стану [6, 39]. В економетричному моделюванні також використовувались адаптивні моделі [88].

Дослідження останнього часу [35, 99, 109, 111, 122, 127, 128] торкнулись перехідної економіки, з притаманною їй систематичною непередбачуваністю і глибокою змінюваністю як зовнішнього середовища, так і внутрішнього економічного стану суспільства. Наприклад, в [6] розглядається спроможність економічних об'єктів до самостійного (без впливу зовнішніх сигналів) вибору стійких раціональних стратегій своєї поведінки в змінюваних умовах забезпечення і варіативності витратних матеріалів.

Особливо виразно проблеми адаптації економічних систем сформульовані в [35]. У працях [122, 128] чи не вперше в економічній літературі досліджувалась динаміка макроекономічних процесів з позицій адаптивного підходу.

У статті [127] добре відомі в теорії автоматичних систем чи управління та кібернетиці поняття «адаптація й адаптивна система» витлумачено з точки зору функціонування підприємства в умовах ринкової економіки.

Згадувані вище праці фактично започаткували новий напрям в економіко-математичному моделюванні — адаптивне математичне моделювання економіки. У нашому розумінні воно має бути наскрізним, тобто не лише на етапі побудови ЕММ, але також у кількісному та якісному аналізі рівнянь моделі. Таким чином, надалі йтиметься про адаптивну парадигму моделювання економіки.

#### Постановка проблеми адаптації у вивченні динаміки економіки

До числа способів вивчення економіки останнім часом [99, 101, 122, 174] все більше долучаються методи досліджень природничих наук, наприклад, синергетики, відповідно теорії ієрархіч-

них систем, катастроф, управління тощо, якими пройдено значну частину шляху математичного моделювання як ефективного способу системного і глибокого пізнання досліджуваного об'єкта і раціонального досягнення вмотивованого кінцевого результату. Спостережувана своєрідна експансія природничих дисциплін суттєво поповнила не тільки лексикон економіста, але й сприяла вивченню динаміки економічних процесів і явищ. Найвагомішою причиною цього, без сумніву, позитивного явища послужила переорієнтація суспільства на задоволення (без гучних декларацій) потреб його членів, не висуваючи на передній план запити військово-промислового комплексу [144].

Можна стверджувати, що саме логіка подій суспільно-економічного буття сприяла пильному погляду на адаптацію в техніці [139, 150, 167], об'єктам якої також притаманні неповнота, невизначеність, нестаціонарність, стохастичність. Для вивчення процесів і явищ економіки слід сповна скористатись досягненнями адаптації в біології, де пристосування структури і параметрів живого організму (його морфогенез) відбувається органічним способом і повсякчас [41, 82].

Розглянемо іманентне походження причин, що спонукають до розробки і створення адаптивного підходу в моделюванні економіки. Вони вбачаються в такому. По-перше, наявність неповноти і похибок вхідних даних (економічні показники містять похибки вимірювань, більше того, знайдені за різними методиками вони можуть давати різні числові результати для одних і тих же чинників). По-друге, початкове незнання всіх суттєвих факторів та їх природи призводить до наближених функціональних залежностей у моделюванні. По-третє, наближений характер рівнянь математичної моделі за рахунок апроксимації нелінійних залежностей, яка відтворює певну рису об'єкта моделювання. По-четверте, припущення про незмінюваність структури об'єкта моделювання і його параметрів, але економіці властиві інерційність та дрейф її складових. І насамкінець, по-п'яте, соціально-економічній системі (СЕС) притаманна так звана *адаптованість* — певною мірою здатність системи поглинати вхідні збурення без екстремальних негативних наслідків для її поведінки, а можливо, й її існування взагалі. Це надзвичайна за своїм значенням характеристика економічного агента, знання якої можливе тільки за умови всестороннього дослідження.

Таким чином, на фоні системного аналізу і моделювання економіки треба прагнути до створення адаптивних ЕММ універсального змісту і призначення. У зв'язку з цим з'являються певні вимоги до побудови таких моделей, мають існувати концепти їх розробки з відтворенням адаптації економіки.

Разом з тим, говорячи про один бік математичного моделювання динаміки економіки — створення адекватних ЕММ явища, слід пам'ятати про інший — інструмент моделювання, яким виступають методи числового інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Однак саме інструментарієм кількісного аналізу ЕММ детермінується кінцевий ефект моделювання в цілому, його роль і місце в системі наукового пізнання, зокрема в економіці. Отже, на етапі числового аналізу ЕММ також має бути принципологія адаптивного використання множини формул (однокрокових і багатокрокових, явних і неявних, напів'явних) і стратегії довгочасності кроку числового інтегрування [146]. Саме вдалий вибір цих складових прирікає на логічне завершення процесу моделювання і його успіх загалом.

Як відомо [20], економічні процеси формуються на підґрунті: а) фундаментальних принципів економіки; б) об'єктивних потреб і можливостей суспільства; в) форм господарських відносин. Многовид економічних процесів, по суті, детермінується трьома факторами: виробництвом, обміном та розподілом благ. Невід'ємна складова економіки — її менеджмент. Схематично ці зв'язки та взаємовпливи зображено на рис. 1.3.

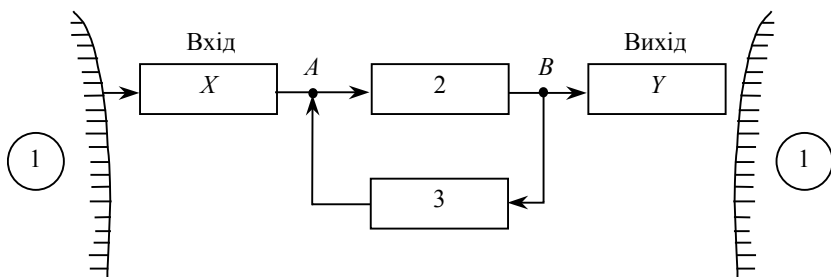


Рис. 1.3. Графічне зображення економічних зв'язків:  
1 — зовнішнє середовище, або довкілля; вхід  $X$  в економіку 2, вихід  $Y$ ;  
3 — менеджмент економіки (2 і 3 — органічно єдине ціле, що досягається безпосередньо шляхом 3-2 і за допомогою зворотних зв'язків малого контуру  $B$ -3-2 або великого  $B$ -3- $A$ , або одночасно дією обох контурів)

Традиційний вхід  $X$  в економіку 2 і вихід  $Y$  з неї відповідає класичному лінійному зв'язку причина-наслідок. Іманентний шлях 3-2 ґрунтується на онтології об'єкта моделювання. Наявність зворотної дії свідчить про нелінійний характер зв'язку, принципово відмінного від прямолінійного. Управління з використанням позитивного і негативного зворотного зв'язку сприяє самовдосконалюючому розвитку системи, її спроможності до самоорганізації економіки.

**Зауваження!** Існує думка, що декомпозиція довільної системи щонайменше на дві підсистеми — керуючу і керовану, цілком правомірна з методичної точки зору.

Сутність адаптації економіки виявляє себе через функціональну і процесну складові, котрі з'ясовуються через елементи економічної системи, а саме: 1) цілісність, стабільність, збалансованість у сукупності інтересів членів суспільства, економічного агента і держави, або те, що забезпечує функціонування в конкретних умовах динамічно змінюваного зовнішнього середовища; 2) зумовлена структурою, взаємозв'язками і взаємовпливами між елементами пристосованість, що виявляється у дотриманні умов функціонування, спроможності протистояти негативним факторам, схильності до самоорганізації позитивного спрямування, умінні реагувати на зовнішній вплив; 3) процеси гармонізації взаємин внутрішнього і зовнішнього походження, систематичного накопичення і обробки економічної інформації з метою гнучко трансформувати систему за умов мінімізації зусиль і витрат.

#### Концепти проблемно-орієнтованої адаптації в економіці

Гнучка організація процесу моделювання або проблемно-орієнтованого припасовування означає спроможність адаптуватись до специфічних особливостей досліджуваного об'єкта за рахунок своєрідного динамічного налаштування структури і складу засобів моделювання на підґрунті не тільки апіорних уявлень про об'єкт та керуючих попередньо відомих діянь, а також апостеріорної інформації, створюваної в середовищі моделювання.

Проблемно-орієнтована організація відповідає своєрідному динамічному і оперативному компромісу між поняттями універсальності та спеціалізації засобів комп'ютерного моделювання [69, 145]. Для практичної реалізації проблемно-орієнтованого

підходу в системах математичного моделювання (програмних комплексах) треба володіти множинами як ЕММ, побудованих за єдиною принципологією, так і числових алгоритмів. При цьому згадувані множини створюються, підпорядковуючись правилу телескопічності: щоразу для досягнення мети або подолання критичної ситуації залучаються більш витончені та сильнішої дії інструменти, як висувуються ланки антени, причому кожна наступна лежить в попередній і, врешті-решт, всі ланки розташовані в середині першої — базової, що нагадує принцип вкладених відрізків.

Адаптація повинна бути ендогенного та екзогенного характеру, щоб сповна відтворити природу економічного буття. Разом з тим вона обов'язково наскрізна — на всіх етапах трансформації економіки, когерентна (узгоджена) і взаємодоповнююча в сенсі досягнення задекларованої мети за мінімальних витратах різного виду.

Для відкритої системи незворотної дії, якою є економіка, адаптивна організація процесу моделювання розглядається як відповідь на виклик з боку чутливості сильно нерівноважного економічного стану до зовнішніх флуктуацій.

Таким чином, поняття наскрізної адаптації стає наріжним каменем математичного моделювання економіки, завойовує своє чільне місце. Така тенденція зумовлена кількома причинами принципового характеру, а саме: 1) як завжди, часу обмаль на зважене всебічно обґрунтоване рішення, яке має бути своєчасним; 2) складна, інколи непередбачена взаємодія елементів зовнішнього середовища; 3) фактори економіки з часом міняються і трансформуються їх провідна роль в процесах економічного стану.

Адаптація — складний невинний еволюційний процес розвитку і функціонування економіки. Адаптація може відбуватися через пристосування економічної системи або її підсистем.

На завершення розділу наведемо найбільш загальне визначення проблемно-орієнтованої адаптації (ПОА), яке ґрунтується на викладених вище уявленнях про адаптацію складних систем взагалі і прикріплене до моделювання економіки.

Отже, проблемно-орієнтована адаптація — це цілеспрямована перебудова структури і варіативність параметрів ЕММ об'єкта моделювання під впливом екзогенних діянь з урахуванням іманентної його природи, ставлячи метою досягнення цілей в умовах недостатньої визначеності і плинності характеристик складових предмета уваги.

---

## Висновки

---

У розділі 1 висвітлено таке: а) на зміну діючій лінійній парадигмі економічної теорії приходить нова — нелінійна, яка сповна відповідає вимогам сьогодення економіки; б) економічній системі органічно притаманно адаптуватися (узгоджено реагувати) як до керуючих сигналів ззовні, так і до змінюваності структури та внутрішніх зв'язків, що відбувається одночасно і багатогранно, тобто системно.

Виокремлена роль синергетичного підходу у пізнанні реалій економіки, згідно з якого особлива увага має приділятися ретельному вивченню топології взаємодії і ступеню зв'язків між елементами економічної системи. Наголошується, що цілеспрямована економічна еволюція суспільства є результатом сукупної (сумісної) взаємодії кібернетичного і синергетичного способів дослідження. Ці два взаємодоповнюючі підходи сприяють якомога кращому розумінню економічного розвитку, прагнучи досягнути явища резонансу.

Повною мірою розкрити вербальну сутність економічної системи, тобто оволодіти числовими значеннями її факторів, можна, використовуючи методології математичного моделювання нелінійної динаміки економічних процесів.

## Розділ 2

---

### СИНЕРГЕТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

---

#### 2.1. Класична система рівнянь Вольтерра—Лотки: економічне тлумачення і синергетичні концепти утворення

---

Ще від 20-х років минулого століття відома у математичній біології та екології, потім у біофізиці система звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (2.1)$$

Вольтерра—Лотки (так звана модель *жертва—хижак*) [23] останнім часом віднайшла своє нове і цілком закономірне (логічне) застосування в економіці.

Змінні ЕММ тлумачаться досить різноманітно, а саме: а) залежність між ціною  $x = x(t)$  і обсягом продукції  $y = y(t)$  [165]; б) у праці [102] як «хижак» фігурувала зарплата робітників, а «жертва» — відсоток (частка) зайнятості населення; в) у монографії [81] система рівнянь розглядалась як модель економічної системи двох видів благ: блага, використовувані для створення інших благ, у тому числі для виробничого споживання, і блага, використовувані для індивідуального вжитку безпосередньо людьми. На підґрунті ММ Вольтерра—Лотки також досліджуються процеси у соціології та політології [131].

Завершимо тему економічного тлумачення моделі Вольтерра—Лотки ще однією пропозицією. Продовжуючи дослідження [165], ставиться питання про співіснування двох товарів одного призначення на одному ринку, тобто вбачається лінія поведінки виробників. Сформульоване питання також викликає значний інтерес, головним чином з практичної точки зору.

Зазначимо, що обом згаданим вище актуальним проблемам економічної динаміки знаходиться екологічний прототип [45], відмінність результатів математичного моделювання спостерігається в їх тлумаченні в термінах предметної площини.

Нехай на ринку товарів присутні два види однорідної продукції, близькі за своїм призначенням, якістю і ціною, але різних виробників. Що означатиме їх конкурентність?

Перебування вказаних товарів на ринку описується системою диференціальних рівнянь ( $a, b, p, c$  — додатні коефіцієнти)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = py - cxy, \end{cases} \quad (2.1a)$$

де змінна  $x = x(t)$  описує кількість першого товару, а  $y = y(t)$  — другого товару;  $\dot{x} = dx/dt$  і  $\dot{y} = dy/dt$  — похідні змінних або швидкості змінюваності в часі обсягів продукції відповідно. Кількість кожного товару збільшуватиметься на ринку з причин відсутності іншого (заповнюватиметься економічна ніша). Другі доданки кожного рівняння системи (2.1) свідчать про зменшення обсягів кожного товару, що ґрунтується на використанні основного принципу кінетики.

**Попередні відомості.** Математична модель (2.1) належить до класу автономних звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (2.2)$$

Система рівнянь (2.2) переписується в іншому вигляді:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}. \quad (2.2a)$$

Стосовно правих частин  $f_1(x, y)$  і  $f_2(x, y)$  припускається існування неперервних всіх часткових похідних в околі деякої точки  $(x_0, y_0)$  площини. Тоді через кожну точку проходить єдина траєкторія, тобто ніякі дві траєкторії (розв'язки) математичної моделі (2.2) не перетинаються. Також вони не можуть самоперетинатися, оскільки напрямок руху відповідно (2.2) не залежить від часу, лише від розташування.

Координати  $(x^*, y^*)$  рівноважної точки знаходять, розв'язуючи нелінійну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

яку дістають з (2.2) за умови  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ .



Поведінка траєкторії в околі  $(x^*, y^*)$  рівноваги викликає особливу зацікавленість дослідника. Спостерігаються три типи поведінки: а) якщо рух започатковується поблизу рівноваги і наближається до точки  $(x^*, y^*)$ , то має місце стійкість рівноваги; б) якщо рух започатковується в околі  $(x^*, y^*)$  і віддаляється від неї, то має місце нестійка рівновага; в) якщо траєкторія являє собою замкнену лінію, що охоплює рівноважну точку  $(x^*, y^*)$ , то спостерігається циклічний рух навколо положення рівноваги.

Якісний аналіз розв'язків нелінійної ММ (2.2) ґрунтується на твердженні: поблизу рівноважної точки  $(x^*, y^*)$  поведінка шуканих траєкторій адекватно детермінується характером розв'язків лінійної системи ЗДР, котру матимемо із розкладання в ряд Тейлора функцій  $f_1(x, y)$  і  $f_2(x, y)$  в околі рівноваги.

**Аналітичне моделювання.** Для ММ (2.1) існують дві рівноважні точки  $O(0, 0)$  і  $E(p/c; a/b)$ . Щоб розглянути поведінку розв'язків моделі в околі точки  $E$ , робимо заміну змінних  $u = x - p/c$ ;  $v = y - a/b$ , тоді ММ (2.1) набирає вигляду

$$\begin{cases} \dot{u} = -\left(u + \frac{p}{c}\right)vb \\ \dot{v} = cu\left(v + \frac{a}{b}\right). \end{cases} \quad (2.16)$$

Ураховуючи економічну сутність [165] заміни змінних, ММ (2.16) означатиме перехід до аналізу трендових значень і стохастичної складової досліджуваного явища.

Обмежуючись лінійними членами, з (2.16) матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{u} = -\left(\frac{bp}{c}\right)v \\ \dot{v} = -\left(\frac{ac}{b}\right)u, \end{cases}$$

з якої випливає одне звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{u} = ap \cdot u,$$

його загальне розв'язок добре відоме і записується так:

$$u = A \exp\{\sqrt{apt}\} + B \exp\{-\sqrt{apt}\},$$

де  $A$  і  $B$  — константи.

Диференціюючи вираз функції  $u$ , легко записується  $v = -rA \exp\{\sqrt{apt}\} + rB \exp\{-\sqrt{apt}\}$ , де  $r = \frac{c \cdot \sqrt{ac}}{bp}$ .

Піднесенням до квадрату останніх двох виразів для функцій  $u$  і  $v$  та відніманням результатів одержуємо

$$u^2 - \frac{v^2}{r^2} = 4AB. \quad (*)$$

Це рівняння гіперболи з центром у точці  $E$ , тобто траєкторії на деякий час наближаються до  $E$ , а потім відходять. Графічно цей факт зображено на рис. 2.1.

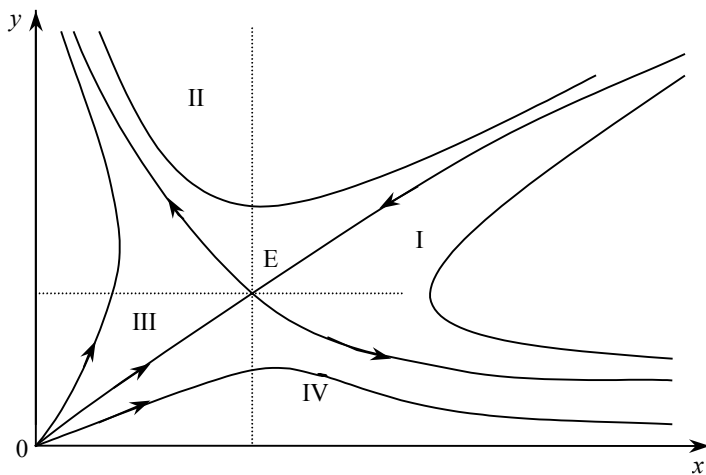


Рис. 2.1. Графічне зображення рівняння (\*)

Оскільки для ММ (2.1а) має місце диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(p - cx)}{x(a - by)},$$

тоді його розв'язок записується

$$\left( \frac{y^a}{e^{by}} \right) = k \cdot \left( \frac{x^p}{e^{cx}} \right),$$

де  $k$  — стала інтегрування. Дійсно, справедливі такі перетворення:

$$\frac{(a - by)dy}{y} = \frac{(p - cx)dx}{x};$$

$$a \frac{dy}{y} - b \cdot dy = p \frac{dx}{x} - c dx;$$

у результаті інтегрування

$$a \ln y - b \cdot y = p \ln x - c \cdot x + \ln k;$$

потенціюванням приходимо до бажаного виразу.

Стала  $k$  інтегрування визначається

$$k = \frac{y_0^a \cdot e^{c \cdot x_0}}{e^{by_0} \cdot x_0^p},$$

де  $x_0$  і  $y_0$  — початкові умови для диференціального рівняння.

Особливий інтерес викликають траєкторії, що проходять через точку  $E$ , тобто має виконуватись рівність

$$k = \frac{\left( \frac{a}{b} \right)^a \cdot e^{c \left( \frac{p}{c} \right)}}{e^{b \left( \frac{a}{b} \right)} \cdot \left( \frac{p}{c} \right)^p} \equiv \left( \frac{a}{b} \right)^a \cdot \left( \frac{c}{p} \right)^p \cdot e^{p-a}.$$

Зауважимо, тільки що зазначені траєкторії (жирні лінії) можуть мати супротивний напрямок до вказаного на рис. 2.1.

Розглядаючи знаки похідної в нових змінних, встановлюємо, що дві траєкторії асимптотично наближаються до точки  $E$ , а інші — дві асимптотично віддаляються від неї. Отже, площина існування шуканих розв'язків ММ — перший квадрант розбивається на чотири ділянки (підплощини), причому якщо процес бере початок в

одній з них, то в одній з них і закінчується. Форма траєкторії і напрямок руху визначається знаками першої  $\frac{dy}{dx}$  і другої  $\frac{d^2y}{dx^2}$  похідних.

**Тлумачення результатів моделювання.** Асимптотична поведінка траєкторій обмежується координатними вісями, щось одне зникає. Наприклад, в площині III спочатку існує мала кількість обох товарів, потім їхня кількість зростає, поки другий вид продукції не досягне рівня  $y = \frac{a}{b}$ . З цього моменту починається витіснення з ринку першого товару (домінує другий товар). Інакше спостерігається динаміка подій у IV підплощині (домінує перший товар).

Зауважимо, що межа площин I і IV характеризується монотонним убуттям кількості другого товару і нарощуванням першого на ринку. Аналогічною буде характеристика межі II і III площин, але домінує другий товар за умов витіснення з ринку першого товару.

Якщо початкові обсяги продукції потрапляють на межу площин I і II або III і IV, тоді кількість товарів обох видів монотонно прагнуть до рівноважного стану, причому в точці E будь-які зміни не відбуваються.

Якщо постало питання про рівноправні, партнерські стосунки між виробниками однорідної (одного призначення, приблизно однієї якості та ціни), то найбільш прийнятними будуть стартові умови, що припадають на I і II площини. Оскільки траєкторії збігаються до рівноважної точки E, то, імовірно, саме її координати свідчать про найкраще відношення між обсягами конкуруючої продукції на ринку товарів.

Насамкінець виокремимо фундаментальні поняття, на яких ґрунтується побудова ММ економічних процесів і явищ, зокрема рівнянь моделі Вольтера—Лотки:

1. Спосіб головних пропорцій у синергетиці стверджує, що швидкість змінюваності величини (її варіативності), вибраної як змінної економічного стану, пропорційна приросту зазначених чинників мінус його витрати.

2. Основний принцип кінетики — щоб взаємодіяти, слід зустрітись. Як правило, зустріч відображається білінійним доданком (носить білінійний характер).

**Зауваження!** Якраз австрійський учений А. Лотка, вивчаючи проблеми хімічної кінетики, вперше в 1925 р. запропонував систему рівнянь, яку незалежно дістав у 1926 р., споглядаючи за виловом риби в Адріатичному морі, італійський математик В. Вольтерра.

Розкриємо зміст терміна «кінетика». Це основна частина механіки, до якої входять динаміка — вчення про рух тіл під дією сил, і статика — вчення про рівновагу тіл під дією сил.

Між іншим, в економіці рівноважний стан відображають балансові моделі. В зв'язку з існуванням фізичної економіки [126] зупинимось на змісті фізичної кінетики: є теорія нерівноважних мікропроцесів, що постають у системах далеких або виведених зі стану термодинамічної рівноваги.

До фізичної кінетики відноситься термодинаміка нерівноважних процесів. Необоротні процеси характеризуються зростанням ентропії, причому у рівноважному стані вона досягає максимального значення.

У зв'язку з результатом дослідження А. Лотки подамо дефініцію хімічної кінетики: вона вивчає закони перебігу в часі хімічних реакцій, їх швидкості та механізми перебігу.

На підґрунті зазначеного вище з'являється можливість вивчити поняття економічної кінетики: предметом її вивчення є нерівноважні нелінійні економічні процеси необоротної дії, що відбуваються у часі та просторі, з метою встановлення механізмів їх перебігу та швидкості перебігу подій.

Синергетичні моделі економіки належать до класу зосереджених, або точкових (скупчених), і записуються у загальному вигляді

$$\dot{z} = f(t, z), \quad z(t_0) = z_0,$$

де права частина  $f(t, z)$  — вираз швидкості для вектора  $z = z(t)$  економічного стану досліджуваного явища, який відтворює у тій чи іншій мірі взаємовплив складових процесу економічної еволюції. Обов'язковими членами виразу  $f(t, z)$  мають бути: доданок, за допомогою якого відтворюється вплив чинника, а потім — інший доданок для відображення впливу другої компоненти вектора  $z$ ; далі йде третій доданок, котрий відображає взаємодію компонентів  $z$  на підґрунті головного принципу кінетики.

Кожен член правої частини має свій знак, чим ураховується характер впливу, і числовий коефіцієнт — міра взаємодії складових об'єкта моделювання.

---

## 2.2. Урахування деяких характерних рис економіки

---

### 2.2.1. Насиченість економічних процесів

---

Математичне моделювання економіки, включаючи в себе математичні моделі, інструментарій їх якісного і кількісного дослідження та інформаційні технології — комп'ютерну реалізацію зазначеного вище, в останні роки [2, 40, 75, 91, 109] все більше завоює прихильність дослідників, про що свідчить зростаюча кількість публікацій в періодичних виданнях. Має місце пряме перенесення методології математичного моделювання з інших предметних галузей, перш за все техніки. Варто зауважити, що пряме використання здобутків автоматизації проектування [119] (так званих САПР — систем автоматизації проектних робіт) вимагає певних пояснень і деталізації, маючи на увазі рівень і обсяг математичної підготовки економіста, який донедавна вважався гуманітарієм.

Масштабно в математичному моделюванні виділяються дві взаємопов'язані частини: 1) алгоритмізація економічної проблеми і побудова адекватної ММ; 2) дослідження отриманої ММ засобами математичної теорії та використання інформаційних технологій. Згадуванні частини являють собою дві сторони — лицьову і тильну, математичних моделей однієї медалі-нагороди, якою є математичне моделювання економіки.

Зважаючи на існування значної кількості математичних пакетів кількісного аналізу (Mathcad, Matlab тощо), найбільш нагально постає питання побудови адекватної ММ об'єкта моделювання. Бажано це робити в автоматичному режимі на комп'ютері, як це має місце в електроніці, наприклад [119].

Системному вивченню адекватної ММ, її повному і всесторонньому кількісному дослідженню повинно передувати створення якісної ММ, за допомогою котрої розглядаються й аналізуються екстремальні ситуації, граничні режими поведінки об'єкта моделювання.

#### Ретроспектива вивчення питання

За суттю, у монографії [107] декларується ряд ММ різноманітних економічних явищ і процесів. Цими ж математичними мо-

делями описуються [108] об'єкти іншої природи, що свідчить про широке коло можливого впровадження. Стосовно оголошених ММ застосовуються елементи якісного аналізу звичайних диференціальних рівнянь [9, 176] без тлумачення використовуваних понять і визначень, за відсутності належних пояснень. Між іншим, це характерна риса монографій [107, 108], що не відповідає потребам і запитам сучасної теоретичної і прикладної економіки.

Раніше задекларована ММ обміну між двома товарами [107] чи ціни товарів або їх собівартість [107] далі стисло викладена зі всіма необхідними поясненнями та деталізацією алгебраїчних перетворень на окремих етапах якісного дослідження.

Рівняння ММ записується

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = j_1 - j_2xy - j_3x \\ \frac{dy}{dt} = j_4 - j_5xy - j_6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y), \end{cases} \quad (2.3)$$

де функції  $x(t)$  і  $y(t)$  описують у деякий момент часу кількість товарів, що обмінюються; коефіцієнти  $j_1$  і  $j_4$  відповідають обсягам продукції виду  $x$  і  $y$  за одиницю часу; доданки  $j_2xy$  і  $j_5xy$  відображають процес обміну, а їх відношення  $c = j_2 / j_5$  є так званою *мінною вартістю*: на одиницю товару  $y$  міняється числом  $j_2$  одиниць товару  $x$ , і навпаки, стосовно коефіцієнта  $j_5$ ; члени  $j_3x$  і  $j_6y$  засвідчують ступінь фізичного і морального старіння товарів, причому величини  $\tau_x = 1/j_3$  і  $\tau_y = 1/j_6$  вказують на їх довговічність (термін вживання або придатності).

Поетапно якісне вивчення ММ виявляє себе у такому. Спершу шукають точки рівноваги, прирівнюючи до нуля похідні  $\dot{x}(t)$  і  $\dot{y}(t)$ . Стаціонарні (рівноважні) точки у нашому випадку записуються так:

$$\bar{x} = \frac{j_1}{j_2\bar{y} + j_3}; \quad \bar{y} = \frac{j_4}{j_5\bar{x} + j_6}.$$

Підставивши в формулу ординати  $\bar{y}$  вираз абсциси  $\bar{x}$ , матимемо квадратне рівняння

$$j_6j_2\bar{y}^2 + (j_5j_1 + j_6j_3 - j_4j_2)\bar{y} - j_4j_3 = 0,$$

два корені якого записуються

$$\bar{y}_{1,2} = \frac{[(j_2 j_4 - j_3 j_6 - j_5 j_1) \pm \sqrt{(j_2 j_4 - j_3 j_6 - j_1 j_5)^2 + 4 j_2 j_3 j_4 j_6}]}{2 j_2 j_6}.$$

Отже, мають місце дві рівноважні точки  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  і  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ , координати яких легко обчислюються.

Наступним кроком якісного аналізу є лінеаризація нелінійної системи (2.3), для чого записується її матриця Якобі

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо числове значення матриці Якобі  $J(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  в особливих стаціонарних точках ( $i = 1, 2$ ). Конкретно для нашого випадку маємо

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} -j_2 \bar{y} - j_3 & -j_2 \bar{x} \\ -j_5 \bar{y} & -j_5 \bar{x} - j_6 \end{pmatrix}.$$

Тип особливої точки визначається за коренями

$$\lambda_{1,2} = \frac{SpM}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{SpM}{2}\right)^2 - \det M}$$

так званого *характеристичного рівняння*

$$\lambda^2 - SpM\lambda + \det M = 0,$$

де  $M = J(\cdot)$ ;  $SpM = -j_2 \bar{y} - j_3 - j_5 \bar{x} - j_6$  називається слідом матриці, являючи собою суму елементів головної діагоналі;  $\det M = j_2 j_6 \bar{y} + j_3 j_5 \bar{x} + j_3 j_6$  — визначник матриці другого порядку.

Коли корені дійсні, різні і протилежних знаків ( $\det M < 0$ ), має місце особлива точка сідло-сімейство гіпербол (рис. 2.2). Коли корені комплексні, спряжені, але не уявні, тобто виконується не-

рівність  $\det M > \left(\frac{SpM}{2}\right)^2$ , то можливі два варіанти: а) дійсна час-



тина комплексно-спряженого кореня від'ємна ( $SpM < 0$ ) — особлива точка є стійкий фокус (рис. 2.3а); б)  $SpM > 0$  — нестійкий фокус (рис. 2.3б).

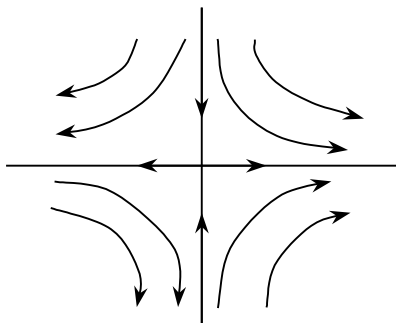


Рис. 2.2. Схематичне зображення особливої точки сідло

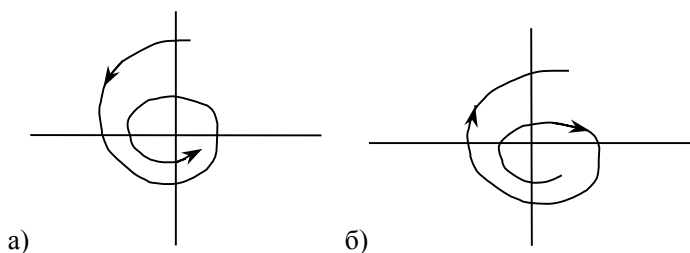


Рис. 2.3. Особлива точка фокус:  
а) стійкий — траєкторія накручується, стягуючись в точку;  
б) нестійкий — рух відбувається у зворотному напрямку (траєкторія розкручується).

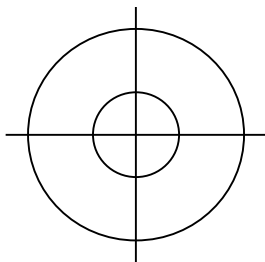


Рис. 2.4. Особлива точка центра — концентричні лінії (кола, еліпси)

Характер особливих точок лінеаризованої та вихідної нелінійної системи збігається за винятком таких випадків:

а) якщо особлива точка лінеаризованої системи є центр (рис. 2.4), тобто виконується  $SpM = 0$  і  $\det M > 0$ , — корені суто уявні, то особлива точка ММ (2.3) або центр, або фокус;

б) якщо хоча б один корінь лінеаризованої системи дорівнює нулю, то для аналізу особливої точки ММ (2.3) потрібне додаткове дослідження.

Насамкінець витлумачимо ще два важливі поняття, що фігурують останнім часом у науковій літературі з математичного моделювання економічної динаміки:

а) біфуркація — розгалуження процесу: в одній з точок простору подій в деякий момент часу нелінійна економічна система в динаміці набуває вдвічі більше можливих шляхів розвитку. Інакше — зміна характеру руху динамічної системи на значному часовому інтервалі за умов змінюваності одного чи кількох параметрів;

б) груба система є такою, що після збурення повертається до попереднього стану (структура і розв'язок стійкі).

Таким чином, розкрито зміст категорій і вказано техніку якісного дослідження на прикладі ММ (2.3). Економічна інтерпретація [107] результатів якісного моделювання братиметься до уваги і в подальшому.

#### Математична модель та її аналітичне дослідження

Математична модель (2.3) записана за використання умов обміну товарами (за наявності певних гіпотез). Але в такому процесі завжди настає стан насиченості: в якийсь момент часу обмін зароджується, а далі на певних проміжках часу він нарощується і обов'язково настає такий етап розвитку, коли кількісні обмінні характеристики стабілізуються, тобто з плином часу вони набирають ті самі числові значення (відбувається наповнення товарами обміну).

В економіці таке явище завжди має місце і є визначальним, оцінюється як закономірне. Воно превалює, досить пригадати появу логістичної моделі як удосконалення рівняння Мальтуса (для короткого проміжку часу спостерігається експоненційний характер економічного розвитку — результат класичної лінійної парадигми економіки). Але сучасна теоретична економіка, як і прикладна, спирається на синергетичні позиції — перш за все

відкритості, нестационарності, нелінійності і динаміки економічної системи. На жаль, у поширений серед науковців літературі із математичного моделювання економіки [50, 52, 107, 108] не відображено стан насиченості.

Урахування стану насиченого обміну товарами цілком природне і логічне ще й тому, що попередній [107] результат передбачав використання умов  $\tau_x \rightarrow \infty$  — безмежної корисності товару (його асимптотичної поведінки на ринку).

Для написання рівнянь динаміки стану насичення обмінного процесу використовують відомі в синергетиці та фізичній і хімічній кінетиці положення.

Найпростіше насичений стан процесу обміну товарами відображається ММ вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = j_1 - j_2xy/(1 + Ax) - j_3x \\ \dot{y}(t) = j_4 - j_5xy - j_6y, \end{cases} \quad (2.4)$$

де другий доданок першого рівняння системи (2.4), будучи кінетичним (також член  $j_5xy$  другого рівняння), віддзеркалює стан наповнення товаром вигляду  $x$ , причому  $A$  — стала величина.

Праві частини диференціальних рівнянь ММ (2.4) записані з використанням способу головних пропорцій.

За суттю, здобутий результат належить до економічної кінетики, яка за аналогією визначається як вчення про стан нерівноважної економіки, процеси і закони його перебігу в часі, швидкості і механізми.

Обмінну вартість в нашому випадку запишемо так:

$$C = \frac{(j_1 - j_3\bar{x})(1 + A\bar{x})}{j_4 - j_6\bar{y}}, \quad (2.5)$$

так як при  $\dot{x}(t) = 0$  виконується  $j_2xy = (j_1 - j_3\bar{x})(1 + A\bar{x})$ , а для  $\dot{y}(t) = 0$  —  $j_5xy = j_4 - j_6\bar{y}$ . Формула (2.5) виражає обмінну вартість через запаси товарів вигляду  $x$  і  $y$ , коли одного товару більше, ніж іншого.

Якщо покласти  $j_3 = 0$ , тобто товар  $x$  довговічний —  $\tau_x \rightarrow \infty$  ( $\tau_x = 1/j_3$ ) або по-іншому з'являються гроші, то формула (2.5) набирає вигляду

$$C_0 = \frac{j_1(1 + A\bar{x})}{j_4 - \frac{\bar{y}}{\tau_y}}, \quad (2.6)$$

де  $\tau_y = \frac{1}{j_6}$  свідчить про довговічність товару у. При  $A = 0$ , зрозуміло, матимемо результат [107], який узагальнює формулу рівноважної концепції ціни Ерроу—Дебре—Мак-Кензі. Дійсно, формула (2.6) відображає нерівноважну ціну.

Для умови  $\tau_x \rightarrow \infty$  ММ (4.4) переписується

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = j_1 - C_0 x y \\ \dot{y}(t) = j_4 - x y - \frac{y}{\tau_y} \end{cases}, \quad (2.7)$$

для якої точки рівноваги будуть такими:  $\bar{x} = \frac{j_1}{(C_0 \bar{y})}$ ;

$\bar{y} = \tau_y \left( j_1 - \frac{j_1}{C_0} \right)$ . У розглядуваному варіанті слід матриці Якобі має

вигляд  $SpM = -C_0 \bar{y} - \bar{x} - \frac{1}{\tau_y}$ ; її визначник є  $\det M = C_0 j_4 - j_1$ .

Отже, залежно від знаку виразу  $\left( j_4 - \frac{j_1}{C_0} \right)$  матиме місце особлива точка фокус для  $C_0 j_4 > j_1$  і сідло для нерівності — навпаки. Таким чином, у разі здійснення граничного переходу  $\tau_x \rightarrow \infty$  в моделі (2.4) відбувається біфуркація — злиття сідла і фокуса з подальшим утворенням чогось одного для ММ (2.4).

Слушно зауважити, що без урахування стану насиченості ( $A = 0$ ) при  $\bar{y} = 0$  також  $\det M = 0$  і концепція рівноважної ціни буде негрубою [107], що означатиме недосяжність точки рівноваги. Тепер же, не відкидаючи факт насиченості обмінного процесу, з формули (2.6) впливатиме  $C_0 = \frac{j_1}{j_4} (1 + A \bar{x})$  і  $\det M = j_1 A \bar{x} \neq 0$ .

За наявності в суспільстві дефіциту (платоспроможний попит перевищує пропозицію, про що свідчить нерівність  $\left( \frac{j_1}{C_0} \right) > j_4$ ), обмінна вартість, або ціна, дорівнюють

$$C_0 = \frac{j_1 (1 + A \bar{x})}{j_4 + |\bar{y}| / \tau_y}, \quad (2.8)$$

де  $|\bar{y}|$  — абсолютний дефіцит товару вигляду  $y$ . Звідси після елементарних алгебраїчних перетворень матимемо формулу обсягу абсолютного дефіциту

$$|\bar{y}| = \tau_y \left[ \frac{j_1}{C_0} (1 + A\bar{x}) - j_4 \right]. \quad (2.9)$$

Отже, крім загальноновизнаних причин дефіциту (нестача товару, низькі ціни) на його обсяг суттєво (прямопропорційно) впливає висока платоспроможність членів суспільства (наявність на руках значної грошової маси).

У суспільстві з жорстким дефіцитом інколи вдаються до безплатного (лімітованого) розподілу благ, що рівносильно умові  $C_0 \rightarrow 0$ . При цьому завжди матиме місце особлива точка сідло (оскільки  $SpM < 0$  і  $\det M < 0$ ) і економічна система нестійка. З формули (2.8) випливає, що зазначений вище крок протиприродний, а вираз (2.9) свідчить про обов'язково ще більший рівень дефіцитності.

Науковий результат становить таке: запропоновано ММ насиченого процесу обміну товарами, яка описує появу і роль грошей у суспільстві. На підґрунті якісного аналізу ММ встановлено: а) формулу (2.9) обсягу абсолютного дефіциту; б) прямопропорційний вплив високої платоспроможності членів суспільства на розміри дефіциту, чим його традиційні причини (нестача товару і низькі ціни) доповнюються; в) адміністративний розподіл благ суспільства завжди сприяє нестійкості економічної системи і більш того — обов'язковому існуванню дефіциту.

Формула (2.5) нерівноважної ціни як окремий випадок вміщує відому в економічній літературі концепцію рівноважної ціни.

## 2.2.2. Спадковість економіки

Економіці (процесам і явищам, що відбуваються в ній) органічним чином притаманна спадковість, якою передається з покоління в покоління (від поточної підсистеми до її майбутнього стану) головне — те, що визначає предмет нашої уваги. Якби це було не так, то поступальний рух суспільства, його розвиток гальмувався би якнайменше. Не тільки минуле економічне буття зумовлює теперішню дійсність, але незвідане майбутнє також трактується як аттрактор.

### Сутність проблеми спадковості

Кожне покоління людей успадковує певну технологію виробництва матеріальних благ і послуг, що цілком природньо. Такий процес відбувається безперервно впродовж всієї історії. Дискретність виявляє себе в революційні моменти, але вони не характерні для буття людини в цілому, так як не мають масового характеру, хоча й визначають її наступну поведінку особистості.

У сфері економічних взаємин, що складаються в процесі створення суспільного продукту і розподілу матеріальних благ, також спостерігається спадковість. Врешті-решт, управління економікою також немислиме без надбання попереднього стану, врахування його тенденцій. Саме на підставі такої інформації приймаються рішення з регулювання і керування — поведінки в майбутньому, яке згодом стає поточним, а потім минулим.

Явище спадковості головно стосується рівня знань, навичок та умінь в зв'язку зі зміною поколінь, яка відбувається повсякчас, незалежно від нас. Передача накопиченої в минулому інформації (за певними критеріями відібраної, в деякому сенсі найкращої) до майбутнього означає перш за все її селекцію й адаптацію до поставлених вимог. Успадкування характерних рис, визначальних властивостей спостерігається повсюди, в усіх сферах матеріального буття. Отже, щоб не суперечити природі економіки треба урахувати якимось чином зв'язок між економічними поколіннями (підсистемами, прошарками, періодами тощо) еволюції.

Економіка — яскравий приклад неперервно діючої системи, в надрах якої для попереднього часу визріває поточний момент, а в ньому згодом з'являється майбутній момент еволюції. І це — єство економіки, яке перебуває поза межами зовнішнього впливу: є в умовах будь-якого способу виробництва і не залежить від форми власності на засоби виробництва і виробничі взаємини. Як враховується в економічному аналізі наявний факт спадкоємності? Наразі доводиться констатувати, що відомі [160, 161] в економічній теорії моделі були установлені, як правило, в околі точки деякого прошарку, тобто апіорі мали локальний характер. Те, що було справедливо на локальному рівні, тобто для підсистеми як ланки складної системи, беззастережно переносилось на систему в цілому.

Іншими словами, зв'язки між підсистемами або локальними ланками всього ланцюга, які в сукупності утворюють ціле (си-

стему), не фігурували в міркуваннях. Безперечно, такі зв'язки мали б враховуватися.

Якщо до останнього часу побудова моделей економіки здійснювалась, ігноруючи існування ієрархічної структури підсистем, їх взаємозв'язків та взаємовпливу, то в пропонованій праці на прикладі моделі макроекономічної динаміки Харрода—Домара [161] вивчається економічна система, кожному ієрархічному рівню якої відповідає експоненціально зростаюча підсистема з часткою ринку, керованою підсистемою вище розташованого сусіднього рівня [130]. На малих інтервалах часу (в межах дії підсистеми) експоненційний характер дійсно має місце (і це — загальновизнаний факт). Разом з тим спостерігається значне відхилення від реальних значень модельованого процесу для великих часових інтервалів.

Сприйняття економіки як надскладної ієрархічної системи, в якій об'єднуються досить прості для вивчення підсистеми і не ігнорується вплив вище розташованої підсистеми на нижче розташовану), якраз відповідає синергетичному погляду на економіку, зокрема можливій біфуркації шляху економічного розвитку [37].

#### Аналітичне моделювання спадковості

Нагадаємо, що в найпростішому варіанті нульового споживання  $C$  для макроекономічної динаміки через дію певних умов модель Харрода — Домара, яка поєднує величини доходу  $Y(t)$ , споживання  $C$  та інвестиції  $\dot{I}(t)$ , записується

$$Y(t) = B \cdot \dot{Y}(t), \quad (2.10)$$

де співмножники відповідно позначають:  $B$  — коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу;  $\dot{Y}(t)$  — похідна  $\frac{dY}{dt}$ . Оскільки модель є лінійне однорідне звичайне диференціальне рівняння (ЗДР)

$$\dot{Y}(t) = \frac{1}{B} \cdot Y(t), \quad (2.10a)$$

тоді його аналітичний розв'язок  $Y(t) = Y(0) \exp\left\{\frac{1}{B}t\right\}$  та величина

$\frac{1}{B}$  сприймаються як оцінки зверху для досліджуваних процесів

(максимально можливого зростання доходу і неперервного темпу приросту  $\frac{1}{B}$ ).

Відповідно до сказаного  $i$ -й рівень ієрархічної економічної системи опишемо рівнянням [130]

$$\dot{Y}_{(t)}^{(i)} = K_{(i)} \cdot Y_{(t)}^{(i)} \cdot Y_{(t)}^{(i+1)}, \quad (2.11)$$

де приймається  $K_i = \frac{1}{B_i}$ , а співмножник  $Y_{(t)}^{(i+1)}$  правої частини ЗДР (2.11) відтворює якоюсь мірою вплив розташованої вище підсистеми  $(i+1)$  на розташовану нижче за номером  $i$ , тобто зростання попереднього прошарку стимулюється координатами стану наступного. Такий підхід узгоджується з синергетичним поглядом на трансформаційні процеси в економіці. За відсутності згадуваного впливу або його ігнорування рівняння (2.11) переходить в модель Харрода — Домара (2.10а).

Розв'язок математичної моделі, тобто рівняння (2.11), записується як рекурентне співвідношення

$$Y_{(t)}^{(i)} = Y_{(0)}^{(i)} \cdot \exp \left\{ K_i \int_0^t Y_{(u)}^{(i+1)} du \right\}. \quad (2.12)$$

Оскільки рівняння (2.11) набуває вигляду  $\frac{d}{dt}(\ln Y_{(t)}^{(i)}) = K_i Y_{(t)}^{(i+1)}$  і його інтеграл легко записується.

Зрозуміло, що для послідовності  $\{K_i\}$  існує межа  $K$ , також темпи економічного зростання сягають граничного значення (відомий в економічних колах факт). Це означатиме, що, починаючи з деякого номера  $n$ , аналітичний вираз набуває вигляду

$$Y_{(t)}^{(i)} = Y_{(0)}^{(i)} \cdot \exp \left\{ K_i \int_0^t Y_{(u)}^{(i+1)} du \right\}. \quad (2.12a)$$

Отже, можна стверджувати: для всіх номерів  $i \geq n$  в процесі зростання економічної системи зазначений у (2.11) вплив відсутній. Фактично має розглядатися таке ММ:

$$\dot{Y}(t) = K \cdot Y^2(t), \quad Y(0) = Y_0. \quad (2.13)$$



Розв'язок ЗДР (2.13) записується  $Y(t) = \frac{Y_0}{1 - Kt \cdot Y_0}$  і це свідчить про наявність гіперболічного характеру поведінки інтегральної кривої — гіперболічну форму зростання.

Таким чином, на значному проміжку часу еволюція розглядуваної нами економічної системи описується різними класами ЗДР (2.10а) і (2.13). Тобто відбувається зміна типу моделі і як наслідок — форми модельованого зростання — від експоненційної формули розв'язку рівняння до гіперболічного виразу для (2.13). Отже, має місце біфуркація розвитку економіки (див. дод.).

У разі постійного споживання  $C$  модель Харрода—Домара, як відомо, має вигляд  $Y(t) = B\dot{Y}(t) + C$ , а її аналітичний розв'язок записується  $Y(t) = (Y(o) - C) \exp\left\{\frac{1}{B}t\right\} + C$ .

Між іншим, неперервний темп приросту доходу  $y(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$  у цьому випадку описується формулою після очевидних перетворень:

$$y(t) = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{C}{(Y(o) - C) \exp\left\{\frac{1}{B}t\right\} + C} \right]. \quad (2.14)$$

Звідси для початкового моменту часу  $t=0$  впливає загально-відомий результат  $y(0) = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{C}{Y(o)} \right]$ , де величина в квадратних дужках називається нормою накопичення  $a(o)$ . Для встановлення закону її змінюваності в часі знехтуємо доданком  $C$  у круглих дужках виразу (2.14):

$$y(t) \leq \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{Y(o)}{C} \exp\left\{\frac{1}{B}t\right\}} \right].$$

Це означатиме менше віднімання в квадратних дужках виразу (2.14), що відповідатиме оцінкам зверху норми накопиченості для довільного моменту часу

$$a(t) = \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{Y(o)}{C} \exp\left\{\frac{1}{B}t\right\}} \right].$$

Вплив подальшого рівня ієрархічної економічної системи на попередній для моделі Харрода—Домара з постійною величиною споживання описуватиметься рівнянням

$$\dot{Y}_{(i)}^{(i)} = (K_i Y_t^i - \tilde{C}) Y_{(i)}^{(i+1)}, \quad (2.15)$$

де  $\tilde{C} = \frac{C}{B}$ . Для подальшої зручності (2.15) перепишемо так:

$$\dot{Y}_t^i = \left( Y^i(t) - \frac{\tilde{C}}{K_i} \right) \cdot K_i \cdot Y_{(i)}^{(i+1)}. \quad (2.15a)$$

Як і вище для моделі (2.15a) справедливе рекурентне співвідношення  $Y_{(i)}^{(i)} = Y_o^{(i)} \exp\left\{K_i \int_0^t Y_{(u)}^{(i+1)} du\right\} + \frac{\tilde{C}}{K_i}$ .

Повторюючи попередні міркування, у розглядуваному випадку матимемо ЗДР

$$\dot{Y}(t) = K \cdot Y(t)^2 + \frac{\tilde{C}}{K} \quad (2.16)$$

з відомою початковою умовою  $(Y(o) - C)$ . Розв'язок ММ (2.16)

записується  $\frac{1}{K} \int \frac{dY}{(Y^2 + \frac{\tilde{C}}{K^2})} = dt + const.$

Інтеграл вигляду  $\int \frac{dx}{x^2 + d^2}$ , як відомо з [153], матиме різні вирази:  $\frac{1}{d} \arctg \frac{x}{d} + C_1$ ;  $\frac{1}{d} \arctg \frac{x}{d} + C_2$ ;  $\frac{1}{d} \arctg \frac{x-d}{x+d} + C_3$  власних пер-

вісних функцій за рахунок альтернативи сталої інтегрування.

Очевидно, в нашому випадку  $x \equiv Y$ ,  $d = \frac{\sqrt{\tilde{C}}}{K}$ .

Таким чином, на тривалих проміжках часу матиме місце перехід (відбувається самоорганізація) від однієї до іншої ММ економіки, також спостерігатиметься розгалуження розв'язків ММ залежно від вибору сталої інтегрування. З точки зору економіки це відповідає різним стартовим умовам економічних перетворень та альтернативному характеру їх здійснення. Нещодавня історія країн пострадянського простору стверджує отримані вище результати аналітичної економіки.

Нарешті розглянемо диференційну модель  $Y(t) = B\dot{Y}(t) + C(o)\exp\{rt\}$  з постійним темпом зростання  $r$  споживання, розв'язок якої відомий

$$Y(t) = \left[ Y(o) - \frac{C(o)}{1 - Br} \right] \exp\left\{ \frac{1}{B} t \right\} + \frac{C(o)}{1 - Br} \exp\{rt\}.$$

У цьому випадку у контексті викладеного підходу, яким встановлюється механізм економічної спадковості і певним чином кількісно враховується спадкоємність, ММ набуває вигляду

$$\dot{Y}_{(t)}^{(i)} = \left[ K_i Y_{(t)}^{(i)} - \frac{C(o)}{B} \exp\{rt\} \right] Y_{(t)}^{(i+1)} \quad (2.17)$$

зі збереженням попередніх позначень і подальшого  $\tilde{C} = \frac{C(o)}{B}$ .

$$\text{Оскільки виконується } \frac{d}{dt} \left( \ln(Y_{(t)}^{(i)} - \frac{\tilde{C}}{K_i} \exp\{rt\}) \right) = \frac{\dot{Y}_{(t)}^{(i)} - \frac{\tilde{C}r}{K_i} \exp\{rt\}}{Y_{(t)}^{(i)} - \frac{\tilde{C}}{K_i} \exp\{rt\}},$$

то рівність (2.17) переписується у такому вигляді

$$\frac{d}{dt} \left( \ln(Y_{(t)}^{(i)} - \frac{\tilde{C}}{K_i} \exp\{rt\}) \right) + \frac{\left( \frac{\tilde{C}r}{K_i} \right) \exp\{rt\}}{\left( Y_{(t)}^{(i)} - \frac{\tilde{C}}{K_i} \exp\{rt\} \right)} = Y_{(t)}^{(i+1)} \quad (2.17a)$$

Далі розглянемо скалярну нерівність  $\frac{d}{dt}(\ln(Y_{(t)}^{(i)} - \frac{\tilde{C}}{K_i} \exp\{rt\})) \leq Y_{(t)}^{(i+1)}$ , яка дозволяє записати рекурентне співвідношення

$$Y_{(t)}^{(i)} \leq Y_{(o)}^{(i)} \exp\left\{K_i \int_0^t Y_{(u)}^{(i+1)} du\right\} + \frac{\tilde{C}}{K_i} \exp\{rt\}. \quad (2.18)$$

Остання нерівність говорить про те, що отримані нижче результати мажорантного характеру, отже, реальні числові показники не можуть їх перевищувати.

Повторивши звичні міркування стосовно (2.18), дістанемо скалярну диференціальну нерівність

$$\dot{Y}(t) \leq K \cdot Y^2 + \frac{\tilde{C}}{K} \exp\{rt\} \quad (2.19)$$

на зразок рівняння Ріккаті (за умови, що стояв знак рівності).

З математичної літератури [14, с. 94] відомо таке: канонічне рівняння Ріккаті  $\frac{dy}{dt} = \pm y^2 + R(t)$ , де  $R(t)$  — многочлен загального вигляду, не є елементарним. Ще 1841 року Ліувіль продемонстрував, що відносно прості за формою нелінійні ЗДР описують складні системи функцій з різноманітною аналітичною структурою. Між іншим, цей красномовний факт ще раз засвідчує складність моделювання економіки.

Вочевидь, у нашому випадку многочлен  $R(t)$  відображає апроксимацію функції  $\exp\{rt\}$ . Причому, враховуючи перший член (одiniцю) розкладання експоненти в ряд, приходимо до розглянутого вище результату — споживання за умов постійного рівня, а обмеженню лінійними членами розкладання відповідає аналітичний розв'язок [161]. Долучення більшої кількості членів ряду для  $\exp\{rt\}$  виключає можливості одержання аналітичних виразів у моделюванні. Отже, треба чисельно інтегрувати рівняння Ріккаті (2.19). Зрозуміло, що здобуті числові результати слугуватимуть оцінками зверху для розглядуваного випадку споживання з постійним темпом його зростання.

Як резюме зазначимо, що вище було ураховано ефект спадкоємності економічних процесів на прикладі макродинамічної моделі Харрода—Домара. Аналітичне вивчення її узагальнення по-

казало змінюваність типу ММ на значному часовому інтервалі та наявність біфуркації (можливого розгалуження) економічних процесів залежно від стартових умов розвитку економіки.

### Додаток

Звичайне диференціальне рівняння (ЗДР)  $\dot{x} = Kx^k$  з початковою умовою  $x(t_0) = x_0$  утворює так звану *задачу Коші*, що часто фігурує в літературі з математичного моделювання. Залежно від числового значення показника степеня  $k$  спостерігається різний тип зростання розв'язку ЗДР, а саме:

для  $k > 1$  справедлива [130] гіперболічна формула  $x(t) = \frac{\chi}{(tg - t)^{k-1}}$ ,

де позначено  $\chi = \frac{1}{(|K-1| \cdot K)^{k-1}}$  і  $tg = \frac{1}{(x_0)^{k-1} \cdot |K-1| \cdot K}$ .

### 2.2.3. Моделювання флуктуацій економіки

Розглянемо способи узагальнення моделі Гудвіна, використавши у відомій схемі її створення аналітичні розв'язки рівняння динаміки капіталу для трьох загальновживаних способів інвестування і за умов сталого коефіцієнта амортизації  $\mu$ . У разі залежної від часу величини  $\mu(t)$  матимемо оцінки зверху для адекватних результатів моделювання. На підґрунті математичних моделей показано можливу біфуркативність економічного зростання.

Класична модель Гудвіна призначена для опису флуктуації економіки, її підйомів і спадів. Така модель добре відображає економічні цикли, тому що капіталовкладення сприяють збільшенню обсягів виробництва (підйом економіки), і навпаки, через відсутність капіталовкладень — економіка входить в фазу рецесії (спад виробництва).

До числа найбільших недоліків моделі Гудвіна відносять: відсутність загального зростання економіки; висновок про триваліший період спаду, ніж підйому виробництва; моментальна реакція обсягу виробництва на стрибок капіталовкладень, що насправді не спостерігається реально. Разом з тим модель Гудвіна застосовується [99, 111, 176] для опису перехідної економіки з її коливальним характером трансформаційних процесів.

Дослідимо процес побудови моделі Гудвіна, поліпшення адекватності якої досягається через використання аналітичних виразів щодо швидкості змін капіталу за сталого коефіцієнта  $\mu$  амортизації, що залежить від часу. Встановлено, що інтервал значного збільшення обсягу виробництва визначається саме величиною  $\mu$ . Аналітично можна показати біфуркативність траєкторії економічного зростання та виникнення циклічних коливань між двома значеннями залежної змінної періодичного розв'язку та зрештою перехід до стану детермінованого хаосу, що залежить від значення числової величини біфуркативного параметру.

### Сутність моделі Гудвіна

Нехай у довільний проміжок часу  $t$  економіка суспільства володіє основним капіталом, що змінюється з швидкістю, пропорційною величині  $\frac{dK}{dt}$ . Джерелом доходу виступає обсяг виробництва  $Y$ . Позначимо рівень споживання через  $C$ , які пов'язані між собою:

а) балансовим відношенням

$$C = \alpha \cdot Y + \beta,$$

де  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta < C$  — деякі сталі, другий доданок відповідає так званому *автономному споживанню*;

б) рівнянням

$$Y = C + \frac{dK}{dt},$$

яке означатиме, що дохід або споживається, або йде на розширення виробництва. З останніх двох відношень випливає, що

$$Y = \left( \beta + \frac{dK}{dt} \right) / (1 - \alpha),$$

тобто хвильова поведінка обсягів  $Y$  є результатом обсягів коливань капіталовкладень  $\frac{dK}{dt}$ .

Основним капіталом  $K$  управляють так, щоб його рівень сягав деякої частини виробництва, тобто  $R = \gamma \cdot Y$  ( $\gamma < 1$ ). Політика капіталовкладень провадиться у такий спосіб:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{cases} k_1, & k_1 > 0, K < R; \\ 0, & K = R; \\ -k_2 < 0, & K > R, \end{cases}$$

у даному випадку враховуємо припущення, що величини  $k_1$  і  $k_2$  не залежать від часу  $t$  ( $k_1 > k_2$  швидкість виникнення нових підприємств більша амортизації та старіння капіталу).

Щоб досягти плавної поведінки величини  $Y$ , яка залежить від стрибкоподібної змінюваності  $\frac{dK}{dt}$ , врахуємо, що

$$Y = \frac{1}{1-\alpha} \left( \beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon \frac{dY}{dt} \right), \quad (2.20)$$

де стала  $\varepsilon > 0$ , причому для  $K < R$  доданок  $\frac{dK}{dt}$  міняється на величину  $k_1$  і на  $(-k_2)$  для  $K > R$ . Dodanok  $\varepsilon \frac{dY}{dt}$  викликає затримку в реакції функції  $Y$  на змінюваність  $\frac{dK}{dt}$ . Здобути у такий спосіб звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) щодо залежної змінної  $Y$  є лінійним 1-го порядку, розв'язок якого записується аналітично. При цьому параметр  $\varepsilon$  визначає час, протягом якого величина  $Y$  плавно досягає значення  $\frac{\beta + k_1}{1-\alpha}$  або  $\frac{\beta - k_2}{1-\alpha}$  з вказаною заздалегідь точністю.

Ліквідація розривів 1-го роду у капіталовкладеннях (перехід від стану  $k_1$  до стану  $(-k_2)$ ) відбувається за рахунок припущення, що  $\frac{dK}{dt} = \Psi \left( \frac{dY}{dt} \right) + L$ , де стала  $L$  — так звані *інші капіталовкладення*, а функція  $\Psi \left( \frac{dY}{dt} \right)$  відображає індуктивні (наведені) капіталовкладення, викликані зміною обсягів виробництва. Насправді

має місце залежність  $\Psi\left(\frac{dY(t-\theta)}{dt}\right)$ , де  $\theta$  — запізнення, що цілком відповідає лаговому характеру економічних процесів. Скориставшись лінійними членами розкладу в ряд доданків виразу (2.20) для моменту часу  $t = \tau + \theta$ , одержимо ЗДР 2-го порядку

$$\varepsilon\theta\frac{d^2Y(\theta)}{d\tau^2} + [\varepsilon + (1-\alpha)\theta]\frac{dY(\tau)}{d\tau} + (1-\alpha)Y(\tau) - \Psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) = \beta + L. \quad (2.21)$$

Це і є математична модель Гудвіна [176, 179], що описує цикловий характер економічного розвитку.

#### Результати аналітичного моделювання

У літературі відоме диференційне рівняння (ДР) стосовно уречевленого капіталу

$$\frac{dK}{dt} = I - \mu K, \quad (2.22)$$

де  $I$  відповідає зовнішнім інвестиціям,  $\mu$  — коефіцієнт амортизації. Для трьох виокремлених випадків надходження інвестицій, а саме:

а)  $\dot{I} = \dot{I}_0 = \text{const}$  — у вигляді частки  $\dot{I}_0$  для кожного часового інтервалу;

б)  $\dot{I}(t) = \bar{\beta}t$  — прямопропорційні в часі інвестиції;

в)  $\dot{I} = B \cdot \exp\{\tilde{\beta}t\}$  — інвестиції, що здійснюються за експоненціальним законом. Відповідно ММ (2.22) описується аналітичним розв'язком:

$$\begin{aligned} \text{а) } K(t) &= \left( K_0 - \frac{\dot{I}}{\mu} \right) \exp\{-\mu t\} + \frac{\dot{I}}{\mu}; \\ \text{б) } K(t) &= \left( K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu^2} \right) \exp\{-\mu t\} - \frac{\bar{\beta}}{\mu^2} (-\mu t + 1); \\ \text{в) } K(t) &= \left[ K_0 - \frac{B}{\mu + \tilde{\beta}} \right] \exp\{-\mu t\} + \frac{B}{\mu + \tilde{\beta}} \exp\{\tilde{\beta}t\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$



Іншими словами, для кожного варіанта інвестування має місце закон змінюваності капіталу залежно від обраного закону рівня зовнішніх надходжень протягом певного часу і стартових умов (початкових значень  $\dot{I}$  і  $K_0$  з урахуванням амортизаційних витрат).

За наявності аналітичних виразів (2.23) легко записується швидкість зміни капіталу:

$$\text{а) } \frac{dK}{dt} = (\dot{I} - \mu K_0) \exp\{-\mu t\};$$

$$\text{б) } \frac{dK}{dt} = \left( K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu^2} \right) \exp\{-\mu t\} \cdot (-\mu) + \frac{\bar{\beta}}{\mu};$$

$$\text{в) } \frac{dK}{dt} = \left[ \frac{\mu B}{\mu + \tilde{\beta}} - \mu K_0 \right] \exp\{-\mu t\} + \frac{\tilde{\beta} \cdot B}{\mu + \tilde{\beta}} \exp\{\tilde{\beta} t\}.$$

Для варіанта а) інвестування, підставляючи відповідний вираз для  $\frac{dK}{dt}$  в рівняння (2.20), одержуємо ЗДР вигляду

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1 - \alpha)Y = \beta + (\dot{I} - \mu K_0) \exp\{-\mu t\}. \quad (2.24)$$

Це лінійне ДР 1-го порядку зі специфічною правою частиною  $f(t)$  як сумою функцій незалежної змінної  $t$ , тобто  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , де  $f_1(t) = \frac{\beta}{\varepsilon}$  і  $f_2(t) = (\dot{I}_0 - \mu K_0) \exp\{-\mu t\} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$ .

На підставі відомої з теорії лінійних ДР теореми шуканий розв'язок  $Y(t)$  ММ (2.24) представлено сумою  $(Y_1(t) + Y_2(t))$  розв'язків двох лінійних ЗДР відповідно з правою частиною  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ .

Перший розв'язок записується так:

$$Y_1(t) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \left( 1 - \exp\left\{ \frac{\alpha - 1}{\varepsilon} t \right\} + Y_1(0) \exp\left\{ \frac{\alpha - 1}{\varepsilon} t \right\} \right)$$

і являє собою частковий випадок класичної моделі Гудвіна ( $k_1 = 0$ ).

Другий розв'язок знаходимо способом інтегруванням ЗДР

$$\frac{dY}{dt} + \frac{1-\alpha}{\varepsilon} Y = \frac{I - \mu K_0}{\varepsilon} \exp\{-\mu t\}. \quad (2.25)$$

Скористаємось можливістю записати розв'язок ММ (2.25) в аналітичній формі. Дійсно, ДР вигляду  $\dot{y} + ay = c \cdot e^{bx}$  має розв'язок [42]:

$$y = \begin{cases} \frac{c}{a+b} e^{bx} + Ce^{-ax}; & \text{для } a+b \neq 0 \\ c \cdot x \cdot e^{bx} + Ce^{-ax}; & \text{для } a+b = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

де  $y = y(x)$ . Для нашого випадку  $a = \frac{1-\alpha}{\varepsilon}$ ;  $c = (\dot{I}_0 - \mu K_0)/\varepsilon$ ;  $b = -\mu$ .

Отже, спостерігається біфуркація обсягів виробництва залежно від значень числових параметрів еволюції економіки. Гілки розгалуження процесу створення суспільного продукту описуються формулами:

$$Y_2 = \begin{cases} \frac{(\dot{I}_0 - \mu K_0)}{1 - (\alpha + \varepsilon \mu)} \exp\{-\mu t\} + C \exp\left\{\frac{\alpha - 1}{\varepsilon} t\right\}; & \text{для } \frac{1-\alpha}{\varepsilon} - \mu \neq 0; \\ \frac{(\dot{I}_0 - \mu K_0)}{\varepsilon} t \exp\{-\mu t\} + C \exp\left\{\frac{\alpha - 1}{\varepsilon} t\right\}; & \text{для } \frac{1-\alpha}{\varepsilon} - \mu = 0, \end{cases}$$

де  $C = Y_2(0)$  — стала інтегрування.

Звернемо увагу на таку функцію:  $y = t \cdot \exp\{-\mu t\}$ , для якої точка

максимуму  $t = \frac{1}{\mu}$  і значення в ній  $y\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} e^{-1}$ . Іншими словами,

чим менший коефіцієнт амортизації, тим довший період зростання функції і більшим є її максимальне значення (амплітуда зростання). Зазначений результат моделювання цілком відповідає спостереженням стосовно поведінки економіки: на кращому устаткуванні досягають ліпших показників, ніж на зношеному

обладнанні. Більше того, вираз  $y = \frac{(\dot{I}_0 - \mu K_0)}{\varepsilon} t \exp\{-\mu t\}$  нагадує

відоме в науковій літературі з синергетики [25, 134] рівняння Ріккера, яке описує ітеративний процес  $y_{i+1} = Ay_i \exp\{-y_i\}$ . Йому притаманна властивість біфуркації подвоєння періоду (рис. 2.5), сутність якої полягає в такому: для відносно малих значень біфуркаційного параметра  $A$  — у нашому випадку  $A = \left(i - \frac{\mu K_0}{\varepsilon}\right)$  — рівноважний розв'язок рівняння стійкий. Зі збільшенням  $A$  рівновага порушується і з'являються цикли періоду 2, 4 та ін., а за достатньо великих значеннях біфуркаційного параметру  $A$  настає детермінований хаос (див. рис. 2.5).

Здійснивши інвестування б) відповідно до (2.23) підстановкою виразу  $\frac{dK}{dt}$  у рівняння (2.20), дістанемо ММ вигляду

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon} Y = \frac{1}{\varepsilon} \left( \beta + \frac{\bar{\beta}}{\mu} \right) - \left( \frac{\mu K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu}}{\varepsilon} \right) \exp\{-\mu t\}. \quad (2.27)$$

Це лінійне ЗДР 1-го порядку з правою частиною як сумою функцій незалежної змінної  $t$ .

При цьому для  $f_1(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \beta + \frac{\bar{\beta}}{\mu} \right)$  виразу записується результат  $Y_1$ ,

що відповідає класичній моделі Гудвіна  $\left( K_1 = \frac{\bar{\beta}}{\varepsilon \mu} \right)$ , а для

$$f_2(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \mu K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu} \right) \exp\{-\mu t\}$$

одержимо ДР згадуваного вище типу

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon} Y = \left( \mu K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \exp\{-\mu t\}$$

з розв'язком вигляду (2.26) за  $a = \frac{1-\alpha}{\varepsilon}$ ;  $c = \frac{1}{\varepsilon} \left( \mu K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu} \right)$ ;  $b = -\mu$ .

Отже, маємо

$$Y_2 = \begin{cases} \left( \frac{\mu K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu}}{1 - (\alpha + \varepsilon \mu)} \right) \exp\{-\mu t\} + C \exp\left\{\frac{\alpha-1}{\varepsilon} t\right\}; & \text{для } \frac{1-\alpha}{\varepsilon} - \mu \neq 0; \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( \mu K_0 + \frac{\bar{\beta}}{\mu} \right) t \exp\{-\mu t\} + C \exp\left\{\frac{\alpha-1}{\varepsilon} t\right\}; & \text{для } \frac{1-\alpha}{\varepsilon} - \mu = 0. \end{cases}$$

У цьому випадку також спостерігається біфуркативне зростання обсягу виробництва за умови довготривалих капіталовкладень.

Змінюваність обсягів виробництва у випадку б) лінійного закону інвестування являє собою суперпозицію розв'язків  $Y_1$  і  $Y_2$ .

**Зауваження!** Скориставшись результатами дослідження функції  $y = t \exp\{-\mu t\}$  (перш за все фактом монотонного зростання її графіка на інтервалі  $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ ), можна стверджувати таке. Саме для економіки з великим значенням коефіцієнта  $\mu$  амортизації особливого змісту набуває пропозиція Гудвіна  $\frac{dK}{dt} = \Psi\left(\frac{dY}{dt}\right) + L$  (частка капіталовкладень викликана зміною обсягу виробництва), бо відповідає моментальній складовій інвестиційного процесу, що є рушійною силою в створенні товару в інтервалі часу  $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ .

Отримана вище ММ циклів економіки (2.21)

$$\varepsilon \theta \frac{d^2 Y(\tau)}{d\tau^2} + [\varepsilon + (1-\alpha)\theta] \frac{dY(\tau)}{d\tau} + (1-\alpha)Y(\tau) - \Psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right) = \beta + L$$

є адекватною саме на відрізку часу  $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ , протягом якого відбуваються значні коливні процеси. Поза цим інтервалом мають

працювати відповідні моделі для довгострокових капіталовкладень.

Для способу в) аналітичного опису швидкості  $\frac{dK}{dt}$  змінюваності капіталу має місце ММ

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon} Y = \frac{\beta}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\mu B}{\mu + \tilde{\beta}} \mu K_0 \right] \exp\{-\mu t\} + \frac{\tilde{\beta} B}{(\mu + \tilde{\beta})\varepsilon} \exp\{\tilde{\beta} t\}, \quad (2.28)$$

права частина  $f(t)$  якої складається з трьох доданків, отже, запишемо:  $f_3(t) = \frac{\tilde{\beta} B}{(\mu + \tilde{\beta})\varepsilon} \exp\{\tilde{\beta} t\}$ . Шуканий розв'язок  $Y(t)$  для ММ

(2.28) являє собою суперпозицію розв'язків  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$  і  $Y_3(t)$  для кожної з трьох задач відповідно з правою частиною  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  і  $f_3(t)$ . Зазначимо, що структура цих розв'язків вже розглядалась вище.

Принципової новизни для третього варіанта капіталовкладень немає, хіба що ускладнюється лише запис шуканого розв'язку і з'являється більше можливостей стосовно біфуркативності зростання виробництва.

На завершення розглянемо випадок, коли в рівнянні капіталу (2.22) коефіцієнт амортизації  $\mu = \mu(t)$  змінюється з плинном часу. Замість (2.22) будемо оперувати рівнянням

$$\frac{dK}{dt} = \dot{I} + \mu K, \quad (2.22a)$$

розв'язки якого мажорують інтегральні криві рівняння (2.22), тобто є оцінками зверху для ключових показників рівняння (2.22).

Оскільки (2.22a) можна подати так:

$$K(t) - K(0) = \int_0^t \dot{I}(t) dt + \int_0^t \mu(t) K(t) dt,$$

то згідно з леми Гронуолла—Беллмана має місце нерівність

$$K(t) \leq (K_0 + I^t) \exp\left\{ \int_0^t \mu(t) dt \right\}, \quad (2.29)$$

де інтеграл  $I^t = \int_0^t \dot{I}(t) dt$  легко обчислюється для відомих законів а)-в) інвестування.

Щоб одержати відповідну оцінку швидкості змінюваності капіталу, скалярна нерівність (2.29) диференціюється. Кінцевий результат матиме вигляд

$$\frac{dK}{dt} \leq \left[ \mu(t)(K_0 + I^t) + \frac{d\dot{I}(t)}{dt} \right] \exp \left\{ \int_0^t \mu(t) dt \right\}. \quad (2.30)$$

Третій доданок відповідає прийнятому способу інвестування.

Результатом, отриманим Гудвіном, як відомо, є скалярне рівняння

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1 - \alpha)Y = \beta + \frac{dK}{dt}. \quad (2.20a)$$

Підстановкою (2.30) в (2.20a) матимемо таку диференціальну нерівність:

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1 - \alpha)}{\varepsilon} Y \leq \frac{\beta}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \mu(t)(K_0 + I^t) + \frac{d\dot{I}^t}{dt} \right] \exp \left\{ \int_0^t \mu(t) dt \right\}, \quad (2.31)$$

яка, взагалі кажучи, повинна чисельно інтегруватись ( $Y(t)$  — шукана функція). Але щоб записати відповідний аналітичний вираз, припустимо, що виконується нерівність  $|\mu(t)| < M$  для  $\forall t$ .

Отже, нерівність (2.30) набуде вигляду

$$\frac{dK}{dt} \leq \left[ MK_0 + \frac{d\dot{I}^t}{dt} + M\dot{I}^t \right] \exp \{Mt\}. \quad (2.31a)$$

Наприклад, для способу в) інвестування нерівність переписується так:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &\leq \left[ MK_0 + B \exp \{ \tilde{\beta} t \} + M \frac{B}{\tilde{\beta}} \exp \{ \tilde{\beta} t \} \right] \exp \{ Mt \} \equiv \\ &\equiv \left[ \frac{MK_0}{\exp \{ \tilde{\beta} t \}} + B + \frac{MB}{\tilde{\beta}} \right] \exp \{ (M + \tilde{\beta} t) \} \end{aligned} \quad (2.30б)$$

Починаючи з нульового моменту часу  $t = 0$ , перший доданок у квадратних дужках зменшується (його вплив спадає з плином часу), і тому є сенс вираз у квадратних дужках покласти рівним деякій постійній величині, наприклад:

$$\left[ \frac{MK_0}{\exp\{\tilde{\beta}t\}} + B + \frac{MB}{\tilde{\beta}} \right] \leq \left[ MK_0 + B + \frac{MB}{\tilde{\beta}} \right] \equiv D_0.$$

Таким чином, остаточно швидкість змінюваності капіталу оцінюється нерівністю

$$\frac{dK}{dt} \leq D_0 \exp\{(M + \tilde{\beta})t\}. \quad (2.30в)$$

Ураховуючи (2.30в), диференціальна нерівність (2.31) набуває вигляду

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon} Y \leq \frac{\tilde{\beta}}{\varepsilon} + \frac{D_0}{\varepsilon} \exp\{(M + \tilde{\beta}) \cdot t\}. \quad (2.31а)$$

Отже, проблема моделювання еволюції капіталу в часі зводиться до вивчення вище узагальненої ММ на зразок Гудвіна. Структура її розв'язку зберігається (суперпозиція частинних розв'язків, таких як [2.26]), відмінність полягає лише в наявності коефіцієнта  $b = M + \tilde{\beta}$ .

У теорії реальних обчислювальних процесів, тісно пов'язаної з математичним моделюванням явищ різноманітної природи, свого часу постало запитання: краще діяти багатократно простим ітеративним алгоритмом обчислень чи варто використовувати більш складну конструкцію за меншого числа ітерацій — Сцилла і Харибда комп'ютерного моделювання. Відповідь однозначна: вигідніше з точки зору обчислювальних витрат скористатися методом нижчого порядку збіжності, ніж алгоритмом вищого порядку (при цьому обчислюються похідні високого ступеня).

Щось подібне має місце в економіко-математичному моделюванні, яке описує процес капіталовкладень. Невід'ємною частиною його є адекватний опис процесу, стосовно створення якомога кращого інвестиційного клімату. Постають запитання: як здійснювати фінансові впливання, за яким математичним законом,

з якою періодичністю, часткою тощо. Проведені дослідження свідчать, що краще за все, щоб капіталовкладення регулярно надходили за найпростішою формалізованою процедурою, тобто випадок а), коли легко здійснюється наскрізне і прозоре застосування результатів аналітичної економіки, яке описує керований процес і сприяє здійсненню прогнозу щодо розвитку подій. У випадку б) — в) надходження інвестицій описують складними формулами. Мають місце труднощі і деякі обмеження практичного їх використання.

На підґрунті лінійних математичних моделей динаміки економічних процесів встановлено, зокрема, таке: 1) інтервал зростання обсягу виробництва визначається рівнем зношеності устаткування в оберненій пропорції — факт стосується практичної економіки; 2) біфуркативний сценарій розвитку подій належить до теоретичної економіки; 3) значний вплив короткострокових капіталовкладень відбувається протягом інтервалу  $\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ , а поза ним головну роль відіграють довгострокові інвестиції.

Проведене дослідження наводить на думку про адаптивне застосування ММ економіки, зокрема, класичної моделі Гудвіна та запропонованої її модифікації. Рекомендується, щоб уникнути лінійної парадигми моделювання і викликаних нею обмежень, застосовувати числове інтегрування рівнянь моделі, здійснюючи широкомасштабний обчислювальний експеримент.

Серед відомих способів формалізованого опису процесів інвестування, як показує викладене вище, перевага надається найпростішому за умови регулярного здійснення (систематичного надходження інвестицій).

#### **2.2.4. Узагальнення моделі Гудвіна**

---

Запропоновано узагальнення моделі Гудвіна, в якій у певний спосіб враховується людський капітал, використовуючи, модель Солоу. Відповідні коефіцієнти вважаються як сталими, так і змінними величинами. Аналітично можна оцінити можливість біфуркативності траєкторії економічного зростання й утворення детермінованого хаосу за деяких значень коефіцієнтів моделі.



## Стислий опис історії питання

Модель Гудвіна досить вдало описує коливний характер економічного розвитку в перехідний період. За певних числових значень коефіцієнтів модель Гудвіна зводиться до відомого [12] в теорії коливань рівняння Ван-дер-Поля, що характеризується розмаїттям інтегральних кривих — від детермінованої поведінки до хаосу. Модель Гудвіна продовжує перебувати у зоні уваги дослідників трансформаційної економіки, інструментом вивчення якої виступає, зокрема, синергетика.

Алгоритмізуємо процес аналізу моделі Гудвіна. Для прийнятого в [59, 176] способу управління капіталом на підставі (2.20) відповідно здобувають два лінійні ЗДР 1-го порядку:

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon} Y = \frac{1}{\varepsilon} (\beta + k_1); \quad (2.20a)$$

і

$$\frac{dY}{dt} + \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon} Y = \frac{1}{\varepsilon} (\beta + k_2), \quad (2.20б)$$

аналітичні розв'язки яких легко записуються. Наприклад, для рівняння (2.20a) розв'язок набуває вигляду

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{-1 + \alpha} \left( 1 - \exp \left\{ \frac{\alpha - 1}{\varepsilon} (t - t_1) \right\} \right) + Y(t_1) \exp \left\{ \frac{\alpha - 1}{\varepsilon} (t - t_1) \right\},$$

де момент часу  $t_1$  вказує на початок процесу; величина  $Y(t_1)$  — стартова позиція виробництва. Величина  $\varepsilon$  регулює час і плавність досягнення значення  $\frac{\beta + k_1}{\alpha - 1}$ .

Цілком природне припущення, що відповідає виразу  $\frac{dK}{dt} = \Psi \left( \frac{dY}{dt} \right) + L$ , де перший доданок свідчить про вимушені капіталовкладення, а другий — про інші інвестиції. Це дозволяє записати рівняння (2.20) у такому вигляді:

$$Y = \frac{1}{1-\alpha} \left( \beta + L + \Psi \left( \frac{dY}{dt} \right) - \varepsilon \frac{dY}{dt} \right).$$

Ураховуючи запізнення, що притаманно економічним процесам, тобто  $\Psi\left(\frac{dY(t-\theta)}{dt}\right)$ , а також використати лінійні члени ряду Тейлора  $Y(t-\tau) = Y(t) - \tau\dot{Y}(t) + O(\tau^2)$  ( $\tau = t - \theta$ ), запишемо рівняння, яке матимемо після деяких перетворень в однорідній формі запису та переходу до безрозмірних величин. Рівняння (2.21) набуває вигляду

$$\varepsilon\theta \cdot \ddot{y} + [\varepsilon + (1 - \alpha)\theta]\dot{y} - \Psi(\dot{y}) + (1 - \alpha)y = 0, \quad (2.21a)$$

де  $\ddot{y}$  і  $\dot{y}$  — відповідно перша і друга похідна залежної змінної.

#### Оцінювання обсягів капіталу

Сутність результатів полягає в побудові і використанні оцінок швидкості змінюваності капіталу на підґрунті моделі Солоу найбільш загального вигляду і припускає як сталий характер коефіцієнтів моделі, так і їхню залежність від часу, що відповідає економічним реаліям. В отриманні згадуваних вище кількісних оцінок ключову роль відіграє лема Гронуолла—Беллмана, а також використовують припущення щодо різновиду виробничої функції та її апроксимації.

Рівняння Солоу у найбільш загальному вигляді та в безрозмірній формі записується так:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\delta + \eta + g)k, \quad (2.32)$$

де ліва частина рівності — швидкість зміни обсягу капіталу  $k$ , а права частина — різниця між інвестиціями [виробнича функція  $f(k)$  визначає обсяг продукції для даної економіки  $s$ ,  $s \in [0,1)$  — частка заощаджень] та амортизацією (засобів виробництва з коефіцієнтом  $\delta$ ;  $n$  — темп зростання населення, як правило, сталий; також сталим є і темп  $g$  зростання за рахунок НТП, чим пояснюється підвищення рівня життя). Отже, модель Солоу (2.32) враховує всі відомі джерела безперервного економічного зростання, що простежується в більшості країн.

Також рівняння (2.32) допускає, зокрема, такий еквівалентний запис:

$$k(t) - k(0) = \int_0^t [sf(k) - (\delta + \eta + g)k] dt, \quad (2.32a)$$

інтегруючи рівняння (2.32).

Далі використаємо лему Гронуолла—Беллмана, яка формулюється так: якщо має місце нерівність  $u(t) \leq c + \int_0^t f(t_1)u(t_1)dt_1$ , де стала  $c \geq 0$ , функції  $u(t) \geq 0$ ,  $f(t) \geq 0$  диференційовані на відрізку інтегрування, то також виконується нерівність

$$u(t) \leq c \cdot \exp\left\{\int_0^t f(t_1)dt_1\right\};$$

узагальнення леми: справедлива двостороння нерівність

$$u(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t f(t_1)dt_1\right) \leq u(t) \leq u(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t f(t_1)dt_1\right),$$

покладаючи  $c = u(t_0)$ ,  $a < t_0 < t < b$ .

**Зауваження!** Забігаючи наперед, зазначимо, що подвійна нерівність вказує межі, в яких має перебувати допустимий обсяг капіталу для успішної еволюції економіки.

Щоб застосувати лему та її узагальнення в нашому випадку, скористаємось відомими в літературі міркуваннями щодо поведінки нелінійної виробничої функції  $f(k)$ . Характерні графіки функції, що складають праву частину рівняння (2.32), зображено на рис. 2.4, де  $k_*$  — стійка точка рівноваги, а  $k_0 = 0$  — нестійка.

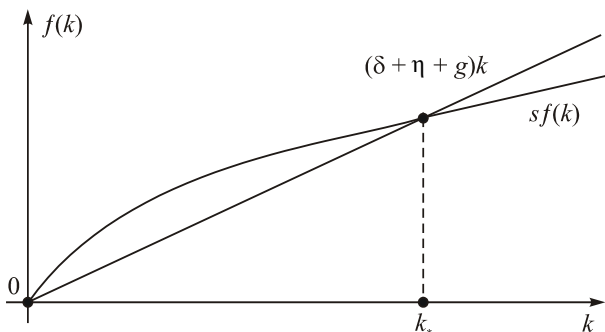


Рис. 2.4. Геометричне зображення рівняння (2.32)

Отже, на відрізку  $[0, k_*]$  нелінійна виробнича функція допускає апроксимацію функцією  $k^{\frac{1}{\alpha}}$  ( $\alpha \geq 2$ ), тобто  $f(k) \leq k^{\frac{1}{\alpha}}$ . Тоді рівність (2.32а) переходить у нерівність і після відповідного перетворення набуває вигляду

$$k(t) \leq k(0) + \int_0^t k(t) \left[ s \cdot k^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)} - (\delta + \eta + g) \right] dt, \quad (2.33)$$

придатного до застосування леми Гронуолла—Беллмана. У результаті її застосування матимемо оцінку

$$k(t) \leq k(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[ s \cdot k^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} - (\delta + \eta + g) \right] dt \right\}, \quad (2.34)$$

що описує змінюваність обсягу капіталу в часі, враховуючи всі наявні фактори його утворення. Остаточню оцінку записується так:

$$k(t) \leq k(0) \exp \{ -(\delta + \eta + g)t \} \cdot \exp \left\{ \int_0^t s \cdot k^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} dt \right\}. \quad (2.34a)$$

Для інтеграла в останньому співмножнику виразу (2.34а) має місце нерівність  $\int_0^t s \cdot k^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} dt \leq \int_0^t s k_*^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} dt$ , де  $k_*$  — корінь нелінійного алгебраїчного рівняння  $sf(k) = (\delta + \eta + g)k$ . Зважаючи на площину можливих (допустимих) числових значень параметрів  $s$  і  $\alpha$ , можна стверджувати, що дріб  $\frac{s}{k_*^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}}$  є правильний. У результаті інтегрування згадуваний вище співмножник виглядатиме так:  $\exp \left\{ \frac{s}{k_*^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}} t \right\}$ .

Таким чином, нерівність (2.34а) остаточно набуває вигляду

$$k(t) \leq k(0) \exp \left\{ \left( -(\delta + \eta + g) + \frac{s}{k_{(*)}^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}} \right) t \right\}, \quad (2.34б)$$

ураховуючи властивість експоненційної функції:  $\exp\{-a\} \cdot \exp\{-b\} = \exp\{-(a+b)\}$ .

Швидкість зміни обсягу капіталу оцінюється

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} \leq k(0) \left[ -(\delta + \eta + g) + \frac{s}{k_{(*)}^{(\alpha-1)/\alpha}} \right] \times \\ \times \exp \left\{ \left[ -(\delta + \eta + g) + \frac{s}{k_{(*)}^{(\alpha-1)/\alpha}} \right] t \right\}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

тобто це похідна скалярної нерівності (2.34б). Позначаючи

$\bar{K} = \left[ \frac{s}{k_{(*)}^{(\alpha-1)/\alpha}} - (\delta + \eta + g) \right]$  вираз у квадратних дужках, нерівність (2.35) можна переписати у зручнішому вигляді раціональним способом:

$$\frac{dk}{dt} \leq \bar{K} k(0) \exp\{\bar{K}t\}. \quad (2.35a)$$

Підставивши (2.35a) у (2.20), дістанемо в безрозмірних величинах скалярну диференціальну нерівність (тип лінійного ЗДР 1-го порядку):

$$\frac{dk}{dt} \leq \bar{K} k(0) \exp\{\bar{K}t\}, \quad (2.36)$$

праву частину якого зручно подати у вигляді таких функцій:

$$f_1(t) = \frac{\beta}{\varepsilon} \text{ і } f_2(t) = (\bar{K} k(0)) / \varepsilon \cdot \exp\{\bar{K}t\}.$$

Як відомо, шуканий аналітичний розв'язок математичної моделі (2.36) являє собою суперпозицію двох розв'язків, а саме: функції  $k_1(t)$  для рівняння (2.36) з правою частиною  $f_1(t)$  та функції  $k_2(t)$  для цього ж рівняння, але з правою частиною  $f_2(t)$ . Розв'язок  $k_1(t)$  відповідає моделі Гудвіна в найпростішому випадку, будучи класичним як для лінійного ЗДР 1-го порядку. Розв'язок  $k_2(t)$  рівняння згідно з (2.36) знаходимо на підґрунті формули (2.26) на с. 74.

У нашому випадку другий розв'язок  $y_2(t)$  записуємо так:

$$k = \begin{cases} \frac{\bar{K}k(0)}{1 - \alpha + \varepsilon \bar{K}} \cdot \exp\{\bar{K}t\} + C \exp\left\{\frac{\alpha - 1}{\varepsilon}t\right\} & \text{для } \frac{1 - \alpha}{\varepsilon} + \bar{K} \neq 0; \\ \frac{\bar{K}_t k(0)t}{\varepsilon} \cdot \exp\{\bar{K}t\} + C \exp\left\{\frac{\alpha - 1}{\varepsilon}t\right\} & \text{для } \frac{1 - \alpha}{\varepsilon} + \bar{K} = 0. \end{cases}$$

Отже, спостерігається розгалуження інтегральних кривих модифікованої моделі Гудвіна, залежно від комбінації числових параметрів економіки, тобто аналітично може бути оцінено явище біфуркативності. Можна показати, що наявність у розв'язку  $k_2(t)$

функції  $\frac{\bar{K}_t k(0)t}{\varepsilon} \cdot \exp\{\bar{K}t\}$ , яка за деяких числових значень параметрів моделі економіки [див. вираз для величини  $\bar{K}$  (2.35)] переходить у відому в синергетичній літературі функцію Ріккера  $z_{i+1} = \alpha z_i \exp(-z_i)$ . Ітеративному процесу притаманна біфуркація подвоєння періоду: за малих значеннях біфуркативного параметру  $\alpha = \frac{\bar{K}k(0)}{\varepsilon}$  рівноважний розв'язок є стійким. Зі зростанням  $\alpha$  у деякий момент з'являються цикли періоду 2, 4, 8 і т. д. (рис. 2.5); за досить великих значень біфуркативного параметру настає детермінований хаос [25, 137, 156].

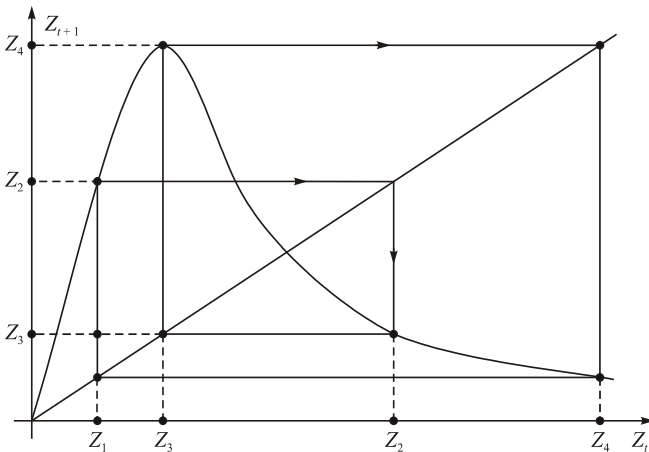


Рис. 2.5. Динамічна спіраль — цикл періоду 4:  
змінна  $z_t$ , послідовно набуває значення  $z_1, z_2, z_3, z_4$

На завершення аналізу зазначимо, що алгоритм отримання результатів застосовний тоді, коли коефіцієнти моделі Солоу приймаються змінними у часі величинами, що краще відповідає реаліям економіки. Принципового характеру ускладнень не виникає, крім громіздкості запису відповідних кількісних оцінок.

Таким чином, встановлено і досліджено математичну модель флуктуацій економіки на підґрунті синтезу класичних моделей Гудвіна та Солоу щодо економічного зростання з урахуванням усіх його причин. Отже, теоретично обґрунтовано й оцінено можливий біфуркативний сценарій економічної еволюції.

---

### **2.3. Еволюція економіки в координатах «корупція — тіньова економіка — легальна економіка»**

---

Саме по собі математичне моделювання легальної економіки (ЛЕ), яке вже має багату історію [20], відповідну методологію і розвинений інструментарій, спряжене з цілком зрозумілими труднощами, які на порядок зростають у задачах адекватного моделювання економічної динаміки. Ще більші труднощі з'являються на шляху комп'ютерного моделювання таких негативних явищ, як корупція і тіньова економіка (ТЕ) — вічних супутників офіційного (легального) економічного процесу.

Перші вітчизняні роботи з моделювання корупції з'явилися нещодавно, а в іноземній літературі — дещо раніше [86, 87, 131]. Феноменологічне вивчення соціально значущих, але негативних за змістом таких явищ відбувається на описовому (вербальному) рівні.

Аналіз стану справ здійснено, зокрема, у працях [86, 87], в яких наведена бібліографія у контексті проблем моделювання корупції. Дещо гірше описано ситуацію з тіньовою економікою. Тезисно сутність критичного аналізу проблеми полягає в такому.

Абсолютно слушною є думка про нагальний характер розробки теорії економіки, обтяженої корупцією, особливо для економічної системи перехідного періоду.

Існує теорія корупційної рівноваги, яка наголошує на її фундаментальних причинах. Виокремлено той факт, що, зокрема, стійкий рівноважний рівень корупції раптом стає нестійким.

Подамо огляд напрямів і підходів з вивчення феномену корупції, тіньової економіки, спираючись на відомі з літератури причини цього явища (фундаментальні, організаційні, соціетальні). Також розглянемо проблеми моделювання цих негативних явищ, труднощі якого пов'язані з відсутністю вичерпних і точних статистичних даних щодо їхнього масштабу, проявів і правил, які діють серед відповідної корумпованої спільноти.

Своєрідний і цілком зрозумілий інтерес викликає вивчення динаміки негативних явищ в суспільстві і, зокрема, можливість появи циклів і відповідної нестійкості.

Кількість праць із вивчення за допомогою моделювання проблем корупції тіньової економіки як самостійних не велика. Справжнє дослідження зазначеного вище на підґрунті застосування математичного і комп'ютерного моделювання тільки розпочинається, маючи за мету вивчити їхню спільну дію.

Зміст полягає у такому. Хоча кожне окремо взяте явище (координата простору економічних подій) заслуговує на самостійне вивчення, що продовжується і донині, але реалії економічного життя свідчать, що корупція, тіньова економіка і легальна економіка співіснують, ідучи поруч і взаємодіючи. Отже, декомпозиція економічного процесу і окреме дослідження кожної складової (явища), виправдано з певних причин складністю і є дещо алогічним. Саме тому результати таких досліджень можуть претендувати тільки на перше наближення до істини.

Цілком природно і більш доцільно цей економічний процес розглядати як єдиний з позиції макроекономічної динаміки, не розриваючи існуючих зв'язків.

Гострота сформульованої проблеми відчувалась завжди і не вщухла дотепер. Особливим чином вона постала для суспільства з нестійким економічним механізмом або для економіки перехідного періоду.

### **2.3.1. Математична модель та оцінювання змінних**

---

Нижче пропонується математична модель динаміки взаємодії корупції, тіньової і легальної економіки. Ця модель суттєво динамічна, не будучи послідовністю статичних станів.



Для початку висловимо основну гіпотезу: вважається, що корупція живиться тіньовою економікою (ТЕ), яка в свою чергу існує на фоні легальної економіки (ЛЕ), причому зростання її нічим не обмежується. Зрозуміло, корупція знижується за відсутності ТЕ, котра також не має підстав для існування (не повинна існувати, але ...).

Звичайно, таке припущення не відображає у всій повноті взаємозв'язки і взаємовпливи між корупцією і ТЕ, які паразитують на тілі легальної діючої економіки. Але такий підхід дозволяє вбачити пряму аналогію з теорією та інструментарієм відомої [23] з математичної біології задачі про співіснування популяцій трьох видів. Відповідна система трьох диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}\beta_1 \frac{dN_1}{dt} &= (-\alpha_1 \beta_1 + a N_2) N_1; \\ \beta_2 \frac{dN_2}{dt} &= (-\alpha_2 \beta_2 + a N_1 + b N_3) N_2; \\ \beta_3 \frac{dN_3}{dt} &= (\alpha_3 \beta_3 - b N_2) N_3,\end{aligned}\tag{2.37}$$

де функції  $N_i(t)$  ( $i=1,2,3$ ) диференційовні, а їхні числові значення описують рівні корупції, ТЕ і ЛЕ відповідно;  $\alpha_i, \beta_i, a, b$  — числові коефіцієнти.

Отже, система рівнянь (2.37) являє собою ММ макроекономічної динаміки, для якої виконуються умови відомої теореми стосовно існування розв'язку на відрізку  $[t_0, T]$ .

Для ММ (2.37) перший інтеграл можна записати так:

$$N_1^{\beta_1 b} N_3^{\beta_3 a} = C \exp\{(\alpha_3 \beta_3 a - \alpha_1 \beta_1 b)t\},\tag{2.38}$$

де  $C$  — стала інтегрування. Дійсно, попередньо домноживши перше рівняння ММ (2.37) на сталу  $b$ , легко записати ланцюжок перетворень:

$$b\beta_1 \frac{dN_1}{N_1} = -\alpha_1 \beta_1 b + ab N_2; \quad b\beta_1 \ln N_1 \Big|_{t_0}^t = \int_0^t (-\alpha_1 \beta_1 b + ab N_2) dt;$$

$$N_1^{b\beta_1}(t) = N_1^{b\beta_1}(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^t (-\alpha_1 \beta_1 b + ab N_2) dt\right\}.$$

Аналогічним чином, домножуючи третє рівняння ММ (2.37) на сталу  $a$ , одержуємо інтеграл  $N_3^{a\beta_3}(t) = N_3^{a\beta_3}(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^t (\alpha_3 \beta_3 a -$

$-abN_2)dt\}$ . Множенням здобутих виразів, скориставшись властивістю експоненти  $e^A e^B = e^{A+B}$ , матимемо (2.38), де  $C = N_1^{b\beta_1}(t_0)N_3^{a\beta_3}(t_0)$ .

З третього рівняння ММ (2.37) дістаємо нерівність  $\frac{d(\ln N_3)}{dt} < \alpha_3$ , а з неї можна одержати таку оцінку:  $N_3 < N_3(0)\exp\{\alpha_3(T-t_0)\} \Leftrightarrow N_3 < L_1$  про експоненціальне зростання ЛЕ. До речі, ця оцінка відповідає основній тезі класичної (лінійної парадигми) теорії економічної динаміки.

У такий спосіб знаходять й інші оцінки зверху:

$$N_2 < N_2(0)\exp\left\{\frac{b}{\beta_2}N_3(0)\exp\{\alpha_3(T-t_0)\}\right\}(T-t_0) \Leftrightarrow N_2 < L_2.$$

Легко записуються також відповідні нижні оцінки. Наприклад, справедливо записати, що  $\frac{d}{dt}(\ln N_3) > -\frac{\alpha_3\beta_3 + bL_2}{\beta_2}$ , звідси витікає така нерівність:

$$N_3 > N_3(0)\exp\left\{-\frac{\alpha_3\beta_3 + bL_2}{\beta_2}(T-t_0)\right\}.$$

Розглянемо особливі точки (стаціонарні, або точки спокою), координати яких записуються  $(0; 0; 0)$ ,  $\left(0; \frac{\alpha_1\beta_1}{a}; \frac{\alpha_2\beta_2}{b}\right)$ ,  $\left(0; \frac{\alpha_3\beta_3}{b}; \frac{\alpha_2\beta_2}{b}\right)$ . Ці координати є розв'язками алгебраїчної системи рівнянь, що утворюється з (2.37) за умови  $\frac{dN_i}{dt} = 0$ ,  $(i = 1, 2, 3)$ .

Наголосимо, що значення функції  $N_2$  і  $N_3$  не можуть бути меншими, ніж мінімальні значення координат  $\left(\alpha_3\beta_3/b\right)$  і  $\left(\alpha_1\beta_1/a\right)$  для  $N_2$  і  $\left(\alpha_2\beta_2/b\right)$  для  $N_3$ , тому що їх графіки наближаються в часі до відповідних стаціонарних точок. Отже, не можливо, щоб

одна із цих функцій чи обидві одночасно прямували до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Тобто ні ТЕ, ні ЛЕ не можуть зовсім зникнути. Дійсно, в економіці будь-якого типу існує ТЕ і вся заковика полягає лише в свідомому цілеспрямованому зниженню її рівня.

Має місце нерівність  $(\alpha_3\beta_3a - \alpha_1\beta_1b) < 0$ , на підґрунті (2.38) впливає, що величина  $N_1^{\beta_1b} N_3^{\beta_2a} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Оскільки  $N_3 \neq 0$ , тому  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_1 = 0$ . Таким чином, приймається гіпотеза, що в деякий момент часу корупція майже відсутня.

З огляду на нерівність  $\alpha_3\beta_3a < \alpha_1\beta_1b$  і сказане вище про функції  $N_2$  і  $N_3$  робиться висновок, що  $N_2$  не може прямувати до  $\left(\alpha_3\beta_3/b\right)$  за значеннями, не може бути більшою за цю границю, а  $N_3$  не може прямувати до  $\left(\alpha_2\beta_2/b\right)$  за меншими значеннями.

У випадку нерівності  $(\alpha_3\beta_3a - \alpha_1\beta_1b) > 0$  справедливо, що  $N_1^{\beta_1b} N_3^{\beta_2a} \rightarrow \infty$ , тобто одночасно функції не можуть бути обмеженими.

В окремому випадку, коли  $N_1 \rightarrow 0$ , а функції  $N_2$  і  $N_3$  залишаються в околі стаціонарних точок  $\left(\alpha_3\beta_3/b\right)$  і  $\left(\alpha_2\beta_2/b\right)$ , мають місце точні формули, якими описується розглядувана ситуація. На підґрунті цих формул можна дійти висновку: для співвідношення  $\frac{\alpha_3\beta_3}{b} < \frac{\alpha_1\beta_1}{a}$  між коефіцієнтами ММ зникає корупція.

### 2.3.2. Модифікована модель та її оцінки

Розглянемо модифіковану конструкцію ММ (2.37):

$$\begin{aligned}\beta_1 \frac{dN_1}{dt} &= (-\alpha_1\beta_1 + aN_2)N_1; \\ \beta_2 \frac{dN_2}{dt} &= (-\alpha_2\beta_2 - aN_1 + bN_3)N_2; \\ \beta_3 \frac{dN_3}{dt} &= (\alpha_3\beta_3 - \lambda N_3 - bN_2)N_3,\end{aligned}\tag{2.39}$$

вводячи у третє рівняння додток  $(-\lambda N_3)$ , призначення якого — сприяти затуханню функції  $N_3$  (це важливо для того, щоб рівняння моделі ставали прийнятними для великих значень  $N_3$ ).

Легко показати, що має місце рівність вигляду (2.38)

$$N_1^{\beta_1 b} N_3^{\beta_3 a} = \exp \left\{ (\alpha_3 \beta_3 a - \alpha_1 \beta_1 b) t - a \lambda \int_{t_0}^t N_3 dt \right\}. \quad (2.38a)$$

Дійсно, перше і третє рівняння ММ (2.39) можна переписати так:  $\frac{\beta_1}{a} \frac{d}{dt} (\ln N_1) = \frac{-\alpha_1 \beta_1}{a} + N_2$  та  $\frac{\beta_3}{b} \frac{d}{dt} (\ln N_3) = \frac{\alpha_3 \beta_3}{b} - N_2 - \frac{\lambda}{b} N_3$ . Складаючи їх і домноживши на  $(ba)$ , а також використавши вираз похідної суми двох функцій та операцій потенціювання, можна дістати тривіальне диференціальне рівняння  $\frac{d}{dt} (\ln N_1^{\beta_1 b} N_3^{\beta_3 a}) = \alpha_3 \beta_3 a - \alpha_1 \beta_1 b - \lambda a N_3$ , розв'язком якого є вираз (2.38a).

Розглянемо випадок, коли  $\alpha_3 \beta_3 a - \alpha_1 \beta_1 b > 0$ .

Корені алгебраїчної системи рівнянь пошуку координат стаціонарних точок записуються так:  $q_2 = \frac{\alpha_1 \beta_1}{a}$ ;  $q_3 = \frac{a \alpha_3 \beta_3 - \alpha_1 \beta_1 b}{a \lambda}$ ;  $q_1 = \frac{b(a \alpha_3 \beta_3 - b \alpha_1) - a \lambda \alpha_2 \beta_2}{a^2 \lambda}$ . Саме в такому порядку вони шукаються.

Для досить малих значень  $\lambda$  всі корені будуть додатними, тобто існуватимуть обмежені варіації для даних функцій, разом з тим  $N_3 \rightarrow q_3$ . Узагальнюючи, за досягнення хоча б однієї з границь для  $N_1$  чи  $N_2$ , вся економічна система, описана ММ (2.39), прямуватиме до стаціонарного стану  $(q_1, q_2, q_3)$ .

У випадку  $(b(a \alpha_3 \beta_3 - b \alpha_1) - a \lambda \alpha_2 \beta_2) < 0$ , що має місце за великих значень  $\lambda$ , у деякий момент часу функція  $N_1 \rightarrow 0$ , тобто корупція знижується. Принагідно зауважити, що цей висновок маргінальний, оскільки має місце границя. Насправді корупція ніколи не зникає, а є за рівнем значною чи невеликою.

Що відбуватиметься з іншими функціями?

Еволюція ТЕ та ЛЕ описуватиметься варіаціями розв'язків такої системи рівнянь

$$\begin{aligned}\beta_2 \frac{dN_2}{dt} &= (-\alpha_2 \beta_2 + b N_3) N_2 \\ \beta_3 \frac{dN_3}{dt} &= (\alpha_3 \beta_3 - \lambda N_3 - b N_2) N_3,\end{aligned}\tag{2.40}$$

особливі точки якої  $\left( \frac{b\alpha_3\beta_3 - \lambda\alpha_2\beta_2}{b^2}, \frac{\alpha_2\beta_2}{b} \right)$ .

Якщо  $(b\alpha_3\beta_3 - \lambda\alpha_2\beta_2) > 0$ , то існує граничний стан — стаціонарна точка. Для протилежної нерівності спостерігаємо таке:

$\lambda > \frac{b\alpha_3\beta_3}{\alpha_2\beta_2}$ , ТЕ і ЛЕ існують. Значний рівень корупції матиме місце, якщо

якщо  $\frac{b}{a} \frac{a\alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_1 b}{\alpha_2\beta_2} > 0$  буде більше, ніж  $\lambda$ , і буде незначною в протилежному випадку.

Для нерівності  $\lambda < \frac{b\alpha_3\beta_3}{\alpha_2\beta_2}$  функції  $N_i \rightarrow 0$  ( $i=1,2,3$ ), тобто рівень корупції і ТЕ незначні, а ЛЕ існуватиме. Очевидно, що це ідеальні варіанти для суспільства.

Отже, мабуть вперше в літературі економічна система описується в координатах «корупція  $N_1$  — тіньова економіка  $N_2$  — валовий продукт  $N_3$ , або легальна економіка». Сформульовано гіпотезу про взаємне існування корупції, тіньової та легальної економік. На підґрунті висловленого вище головного припущення виписано ММ функціонування економічного механізму за наявності в суспільстві таких потворних явищ, як корупція і ТЕ.

За допомогою моделювання встановлено співвідношення між коефіцієнтами ММ, залежно від яких матимуть місце такі варіанти: а) рівень корупції і ТЕ є відносно невеликими — найкраща можливість для суспільства; б) невеликим є тільки рівень корупції; в) негативні явища значними за обсягами та співіснують з ЛЕ, паразитуючи на тілі суспільства (легальної економіки).

Ще одним призначенням ММ (2.37), (2.39) і (2.40) нам вбачається те, що в результаті масштабного обчислювального експерименту отримуватиметься детальна економічна інформація про діяльність офіційної (легальної) економіки в умовах присутності негативних явищ корупції і тіньової економіки.

Зважаючи на відсутність вичерпних статистичних даних такої діяльності, але все ж таки наявності поодинокого характеру інформації, можна ідентифікувати ММ, впевнитись в їх адекватності. Це даватиме можливість генерувати так потрібну суспільству інформацію про співіснування корупції, ТЕ й офіційної економіки. Зрозуміло, такого роду інформація носитиме превентивний характер, орієнтуватиме суспільство та владні органи на прийняття належних рішень.

---

## 2.4. Кінетичні макроекономічні моделі

---

Паралелі між хімічною кінетикою та економікою як нерівноважними, нелінійними, відкритими системами необоротної дії породжують ще один концептуально новий шлях розробки і поповнення банку економіко-математичних моделей та інструментарію комп'ютерного моделювання економічних процесів і явищ. У термінах економіки інтерпретовано роботу хемостата, режимами функціонування якого досить вдало описуються економічні реалії.

### Превентивні міркування

Незаперечно, що економіка сприймається сучасними дослідниками як нерівноважна нелінійна система незворотної дії. У вивченні її проблем протягом значного періоду використовується термодинаміка, починаючи з опублікування монографії [126], а також статтею [106]. Пояснення цьому просте: існують прямі і глибокі аналогії між процесами нерівноважної термодинаміки й економіки. Але результатів економічного змісту набагато менше, ніж цього можна було б очікувати, зважаючи на досягнення статистичної нерівноважної фізики та їх успішну реалізацію в техніці. Найімовірніше, причини вбачаються в такому:

- 1) з одного боку — високий теоретичний рівень фізичних праць;
- 2) з іншого — недостатня математична підготовка переважної кількості економістів;
- 3) не акцентувалась і не достатньо стимулювалась потреба в подоланні суперечностей, як це мало місце під час розв'язання інших на той час важливих державних завдань.

Відтепер для суспільства з глибокими трансформаціями економіки питання поглибленого аналізу економічних процесів вишли на передній план. Для їх успішного розв'язання пропонується [78] придивитися до математичних моделей хімічної кінетики [77], об'єкти якої також характеризуються як відкриті, нелінійні, сильно нерівноважні системи незворотної дії.

Користуючись тими чи іншими засобами під час дослідження економіки, також важливо знати змінюваність економічних факторів, їх амплітуди і частоти, зсув по фазі (запізнення); як довго протікатиме перехідний процес, з якою швидкістю та за яких умов; як розвиватимуться події, сценарії економічної еволюції, які зсуви (режими функціонування) можливі та найбільш раціональні за певних умов. Досвід Української держави якраз засвідчує потребу дістати якомога вичерпну відповідь на зазначене вище коло питань. Зрозуміло, відповіді вичерпного характеру можна одержати тільки шляхом математичного моделювання, зокрема, на підґрунті побудови і застосування кінетичних рівнянь. Перший досвід такого ґатунку на прикладі кінетичних рівнянь інфляції наводиться у [116].

Таким чином, аргументовано і з'ясовано концептуально новий підхід у дослідженні економіки засобами комп'ютерного моделювання.

### Сутність кінетичного підходу

Почнемо з опису відомого в технічній теплофізиці та хімічній технології пристрою — хемостата, маючи за мету скористатись цим аналогом в моделюванні економіки.

Принцип дії хемостата (метод проточного культивування) простий: у деякий об'єм (культиватор) поступає з певною швидкістю та певної концентрації речовина (вхід), яка ретельно перемішується з наявною в культиваторі іншою субстанцією заданої концентрації. Через вихідну трубу результат перемішування згадуваних речовин витікає з тією ж швидкістю.

Головна, досить нетривіальна, властивість проточного методу — досягнення стійкого стану рівноваги. Зі зміною швидкості потоку, після нерівноважного перехідного процесу встановлюється новий стаціонарний стан (з іншими сталими концентраціями речовини). Така властивість хемостата і можливість досить просто нею управляти визначила широке поширення проточного методу в техніці, зокрема хімічній технології.

На наш погляд, має місце пряма аналогія з макроекономікою, якщо її тлумачити спрощено, а саме: видобувають і надходять на переробку корисні копалини, які обробляють, використовуючи наявні виробничі фонди. У результаті створюється суспільний продукт, який у вигляді товарів та послуг споживається членами суспільства, тобто виводиться залежно від швидкості подачі матеріалу та інтенсивності виробничого процесу (перемішування складових або продуктивності праці). Має місце той чи інший усталений режим (економічна рівновага). Між іншим, саме теорія рівноважного економічного стану домінувала в економічній науці протягом XX ст. Зміна інтенсивності виробничого процесу та ефективності взаємодії його складових тягне за собою перехід від однієї стаціонарної точки, тобто виробництва з досягнутими економічними показниками, до іншої, з іншими координатами.

Опишемо математичну модель хемостата стосовно економіки. Зупинимось на найпростішій замкненій системі диференціальних рівнянь [44, 171]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\mu_m \cdot y \cdot x}{K_y + y} - D \cdot x \\ \dot{y} = -\alpha \cdot \frac{\mu_m \cdot y \cdot x}{K_y + y} + D \cdot (y_0 - y), \end{cases} \quad (2.41)$$

де змінна  $x = x(t)$  відповідає в деякому вимірі наявності корисних копалин та ін. — субстанційній складовій виробничого процесу;

$\dot{x}(t)$  — її похідна у часі; змінна  $y = y(t)$  відображає засоби виробництва, структуру і рівень управління для створення суспільних матеріальних благ і послуг для моменту часу  $t$ ; величина  $\mu_m$  — максимально можлива швидкість приросту, так званий *коефіцієнт*  $D$  розбавлення, який головним чином визначається швидкістю протоку або часом, необхідним для створення товару суспільного виробництва; величина  $K_y$  — деяка експериментальна стала;  $\alpha$  — коефіцієнт інтенсивності взаємодії компонентів виробничого процесу;  $y_0$  — початкове значення.

**Режим динамічної рівноваги хемостата.** Розглянемо стаціонарні режими функціонування економіки, щоб з'ясувати можливі швидкості протоку для нормальної роботи. Прирівнюючи до



нуля похідні ММ (2.41), одержимо алгебраїчну систему рівнянь, два розв'язки якої запишемо у такий спосіб:

$$1) \quad \bar{x}_a = 0, \bar{y}_a = y_0;$$

$$2) \quad \bar{x}_d = \frac{1}{\alpha} (y_0 - \bar{y}_e) \equiv \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\mu \cdot y_0 - D \cdot (K_y + y_0)}{\mu_m - D}, \quad \bar{y}_e = \frac{K_y \cdot D}{\mu_m - D}$$

На рис. 2.6 показані залежності координат стаціонарних точок  $(\bar{x}_a, \bar{y}_a)$  і  $(\bar{x}_e, \bar{y}_e)$  від коефіцієнта  $D$ , який свідчить про ефективність переробки ресурсів виробничими фондами.

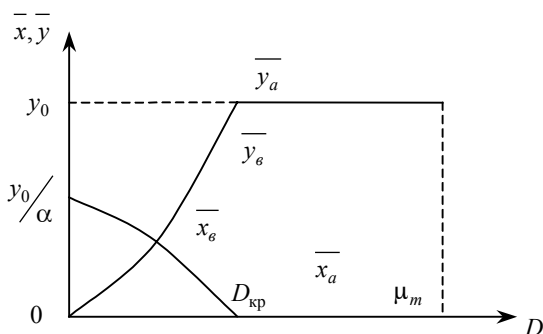


Рис. 2.6

Критичне значення коефіцієнта обчислюємо за формулою

$$D_{кр} = \frac{\mu_m \cdot y_0}{K_y + y_0}.$$

Зрозуміло, що змістовні розв'язки мають лежати в першій чверті координатної площини  $\bar{x}OD$  або  $\bar{y}OD$ . Обидва стаціонарні режими справджуються для умови  $D < D_{кр}$ .

Постає цілком логічне питання щодо оптимального режиму функціонування (максимальна продуктивність хемостата), що відповідатиме найліпшому стану економіки. Відповідь запишемо формулою

$$W_m = \frac{\mu_m}{2} \cdot (\sqrt{y_0 + K_y} - \sqrt{K_y}).$$

Дійсно, поточний економічний стан визначається початковим  $y_0$ , тобто стартовими умовами, однак він безпосередньо прямо-

пропорційний часові створення суспільного продукту. Варто зазначити, що графік функції  $W_m$  за формою нагадує криву Лаффера (стосовно оптимальної ставки оподаткування). Спостерігається цілковите узгодження з тезою: в найліпше діючій економіці податкові надходження сягають найбільшого значення.

Оптимальне значення коефіцієнта  $D$  визначаємо за формулою

$$D_{opt} = \mu_m \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{K_y}{y_0 + K_y}} \right),$$

на яке впливає величина  $y_0$ : чим краща стартова умова (більша величина  $y_0$ ), тим швидше досягається  $D_{opt}$ .

**Неусталений режим або перехідний процес.** На практиці важливо знати: Як зі зміною швидкості потоку зміняться економічні фактори? Матиме місце коливний режим роботи чи ні? Яка буде швидкість виходу на рівноважний стан? Для усталеного режиму координати точки залежать від початкових умов? Якою буде поведінка в цілому нерівноважної системи та яким має бути оптимальне управління нею? Відповіді на сформульовані запитання можна одержати тільки шляхом математичного моделювання, оскільки натурний експеримент в економіці вкрай болісно діє на членів суспільства або принципово неможливий. Відповісти можна двояко — засобами якісного дослідження і числового інтегрування системи рівнянь.

**Якісний аналіз ММ.** У безрозмірній формі рівняння (2.41) переписуються

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x \cdot y}{k + y} - \sigma \cdot x; \\ \dot{y} = -\frac{x \cdot y}{k + y} + \sigma \cdot (1 - y), \end{cases} \quad (2.42)$$

де величина  $\sigma$  є управляючий параметр, причому  $\sigma = \frac{D}{\mu_m}$ ;

$k = \frac{K_y}{y_0}$ ; інші безрозмірні величини визначаються так:  $x = \frac{\alpha \cdot x}{y_0}$ ;

$y = \frac{y}{y_0}$ ;  $t = t \cdot \mu_m$ .

Особливі точки ( $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ) записуємо у такий спосіб:

$$1) \overline{x_a} = 0; \overline{y_a} = 1;$$

$$2) \overline{x_e} = \frac{1 - \sigma \cdot (k+1)}{1 - \sigma}, \overline{y_e} = \frac{k \cdot \sigma}{1 - \sigma},$$

які лежать на прямій  $x + y + 1 = 0$  при  $\sigma \neq 0$ . Зі збільшенням швидкості  $\sigma$  потоку точка 2 (з індексом  $e$ ) вздовж прямої пересувається вгору. При  $\sigma = \sigma_{кр} = \frac{1}{k+1}$  особливі точки зливаються.

Для дослідження характеру особливих точок скористаємось добре відомою [9, 176] технікою дослідження, що включає такі кроки:

- а) знаходимо стаціонарні точки початкової системи рівнянь;
- б) в околі точок рівноваги відбувається лінеаризація нелінійних рівнянь;
- в) характеристичне рівняння лінійної системи рівнянь записуємо

$$\lambda^2 - SpM \cdot \lambda + \det M = 0,$$

де  $SpM$  — сума головних елементів матриці коефіцієнтів, а  $\det M$  — її визначник.

Кваліфікація особливої точки залежно від коефіцієнтів характеристичного рівняння зображено на рис. 2.7.

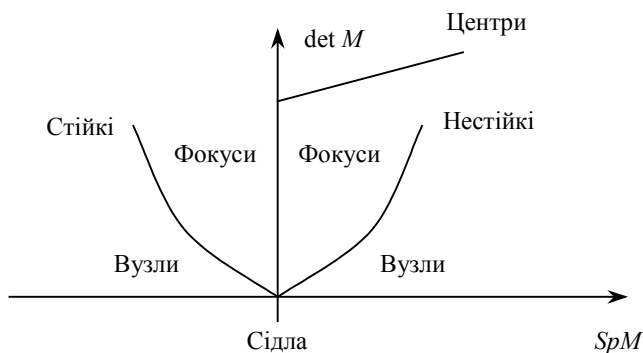


Рис. 2.7

Характер особливих точок лінеаризованої і початкової системи рівнянь збігаються, за винятком двох випадків:

а) якщо для лінеаризованої системи центр, то для початкової — або центр, або фокус;

б) за нульового значення одного з коренів характеристичного рівняння треба проводити додаткове дослідження.

У нашому випадку матриця лінійної системи матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{y}{k+y} - \sigma & \frac{k \cdot x}{(k+y)^2} \\ -\frac{y}{k+y} & -\frac{k \cdot x}{(k+y)^2} - \sigma \end{pmatrix}.$$

Для першої особливої точки матриця  $M$  запишемо

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} - \sigma & 0 \\ -\frac{1}{k+1} & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Корені характеристичної функції рівні  $\lambda_1 = -\sigma$ ;  $\lambda_2 = -\sigma + \frac{1}{k+1}$ .

Для  $\sigma < \sigma_{кр}$  вони різних знаків і особлива точка є сідло, через дію умови  $\sigma > \sigma_{кр}$  — стійкий вузол.

Для другої особливої точки корені характеристичного рівняння є  $\lambda_1 = -\sigma$ ;  $\lambda_2 = -\frac{1}{k} \cdot (1 - \sigma) \cdot [1 - \sigma \cdot (k+1)]$ , оскільки вона існує через дію умови  $\sigma < \sigma_{кр} = \frac{1}{k+1}$ , а параметри  $\sigma$  і  $k > 0$ , то корені  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  від'ємні й особлива точки — стійкий вузол.

Числове інтегрування системи диференціальних рівнянь (2.42) здійснювалось на різних початкових умовах і за різними числовими значеннями параметрів  $\sigma$  і  $k$ . Графічно результати як функції часу та фазові портрети зображено на рис. 2.8—2.13.

Числове інтегрування диференціальних рівнянь ММ (2.42) здійснювалось в системі Mathcad методом Рунге—Кутта 4-го

порядку з постійним кроком на інтервалі  $[0; 1]$ , тобто  $Z := \text{rkfixed}(X, 0, 1, 4000, N)$ ,

$$N(t, X) := \begin{bmatrix} \frac{X_1 \cdot X_2}{k + X_2} - \delta \cdot X_1 \\ \frac{-X_1 \cdot X_2}{k + X_2} + \delta \cdot (1 - X_2) \end{bmatrix},$$

де є права частина моделі (2.42),  $X$  — вектор змінних.

Для початкової умови  $X := \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$  за різних числових значень параметрів ММ (2.42), а саме:  $k = 1; 2; 4; 6$  та  $\delta = 0,05; 0,1; 0,12; 0,15; 0,18; 0,2; 0,3; 0,4$ ; також дробових  $k = \frac{1}{4}$  і  $\frac{1}{2}$  та  $\delta = 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,65; 0,75$  фазовий портрет на площині  $Z_{k,3} O Z_{k,2}$  і часові залежності  $Z_{k,2} = x(\underline{t})$ ,  $Z_{k,3} = x(\underline{t})$ , де час  $t = Z_{k,1}$  — топологічно еквівалентні, незначна відмінність спостерігається між числовим значенням (у межах сотих і не більше однієї десятої частини) залежних змінних. Як приклад графічні результати одного з числових експериментів ( $k = \frac{1}{2}$ ;  $\delta = 0,65$ ) наведено на рис. 2.8 і 2.9.

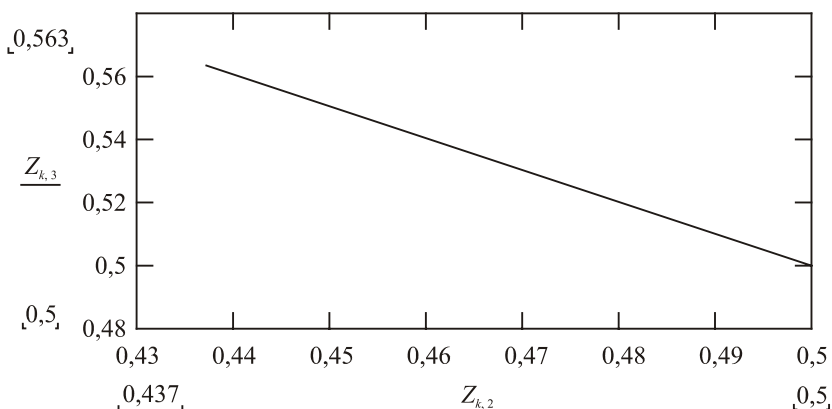


Рис. 2.8

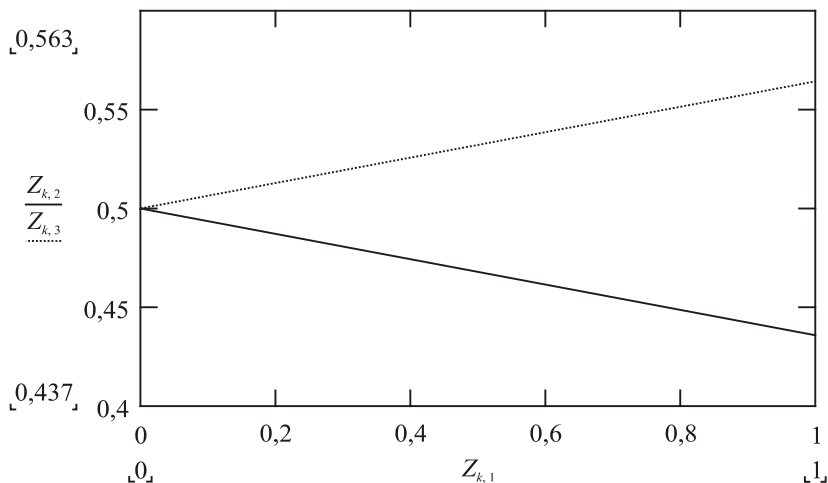


Рис. 2.9

У випадку початкової умови  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  і параметрів  $k=1$  і  $\delta=2;3;4$  також спостерігається топологічна еквівалентність (рис. 2.8 і 2.9 для  $k=1$ ,  $\delta=4$ ). Разом з тим фазові портрети на рис. 2.8 і 2.10 принципово різного характеру.

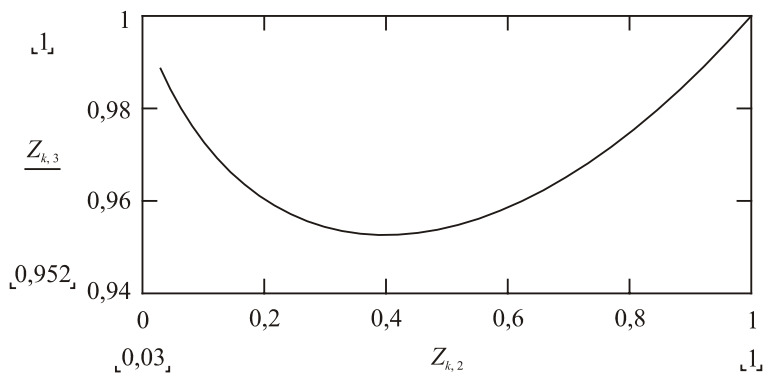


Рис. 2.10

Для початкової умови  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  та  $k = 1$  і  $\delta = 3$  геометрично результати розрахунків показано на рис. 2.12 і 2.13. Має місце дещо інший характер часових залежностей для змінних моделі (режим вимивання).

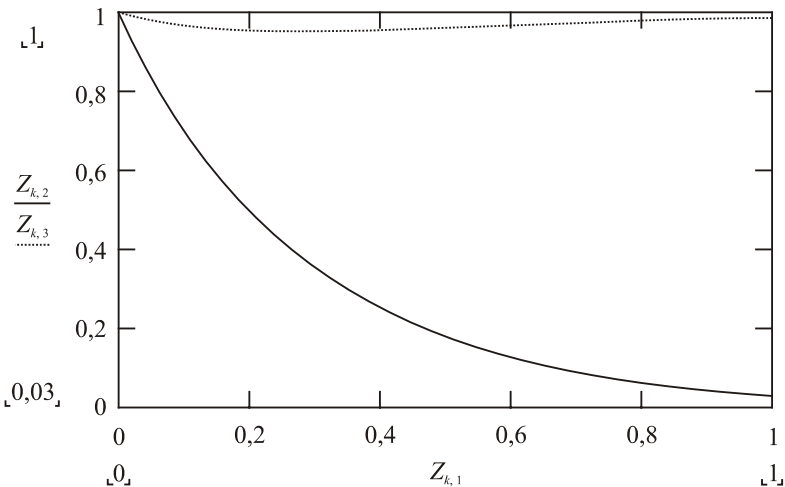


Рис. 2.11

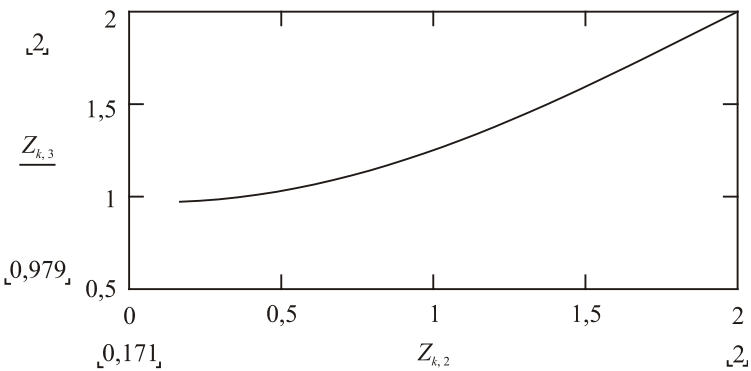


Рис. 2.12

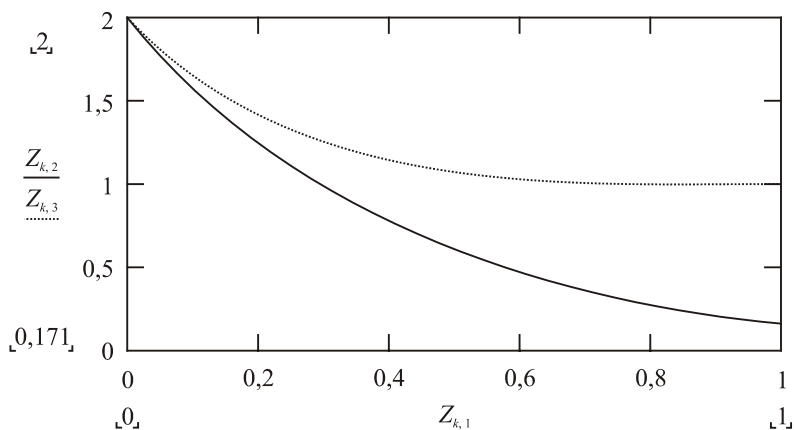


Рис. 2.13

**Економічна трактовка дії хемостата.** Якщо відмовитись від термінів хімічної технології і надати їм економічного тлумачення, то математична модель хемостата принципово описує економічні процеси і явища, які відбуваються під дією стимулюючої зовнішньої сили — джерело, а вихід хемостата відповідає стоку. Незважаючи на складний характер і багатofакторність економіки, обмежимося найменшим числом змінних, що будуть визначальними для економічного стану, а саме: змінна  $x(t)$  відображає вартість всього того (корисні копалини, грошові вкладення держави, інвестиції іншого роду), що бере участь у сфері виробництва, включаючи управління; змінна  $y(t)$  відповідає обсягу виробництва у вартісному вимірі (товари і послуги), включаючи інфраструктуру реалізації. Будь-які обмеження не передбачаються (всього в достатку і все доступне). Таким чином, на підґрунті ММ (2.42) змінні  $x$  і  $y$  відображають всезагальні форми здійснюваного в суспільстві процесу виробництва.

Як висновок, наглядно продемонстровано новий підхід до комп'ютерного дослідження макроекономічних процесів, який ґрунтується на використанні досягнень математичного моделювання систем іншої природи, але споріднених з економікою такими визначальними рисами, як нерівноважність, нелінійність, нестійкість і незворотність у процесі свого розвитку. Математична модель хемостата в найпростішому варіанті принципово здатна описувати різноманітні режими економічної дійсності. Залеж-



но від співвідношень між коефіцієнтами ММ спостерігається принципово різного характеру режими. Для умови  $D > D_{кр}$  досить швидко настає режим вимивання, про що застерігали аналітичні міркування, а тепер свідчать числові розрахунки.

Надалі належить ідентифікувати числові коефіцієнти ММ відповідно до змісту її змінних економічного стану держави чи іншого об'єкта моделювання і провести широкомасштабний обчислювальний експеримент. Моделюючи, варто пам'ятати про існування так званих *оцетних розв'язків* (атракторів розвитку), які задовольняють рівняння ММ, але не відповідають економічній дійсності.

---

## 2.5. Множина математичних моделей економічного стану

---

Низка принципово важливих для процесів обміну ефектів описується математично. Із застосуванням теорії якісного аналізу диференційних рівнянь вивчається поведінка отриманих нелінійних математичних моделей економічної динаміки. Згадуваним результатам якісного дослідження надано економічне тлумачення: записано верхню і нижню межу величини абсолютного дефіциту; узагальнено формулу рівноважної ціни; встановлено умови нестійкості.

---

### 2.5.1. Однопараметричні моделі

---

У монографії [107] подано елементи прикладного спрямування теорії обмінних процесів (обміну товарами, послугами, благами суспільства тощо). Ця теорія ґрунтується на застосуванні до моделювання системи двох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку (2.3) результатів якісного аналізу теорії ЗДР [9]. Наданням залежним змінним  $x(t)$  і  $y(t)$  відповідного тлумачення опишемо широке коло задач макроекономічної нелінійної динаміки, а саме: обмінні процеси — обмін споживчими товарами, їх вартостями і виникнення грошей; нерівноважна концепція ціни і ціноутворення. Також математичною моделлю (2.3) описується діяльність малих соціальних груп і лідерство в них.

Таким чином, має місце започаткована в [107] і далі просунута в монографії [108] синергетична теорія соціально-економічних процесів обмінного типу, елементи якої дають певні відповіді на запити нелінійної динаміки практичної економіки, а окремі результати котрої перекривають здобутки рівноважного економічного аналізу. За суттю, базовою моделлю згадуваної теорії виступає універсального характеру система диференціальних рівнянь Вольтерра—Лотки [у (2.3) треба покласти  $j_1 = j_4 = 0$ ], добре знана спочатку в математичній біології, екології, хімічній кінетиці, нелінійній біофізиці тощо, а потім в деяких інших сферах наукового пізнання. Стосовно класичної моделі Вольтерра—Лотки

$$\begin{cases} \dot{x} = -j_3x - j_2xy \\ \dot{y} = -j_6y - j_5xy \end{cases} \quad (2.3a)$$

зауважимо, що хоча в ній присутні 4 параметри  $j_2$ ,  $j_3$ ,  $j_4$  і  $j_5$ , але через заміну змінних ( $x = \frac{j_3}{j_5}u$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2}v$ ;  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ) одержимо систему рівнянь у безрозмірному вигляді

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - uv \\ \dot{v} = -\gamma v - uv \end{cases} \quad (2.3б)$$

з одним параметром  $\gamma = \frac{j_6}{j_3}$ .

У моделі (2.3) поза увагою лишилась низка принципово важливих з економічної точки зору моментів, а саме:

а) нелінійна залежність швидкості збільшення обсягу товару  $x$  за умов малих щільностей, що властиво початковій фазі виробництва;

б) насиченість обмінного процесу товаром  $y$ ;

в) нелінійний характер залежності швидкості обміну товару  $y$  на  $x$  від щільності величини  $x$  за малих її значень  $x$ ;

г) нелінійна залежність швидкості створення товару  $y$  від щільності за малих його обсягів.

Отже, результати опису динаміки обмінного процесу, що спирається на використання моделі (2.3), мають сприйматись як нульове наближення до відображення економічної дійсності.

## Постановка проблеми і підходи до її розв'язання

Зазначені вище вагомі фактори і закономірності перебігу обмінних процесів економіки, що не враховується ММ (2.3), опишемо математично, скориставшись в основному паралелями й аналогіями та економічними інтерпретаціями динаміки взаємодіючих біологічних популяцій [7, 8, 140]. За суттю, такий підхід органічно продовжує ту лінію історичного процесу, що зародилась в глибинах часу. Досить пригадати появу рівняння Мальтуса  $\dot{x} = \mu_3 x$  і його подальше, по-перше, застосування в економіці як лінійної моделі Харрода—Домара або його, по-друге, узагальнення  $\dot{x} = \mu_3 x(1 - x)$  — логістичне рівняння, що також є невід'ємною складовою економічної освіти і практики.

Застосовуючи якісну теорію звичайних диференціальних рівнянь до отриманих вказаним вище способом ММ, вивчається характер і якісна поведінка обмінних процесів.

З огляду на безрозмірну ММ (2.3б), повторимо результат [107], оскільки в такому разі все виглядає простіше і стає доступнішим, утворюючи певну методику якісного вивчення проблеми.

Дійсно, скориставшись заміною змінних:  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = \frac{j_3}{j_5} u$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2} v$

і поклавши  $\tilde{j}_1 = \frac{j_5}{j_3^2} j_1$  і  $\tilde{j}_4 = \frac{j_2 j_4}{j_3^2}$ , ММ (2.3) перепишемо у такий спосіб:

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{j}_1 - uv - u \\ \dot{v} = \tilde{j}_4 - uv - \gamma \cdot v, \end{cases} \quad (2.3в)$$

де коефіцієнт  $\gamma = \frac{j_6}{j_3}$ ;  $j_1 = \frac{j_3^2 \tilde{j}_1}{j_5}$ ;  $j_4 = \frac{j_3^2 \tilde{j}_4}{j_2}$ .

Для матриці Якобі моделі (2.3в) її слід — сума елементів головної діагоналі задається виразом  $SpJ = -1 - u - \gamma - v$ ; визначник  $\det J = u + \gamma(1 + v)$ . Ці величини обчислюються в особливих

точках ( $\dot{u} = 0$ ;  $\dot{v} = 0$ ), які мають координати  $\bar{u} = \frac{\tilde{j}_1}{1 + \bar{v}}$ ;  $\bar{v} = \frac{\tilde{j}_4}{(\bar{u} + \gamma)}$ .

Фазовий портрет або характер поведінки розв'язків ММ в околі рівноважної точки  $(\bar{u}; \bar{v})$  визначається знаками власних чисел

матриці Якобі, які є коренями квадратного рівняння  $\lambda^2 - (SpJ) \cdot \lambda + \det J = 0$ .

Щоб уникнути прямого обчислення власних чисел, варто скористатись діаграмою залежності фазових портретів від сліду  $SpJ$  і визначника  $\det J$  матриці Якобі (див. рис 2.7).

Оскільки слід матриці завжди від'ємний, а  $\det J > 0$ , то матиме місце стійка точка (вузол, або фокус).

На завершення наведемо формули рівноважної ціни

$$C = \frac{\tilde{j}_1}{j_4} \leftrightarrow C = \frac{j_5 j_1}{j_2 j_4}, \text{ яка дещо відрізняється від оголошеної [107],}$$

будучи більш правдоподібною (співмножники  $\frac{j_5}{j_2}$  ураховують

паритет обміну); обмінної вартості  $C_0 = \frac{\tilde{j}_1 - \bar{u}}{\tilde{j}_4 - \gamma \cdot \bar{v}}$  через запаси товару обміну, звідки вираз нерівноважної ціни

$$C_0 = \frac{\tilde{j}_1}{\tilde{j}_4 - \gamma \cdot \bar{v}} \Leftrightarrow C_0 = \frac{j_5}{j_2} \cdot \frac{j_1}{(j_4 - \frac{y}{\tau_y})}, \text{ а з нього витікає формула абсо-}$$

лютного дефіциту  $|\bar{v}| = \frac{1}{\gamma} (\frac{\tilde{j}_1}{C_0} - \tilde{j}_4)$ . Через відмову від безрозмірних змінних одержимо нову формулу абсолютного дефіциту

$$|\bar{v}| = \tau_y (\frac{j_5}{j_2} \cdot \frac{j_1}{C_0} - j_4).$$

Привертає увагу той факт, що структура формул зберігається, але в них додатково стосовно [107] з'являється множник  $\frac{j_5}{j_2}$ , тобто ураховується міра обміну.

#### Виклад основних результатів

Будемо послідовно ускладнювати базисну ММ (2.3), доповнюючи її щоразу одним окремо взятим чинником з числа тих, що є впливовими для економічного стану, але не знайшли відтворення у моделі. Вказаний підхід до модифікації ММ (2.3) може розцінюватись як збурення базової моделі й означатиме встановлення ролі динамічних ефектів, викликаних саме збуренням. Од-

разу зазначимо: по-перше, хоча економіці притаманні не поодинокі, ізольовані причини її розвитку, а їх калейдоскопічне хитросплетіння. Однак запропонований підхід сприяє розробці певній класифікації і визначенню ролі того чи іншого фактора впливу на еволюцію макроекономічного процесу. По-друге, оскільки вихідна ММ (2.3) вже має параметр  $\gamma$ , то всі інші однофакторні її модифікації володіють двома параметрами. Для кожної з модифікацій нижче наведено відповідні системи ЗДР у початкових змінних і безрозмірному вигляді, а потім розглядаються їхні фазові портрети. У такий спосіб відбувається вивчення внутрішніх механізмів економіки, котрим надана їх якісна інтерпретація та встановлений рівень важливості.

Урахування нелінійного характеру виробництва товару  $x$  здійснюється в ММ:

$$\dot{x} = j_1 - \frac{j_3 x^2}{N + x} - j_2 xy; \quad \dot{y} = j_4 - j_6 y - j_5 xy, \quad (2.43)$$

завдяки якій заміною змінних  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = Nu$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2} v$  матимемо систему рівнянь у безрозмірному вигляді:

$$\dot{u} = \tilde{j}_1 - \frac{u^2}{1+u} - uv; \quad \dot{v} = \tilde{j}_4 - \gamma v - k \cdot uv, \quad (2.43a)$$

де  $\gamma = \frac{j_6}{j_3}$ ;  $k = \frac{j_5 N}{j_3}$ ,  $N$  — деяка константа;  $j_1 = \frac{1}{N \cdot j_3} \cdot \tilde{j}_1$ ;  
 $j_4 = \frac{j_3}{j_2} \tilde{j}_4$ .

Конкуренція товару  $y$  за товар  $x$  опишемо системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = j_1 - j_3 x - \frac{j_2 xy}{1 + By}; \quad \dot{y} = j_4 - \frac{j_5 xy}{1 + By} - j_6 y, \quad (2.44)$$

з якої заміною змінних  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = \frac{j_3}{j_5} u$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2} v$  одержимо ММ у безрозмірному вигляді

$$\dot{u} = \tilde{j}_1 - u - \frac{uv}{1 + \beta \cdot v}; \quad \dot{v} = \tilde{j}_4 - \gamma \cdot v - \frac{u \cdot v}{1 + \beta \cdot v}, \quad (2.44a)$$

$$\text{де } \beta = \frac{j_3 \cdot B}{j_2}; \quad j_1 = \frac{j_3^2}{j_5} \cdot \tilde{j}_1; \quad j_4 = \frac{j_3^2}{j_2} \cdot \tilde{j}_4; \quad \gamma = \frac{j_6}{j_3}.$$

Нелінійне створення товару через дію умови незначної щільності або через нелінійний обмін з боку товару  $y$  на початковому етапі процесу показано системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = j_1 - j_3 x - j_2 xy; \quad \dot{y} = j_4 - j_6 y - \frac{y}{N + y} \cdot j_5 xy, \quad (2.45)$$

від якої заміною змінних  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = \frac{j_3 \cdot N}{j_5} \cdot u$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2} \cdot v$  одержимо ММ у безрозмірному вигляді

$$\dot{u} = \tilde{j}_1 - u - uv; \quad \dot{v} = \tilde{j}_4 - \gamma \cdot v + \frac{u \cdot v^2}{1 + v \cdot v}, \quad (2.45a)$$

$$\text{де } \gamma = \frac{j_6}{j_3}; \quad v = \frac{j_3}{j_2 \cdot N}; \quad j_1 = \frac{j_3^2}{j_5} \cdot \tilde{j}_1; \quad j_4 = \frac{j_3^2}{j_1} \cdot \tilde{j}_4.$$

Насичення обміну з боку  $y$  описано системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = j_1 - j_3 \cdot x - \frac{j_2 xy}{1 + Ax}; \quad \dot{y} = j_4 - j_6 y - \frac{j_5 xy}{1 + Ax} \quad (2.46)$$

і безрозмірного вигляду

$$\dot{u} = \tilde{j}_1 - j_3 u - \frac{uv}{1 + \alpha u}; \quad \dot{v} = \tilde{j}_4 - \gamma \cdot v - \frac{uv}{1 + \alpha \cdot u}, \quad (2.46a)$$

якщо скористатись заміною  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = \frac{j_3}{j_5} \cdot u$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2} \cdot v$ . При цьому

$$\text{матиме місце } j_1 = \frac{j_3^2}{j_5} \cdot \tilde{j}_1; \quad j_4 = \frac{j_3^2}{j_2} \cdot \tilde{j}_4; \quad \alpha = A \cdot \frac{j_3}{j_6}; \quad \gamma = \frac{j_6}{j_3}.$$

Урахування конкуренції з боку товару  $x$  описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = j_1 - j_3x - j_2xy - \frac{a}{K}x^2; \quad \dot{y} = j_4 - j_6y - j_5xy. \quad (2.47)$$

Використовуючи заміну  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = Ku$ ;  $y = \frac{j_3}{j_2} \cdot v$ , матимемо ММ у безрозмірному вигляді

$$\dot{u} = \tilde{j}_1 - u(1-u) - uv; \quad \dot{v} = \tilde{j}_4 - \gamma \cdot v + k \cdot uv, \quad (2.47a)$$

$$\text{де } j_1 = j_3 K \tilde{j}_1; \quad j_4 = \frac{j_3^2}{j_2} \tilde{j}_4; \quad \gamma = \frac{j_6}{j_3}; \quad k = \frac{j_5 K}{j_3}.$$

Нелінійний характер обміну товару  $y$  на товар  $x$  за малої щільності його описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = j_1 - j_3 \cdot x - \frac{j_2 x^2 y}{1 + Px}; \quad \dot{y} = j_4 - j_6 y - \frac{j_5 x^2 y}{1 + Px} \quad (2.48)$$

Через заміну змінних  $t = \frac{\tau}{j_3}$ ;  $x = \sqrt{\frac{j_3 P}{j_5}} \cdot u$ ;  $y = \frac{\sqrt{j_3 j_5 P}}{j_2} \cdot v$  отримуємо ММ у безрозмірному вигляді

$$\dot{u} = \tilde{j}_1 - u - \frac{u^2 v}{1 + \alpha u}; \quad \dot{v} = \tilde{j}_4 - \gamma \cdot v - \frac{u^2 v}{1 + \alpha u}, \quad (2.48a)$$

$$\text{де } j_1 = j_3 \sqrt{\frac{j_3 P}{j_5}} \cdot \tilde{j}_1; \quad \alpha = \sqrt{\frac{j_3}{j_5}} P^{-1}; \quad j_4 = \frac{j_3}{j_2} \sqrt{j_3 j_5 P} \cdot \tilde{j}_4.$$

До кожної з ММ (2.43)—(2.48) застосована техніка якісного аналізу ЗДР. У кожному з шести варіантів дослідження здобули структурно аналогічні [107] результати, відмінність яких між собою виявляється через використання різних числових значень координат особливих точок  $((\bar{x}, \bar{y})$  або  $(\bar{u}, \bar{v}))$ .

#### Економічна інтерпретація результатів

Окремо зупинимось на ММ (2.45), котрою описуються нелінійні процеси виробництва від початку діяльності. Ця модель цікава у зв'язку з явними оцінками й ясним тлумаченням результатів моделювання з економічної точки зору.

Обмінна вартість через координати  $(\bar{x}, \bar{y})$  стаціонарних точок

$$(\dot{x} = 0, \dot{y} = 0) \text{ набуває вигляду } C = \frac{\bar{y}(\bar{j}_1 - j_3 \bar{x})}{(N + \bar{y})(j_4 - j_6 \bar{y})}.$$

За умови довговічності товару  $x$  ( $j_3 \rightarrow 0$  або  $\tau_x \rightarrow \infty$ ) матиме місце вираз

$$C_0 = \frac{j_1}{\left(j_4 - \frac{\bar{y}}{\tau_y}\right)} \cdot \frac{\bar{y}}{N + \bar{y}} \quad (2.49)$$

— добуток, перший зі співмножників якого є відомою формулою нелінійної концепції ціни у випадку ММ (2.3), а інший співмножник відображає вплив нелінійності процесу створення товару  $y$  на початковому етапі.

Після очевидних алгебраїчних перетворень матимемо рівність

$$C_0 = \frac{j_1}{\left(j_4 - \frac{\bar{y}}{\tau_y}\right)} \cdot \left[1 - \frac{N}{N + \bar{y}}\right].$$

Нехтуючи від'ємним доданком у квадратних дужках, перехо-

димо до нерівності  $C_0 \leq \left(\frac{j_1}{j_4 - \frac{\bar{y}}{\tau_y}}\right)$  або оцінки зверху для величи-

ни  $C_0$ . Зауважимо, що результат [107] дає рівність.

Для оцінювання обсягу абсолютного дефіциту після перетворень також дістанемо нерівність

$$|\bar{y}| \leq \left[\frac{j_1}{C_0} - j_4\right] \cdot \tau_y$$

на відміну від результату [107], який, будучи рівністю, дає завищену оцінку (обсяг  $|\bar{y}|$ ).



При розрахунку абсолютного дефіциту  $|\bar{y}|$ , зважаючи на його визначення [107], у круглих дужках формули (2.49) фігурує знак плюс.

Якщо у формулі (2.49) знехтувати доданком  $\left(\frac{|\bar{y}|}{\tau_y}\right)$ , то після перетворень одержуємо таку нерівність для абсолютного дефіциту

$$|\bar{y}| \geq \frac{C_0 j_4 N}{j_1 - C_0 j_4}.$$

Таким чином, має місце двостороння нерівність

$$\frac{C_0 j_4 N}{j_1 - C_0 j_4} \leq |\bar{y}| \leq \left[ \frac{j_1}{C_0} - j_4 \right] \cdot \tau_y \quad (2.50)$$

— оцінка абсолютного дефіциту, тобто вказано межі його існування. Після очевидних перетворень знаходимо вельми привабливу наближену оцінку абсолютного дефіциту

$$N \leq |\bar{y}| \leq \tau_y \frac{(j_1 - C_0 j_4)^2}{C_0^2 j_4}. \quad (2.50a)$$

Фактор абсолютного дефіциту регулюється коефіцієнтами ММ (2.45), а його обсяг є мультиплікатор довговічності  $\tau_y$  това-

ру, рівноважної ціни  $\left(\frac{j_1}{j_4}\right)$  і відношення  $\left(\frac{j_1 - C_0 j_4}{C_0 \sqrt{j_1}}\right)^2$  для верхньої оцінки, а знизу величина  $|\bar{y}|$  обмежується сталою  $N$ , вибір якої лишається за суб'єктом господарювання. Між іншим, формулу (2.50a) можна переписати у такому вигляді

$$N \leq |\bar{y}| \leq \tau_y \cdot \frac{j_1}{j_4} \cdot \frac{j_1}{C_0^2}, \quad (2.50б)$$

роблячи її ще більш грубою оцінкою зверху.

Економічне тлумачення [107] рівності для оцінки величини  $|\bar{y}|$  залишається в силі для розглянутого нами випадку. Зазначимо тільки, що безкоштовний розподіл товару або благ, що еквівален-

тний вимозі  $C_0 \rightarrow 0$ , яка означатиме за одержаною оцінкою (2.50a) досить великий або нескінченний обсяг дефіциту. Іншими словами, модельована система господарювання стає нестійкою, а фінансовий обіг коштів в ній практично руйнується. Такий стан матиме катастрофічні наслідки, оскільки величина  $C_0^2$  стоїть у знаменнику.

Отже, абсолютний дефіцит спричиняється не тільки нестачею товару лінійним чином, як традиційно вважалося, але й відносно низькою ціною та відносно високою платоспроможністю  $j_1$  попиту (на руках у населення — значна грошова маса), причому характер такої залежності нелінійний.

Таким чином, дослідження ММ (2.43)—(2.48) показало, що за впливом на результати моделювання окремо взяті фактори розбиваються на дві множини — стабілізуючого і дестабілізуючого характеру. Наприклад, нелінійний процес створення товарів  $x$  чи  $y$  за малих обсягів виробництва, насичення товаром  $y$  належить до множини факторів дестабілізуючого впливу.

Одночасне урахування кількох факторів однієї множини не сприяє появі чогось нового: сумісна дія кількох стабілізуючих факторів завжди спричиняє тільки стійкість рівноважної точки і діє навпаки у разі дестабілізуючих факторів. У безрозмірних ММ (2.43a)—(2.48a) наявні два параметри — крім коефіцієнта  $\gamma$  існує ще один, зумовлений належністю до однієї з множин факторів, але саме він і буде принципово важливим, таким, що визначає поведінку фазового портрету. (Між іншим, цим пояснюється і назва параграфу.)

Також встановлено двосторонню оцінку (2.50a) обсягу абсолютного дефіциту, верхня межа якого нелінійно залежить від платоспроможного попиту і діючих у суспільстві низьких цін, а нижня межа визначається деякою константою — рівнем свободи для способу господарювання.

### **2.5.2. Двопараметричні моделі**

---

У даному параграфі продовжується дослідження нелінійної економічної динаміки. Логіка наукового розгляду викликана тим, що обмінні процеси економіки супроводжуються низькою явищ, кожне з яких взяте окремо, принципово впливає на еволюцію економіки, а тим більше внаслідок їх спільної дії.

Праці [1, 40, 50] останнього часу свідчать про досить широке використання в економіко-математичному моделюванні добре знаної в математичній біології, біофізиці та екології класичної системи рівнянь Вольтерра—Лотки, незважаючи на її недоліки (в ній не ураховується ряд важливих аспектів економічної діяльності). Зокрема, виписана в монографіях [107, 108] множина математичних моделей являє собою розвинення базисної, тобто Вольтерра—Лотки, системи рівнянь. Згадуваною множиною моделей охоплюється широке коло проблем (задач, явищ і процесів) економічної практики. Щодо кожної ММ в [107] проголошено результати її вивчення з використанням теорії якісного аналізу звичайних диференціальних рівнянь.

У статті [50], навпаки, наводяться результати числового моделювання над системою рівнянь Вольтерра—Лотки, яка інтерпретується як дуопольно-дуопсонієва конкуренція. В згадуваних працях не розглядається такі важливі аспекти економічних обмінних процесів, як досягнення насиченого стану, урахування ступеня взаємодії і взаємовпливу конкурентів в нелінійних умовах виробництва товару та у випадку малої його кількості тощо.

*Мета параграфу* полягає у тому, щоб отримати рівняння ММ економічного стану для всіх практично важливих моментів економічної діяльності. На прикладі одного з важливих аспектів провести повноцінне і цілком доступне економісту якісне дослідження, а його результати тлумачити в контексті появи грошей у суспільстві, їх впливу на різні сторони економічного життя.

#### Основні результати вивчення

Спираючись на економічне тлумачення моделі Вольтерра—Лотки як базової та ґрунтуючись на відомих в математичній біології підходах [8] до узагальнення системи рівнянь, нижче подається низка математичних моделей, в кожній з яких ураховується той чи інший аспект перебігу процесу обміну в економіці.

Конкуренція товару  $x$  і насичення товаром  $y$  описана системою рівнянь:  $\dot{x} = ax \cdot \frac{K-x}{K} - \frac{bxy}{1+Ax}$  і  $\dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+Ax}$ , де  $a, b, c, d, K$  і  $A$  — деякі сталі величини. Заміною змінних  $t = \tau/a$ ;  $x = \frac{c}{d}u$ ;

$y = \frac{a}{b}v$  здійснюється перехід до безрозмірної моделі:

$\dot{u} = u - \frac{uv}{1 + \alpha u} - \varepsilon u^2$ ;  $\dot{v} = -\gamma v \left(1 - \frac{u}{1 + \alpha u}\right)$ , в якій присутні лише два параметри:  $\alpha = Ac/d$ ;  $\varepsilon = c/Kd$ ; коефіцієнт  $\gamma = c/a$  органічно притаманний моделі. Привертає увагу те, що замість початкових п'яти параметрів у безрозмірній моделі фігурують лише два.

Одночасне урахування дії факторів конкуренції серед товару  $x$  і нелінійним зростанням його обсягу для малих кількостей модель записується

$\dot{x} = \frac{ax^2}{N+x} \cdot \frac{K-x}{K} - bxy$ ;  $\dot{y} = -cy + dxy$ , котра замі-

ною  $t = \tau/a$ ;  $x = Ku$ ;  $y = \frac{a}{b}v$  набуває безрозмірного вигляду

$\dot{u} = \frac{u^2(1-u)}{n+u} - uv$ ;  $\dot{v} = -\gamma v(m-u)$ , де  $n = N/Ka$ ;  $m = c/dK$ ;  $\gamma = dK/a$ .

**Зауваження!** Системи рівнянь, що залежать від кількох параметрів, привести до безрозмірного вигляду можна різними способами. Формально всі вони рівноправні, але з позицій простоти дослідження і тлумачення результатів деякі способи більш придатні. Рекомендацій віддати перевагу якомусь з них немає, значну роль відіграє інтуїція і досвід дослідника.

Нелінійний обмін між товарами  $y$  і  $x$  за малої кількості останнього з урахуванням насиченості описується рівняннями

$\dot{x} = ax - \frac{bx^2y}{1 + Ax^2}$ ;  $\dot{y} = -cy + \frac{dx^2y}{1 + Ax^2}$ .

Конкуренція другого товару  $y$  і стан його насичення ураховуються у моделі  $\dot{x} = ax - \frac{bxy}{1 + Ax}$ ;  $\dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax} - \varepsilon y^2$ .

Динаміка конкуренції товару  $y$  в обміні з товаром  $x$  і стан його насичення відобразимо системою рівнянь  $\dot{x} = ax - \frac{bxy}{(1 + Ax)(1 + By)}$ ;

$\dot{y} = -cy + \frac{dxy}{(1 + Ax)(1 + By)}$ .

Нелінійна закономірність створення товару  $y$  і внутрішня конкуренція для першого товару  $x$  відтворюються рівняннями

$$\dot{x} = ax \frac{K-x}{K} - bxy; \quad \dot{y} = -cy + \frac{dxy^2}{N+y}.$$

Таким чином, розглянуто повний набір двофакторних розвинень класичної моделі Вольтерра—Лотки, який утворюється з урахуванням одного стабілізуючого фактора та іншого — дестабілізуючого.

Узагальнення (2.3) являють собою таку двопараметричну модель обмінного типу:

$$\begin{cases} \dot{x} = j_1 - j_2 \frac{xy}{1+D_1y} - j_3x \\ \dot{y} = j_4 - j_5 \frac{xy}{1+D_2x} - j_6y \end{cases}, \quad (2.51)$$

де присутність співмножника  $\frac{1}{1+D_1y}$  біля доданку  $j_2xy$  і  $\frac{1}{1+D_2x}$  для  $j_5xy$  забезпечує нелінійну динаміку мутуалістично [9, 140] пов'язаних товарів обмінного процесу з урахуванням стану насиченості. Мутуалізм складових обміну вбачає обов'язкову взаємодію між ними — має місце обмінний процес! Цей термін фігурує у нелінійній біофізиці і математичній біології, у яких з економікою є багато спільного, оскільки предмет уваги згадуваних дисциплін належить до класу відкритих, нестационарних, нелінійних, нерівноважних систем незворотної дії. Зрозуміло, що (2.51) узагальнює ММ (2.3), яку матимемо при  $D_1 = D_2 = 0$ .

Стосовно ММ (2.51) в окремому випадку  $j_1 = j_4 = 0$  фазове описання відоме [8] — сепаратриса сідла ділить фазовий простір на дві площини: в тій, що лежить близько до координатних вісей, обмін товарами згасає, а в інших — далекій від першої площини, відбуваються обмінні процеси. Дослідимо вплив коефіцієнтів  $j_1, j_4$  на перебіг подій у фазовому просторі.

Згідно з технікою якісного аналізу звичайних диференціальних рівнянь [176] послідовно виконуються такі кроки. Спочатку шукаємо особливі (стаціонарні або рівноважні) точки, покладаючи  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ . Для ММ (2.51) координати таких точок записується:

$$\bar{x} = \frac{j_1(1+D_1\bar{y})}{j_2\bar{y} + j_3(1+D_1\bar{y})}; \quad \bar{y} = \frac{j_4(1+D_2\bar{x})}{j_5\bar{x} + j_6(1+D_2\bar{x})}.$$

Підстановкою абсциси  $\bar{x}$  в формулу для ординати дістанемо квадратне рівняння  $a\bar{y}^2 + b\bar{y} + c = 0$ , де  $a = [j_1 D_1 (j_5 + j_6 D_2) + j_6 j_2 + j_3 j_6 D_1]$ ;  $b = [j_1 (j_5 + j_6 D_2) + j_6 j_3 - j_4 j_2 - j_4 j_3 D_1 - j_4 j_1 D_1 D_2]$ ;  $c = -j_4 j_3 - j_4 j_1 D_2$ .

Отже, для ММ (2.51) існують два стани рівноваги  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$   $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ .

Далі запишемо функціональну матрицю Якобі ММ (2.51), що являє собою матрицю 2-го порядку для частинних похідних. У розгляданому разі вона матиме вигляд

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} -j_2 \frac{\bar{y}}{1 + D_1 \bar{y}} - j_3; & -j_2 \bar{x} \frac{1}{(1 + D_1 \bar{y})^2} \\ -j_5 \bar{y} \frac{1}{(1 + D_2 \bar{x})^2}; & -j_5 \frac{\bar{x}}{1 + D_2 \bar{x}} - j_6 \end{pmatrix},$$

оскільки обчислюється в точках рівноваги.

Слід матриці  $SpJ$  — сума елементів головної діагоналі запишемо

$$SpJ = \left( -\frac{j_2 \bar{y}}{1 + D_1 \bar{y}} - j_3 - \frac{j_5 \bar{x}}{1 + D_2 \bar{x}} - j_6 \right) < 0.$$

Визначник матриці набуває вигляду

$$\det J = \left( \frac{j_2 \bar{y}}{1 + D_1 \bar{y}} + j_3 \right) \left( \frac{j_5 \bar{x}}{1 + D_2 \bar{x}} + j_6 \right) - \frac{j_2 j_5 \bar{x} \bar{y}}{(1 + D_1 \bar{y})^2 (1 + D_2 \bar{x})^2}.$$

Слід і детермінант матриці лінеаризації ММ (4.51) потрібні, щоб скористатися діаграмою (рис. 2.7) розташування фазових описань, уникаючи безпосереднього обчислення власних чисел (коренів квадратного рівняння).

Для спрощення виразу детермінанта матриці Якобі скористаємось майже очевидною рівністю

$$\frac{j_3 j_4}{\bar{y}} = j_3 j_5 \frac{\bar{x}}{1 + D_2 \bar{x}} + j_3 j_6,$$

яку дістанемо з другого рівняння ММ (2.51) за умови  $\dot{y} = 0$ , попередньо домноживши на  $j_3$ . Після очевидних, але громіздких перетворень остаточно матимемо вираз

$$\det J = \frac{j_3 j_4}{\bar{y}} + \frac{j_2 j_4}{1 + D_1 \bar{y}} - j_2 j_4 + \frac{j_2 j_6 \bar{y}}{(1 + D_1 \bar{y})^2}.$$

Знак визначника встановлюється за координатою  $\bar{y}$ . Отже, одна з особливих точок може бути стійким фокусом (вузлом) для  $\bar{y} > 0$ , а інша — сідлом ( $\det J < 0$ ) — нестійкою точкою.

Зауважимо, що для  $D_1 = D_2 = 0$  повторюється відомий результат [107].

Згідно з означенням [107] обмінна вартість  $C_0 = j_2 / j_5$  є відношення білінійних доданків ММ, котрими описуємо зустріч двох товарів. У нашому випадку це матиме вигляд

$$C_0 = \frac{j_2(1 + D_2 x)}{j_5(1 + D_1 y)}.$$

Вираз обмінної вартості через координати  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$  особливих (рівноважних, або стаціонарних) точок запишемо

$$C_0 = \frac{(j_1 - j_3 \bar{x})(1 + D_1 \bar{y})}{(j_4 - j_6 \bar{y})(1 + D_2 \bar{x})}. \quad (2.52)$$

Для граничного переходу  $j_3 \rightarrow 0$  ( $\tau_x \rightarrow \infty$ ), що еквівалентно існуванню довговічного товару  $x$ , тобто з'являються гроші, останній вираз спрощують

$$C_0 = \frac{j_1(1 + D_1 \bar{y})}{\left(j_4 - \frac{\bar{y}}{\tau_y}\right)(1 + D_2 \bar{x})}. \quad (2.52a)$$

У формулі нерівноважної ціни (2.52a) коефіцієнт  $j_1$  є платоспроможний попит за одиницю часу,  $j_4$  — виробництво або пропозиція товару  $y$  за одиницю часу;  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$  — запаси товарів;  $\tau_y$  — довговічність товару виду  $y$ , пов'язана з фізичним зносом і мораль-

ним старінням; коефіцієнти  $D_1$  і  $D_2$  стосуються рівня насиченості економічного стану.

За умов дефіциту обмінна вартість матиме вигляд

$$C_0 = \frac{j_1(1 + D_1|\bar{y}|)}{\left(j_4 + \frac{|\bar{y}|}{\tau_y}\right)(1 + D_2\bar{x})}, \quad (2.53)$$

де  $|\bar{y}|$  — абсолютний дефіцит товару  $y$ . Після очевидних алгебраїчних перетворень з (2.53) формула абсолютного дефіциту набуде такого вигляду:

$$|\bar{y}| = \frac{\tau_y [C_0 j_4 (1 + D_2\bar{x}) - j_1]}{[\tau_y D_1 j_1 - C_0 (1 + D_2\bar{x})]}. \quad (2.54)$$

Зауважимо, що для  $D_1 = D_2 = 0$  отримуємо раніше відомий [107] результат.

Отже, в оцінюванні обсягу абсолютного дефіциту беруть участь усі наявні фактори, що цілком логічно. З метою з'ясування ролі деяких факторів шляхом перетворень виразу (2.54) маємо нерівність

$$|\bar{y}| \geq \frac{\tau_y j_4}{D_1} \cdot \frac{C_0 (1 + D_2\bar{x})}{\tau_y j_1} + \frac{\tau_y j_1}{C_0 (1 + D_2\bar{x})}. \quad (2.54a)$$

У формуванні обсягу абсолютного дефіциту провідна роль належить грошовій масі  $\bar{x}$  суспільства. Таким чином, величина абсолютного дефіциту прямопропорційно залежить від відношення коефіцієнтів  $\left(\frac{j_4}{j_1}\right)$ , обмінної вартості  $C_0$  та кількості грошей.

Вплив коефіцієнта  $D_1$  на  $|\bar{y}|$  обернено пропорційний.

**Зауваження!** Нерівність (2.54a) формально можна переписати у вигляді функції  $y \geq k \cdot z + \frac{1}{z}$ , де  $k = \tau_y j_4 / D_1$  є стала величина. Графік цієї функції являє собою суму прямої  $y_1 = k \cdot z$  і рівносторонньої гіперболи  $y_2 = 1/z$  зображено на рис. 2.14 для  $k = 1$ .



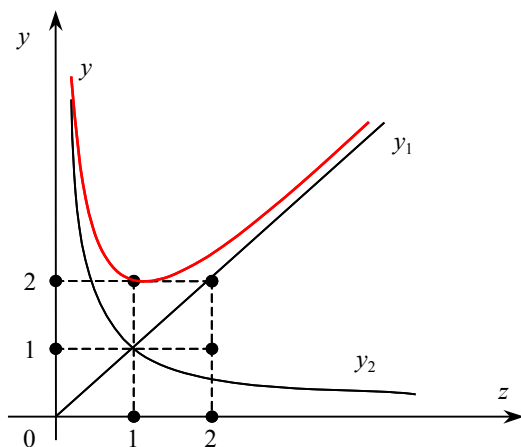


Рис. 2.14. Графік функції  $y = z + \frac{1}{z}$

Точку мінімуму функції  $y = k \cdot z + \frac{1}{z}$  обчислюємо через  $z_{\min} = \sqrt{1/k}$ . Зліва від точки екстремуму обсяг дефіциту зростає катастрофічно і не так швидко справа від  $z_{\min}$  для  $k > 1$ . Значно менше зростання дефіциту матиме місце праворуч від точки мінімуму у випадку  $k < 1$ . У такий спосіб з'ясуємо роль коефіцієнтів  $\tau_y$ ,  $j_4$  і  $D_1$ .

Із (2.54), нехтуючи величиною  $j_1$  у чисельнику, легко записати нерівність мажорантного типу

$$|\bar{y}| \leq \frac{\tau_y j_4}{\frac{\tau_y D_1 j_1}{C_0 (1 + D_2 \bar{x})} - 1}$$

для обсягу абсолютного дефіциту, яку можна подати так:

$$|\bar{y}| \leq \frac{k}{\frac{\tau_y j_1}{C_0 [1 + D_2 \bar{x}]} - \frac{1}{D_1}}.$$

Отже, у даному параграфі висвітлено способи побудови дво-параметричних математичних моделей процесу обміну двома товарами. З використанням однієї з них аналітично досліджено обсяг абсолютного дефіциту, який детермінується головно наявною грошовою масою у суспільстві та обмінною вартістю  $C_0$ , також залежить від стартових умов початку обміну та коефіцієнтів рівня насиченості економічного стану. Будь-які спроби безоплатного розподілу послуг у суспільстві, що відображено умовою  $C_0 \rightarrow 0$ , приречені на крах, штовхають державу до катастрофи.

---

## 2.6. Універсальна адаптивна математична модель економічного стану

---

Адаптація іманентно притаманна економіці. Чи не єдиний інструментом пізнання адаптивного механізму економіки виступає математичне моделювання. Але для цього треба побудувати відповідну ММ — адаптивну за походженням і адекватну за призначенням, тобто бути легко доступною та адекватно відтворювати характерні риси об'єкта моделювання. Проблема адаптації в економіці дедалі більше претендує стати ключовою в зв'язку з труднощами вивчення нелінійної економічної динаміки. Їх наявність, на наш погляд, глобально спричинена відсутністю в економіці жорстких структур і форм та систематичним дрейфом економічних факторів, постійною змінюваністю цілей і критеріїв їх досягнення.

У загальній теорії систем [22] має місце **закон необхідної різноманітності**, котрий стосовно економіко-математичного моделювання формулюється так: потужність множини ММ (кількість різноманітних елементів банку моделей) має бути не меншою різноманітності об'єкта моделювання.

Зміст закону виявляється у такому: розробляючи систему моделювання, мета якої подолати труднощі комп'ютерного дослідження об'єкта, треба забезпечити такі умови, щоб вона володіла або була спроможна створювати необхідне розмаїття моделей і методів вивчення, тобто мала таку різноманітність, яка була б більшою або щонайменше рівною різноманітності початкової проблеми.

Стисло це звучить так — тільки різноманітність може здолати різноманітність, або клин вибивається клином, як говорить народна мудрість.

### **2.6.1. Принципологія побудови ММ економічних процесів і явищ**

Спершу зауважимо, що на відміну від технічної або біологічної літератури в економічній не так вже й багато (просто мало) публікацій щодо правил і способів математичного опису (створення ММ) економічної ситуації.

Привертають увагу монографії [107, 108], в котрих задекларовано розмаїття ММ різноманітних процесів чи явищ СЕС. Згадуване розмаїття охоплює вельми різноманітні за змістом складові буття суспільства, практично всі його грані, починаючи від проблем економіки (обмін товарами й утворення грошей, діяльність малого бізнесу, функціонування мікро- і макроекономіки), соціології (лідерство в групі людей, національна пиха), розвитку науки тощо і закінчуючи ритуалом поховання. Перш за все наголосимо, що зазначені ММ являють собою головно системи розмірності, два ЗДР 1-го порядку. Узагальнено їх множину можна описати системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x) \cdot x - b(x) \cdot y \\ \dot{y} = -c \cdot y + k \cdot b(x) \cdot y, \end{cases} \quad (2.55)$$

де  $a(x)$  і  $b(x)$  — функції, а коефіцієнти  $c$  і  $k$  — постійні. Вона в свою чергу є окремим випадком запропонованої А. М. Колмогоровим [54] ММ — модифікації класичної моделі Вольтерра—Лотки «жертва—хижак». Тут простежується формальна відповідність структури моделей, не вдаючись до змістовного наповнення змінних.

Права частина ММ (2.55) відтворює тією чи іншою мірою вплив складових економічного явища, обов'язковими членами якої мають бути: доданок, котрим відображається вплив фактора, а потім — інший чинник для відображення впливу іншої координати — змінної економічного стану. Після них йде третій доданок, яким описано взаємодію координат  $x$  і  $y$ , що має, як правило, білінійний характер: щоб взаємодіяти треба щонайменше зустрітись. Але при цьому не виключається нелінійний характер з боку однієї координати. Кожний член правої частини того чи іншого рівняння ММ має свій знак, чим відтворює характер впливу, і числовий коефіцієнт — міра взаємодії складових об'єкта моделювання.

Наприклад, система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = j_1 - j_2xy - j_3x \\ \dot{y} = j_4 - j_5xy - j_6y, \end{cases} \quad (2.3)$$

де  $j_1, \dots, j_6$  — сталі величини, виступає [107] ММ формування собівартості, конкурентної боротьби товару  $x$  за оволодіння товаром  $y$ , узагальнення поняття ціни і планування обмінних відносин.

Варто наголосити, що варіанти зазначеної ММ, пов'язані зі зміною між собою третіх доданків рівнянь моделі, зміною їх знаків або наявності тільки одного зі згадуваних доданків, охоплює широкий спектр різних за змістом проблем СЕС. Наприклад, перестановкою членів  $(-j_3x)$  і  $(-j_6y)$  в рівняннях моделі (2.3) матимемо ММ

$$\begin{cases} \dot{x} = j_1 - j_2xy - j_6y \\ \dot{y} = j_4 - j_5xy - j_3x, \end{cases} \quad (2.3a)$$

що відповідатиме моделюванню абсолютно емоційних партнерів. Через дію умови додатних знаків лінійних членів для (2.3a) матимемо ММ — байдужих партнерів. Якщо у першому рівнянні системи (2.3) лінійний член  $j_3x$  зі знаком плюс, у другому  $(-j_6y)$  — з мінусом, це буде ММ національного чванства [108]. Отже, спостерігаємо універсальність ММ (2.3) і появу реальних умов до адаптації моделювання.

**Зауваження!** Давно фігурує [85, 96, 97] конструктивна і плідна думка, що біологічні системи схожі на економічні. Дійсно, рівняння біологічних ММ різняться тільки коефіцієнтами і предметним тлумаченням змінних (у термінах об'єкта моделювання).

Розглянемо *еволюцію відтворення економічних явищ і процесів математичними моделями*. Добре відома в економічному аналізі модель Харрода—Домара [161] є рівнянням Мальтуса

$$\dot{x} = a \cdot x \quad (a = \text{const}) \quad (2.56)$$

з точністю до позначень коефіцієнта, де змінна  $x(t)$  — створюваний валовий продукт.

Лінійне ЗДР 1-го порядку (2.56) ускладнювалось, стаючи неоднорідним і все ж володіючи аналітичним розв'язком експоненційного типу. Модель (2.56) вдало описує зростання економіки на малому часовому інтервалі, її динаміку для невеликих значень  $x(t)$ .

Для значних числових значень (ВВП) функції  $x(t)$  з урахуванням обмеженості ресурсів модифікацією (2.56) буде відоме логістичне рівняння

$$\dot{x} = ax \cdot \frac{K - x}{K}, \quad (2.56a)$$

де величина  $K$  визначається ресурсами (місткість середовища). Формально це також рівняння (2.55), але коефіцієнт  $a = a(x)$  є функцією. Однак логістична модель ігнорує динаміку для малих кількостей  $x(t)$ , тоді розглянемо модель такого вигляду

$$\dot{x} = a \cdot x^2, \quad (2.56б)$$

якій відповідає гіперболічне зростання  $x(t)$ : за скінченний час досягатимемо нескінченні значення  $x(t)$ , що досить сумнівно. Отже, розглядають рівняння

$$\dot{x} = ax^2 \cdot \frac{K - x}{K}, \quad (2.56в)$$

інтегральна крива  $x(t)$  якого, нагадуючи логістичну пряму, повільніше зростає за малих значень  $x(t)$ , а її точка перегину лежить вище, ніж для класичного графіка. Разом з тим модель (2.56в) не відображає той відрізок часу, в якому спостерігається експоненційне зростання. Щоб уникнути такого недоліку, пропонуємо розглядати ММ

$$\dot{x} = \frac{ax}{N + x} \cdot \frac{K - x}{K}, \quad (2.57)$$

з якої впливають попередні моделі як окремі випадки. Дійсно, при  $N \rightarrow 0$  матиме місце (2.56a); для  $N \gg K$  і  $0 < x < K$  асимптотично переходимо до (2.56в).

**Зауваження!** У класичному логістичному рівнянні використовується лінійний закон зменшення місткості середовища. Цілком логічним розвиненням моделі буде припущення щодо

нелінійного закону, наприклад, пропорційний квадрату величини  $x(t)$ , тоді модифіковане логістичне рівняння запишимо так:

$$\dot{x} = ax \cdot \left( \frac{K - x^2}{K} \right). \quad (2.57a)$$

З урахуванням інших ефектів (2.57a) набуває вигляду

$$\dot{x} = ax \cdot \left( \frac{K - x^2}{K} \right) - b. \quad (2.57б)$$

Функціональна реакція змінної  $y(t)$  («хижака») на змінну  $x(t)$  («жертву») — залежність раціону «хижака» від щільності популяції «жертви» сьогодні відображається чотирма способами:

а) лінійною залежністю  $b_1(x) = b \cdot x$ , покладену в основу рівняння Вольтерра—Лотки;

б) ефект насичення враховується подальшою нелінійною залежністю

$$b_2(x) = b_0(1 - e^{-px}),$$

де величина  $p$  відповідає рівню наповнення. Цю залежність, раніше відому в екології харчування риб, нещодавно почали застосовувати в економіці;

в) якісно подібний попередньому результат дає відома в біології формула Моно (рівняння Міхаеліса — Ментен)

$$b_3(x) = \frac{bx}{1 + \alpha x};$$

г) ефект насичення за малих щільностей як і за великих враховується нелінійною залежністю

$$b_4(x) = \frac{bx^2}{1 + \alpha x^2};$$

**Зауваження!** Будь-яка економіка проходить одні й ті самі етапи розвитку: від початкового моменту слабкого розвинення до сильного, тобто значного обсягу виробництва в майбутньому. Зазначені функції  $b_j(x)$  цілком слушно використовувати в моделюванні економіки на різних часових інтервалах.

### 2.6.2. Проблемно-орієнтована адаптація моделей

Досвід побудови моделей (як і саме моделювання економіки) має передаватись у спадок наступним поколінням дослідників, і не тільки сприяти підвищенню кваліфікації безпосередніх учасників процесу.

Комбінуючи різновиди  $a_i(x)$  динаміки процесу моделювання економіки і типові залежності  $b_j(x)$  функціональної реакції змінної  $y(t)$  («хижака») на щільність популяції «жертви» (змінна  $x(t)$ ), дістанемо найбільш повну на сьогодні альтернативну множину ММ станів економіки (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

| № з/п | $a_i(x)$ \ $b_j(x)$                               | $b_1(x)$ | $b_2(x)$          | $b_3(x)$        | $b_4(x)$            |
|-------|---------------------------------------------------|----------|-------------------|-----------------|---------------------|
|       |                                                   | лінійна  | нелінійна<br>ехр. | формула<br>Моно | нелінійна<br>квадр. |
| 1     | $\dot{x} = ax$                                    | $a_1b_1$ |                   |                 |                     |
| 2     | $\dot{x} = ax \frac{K-x}{K}$                      | $a_2b_1$ |                   |                 |                     |
| 3     | $\dot{x} = ax^2$                                  |          |                   |                 |                     |
| 4     | $\dot{x} = ax^2 \frac{K-x}{K}$                    | $a_4b_1$ |                   | $a_4b_3$        | $a_4b_4$            |
| 5     | $\dot{x} = \frac{ax^2}{N+x} \frac{K-x}{K}$        |          |                   |                 |                     |
| 6     | $\dot{x} = ax \frac{K-x^2}{K}$                    |          |                   |                 |                     |
| 7     | $\dot{x} = ax \left( \frac{K-x^2}{K} \right) - b$ |          |                   |                 |                     |

**Зауваження!** Вперше, але меншої розмірності ( $i, j = 1, 2, 3$ ) табл. 2.1 наведена у праці [7].

По-іншому проблема виявлення і збереження знань фахівців у сфері створення і дослідження ММ трансформаційної економіки також розглядалась у статті [71].

Наприклад, комбінації  $a_1b_1$  відповідає класична модель Вольterra—Лотки

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy; \end{cases}$$

клітинці  $a_2b_1$  — ММ

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \cdot \frac{K - x}{K} - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy; \end{cases}$$

клітинці  $a_4b_1$  — ММ

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 \cdot \frac{K - x}{K} - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

Взагалі комбінації  $a_ib_1$  (клітинки першого стовпчика табл. 2.1) відповідають ММ, що перекривають (стосовно моделей на площині) відому в літературі [107, 108] кількість моделей. Всі інші клітинки таблиці — нові в літературі ММ економічних процесів і явищ з урахуванням стану насиченості змінних та їх різної кількісної оцінки. Наведемо деякі ММ:

$$a_4b_3: \begin{cases} \dot{x} = ax \cdot \frac{K - x}{K} - \frac{bxy}{1 + \alpha x} \\ \dot{y} = -cy + \frac{bxy}{1 + \alpha x}; \end{cases}$$

$$a_4b_4: \begin{cases} \dot{x} = ax^2 \cdot \frac{K - x}{K} - \frac{bx^2y}{1 + \alpha x} \\ \dot{y} = -cy + \frac{dx^2y}{1 + \alpha x}. \end{cases}$$

Креативна властивість табл. 2.1 (здатність породжувати різноманітного характеру ММ економіки) цілком задовольняє вимоги умов здійснення адаптації в моделюванні. Крім того, виконується закон Ешбі з теорії систем про необхідну різноманітність, який щодо проблеми нелінійної економічної динаміки читається



так: створення системи моделювання, спроможної подолати труднощі пізнання економіки, вимагає, щоб різноманітність (набір моделей та алгоритмів їх вивчення) була більшою, ніж різноманітність об'єкта дослідження. Тобто створювана система моделювання могла генерувати або пропонувати нові ММ та алгоритми їх дослідження задля досягнення мети.

Принагідно зауважимо, що проблема створення єдиної уніфікованої системи моделей і алгоритмів моделювання нелінійної економічної динаміки вперше була актуалізована у працях [101, 124].

Із завершенням побудови адаптивної множини ММ економічних процесів і явищ настає етап кількісного аналізу факторів економіки шляхом моделювання, який також повинен бути адаптивним. Тут можна скористатись результатами проблемно-адаптивного числового аналізу нелінійних динамічних систем електроніки, оскільки вони отримані в орієнтації на задачу Коші з початковими умовами, тобто системи ЗДР 1-го порядку в нормальній формі — розглянуті вище ММ.

Таким чином, еволюція економіки, якій органічно властиво пристосовуватись, розглянута з позиції наскрізного (на всіх етапах) економіко-математичного моделювання (ЕММод). Концепти математичного опису різноманітних економічних процесів і явищ та принципи побудови ММ знайшли своє табличне й алгоритмічне відображення. Запропонована наглядна методика охоплює відомі в літературі результати, завдяки якій вказуються способи математичного відтворення інших дуже важливих на практиці економічних станів.

Поняття адаптації стає наріжним каменем економіко-математичного моделювання економіки.

---

## 2.7. Синергетична модель економічної структури суспільства

---

У фізичній економіці фігурує [123] система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{Q} = -Q + F \\ \sigma \cdot \dot{F} = -F + Qp \\ \delta \cdot \dot{p} = (p_e - p) - QF, \end{cases} \quad (2.58)$$

що являє собою математичну модель економічного стану в координатах «платоспроможний попит  $Q$  — виробнича функція  $F$  — умовна ціна  $p$ », де коефіцієнти  $\sigma$  і  $\delta \ll 1$  — малі величини, а  $p_e$  — купівельна спроможність (керуючий параметр).

Заміною змінних  $x = Q$ ,  $y = F$  і  $z = p_e - p$  ММ набуває вигляду відомої моделі Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -\frac{1}{\sigma}y + \frac{1}{\sigma}p_ex - \frac{1}{\sigma}xz \\ \dot{z} = -\frac{1}{\delta}z + \frac{1}{\delta}xy. \end{cases}$$

Структура рівнянь дійсно збігається, але спостерігаємо відмінність у коефіцієнтах. Особливо це стосується другого рівняння та останнього доданку третього рівняння моделі. Вибором безпосереднього часу  $t$  у вигляді  $t = \sigma \cdot \tau$  остаточно матимемо ММ

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -y + p_ex - xz \\ \dot{z} = -\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)z + \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)xy, \end{cases} \quad (2.59)$$

структура якої точно відповідає класичній моделі Лоренца [25], причому  $b = \frac{\sigma}{\delta}$  і  $r = p_e$  — керуючий параметр і лише біля додан-

ку  $xy$  стоїть коефіцієнт  $\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)$ , що є відмінністю.

Властивості новоотриманої синергетичної моделі (2.59) економічної структури суспільства:

а) виконується умова симетрії змінних, тобто змінна  $x$  на  $(-x)$ ,  $y$  на  $(-y)$ ,  $z$  на  $(-z)$  не впливає на модель;

б) має місце значна дисипативність об'єма  $V(t)$  фазового простору (його деформації)

$$V(t) = V(0) \exp \left\{ - \left( 1 + \sigma \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right) \right) \tau \right\},$$

де  $V(0)$  — початковий об'єм, вираз у фігурних дужках — дивергенція  $\left\{ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \right\}$ ;

в) особливі (стаціонарні) точки — тривіальна  $O(0; 0; 0)$ ;  $O_1(\sqrt{p_e - 1}; \sqrt{p_e - 1}; (p_e - 1))$ ;  $O_2(-\sqrt{p_e - 1}; -\sqrt{p_e - 1}; (p_e - 1))$ , координати яких є розв'язками алгебраїчної системи рівнянь (при  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ):

$$\begin{cases} -\sigma \cdot x + \sigma \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = y \\ -y + p_e x - xz = 0 \Rightarrow x(-1 + p_e - z) = 0 \\ -\frac{\sigma}{\delta} z + \frac{\sigma}{\delta} xy = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\delta} (1 - p_e + y^2) = 0. \end{cases}$$

Для лінійного аналізу стійкості стаціонарних точок ММ (2.59) запишемо матрицю Якобі

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ p_e - z & -1 & -x \\ \frac{\sigma}{\delta} y & \frac{\sigma}{\delta} x & -\frac{\sigma}{\delta} \end{pmatrix},$$

характеристичне рівняння якої у загальному вигляді запишемо так [66, 152]:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (2.60)$$

де  $a_1 = 1 + \sigma + \frac{\sigma}{\delta}$ ;

$$a_2 = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma \\ p_e - z & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sigma & 0 \\ \frac{\sigma}{\delta} y & -\frac{\sigma}{\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -x \\ \frac{\sigma}{\delta} x & -\frac{\sigma}{\delta} \end{vmatrix} = \sigma - \sigma(p_e - z) + \frac{\sigma^2}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta} x^2;$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ p_e - z & -1 & -x \\ \frac{\sigma}{\delta} y & \frac{\sigma}{\delta} x & -\frac{\sigma}{\delta} \end{vmatrix} = -\frac{\sigma^2}{\delta} - \frac{\sigma^2}{\delta} x^2 + \frac{\sigma^2}{\delta} p_e - \frac{\sigma^2}{\delta} z - \frac{\sigma^2}{\delta} xy.$$

Характеристичне рівняння записується для кожної особливості точки. Для тривіальної точки ця функція має вигляд

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left( 1 + \sigma + \frac{\sigma}{\delta} \right) + \lambda \left( \sigma - \sigma \cdot p_e + \frac{\sigma^2}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta} \right) + \left( \frac{\sigma^2}{\delta} - \frac{\sigma^2}{\delta} p_e \right) = 0;$$

для стаціонарної точки  $O_2$  характеристичне рівняння записується у такий спосіб:

$$\lambda^3 + \left( 1 + \sigma + \frac{\sigma}{\delta} \right) \lambda^2 + \left( \frac{\sigma^2}{\delta} + \frac{\sigma}{\delta} p_e \right) \lambda + 2 \frac{\sigma^2}{\delta} (p_e - 1) = 0.$$

**Зауваження 1.** Якщо взяти до уваги  $r = p_e$  і  $b = \frac{\sigma}{\delta}$ , то характеристичне рівняння набуває вигляду  $\lambda^3 + (\sigma + b + 1) \times \lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma \cdot b(r - 1) = 0$ , формально збігаючись з відомим результатом для класичної моделі Лоренца.

**Зауваження 2.** Якщо коефіцієнти  $\sigma$  і  $\delta$  синергетичної моделі економічної структури суспільства — величини одного порядку, тобто  $\frac{\sigma}{\delta} \sim 1$ , тоді характеристичне рівняння (2.60) набуває вигляду:

для тривіальної точки

$$\lambda^3 + (2 + \sigma)\lambda^2 + (2\sigma + 1 - \sigma \cdot p_e)\lambda + \sigma(1 - p_e) = 0;$$

та іншої стаціонарної точки

$$\lambda^3 + (2 + \sigma)\lambda^2 + (\sigma + p_e)\lambda + 2\sigma(p_e - 1) = 0.$$

Разом з тим багато що (в розумінні характеристик особливих точок, фазових портретів і настання моменту біфуркації та її характеру) зумовлено взаємозалежністю між величинами  $\sigma$  і  $\delta$ .

---

## Висновки

---

Другий розділ монографії присвячено побудові ММ економічного стану, зважаючи на різнорідний характер поведінки його факторів. Так, спочатку наведено різноманітні економічні інтерпретації класичної моделі Вольтерра—Лотки ( $V—L$ ), що нашо́вхує на думку про існування єдиних принципів отримання рівнянь стану економіки. Сформульовано синергетичні концепти утворення рівнянь  $V—L$ . Розглянуто низку ММ різноманітних динамічних процесів макроекономіки, які є подальшим розвиненням системи рівнянь  $V—L$ .

Одностайність у створенні уніфікованої системи одно- і дво-параметричних нелінійних моделей економічної динаміки сприяла побудові універсальної за можливостями і призначенням адаптивної ММ економічного стану, яка відповідає закону Ешбі у всесторонньому і глибокому пізнанні об'єкта моделювання. Розроблено принципи проблемно-орієнтованого адаптивного моделювання в економіці.

Визначено поняття економічної кінетики, на підґрунті якого розглядаються так звані *кінетичні моделі макроекономіки*.

Вперше в літературі запропоновано спосіб моделювати економіку в координатах «корупція—тіньова економіка—легальна економіка» і одержано оцінки щодо зростання функцій моделі.

Для лінійної динамічної моделі здійснено аналітичне моделювання з урахуванням синергетичної тези стосовно впливу майбутнього на теперішній стан.

На прикладі відомої в літературі моделі обміну двома товарами, яка є тривіальною модифікацією рівнянь  $V—L$ , взято до уваги стан насичення й одержано нелінійні формули узагальнення рівноважної ціни; одно- та двосторонні оцінки обсягу абсолютного дефіциту. Принагідно зазначити, що наявна на руках населення маса грошей та адміністративний розподіл благ суспільства сприяють дефіциту, як це впливає із описаних формул.

Класична модель Гудвіна про флуктуації економіки дістала подальше розвинення:

а) використавши у схемі її створення аналітичні розв'язки рівняння динаміки капіталу для трьох загальноживаних варіантів інвестування ззовні і сталому коефіцієнті  $\mu$  амортизації. У випадку залежної від часу величини  $\mu(t)$  одержали оцінки зверху для результатів моделювання;

б) з урахуванням людського капіталу у рівнянні Солоу, коефіцієнти котрого вважаються змінними величинами, на підґрунті ММ аналітично показана можливість біфуркативності траєкторії економічного зростання та утворення детермінованого хаосу за деяких значень коефіцієнтів моделі.

### КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У даному розділі висвітлюються питання якісного та кількісного дослідження динамічної поведінки деяких нелінійних моделей економіки. Крім традиційної побудови фазових описань розглядаються також параметричні портрети, що викликано суттєвим впливом коефіцієнтів математичної моделі (ММ) відображення сценаріїв розвитку економічних подій. У сукупності такий підхід сприяє розробленню стратегії проведення обчислювального експерименту в сфері економіки. Роль і призначення фазових і параметричних портретів в економіко-математичному моделюванні динамічних процесів незаперечна, хоча вона лише усвідомлюється.

---

#### 3.1. Якісний аналіз математичних моделей нелінійної економічної динаміки

---

Для низки математичних моделей, що належать до числа ключових у комп'ютерному моделюванні динаміки економічних систем, розроблено методику якісного дослідження, результати якого відображаються не тільки фазовими описаннями. Привертається увага до так званих *параметричних портретів*: як відомо, саме коефіцієнтами ММ детермінуються різноманітні режими перебігу економічних процесів. Через довільні комбінації ключових моделей, тобто взаємодії їх фазових і параметричних описів, виявляється хитросплетіння економічних подій та сценарії їх розвитку.

Економіка належить до складних систем, що неупинно розвиваються і самоорганізуються. Разом з тим вона категорично не входить до переліку тих систем, у ході моделювання яких, починаючи з деякого рівня складності, простіше виготовити, ніж описати певного класу рівняннями формальної моделі. Доречним вбачається об'єднання формальних методів і техніки якісного аналізу. Саме такий підхід являє сьогодні підвалини більшості

моделей і методик системного аналізу. Поширена в минулому точка зору щодо уявлень про моделі та математичне моделювання економіки зазнає кардинальних змін.

У науковій літературі з синергетичної економіки наводиться багато математичних моделей, які охоплюють практично всі важливі (з точки зору сьогодення) грані функціонування соціально-економічних систем. Придивившись пильно до систем звичайних диференціальних рівнянь, що виступають як ММ нелінійної динаміки соціально-економічних процесів, явищ і ефектів, неважко побачити, що формально вони збігаються з відомими в інших галузях знань — моделями математичної біології і біофізики. За суттю, це одні й ті самі ММ, лише змінним надана предметна інтерпретація.

Зазначене цілком закономірно, бо об'єктом уваги кожної зі згадуваних вище наукових дисциплін є нелінійна, нестационарна, нерівноважна система необоротної дії. У такий спосіб яскраво виявляє себе синергетична теза про холистичність навколишнього середовища (незалежно від походження системи даються взнаки однакові іманентно характерні риси). Тут слушно пригадати слова класика економічної теорії А. Маршалла: «... Метою економіста є скоріше економічна біологія, ніж економічна динаміка» [96].

Витоки ММ перебувають у відомій моделі «жертва — хижак» — системі рівнянь Вольтерра—Лотки, яку стосовно економіки можна тлумачити як «ресурс — споживач», «ціна товару — обсяг реалізації продукції» тощо.

Слід зауважити, що в сучасній літературі з економіко-математичного моделювання нелінійної динаміки незначне місце посідає методологія, засоби та інструментарій якісного аналізу, має місце лише проголошення проміжних результатів на кшталт матриця Якобі (лінеаризації) та її числові характеристики (слід, визначник, власні числа і вектори). Також фігурують поняття фазових описань без геометричного зображення і пояснення економічної сутності. Звісно, цього для повноцінного моделювання економіки замало.

Як відомо, труднощі моделювання економіки визначаються головним чином дрейфом економічних параметрів та факторів, що сприяє почережності фазових описів — переходу від одного до іншого, тобто біфуркації. Отже, стає зрозумілою провідна роль і призначення так званих *параметричних описів*, якими зображено залежна від змінюваності коефіцієнтів ММ варіація фазо-



вих портретів. Інакше йтиметься про характерний вплив та альтернативу фазового портрета.

У літературі [4, 144] з теорії математичного моделювання неодноразово ставилось питання про якісний аналіз ММ, що був би як початковим етапом для проведення обчислювального експерименту, тобто кількісному економічному аналізу у нашому випадку. У споріднених галузях природознавства, наприклад, математична біологія чи біофізика, в яких об'єкт дослідження являє собою нелінійну, нерівноважну тощо систему незворотної дії, такий підхід частково і досить успішно реалізується. Цілком логічно і закономірно узагальнити згадувані результати, фільтруючи, дослідити та адекватно перенести в сферу економіко-математичного моделювання. Цим самим економістам може бути надано могутній інструмент превентивного аналізу та вираженого і вдумливого погляду на оцінювання можливих станів економічного майбуття — сценарії еволюції економіки.

Перенесемо на економічне підґрунтя, селекціонуючи, якісні результати дослідження синергетичних моделей, які є ключовими в математичному моделюванні нелінійної економічної динаміки. Послідовний і логічно витриманий, цілком ясний виклад сприятиме створенню методики якісного вивчення економічної дійсності, орієнтуючи у прийнятті виражених управлінських рішень у сфері економіки.

Економіка — це складна динамічна самоорганізуюча система, зміни у котрій відбуваються не тільки внаслідок зовнішніх дій (кібернетична точка зору), але й визначаються внутрішніми збуреннями, механізмами і особливостями (синергетичний погляд).

У вивченні економіки нині спостерігається значна експансія новітніх математичних методів, не тільки в галузі економічної статистики або оптимізаційних задач, особливо в сфері моделювання нелінійної економічної динаміки, що закономірно, зважаючи на давню традицію використання математики у дослідженнях з теорії економіки від самого початку.

Кожна ММ по-своєму висвітлює певні грані економіки на підставі сформульованих концептуальних положень, гіпотез — припущень для побудови моделей.

Невизначеність і неповнота інформації щодо економічного об'єкта, наявність у ньому швидкоплинних, повільних і латентних змінних, нестационарне функціонування його складових і пе-

ребігу процесів, наявність нелінійних, недетермінованих, прямих і зворотних зв'язків сприяють тому, що в економіці перевага має надаватись якісним результатам дослідження, які в подальшому можуть деталізуватись кількісно.

На думку автора, математичне і комп'ютерне моделювання економіки має базуватись на концептах наскрізного адаптивного використання як засобів, так і інструментів здійснення процесу моделювання. Це означає відмову від жорстких структур і форм моделей та алгоритмів їх аналізу, замінюючи гнучкими, тобто адаптивними. Крім того, сучасне економіко-математичне моделювання нелінійної динаміки у першій фазі повинно бути якісним, а потім має проводитись обчислювальний експеримент, тобто кількісно відслідковуватись фазові траєкторії.

На наш погляд, має передбачатися виокремлення ключових ММ економічної динаміки, системне застосування котрих значною мірою відтворює та пояснює сукупну економічну дійсність, її реалії. Побудова та дослідження зазначених моделей здійснюється в два етапи — спершу якісний, а потім кількісний аналіз.

Прикладом однієї з ключових ММ слугує система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \frac{Bxy}{1 + Px} - Ex^2 \\ y = -Cy + \frac{Dxy}{1 + Px} - Fy^2, \end{cases} \quad (3.1)$$

яка описує дуопольно-дуопсонієву конкуренцію (відображається доданками  $Ex^2$  і  $Fy^2$ ) з урахуванням насиченого стану (реалізується множителем  $1 / (1 + Px)$ ). Зауважимо, що для  $P = 0$  матимемо модель [50], описану кількісно (здійснювалось числове інтегрування рівнянь моделі у п'яти важливих для економічної практики ситуаціях). Зазначимо також, що система рівнянь (3.1), з одного боку, є узагальнення класичної моделі «жертва—хижак», а з другого — динамічної моделі Леонтьєва. Між іншим, ММ (3.1) є базовою для моделей синергетичної економіки, якщо надавати змінним параметрам і коефіцієнтам відповідних числових значень та вважати їх функціями певного виду.

Щоб уникнути семи параметрів ( $A, B, C, D, E, F, P$ ), зробимо заміну:  $t = \tau / A$ ;  $x = (A / D)U$ ;  $y = (A / B)V$ ;  $\gamma = C / A$ ;  $\alpha = PD / A$ ;

$\varepsilon = E / D$ ;  $\mu = F / B$ , у результаті якої здобудемо безрозмірну систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} - \varepsilon \cdot u^2 \equiv f_1(u, v) \\ \dot{v} = -\gamma \cdot v + \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} - \mu \cdot v^2 \equiv f_2(u, v), \end{cases} \quad (3.2)$$

з чотирма параметрами  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ , причому параметр  $\gamma$  можна трактувати як успадкований від класичної ( $B = E = F = P = 0$ ) моделі Вольтерра—Лотки, а три інші визначають розв'язки моделі (3.2).

### 3.1.1. Фазові описи

Спочатку розглянемо збурюючий вплив кожного окремо взятого параметра. Для  $\alpha = \varepsilon = 0$  ММ(3.2) набуває вигляду:

$$\dot{u} = u - u \cdot v; \quad \dot{v} = -v + u \cdot v - \mu \cdot v^2, \quad (3.2a)$$

особливі точки  $O_1(0; 0)$  і  $O_2(1 + \mu; 1)$  якої знаходяться за умови  $\dot{u} = \dot{v} = 0$ .

Матрицю Якобі (лінеаризації) в нашому випадку запишемо так:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial u} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & -1+u-2\mu \cdot v \end{pmatrix}.$$

і обчислимо в особливих точках:  $J_1(0;0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Слід матриці Якобі (сума елементів головної діагоналі)  $SpJ_1(0; 0) = 0$ , а  $\det J(0; 0) = -1 < 0$ .

Користуючись діаграмою з рис. 2.7 визначення типу особливих точок, встановлюємо, що перша особлива точка  $O_1(0; 0)$  — сідло, оскільки  $SpJ_1(0; 0) = 0$ , а  $\det J(0; 0) = -1 < 0$ . Для другої особливої точки  $O_2(1 + \mu; 1)$  відповідно обчислюємо

$SpJ_2 = -\mu < 0$ , а  $\det J_2 = (1 + \mu) > 0$ . Згадувана точка стійка для будь-якого  $\mu$ . Фазове описання ММ (3.2а) зображено на рис 3.1.

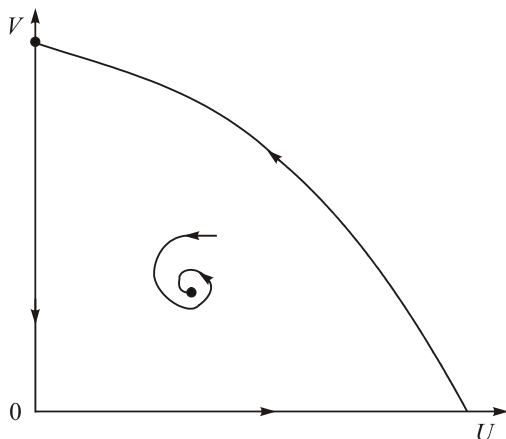


Рис. 3.1. Фазове описання моделі (3.2а)

При  $\alpha = \mu = 0$  ММ (3.2) запишемо

$$\begin{cases} \dot{u} = u - u \cdot v - \varepsilon \cdot u^2 \\ \dot{v} = -v + u \cdot v, \end{cases} \quad (3.2б)$$

особливі точки якої  $O_1(0; 0)$  і  $O_2(1; 1 - \varepsilon)$ . Дійсно, з другого рівняння моделі витікає  $v_1 = 0$ ;  $u_2 = 1$ . З першого рівняння  $-u(1 - v - \varepsilon \cdot u) = 0$  моделі також знаходимо  $v_2 = 1 - \varepsilon$  при  $u_2 = 1$  і  $v_3 = 0$  для  $u_3 = 1 / \varepsilon$ , тобто  $O_3(1 / \varepsilon; 0)$ .

Матриця Якобі  $J$  для моделі (3.2б) має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 - v - 2\varepsilon \cdot u & -u \\ v & -1 + u \end{pmatrix},$$

слід якої для тривіальної особливої точки  $O_1$  рівний нулю, а визначник від'ємний, тобто точка є сідло. Для  $O_2$  запишемо  $SpJ = \bar{u} - \bar{v} - 2\varepsilon \cdot \bar{u} \equiv -\varepsilon < 0$ ;  $\det J = -1 + \bar{v} + 2\varepsilon \cdot \bar{u} + \bar{u} - 2\varepsilon \cdot \bar{u}^2 \equiv 1 - \varepsilon$ . На рис. 3.2 показано фазове описання моделі (3.2б).

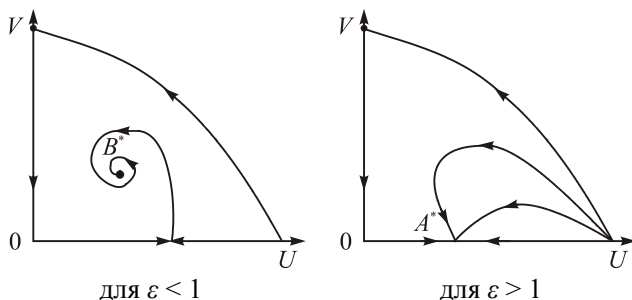


Рис. 3.2

Для  $\varepsilon = \mu = 0$  ММ (3.2) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} \\ \dot{v} = -v + \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} \end{cases} \quad (3.2в)$$

Крім тривіальної  $O_1(0; 0)$  особливої точки, фігурує  $O_2(1 / (1 - \alpha); 1 / (1 + \alpha))$ : з другого рівняння нуль ізоклини знаходимо  $u_2 = 1 / (1 - \alpha)$ , а з першого —  $v_2 = \alpha / (1 - \alpha)$ . Матриця Якобі для моделі (3.2в) набуває вигляду

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} & -\frac{u}{1 + \alpha \cdot u} \\ \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} & -1 + \frac{u}{1 + \alpha u} \end{pmatrix},$$

числові характеристики якої запишемо так:

$$\begin{aligned} SpJ &= \frac{u}{1 + \alpha \cdot u} - \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2}; \\ \det J &= \left( 1 - \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} \right) \left( -1 + \frac{u}{1 + \alpha \cdot u} \right) + \frac{uv}{(1 + \alpha \cdot u)^3}. \end{aligned}$$

У точці  $O_2$  вони набувають значення:  $SpJ_2 = \alpha$  і  $SpJ_2 = 1 - \alpha$ .

На рис. 3.3 зображено фазові описання моделі (3.2в).

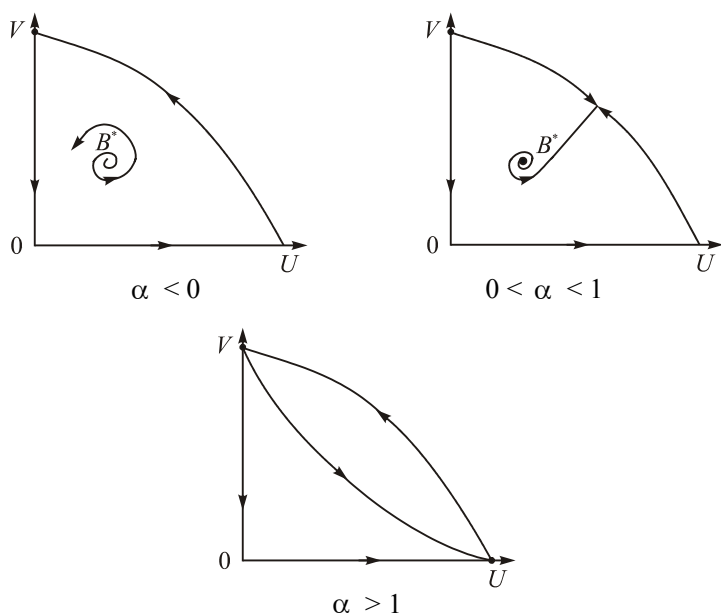


Рис. 3.3

### 3.1.2. Параметричні портрети

Тепер будуть розглядатись ММ типу (3.2), але за наявності двох числових параметрів.

При  $\alpha = 0$  характер у фазових описів ММ відповідатиме рис. 3.2.

При  $\mu = 0$  ММ має вигляд

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} - \varepsilon \cdot u^2 \\ \dot{v} = -\cdot v + \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Рівняння нуль-ізоклін набувають вигляду:  $\dot{u} = 0$  і  $u \left( 1 - \frac{v}{1 + \alpha \cdot u} - \varepsilon \cdot u \right); \quad \dot{v} = 0, \quad v \left( -1 + \frac{v}{1 + \alpha \cdot u} \right) = 0$ , звідси матимемо  $u = \frac{1}{1 - \alpha}$ .

Нетривіальна точка рівноваги лежить у першій координатній четверті, являючи собою перетин параболи  $v$  і прямої  $u = m$ ,  $m = \text{const}$  і  $0 \leq m < 1 / \varepsilon$ .

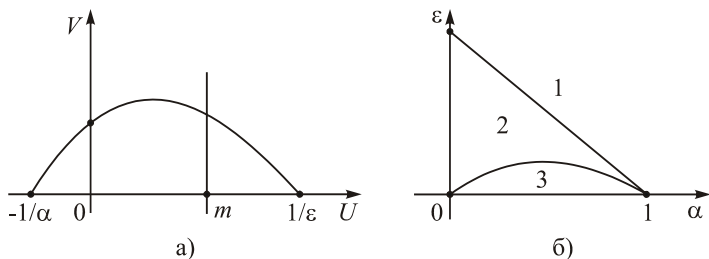


Рис. 3.4. Фазовий (а) і параметричний (б) описи ММ (3.3)

Координати нетривіальної точки (перетину прямої і параболи) запишемо так:  $\bar{u} = \frac{1}{1 - \alpha}$ ;  $\bar{v} = \frac{1 - \alpha - \varepsilon}{(1 - \alpha)^2}$ . Нерівність  $(\alpha + \varepsilon) < 1$  очевидна.

Оскільки  $v(0) = 1$ , то матиме місце  $\varepsilon = \alpha(1 - \alpha)$ .

Матриця лінеаризації (Якобі) для ММ (3.3) має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon \cdot u - \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} & -\frac{u}{1 + \alpha \cdot u} \\ \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} & -1 + \frac{u}{1 + \alpha u} \end{pmatrix},$$

слід якої  $SpJ = -2\varepsilon \cdot \bar{u} - \frac{\bar{v}}{(1 + \alpha \cdot \bar{u})^2} + \frac{\bar{u}}{1 + \alpha \cdot \bar{u}}$ , де  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  — координати особливої точки. З умови  $SpJ = 0$  витікає рівняння лінії нейтральності.

Визначник матриці Якобі запишемо так:  $\det J = -1 + \frac{2\varepsilon \alpha \cdot \bar{u}^2}{1 + \alpha \bar{u}} + \frac{\bar{v} + \bar{u}(1 + \alpha \cdot \bar{u})}{(1 + \alpha \cdot \bar{u})^2}$ . Після відповідних алгебраїчних перетворень ви-

значник матриці Якобі набуває додатного значення, коли виконується нерівність  $\varepsilon < 1 / (1 - 3\alpha)$ , тоді особлива точка — центр.

Параметричний портрет ММ (3.3) зображено на рис. 3.4б. У разі переходу параметрів від площини 2 до площини 3 рівноважна точка демонструватиме стійкість, навколо яких формується стійкий граничний цикл. Фазові описи в зазначених площинах набувають вигляду, як це показано на рис. 3.4 в) — д).

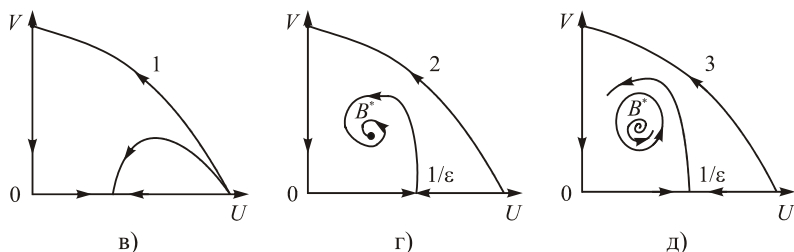


Рис. 3.4. в) — д) Фазові описи для площин 1—3 параметричного портрета

На відміну від попереднього з'являється якісно новий тип поведінки: в площині 3 рівноважна точка локально нестійка, але оточена стійким граничним циклом.

Конкуренція для першої змінної  $u$  відображається доданками  $(\varepsilon u^2)$  і виступає стабілізуючим фактором, а насиченість другої змінної  $v$  (за рахунок множника  $1 / (1 + \alpha u)$ ) є дестабілізуючим фактором. Вище лінії нейтральності  $N = \alpha(\alpha - 1) / (\alpha + 1)$  домінує перший фактор, а нижче — другий. У площині нестійкості рівноваги співіснування змінних відбувається в автоколивному режимі. Плавне зменшення  $\varepsilon$  спричинює втрату стійкості рівноваги з м'якою появою автоколивань.

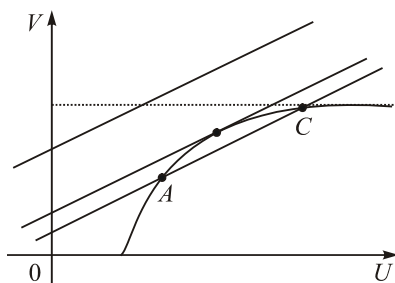
Збільшення параметра  $\alpha$ , що характеризує інтенсивність насичення, може сприяти як втраті стійкості, так і набутті її, зважаючи на параболічну залежність  $\varepsilon(\alpha)$ .

Для  $\varepsilon = 0$  ММ запишемо

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} \\ \dot{v} = -v + \frac{u \cdot v}{1 + \alpha \cdot u} - \mu \cdot v^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

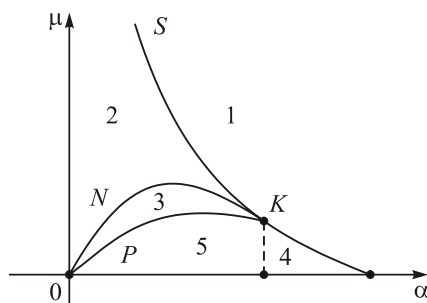


Нуль-ізокліна  $\dot{u}=0$  складається з двох прямих:  $u=0$  і  $v=1+\alpha u$ . Нуль-ізокліна  $\dot{v}=0$  — з прямої  $v=0$  та гіперболи  $y=\frac{1}{\mu}\left(\frac{u}{1+\alpha \cdot u}-1\right)$ . Пряма  $y=1+\alpha u$  і гіпербола можуть перетинатись чи ні і дотикатись, що графічно зображено на рис. 3.5а.



а)

Рис. 3.5. Взаємне розташування нуль-ізоклін



б)

Рис. 3.5. Параметричний портрет ММ (3.4)

Таким чином, точок рівноваги може бути дві, одна або жодної, координати яких знаходимо з системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} u\left(1 - \frac{v}{1 + \alpha \cdot u}\right) = 0 \\ v\left(-1 + \frac{u}{1 + \alpha \cdot u} - \mu \cdot v\right) = 0. \end{cases} \quad (3.4a)$$

Крім тривіального розв'язку існують ще дві точки  $A$  і  $C$ , координати яких визначаємо рівнянням  $\left(-1 + \frac{u}{1 + \alpha \cdot u} - \mu(1 + \alpha \cdot u)\right) = 0$ .

Отримуємо цю функцію, підставивши рівняння прямої  $v = 1 + \alpha u$  в третій доданок другого рівняння системи (3.4). Очевидні перетворення приводять до квадратного рівняння

$$\mu \alpha^2 \cdot u^2 + (2\mu \alpha + \alpha - 1) \cdot u + (\mu + 1) = 0. \quad (*)$$

Із умови невід'ємності дискримінанта  $(2\mu \alpha + \alpha - 1)^2 - 4\mu \alpha^2 (\mu + 1) = 0$  матимемо нерівність  $\mu \leq \frac{(1 - \alpha)^2}{4\alpha}$ . У випадку рівності маємо лінію  $S$ , яка на площині параметрів  $\{\alpha, \mu\}$  розмежовує площини, де існують рівноважні точки або вони відсутні (площина 1).

Згадувана рівність також є умовою існування на фазовому описі ММ (3.4) виродженої особливої точки «сідло — вузол», отже, лінія  $S$  є місцем їх розташування.

Матриця лінеаризації ММ (3.4) має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} & -\frac{u}{1 + \alpha \cdot u} \\ \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} & -1 + \frac{u}{1 + \alpha \cdot u} - 2\mu \cdot v \end{pmatrix},$$

слід  $SpJ = -\frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} - 2\mu \cdot v + \frac{u}{1 + \alpha \cdot u}$ ; визначник після алгебраїчних перетворень

$$\det J = -1 + 2\mu \cdot v \left( \frac{1}{(1 + \alpha \cdot u)^2} - 1 \right) + \frac{v}{(1 + \alpha \cdot u)^2} + \frac{u}{1 + \alpha \cdot u}.$$

Зважаючи на корені  $u_{1,2}$  квадратного рівняння (\*), на підґрунті виразів сліду і визначника матриці  $J$  лінеаризації та діаграми (див. рис. 2.7) можна дійти висновку, що точка  $A$  є вузол, або фокус (стійкість визначається параметрами  $\alpha$  і  $\mu$ ), а точка  $C$  — сідло.

Існує лінія  $N$  нейтральності рівноважної точки  $A(\bar{u}, \bar{v})$ , що випливає з рівності  $SpJ(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ , тобто  $\mu = \frac{\alpha \cdot \bar{u}^2 + (\bar{u} - \bar{v})}{2\bar{v}(1 + \alpha \cdot \bar{u})^2}$  після очевидних алгебраїчних перетворень виразу для сліду матриці.

Лінія  $N$  являє собою графік деякої функції, у чисельнику якої стоїть лінійний вираз від  $\alpha$ , а в знаменнику — нелінійна залежність також від  $\alpha$ . Графік зазначеної функції: виходить з початку системи координат і перетинає лінію  $S$  у деякій точці  $K$  (див. рис. 3.5 б).

Вище лінії  $N$  параметри  $\alpha$  і  $\mu$  сприяють стійкості особливих точки  $A$ , і навпаки. При русі зверху вниз і перетині лінії нейтральності  $N$  втрата точкою  $A$  стійкості супроводжується появою малого стійкого граничного цикла, що геометрично для кожної точки з площини, відображено на рис. 3.6 [8].

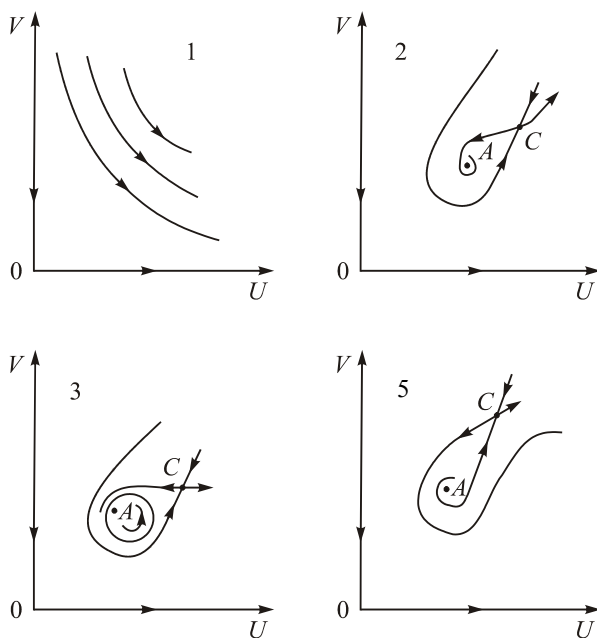


Рис. 3.6. Фазові портрети ММ (3.4) для різних областей

**Зауваження!** Принагідно привернемо увагу до такого. Якщо економічну систему, що перебуває в стаціонарному (рис. 3.6 для площини 2) або автоколивному (рис. 3.6 для площини 3)

режимах збурити (в суспільстві здійснюється різними важелями), наприклад, різким зменшенням числових значень змінної  $u$ , то спостерігатиметься необмежене кількісне зростання першої змінної ММ (3.4). Історія розвитку економіки рясніє прикладами такого роду (дефолти, біржові обвали), а також і в інших сферах (екологія, біофізика, біологія), коли спостерігаються зазначені парадоксальні ефекти.

Через точку  $K$  (рис. 3.5 б) проходить ще одна біфуркаційна лінія  $P$ : її утворюють такі точки (значення параметрів  $\mu$  і  $\alpha$ ), для яких на фазовому описі ММ одна із сепаратрис сідла, що виходить із нього, тобто має місце петля сепаратрис (сепаратрисний цикл). Лінія петлі сепаратрис на рис. 3.5б позначена  $P$ . На рис. 3.7 приводиться геометрична інтерпретація сказаного вище [8].

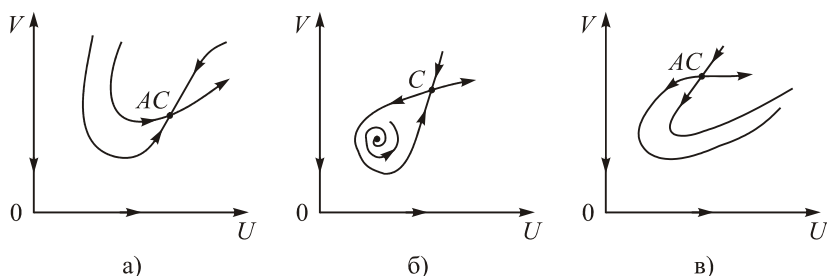


Рис. 3.7. Фазові портрети ММ (3.4)  
для значень параметрів на біфуркаційних лініях:  
а) для  $S$  зліва і вище точки  $K$ ; б)  $P$ ; в) для  $S$  справа і нижче точки  $K$ .

### 3.1.3. Характеристика описів (портретів) і біфуркацій

Розглянемо динамічну поведінку, що описується ММ (3.4): площина 1 порожня; площина 2 має дві точки рівноваги; в площині 3 лежать стійкий граничний цикл і поза ним стійка рівноважна точка; в площині 5 існує одна стійка особлива точка. У параметричному описі (рис. 3.5б) відсутня тривіальна точка.

Оскільки точка  $K$  є спільною для всіх чотирьох площин 1, 2, 3 і 5, то в околі її можна розглядати всі біфуркації.

У площині 1 не існує рівноважних (особливих) точок. При перетині лінії  $S$  вище точки  $K$  з переходом до площини 2 з'яв-

ляється стійкий сідло-вузол  $AC$  (рис. 3.7а), який згодом розпадається на стійкий вузол  $A$  і сідло  $C$ .

Сепаратриса, що входить у сідло  $C$  (рис. 3.6 площина 2), розмежовує площини на дві частини для початкових умов, в одній з них має місце тяжіння до точки  $A$ , а в другій — траєкторії розбігаються.

Для параметрів з площини 3 залежно від початкових умов фазові траєкторії накручуються на граничний цикл або розбігаються.

Для моменту, коли параметри ММ (3.4) набувають значень, що лежать на лінії  $P$  петлі сепаратриси, стійкий граничний цикл зливається з петлею (рис. 3.7б). З переходом параметрів до площини 5 сепаратрисний цикл на фазовому описі зникає (рис. 3.6).

Таким чином, взаємне розташування трьох кривих: сідло-вузла  $S$ ; лінії  $N$  нейтральності і петлі  $P$  сепаратрис цілком визначає структуру параметричного опису (рис 3.5б) ММ (3.4), який являє собою цілісну структуру взаємоузгоджених площин, що робить правомірною його назву — структурний опис.

Очевидно, що поняття структурного або параметричного портрету тільки з'являється в економіко-математичному моделюванні, хоча воно цілком принагідно існує в інших сферах математичного моделювання [8, 137]. Слушність використання цього поняття для успішного і дієвого пізнання природи і механізму нелінійної економічної динаміки на підґрунті комп'ютерного моделювання незаперечна.

Залежно від значень параметрів ММ (3.4) та початкової умови (стартової для модельованого економічного процесу) можливі описувані цією моделлю такі режими функціонування економічної системи: а) необмежене зростання змінної  $x$  і асимптотична насиченість — стабілізація щільності значень змінної  $y$  на рівні

$v = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ; б) стійке співіснування складових економічного процесу в стаціонарному режимі — рівноважний стан у точці  $A$  або в автоколивному режимі — стійкий граничний цикл.

При значеннях параметрів у площинах 1 і 5 поведінка розв'язків ММ (3.4) не залежить від початкових умов; для площин 2 і 3 фазовий простір розподіляється на одну частину — площин тяжіння стійкої рівноваги, або стійкого граничного цикла, і другу, де фазові траєкторії змінної  $x$  необмежено зростають.

Межу площини початкових умов, в яких розв'язки ММ скінченні, справедливо кваліфікувати як небезпечну для нормального функціонування економічної системи. Резонно на параметричній площині виокремити ділянку змінюваності параметрів, в якій ре-

алізується режим нормального функціонування. Відповідно межа її називатиметься небезпечною параметричною. Для ММ (3.4) зазначену площину утворюють 2 і 3, а межею виступають ділянки лінії  $S$  вище точки  $K$  і лінії  $P$  петлі сепаратриси. З рис. 3.5б витікає, що будь-яка варіація  $\mu$  небезпечна: у разі збільшення  $\mu$  рівновага залишається стійкою, але наближається до межі ділянки тяжіння і, досягнувши критичного значення (перетину лінії  $S$ ), сягає межі площини 2 (утворюється сідловузол) і перестає існувати; у разі зменшення  $\mu$  втрачається стійкість рівноваги з утворенням малого стійкого граничного цикла (м'яке збудження автоколивань), розміри його збільшуються — зростає амплітуда коливань, котрі стають релаксаційними і нарешті — цикл руйнується в петлі сепаратриси.

Збільшення  $\mu$  свідчить про посилення конкуренції в середовищі, описуваному змінною  $u$ , тобто відбувається падіння її граничної щільності значень. Зменшення  $\mu$  сприяє спочатку локальній нестійкості, а потім і глобальній.

Отже, для низки математичних моделей динаміки нелінійної економічної системи побудовані двовимірні параметричні описи на координатних площинах простору параметрів ( $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ ).

У разі змінюваності числових коефіцієнтів ММ (3.4) можуть мати місце такі біфуркації: 1) при виході з площини 2 до інших спостерігається так званий *жорсткий зрив рівноваги*, що відбувається навіть за малих кількісних значень змінних моделі; 2) при перетині межі площин 2 і 3 відбувається так званий *м'який зрив*, або *зародження автоколивань*, навколо єдиної рівноваги; 3) для переходу з площини 3 в іншу, крім 2, може мати місце також жорсткий зрив рівноваги з виходом на стійкий граничний цикл; 4) при виході з площини 5 в інші можуть відбуватися жорсткий зрив автоколивань і перехід системи до стійкої рівноваги в середині граничного циклу. Інший можливий варіант розвитку подій — відбувається одночасне зародження великого циклу, начебто жорсткого збудження, але під час руху у зворотному напрямку для того самого значення параметра немає місця явищу гістерезису (рух по циклу припиняється).

**Зауваження!** Очевидно, що поняття жорсткого зриву цілком відповідає такому економічному явищу, як дефолт, або біржовий обвал, коли відбувається стрімке падіння показників, хоча напередодні витримувався плавний характер їх змінюваності за еволюції умов перебігу даного процесу.

Отже, на підґрунті математичного моделювання здійснено дослідження гіпотетичної нелінійної економічної системи, а саме: а) якісно вивчено математичні моделі з кількома стійкими атракторами; б) розглянуто динаміку поведінки залежно від числових параметрів моделі; в) ураховано стани насиченості і конкуренції.

Привернуто увагу до такого: а) існує так зване *порогове*, або *критичне*, значення числових коефіцієнтів ММ, перехід через яке принципово змінює режим функціонування; б) спостерігається розмаїття фазових описів та особливий характер їх поведінки біля межі стійкості; в) не тільки інтенсивність діянь ззовні, але й внутрішні механізми (стан) є визначальними в режимі функціонування економічної системи.

Якісне вивчення математичних моделей продемонструвало широку альтернативу динамічних режимів економічної системи, їх можливої взаємодії та взаємовпливу, що повністю відповідає вербальним уявленням економічної спільноти про складний характер економічних процесів.

---

### 3.2. Синергетичне моделювання економічного стану

---

За допомогою обчислювального експерименту над запропонованими у праці нелінійними моделями кількісно вивчаються залежності між капіталом суспільства, платоспроможним попитом населення і нормою прибутку. Досліджується перебіг процесів, коли два з числа трьох економічних факторів є функціями третього за умови його зростання.

#### Економічна синергетика і динаміка

Наприкінці ХХ ст. з'ясувалося, що світ економіки — нелінійний і з досить складною динамікою. Донедавна домінуюче в економічній науці лінійне мислення почало відходити у минуле.

Економічна структура нинішнього суспільства кваліфікується як складна відкрита, нелінійна і нестационарна система необоротної дії, до вивчення механізмів функціонування якої залучається синер-

гетика — наука про нелінійне співіснування складових об'єкта дослідження. Саме синергетичний підхід до аналізу взаємодії та взаємовпливу економічних складових дає глибоке розуміння проблем економіки та їх розв'язання, надаючи сценарії довгострокового розвитку і роблячи короткострокові прогнози за наявності певних обставин. Більше того, володіючи інформацією такого роду, тобто можливими сценаріями еволюції, можна впливати на створення передумов функціонування раціональної, дієспроможної та ефективної економіки, щонайменше — прагнути до цього.

Перенесення синергетичних ідей в сферу економіки сприяло появі економічної синергетики (свого часу так було з кібернетики), яка сприймається як теорія ринкової трансформації в Росії.

Спричинене нелінійною поведінкою економіки, нелінійною логікою її розвитку та нелінійними способами формування економічного стану в центр сучасних економічних досліджень — синергетичного моделювання, ставлять математичні моделі і комп'ютерний (обчислювальний) експеримент. З огляду на існування низки математичних пакетів прикладних програм (ППП), наприклад, Mathcad, Matlab та ін., — інструментів числового аналізу характеристик об'єкта моделювання, постає проблема побудови адекватних ММ. Більше того, поки що відсутні бодай елементи теорії утворення рівнянь, що правильно описують об'єкт моделювання, динаміку його характерних рис.

Стисло викладемо ретроспективу синергетичного моделювання економіки. Дійсно, бракує ефективно працюючих ММ економіки з достатньо вагомих причин. Серед небагатьох (буквально кількох) ММ нелінійної динаміки економічної структури суспільства привертає увагу така система трьох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку [92]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = bx((1-\sigma)z - \delta \cdot y) \\ \dot{y}(t) = x(1 - (1-\delta)y + \sigma \cdot z), \\ \dot{z}(t) = a(y - dx) \end{cases} \quad (3.5)$$

де залежні змінні  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  відповідно відображають капітал суспільства, платоспроможний попит населення і норму прибутку для діючого способу господарювання,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  — їх похідні по незалежній змінній  $t$  часу;  $a = 7$ ,  $b = 0,4$ ,  $d = 1,17$  —



числові коефіцієнти ММ для Росії;  $\sigma$ ,  $\delta$  — параметри впливу на якісну поведінку інтегральних кривих моделі (3.5). На підґрунті (3.5) для Росії було розроблено досить вдалі сценарії:

а) розвитку подій у плановій економіці (коефіцієнт  $\sigma < 0$ );

б) відмова від командно-адміністративного стилю господарювання;

в) функціонування ринкової економіки (коефіцієнт  $\sigma > 0$ ).

Події відтворювались у часі і на фазовій площині.

На завершення пункту вкажемо на одну можливість, яку слід віднести до ретроспективи нелінійного економічного аналізу.

Із системи рівнянь (3.5) утворимо ММ планової економіки, котрій притаманна стала (заздалегідь запланована) величина норми прибутку. Оскільки  $z = A \in \text{const}$ , то  $\dot{z} = 0$  і звідси  $y = dx$  та  $\dot{y} = d\dot{x}$ . Після алгебраїчних перетворень матимемо диференціальне рівняння динаміки поширення капіталу

$$\dot{x} = x[c_1 - c_2x],$$

де  $c_1 = (1 - \sigma)Ab$ ;  $c_2 = \delta db$ .

Це рівняння логістичного типу. Необхідно відмітити, що вперше (ще у 1934 р.) рівняння руху капіталу зустрічається у Кондрат'єва [72, с. 413].

Друге рівняння ММ (3.5) також трансформується до логістичного типу

$$\dot{y} = y[D_1 - D_2y],$$

де  $D_1 = \frac{1 + \sigma A}{d}$ ;  $D_2 = \frac{1 - \delta}{d}$ .

Існує ще один осереднений варіант модифікації ММ (3.5) для планової економіки. Ураховуючи  $\dot{y} = d\dot{x}$ , додаванням перших двох рівнянь і наступними перетвореннями дістанемо

$$\dot{x} = x[B_1 - B_2x],$$

де  $B_1 = (1 + bA + \sigma A - b\sigma A - d\delta)/(1 + d)$ ;  $B_2 = d(1 - \delta)/(1 + d)$ .

Як видно, усі відмінності приховані у константах  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $B_1$  і  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $B_2$  рівняння логістичного типу.

На завершення параграфу стисло сформулюємо зміст проблеми синергетичного моделювання. Як теоретика, так і практика-економіста (ученого і підприємця) завжди цікавить таке:

а) характер еволюції економічних подій залежно від рівня капіталізації — *чого варто чекати*;

б) вплив платоспроможного попиту в суспільстві на перебіг подій у трансформаційній економіці — *що є рушійною силою*;

в) *роль норми прибутку*, розподіл котрого в суспільстві напрямки сприяє диференціації населення — утворенню верств населення з різним ступенем доходу, роблячи суспільство вкрай неоднорідним у найгіршому його варіанті.

Певною мірою коло цих питань дискутувалося в літературі та суспільстві, не оперуючи відповідною числовою інформацією, добути котру можна тільки за допомогою математичного моделювання — широкомасштабного обчислювального експерименту в економіці. Між іншим, будь-яка інформація має бути своєчасною і оперативною, щоб прийняті на її підґрунті рішення адекватно відповідали реаліям економічного життя.

Наша мета полягає у вивченні поведінки двох (з числа зазначених вище трьох) економічних факторів, залежно від зростання третього, тобто кількісно дослідити причинно-наслідковий зв'язок та особливості його перебігу. У відомій науковій літературі досліджувалась еволюція економічних факторів  $(x(t), y(t), z(t))$  в часі.

#### Взаємна еволюція факторів економічної системи

**Основні результати.** Діленням перших двох рівнянь ММ (3.5) на її третє одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = \frac{bx((1-\sigma)z - \delta \cdot y)}{a(y - dx)}; \\ \frac{dy}{dz} = \frac{x(1 - (1-\delta)y + \sigma \cdot z)}{a(y - dx)}, \end{cases} \quad (3.6)$$

де незалежною змінною є норма прибутку  $z$ , а залежні змінні — функціями  $x(z)$  і  $y(z)$ , тобто ММ (3.6) описує нелінійну поведінку

капіталу  $x$  і платоспроможного попиту  $y$  в суспільстві залежно від норми прибутку.

Для командно-адміністративної економічної системи (коефіцієнт  $\sigma < 0$ ) незалежно від числового значення  $\delta$  результати розрахунку ММ (3.6) практично одного гатунку (рис. 3.8. і 3.9) падає капіталізація і платоспроможний попит суспільства, що свідчить про одне — неминучу розруху.

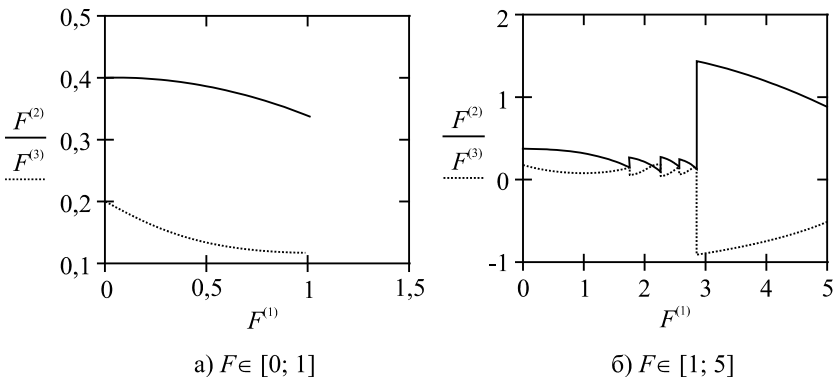


Рис. 3.8. Інтегральні криві капіталу  $F^2$  і платоспроможного попиту  $F^3$ ,  $F^1$  — норма прибутку

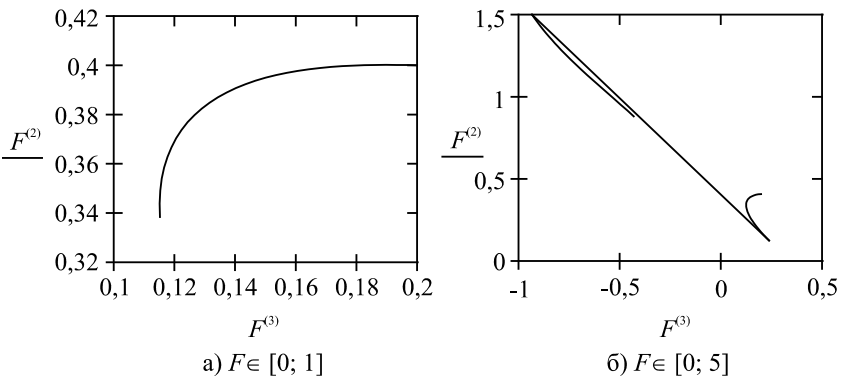


Рис. 3.9. Фазові описи для  $\sigma = -1$ ,  $\delta = 0,7$

З початком процесу переходу до ринкової економіки (значення коефіцієнтів  $\sigma$  беруться в околі нуля) попередні тенденції зберігаються, настання розрухи відбувається катастрофічно.

Для всіх раніше розглянутих значень параметрів  $\sigma$  і  $\delta$  коливний характер  $x$  і  $y$  схильний до хаотичного режиму, це має місце. Тільки для  $\sigma=1$  і незалежно від  $\delta$  (тиску на бізнес) з'являється якісно нова ситуація (рис. 3.10) — незначне зростання капіталу, але функція  $y(z)$  лишається спадною. Робиться висновок: уповільнене реагування капіталу на змінюваність норми прибутку призводить економічну систему до знищення.

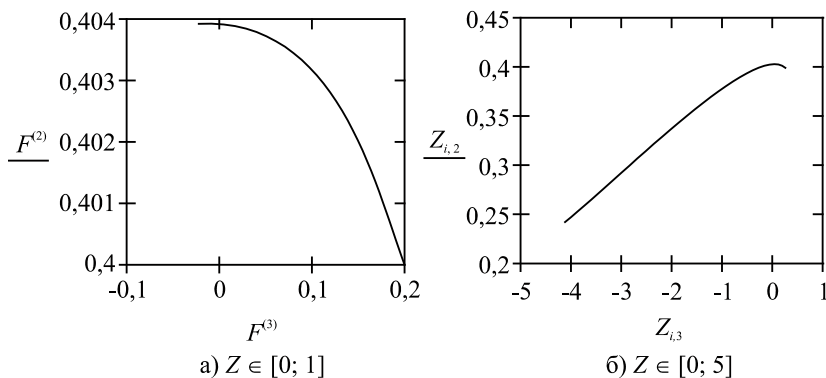


Рис. 3.10. Фазові портрети для  $\sigma=1$ ,  $\delta=0,6$

Якщо перше і третє рівняння моделі (3.5) поділити на друге, то доходимо до ММ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{b((1-\sigma) \cdot z - \delta \cdot y)}{(1 - (1-\delta)y + \sigma \cdot z)}, \\ \frac{dz}{dy} = \frac{a(y - dx)}{x(1 - (1-\delta)y + \sigma \cdot z)}, \end{cases} \quad (3.7)$$

згідно з якою рух капіталу і змінюваність норми прибутку відбуваються залежно від платоспроможного попиту суспільства. Цим самим ставиться питання про роль платоспроможного попиту, який формується державою і населенням.

Для суспільства з командно-адміністративною економікою ( $\sigma=-1$ ) за умов значного тиску на підприємництво ( $\delta=0,7 > \delta^* = 0,681$ ) розрахунки ММ (3.7) справляють найбільше враження (рис. 3.11 і 3.12). Капітал — сталий, а норма прибутку коливається, коли нарощується якимось чином попит.

Слушно зауважити, що принципово інша поведінка графіків  $x(y)$  і  $z(y)$  спостерігається при  $z_0 = 0,05$  (вони практично постійні для  $\forall y \in [0; 0,65]$ , а потім — обвал для  $z(y)$ , графік заходить у площину від'ємних значень). Цей факт наводить на думку про суттєву роль стартових умов для економічних процесів.

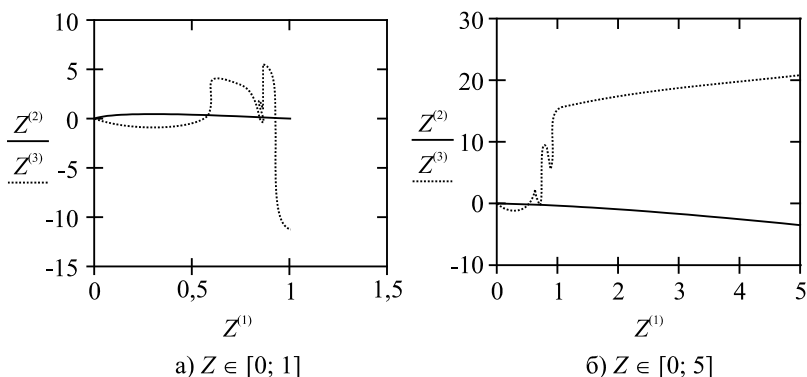


Рис 3.11. Криві капіталу  $Z^2$  і норми прибутку  $Z^3$  від попиту  $Z^1$

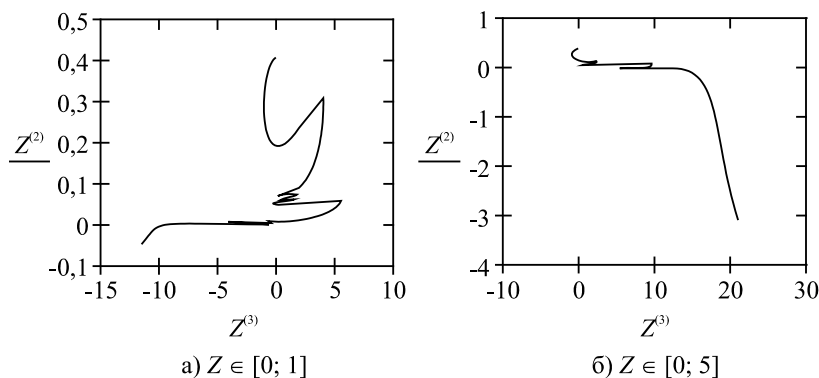


Рис. 3.12. Фазові портрети для  $\sigma = -1$ ,  $\delta = 0,7$

На етапі переходу від командного стилю управління економікою (параметр  $\sigma$  в околі нуля,  $\delta < \delta^*$ ) спостерігається коливний процес для  $z(y)$ , зростання капіталу  $x(y)$  (рис. 3.13 і 3.14).

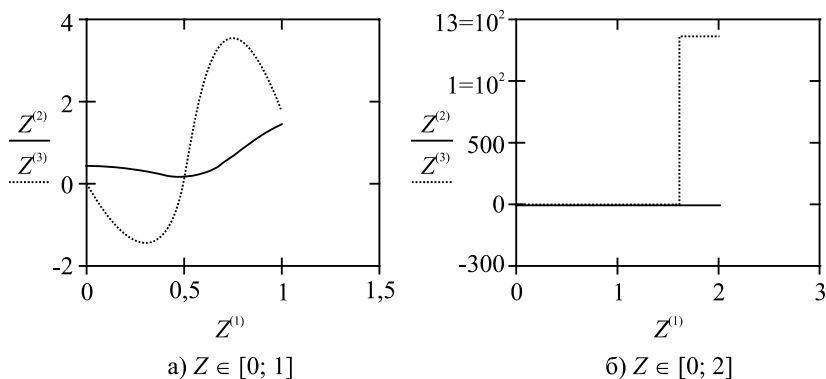


Рис. 3.13. Залежність капіталу  $Z^2$   
і норми прибутку  $Z^3$   
від платоспроможного попиту  $Z^1$

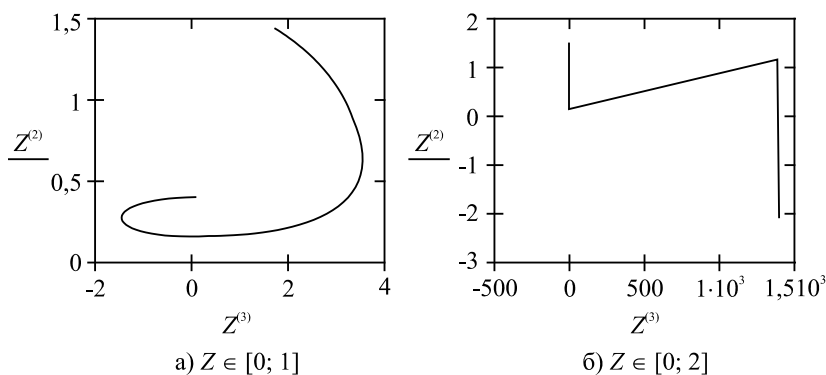


Рис. 3.14. Фазові портрети для  $\sigma = -0,05$   
(стадії переходу до ринку)  
і  $\delta = 0,4$  (тиск на бізнес)

Для різноманітних пар  $\{\sigma \text{ і } \delta\}$  із множин  $\sigma = \{0,266; 0,276; 0,278; 0,2802; 0,284; 0,29\}$  і  $\delta = \{0,4; 0,5; 0,6; 0,65; 0,662; 0,682\}$  числових значень параметрів, якими обумовлена поведінка інтегральних кривих ММ (3.5), реально спостерігається типова ситуація (рис. 3.15 і 3.16) — практично сталий обсяг капіталу і підвищення норми прибутку за умов нарощування платоспроможного по-

питу на відрізку  $[0; 1]$ . Раніше було встановлено [92], що за зменшенням норми прибутку приховано падіння попиту на товар.

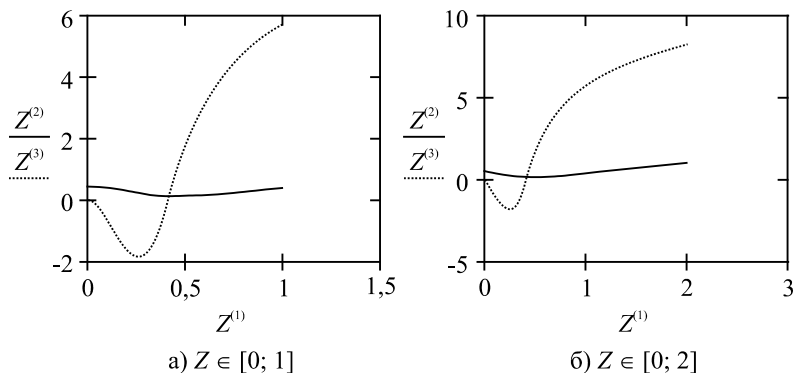


Рис. 3.15. Залежність  $x(y)$  і  $z(y)$  — капіталу і норми прибутку від платоспроможного попиту

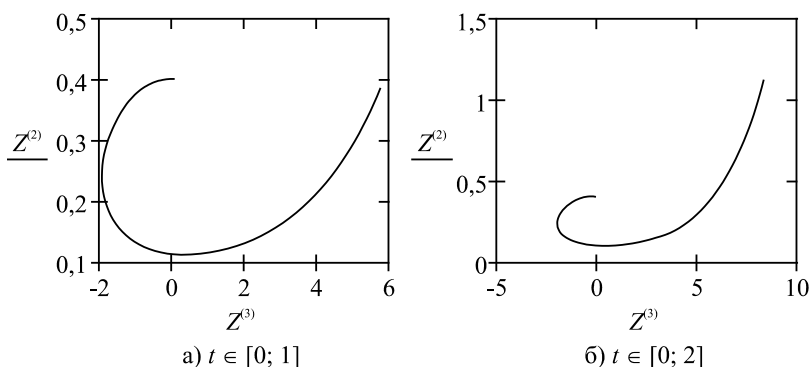


Рис. 3.16. Фазові портрети для  $\sigma = 0,266$ ,  $\delta = 0,65$

Теза [92], що економіка руйнується як за малих значень  $\delta$ , так і за великих  $\sigma$ , підтверджується. Щоправда, суперечливі результати комп'ютерного моделювання, наприклад, для  $\delta = 0,4$  і  $\sigma = 1$ , за різних початкових умов сприяють виникненню запитань:

- наскільки з математичної точки зору коректна модель (3.7);
- чи існують серед рівнянь ММ (3.7) жорсткі;

в) яка роль числового методу і окремих складових числового інтегрування ЗДР.

Розділивши друге і третє рівняння системи (3.5) на перше, доходимо до ММ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{(1 - (1 - \delta)y + \sigma \cdot z)}{b((1 - \sigma)z - \delta \cdot y)}, \\ \frac{dz}{dy} = \frac{a(y - dx)}{bx((1 - \sigma)z - \sigma \cdot y)}, \end{cases} \quad (3.8)$$

згідно з якою платоспроможний попит  $y$  і норма прибутку  $z$  пов'язуються з рівнем капіталізації суспільства, тобто розглядаються функції  $y(x)$  і  $z(x)$ .

Для командно-адміністративного управління економікою ( $\sigma = -1$ ), незалежно від  $\delta$ , спостерігається лінійне зростання платоспроможного попиту за умов збільшення капіталу (зростання незалежної змінної). У такому разі норма прибутку практично відсутня (переходить у площину від'ємних значень). Такий же характер розвитку процесів має місце для всіх  $\sigma$  з околу нуля та для довільних комбінацій параметрів  $\sigma$  і  $\delta$  із множини їх можливих значень.

Лише для  $\forall \delta \leq 0,6$  (відсутній тиск на підприємців) і  $\sigma = 1$  за умов зростання капіталу на порядок попит стабілізується на стандартному рівні (рис. 3.17 і 3.18), а норма прибутку непомірно підвищується: неконтрольоване збільшення доходів — пагубне для економіки.

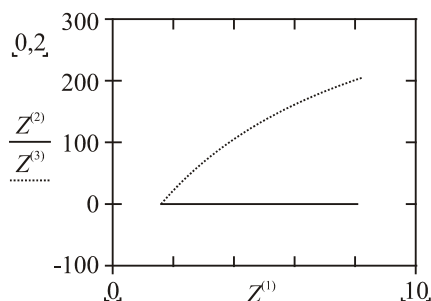


Рис. 3.17. Залежність  $y(x)$  і  $z(x)$  при  $\sigma = 1$  і  $\delta = 0,6$



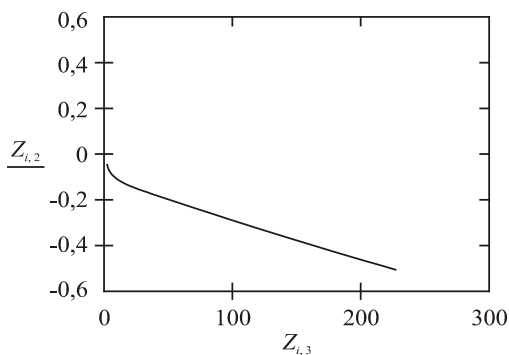


Рис. 3.18. Фазовий опис

Таким чином, для вивчення економічного стану суспільства в координатах «капітал  $x$  — платоспроможний попит  $y$  — норма прибутку  $z$ » запропоновано так звані *площинні нелінійні ММ* (3.6)—(3.8), у кожній з яких дві координати є функціями третьої.

На підґрунті комп'ютерного моделювання матимемо результати:

а) інерційність капіталу, його слабе реагування на змінюваність норми прибутку і платоспроможного попиту згубно впливає на функціонування економічної системи, котра закономірно прямує до розпаду;

б) малий платоспроможний попит також сприяє самознищенню системи, але з часом;

в) непомірне зростання доходів та їх особисте споживання спонукають систему до занепаду, спричинюючи розруху.

Нелінійні ММ (3.6)—(3.8) покликані допомогти у розв'язанні важливих і нелегких проблем організації, передбачення і прогнозування, прийняття рішення в економіці.

Згадувані моделі також можуть суттєво сприяти формуванню належних умов з досягнення жаданого розвитку подій, уникаючи небажаного або максимально його виключаючи. Врешті-решт вони послугують удосконаленню і розширенню нашого знання нелінійної макроекономічної динаміки.

---

### 3.3. Про динаміку неформальної економічної популяції

---

Розглянуті більш загальні, ніж відомі у науковій літературі, математичні моделі динаміки неформальної економічної популяції. На підґрунті їх аналізу описано сценарії розвитку подій.

У країнах пострадянського простору досить часто спостерігається явище, коли ядро ринку деякого товару формується не стільки економічними законами, скільки визначається системами багаторазового мережного маркетингу або з інших причин. При цьому справляється тиск на індивідуумів з латентною схильністю до споживання продукту або своєрідне формування потреби впливати саме на такий продукт, маніпулюючи фізіологічними і психологічними особливостями людини.

Розповсюдження зазначеного вище товару уподібнюється епідемії, коли частина членів суспільства перетворюється на стійку економічну неформальну популяцію: інформація поширюється контактено — від попереднього споживача (він же і поширювач) до наступного. Має місце явище масового характеру, спостерігається аналогія з поширенням інфекційної хвороби — ланцюгове відтворення собі подібних. При цьому щільність населення і ступінь комунікативності членів суспільства істотно впливають на швидкість поширення хвилі хвороби.

У припущенні однорідності простору середовища потенційних споживачів і нульового насичення ринку ММ розвинення неформальної економічної популяції для короткострокового періоду записується

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau_0} N \quad (3.9)$$

як відоме рівняння Мальтуса, в якому залежна змінна  $N$  є кількість задіяних у бізнесі, похідна  $\frac{dN}{dt}$  за часом  $t$  — динаміка становлення мережі, величина  $\tau_0$  — середній час навернення одного клієнта мережної структури.

У розв'язку  $N(t) = N_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$  рівняння (3.9) відтворюється стрибкоподібне зростання кількості клієнтів (споживачів) для малих значень  $\tau_0$ .

Із урахуванням стану насиченості ринку динаміка процесу становлення неформальної економічної популяції описується відомим у біології рівнянням Ферхюльста

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau_0 K} N(K - N), \quad (3.10)$$

де  $K$  — місткість середовища (сума потенційних і задекларованих споживачів). Аналітичний розв'язок ММ (3.10) матиме вигляд

$$N = \frac{\left( KN_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \right)}{\left( K - N_0 + N_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \right)}, \text{ де } N_0 \text{ — початкова умова.}$$

Але функціонування неформальної економічної популяції межує з тіньовою діяльністю і в окремих випадках вкрай негативно впливає на загальний стан справ у суспільстві. Саме тому держава покликана регулювати згадувану бізнес-структуру, обмежуючи її діяльність. Такого роду прагнення відображають ММ

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau_0 K} N(K - N) - P \quad (3.11)$$

— так звану *логістичною моделлю з відловом*, де  $P$  відповідає сумарному убутку, природного походження чи викликаного певним тиском держави.

Стійкість розв'язку ММ (3.11) визначається нерівністю  $\left(4P \cdot \tau_0 / K\right) \leq 1$ , тобто ефект зменшення популяції досягається комбінацією величин  $P$  і  $\tau_0$ , зокрема зростання  $\tau_0$  відображає жорсткість покарання. Інакше зусиллями держави неформальну економічну популяцію можна скоротити не більше, ніж наполовину місткості середовища.

У статті [17] наголошується, що величина  $P$  принципово не може бути постійною. Саме цю тезу детально розглянемо далі.

Попередньо зазначимо, що можна вказати момент часу, до якого відбувається зростання чисельності неформальної економічної популяції. Дійсно, прирівнюючи до нуля другу похідну  $\frac{d^2 N}{dt^2}$

рівняння (3.10), тобто  $\ddot{N} = \frac{1}{\tau_0} - \frac{2}{\tau_0 K} N$  і  $\ddot{N} = 0$ , і враховуючи аналітичний розв'язок ММ (3.10), після очевидних алгебраїчних перетворень дістанемо формулу  $t^* = \tau_0 \ln\left(\frac{K - N_0}{N_0}\right)$ . Отже, на інтервалі  $[0, t^*]$  відбувається зростання швидкості чисельності неформаль-

ної економічної популяції, яка згодом падає на відрізок  $[t^*, \infty)$ . Зрозуміло, що одержана формула матиме місце для ММ (3.11).

На завершення розгляду неперервної ММ неформальної економічної популяції зазначимо, що добре відоме в економіці запізнення процесів відображається в найпростішому варіанті логістичним рівнянням з лагом  $h$  такого вигляду

$$\dot{N} = rN(K - N(t - h)),$$

де  $r = 1/(\tau_0 - K)$ .

Скориставшись розвиненням функції  $N(t - h)$  в ряд Тейлора  $N(t - h) = N(t) - h\dot{N}(t) + \dots$ , ММ набуває вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\dot{N} = \frac{rN(K - N)}{1 - KrN},$$

аналітичний розв'язок якого також знаходимо способом відокремлення змінних і запишемо

$$N(K - N)^{(h/\tau_0)-1} = C \cdot e^{(t/\tau_0)}$$

як загальний інтеграл, де  $C$  — довільна стала, для якої  $t = 0$  є  $C = N_0(K - N_0)^{(h/\tau_0)-1}$ .

Як у випадку рівняння (3.11) ММ, якою враховується лаговий характер процесу існування неформальної економічної популяції, набуває вигляду

$$\dot{N} = \frac{rN(K - N)}{1 - KrN} - P.$$

Точки рівноважного стану ( $\dot{N} = 0$ ) знаходимо як корінь квадратного рівняння  $N^2 - K(P + 1)N + \frac{P}{r} = 0$  і після нескладних перетворень матимемо

$$N_{1,2}^* = \frac{K[1 + P]}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{P}{r} \cdot \frac{4}{K^2(1 + P)^2}} \right].$$

Очевидно, повинна виконуватись нерівність

$$\frac{P}{r} \cdot \frac{4}{K^2(1+P)^2} \leq 1.$$

Перейдемо від неперервного (3.10) до дискретного варіанта ММ досліджуваного явища, що краще відповідає реаліям. Заміною похідної різницеvim відношенням  $\frac{dN}{dt} = \frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t}$ , в якому нижній індекс свідчить про точку незалежної змінної  $t$ , а  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  — приріст, і завдяки очевидним алгебраїчним перетворенням одержуємо

$$N_{n+1} = N_n(a - bN_n) \quad (3.12)$$

дискретну ММ неформальної економічної популяції, де покладено  $a = 1 + \frac{\Delta t}{\tau_0}$ ;  $b = \frac{\Delta t}{\tau_0 K}$ .

Дискретний варіант неперервної ММ (3.11) буде таким:

$$N_{n+1} = N_n(a - bN_n) - P. \quad (3.13)$$

У науковій літературі, наприклад [23, 138], такий варіант називається *логістичною моделлю з так званим відловом (відбором)*, за допомогою якої вивчається поведінка соціологічних об'єктів та біологічних популяцій в умовах насичення процесів і наявності постійно діючих факторів.

З метою подальшого вивчення існування неформальної економічної популяції зручно скористатись відомими щодо логістичного рівняння фактами в синергетичній літературі [7, 37].

Дискретна модель (3.13) володіє двома стаціонарними станами

$$x_{1,2}^* = \frac{(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4bP}}{2b},$$

причому стійкому відповідає корінь  $x_1^*$  рівняння зі знаком «+» перед радикалом, а нестійкому стану — знак мінус.

В умовах дії квоти на відлов  $P = (a-1)^2 / 4b$  виконується  $x_1^* = x_2^* = (a-1)^2 / 2b$ : якщо з певних причин популяція стане меншою від зазначеної величини, то з часом вона гине.

Для ситуації перелову, тобто  $P > (a-1)^2 / 4b$ , неформальну економічну популяцію чекає загибель за будь-яких стартових умов, що спричинили постійно діючі фактори.

Напевно, квота на відлов має враховувати поточний стан досліджуваної системи, цим самим відмовляючись від адміністративного способу прийняття рішень. Інакше, покладаючи  $P = k \cdot N$ , ММ в нашому випадку набуває вигляду

$$N_{n+1} = N_n(a - b \cdot N_n) - k \cdot N_n \quad (3.14)$$

Таким чином, на відміну від апіорної величини відлову ( $P = \text{const}$ ) у ММ (3.14) використовується більш гнучкий — апостеріорний спосіб її вибору, що відповідає знаному в техніці прийому зворотного зв'язку.

Широкомасштабний обчислювальний експеримент над рівнянням (3.14) свідчить, що за довільних початкових (стартових) умов траєкторії збігаються до стаціонарного стану.

Слід зауважити, що деяким вибором параметрів  $a$ ,  $b$  і  $k$  ММ (3.14) можна одержати хаотичні режими існування неформальної економічної популяції. Отже, постає проблема визначення площин змінюваності параметрів, за яких досліджуване явище веде себе стійко.

Не менший інтерес викликає стратегія управління режимами, переслідуючи мету досягнути бажаного результату якнайкраще. Варто знати межу числових параметрів, щоб встановити рівень їх взаємозв'язку і міру їх взаємовпливу на кінцевий результат моделювання.

---

### 3.4. Вивчення проблеми зайнятості членів суспільства

---

У припущенні рівномірного розподілу робочої сили створено математичну модель — систему 2-го порядку звичайних диференціальних рівнянь (точкову модель), якою описується

проблема зайнятості в суспільстві. Виконано якісний аналіз ММ: встановлено площину змінюваності коефіцієнтів моделі, від співвідношення яких залежить наявність працюючих і безробітних у працездатному віці.

Як відомо [160], економічний цикл, будучи визначальним у здійсненні належної політики в економіці суспільства, являє собою коливання зайнятості населення, обсягу продукції та рівня цін (оптових, роздрібних). У свою чергу кількість зайнятості тісно пов'язана з обсягом реального доходу або продукції держави і виступає, на нашу думку, рушійною складовою сили макроекономічної динаміки циклу.

Цілком слушно знати періодичність величин, що характеризують економічний цикл. Поки що спостерігається лише констатація факту: статистична економічна інформація засвідчує наявність хвильових процесів в економіці. За суттю, це ретроспектива, хоча більше всього цікавить майбутнє, перспектива розвитку подій. Саме цього чекає від науки (теорії) економічна практика. Задовольнити економічні потреби людей можна тільки за допомогою створення і застосування у прийнятті рішень відповідних математичних моделей та їх, перш за все, якісного і кількісного аналізу.

При цьому результатом якісного вивчення ММ є вибір належної головно з економічної точки зору траєкторії процесу з міркувань адекватності, а потім кількісно її відстежувати — деталізувати хід подій. Причому не виключається критичний набір параметрів моделі, коли складові величини процесу моделювання можуть набувати подекуди пікового характеру (добре відомі в техніці або фізиці режими із загостренням). Підхід з позиції комп'ютерного моделювання виключає, таким чином, кризові варіанти розвитку економічної ситуації.

У підрозділі 3.4 викладено концептуальні підходи і принципи побудови ММ зайнятості населення (проблеми робочих місць), наводяться міркування щодо якісного дослідження ММ, що в сукупності сприяє вивченню реально існуючих економічних циклів. Проблема зайнятості можна асоціювати безпосередньо з кількістю працюючих на виробництві і безробітних або опосередковано — через динаміку зростання кількості підприємств та їх банкрутств, оскільки саме так робочі місця створюються або ліквідовуються.

У припущенні рівномірного (для окремо взятого регіону розміщення продуктивних сил) розподілу робочої сили нехай непе-

первно диференційована функція  $N(t)$  відображає зайнятість, тобто її значення в дискретний момент часу  $t$  відповідає кількості робочих місць. Аналогічно, як це прийнято в демографії, біології або екології [105], закон зростання описано рівнянням

$$\frac{dN}{dT} = Q - M, \quad (3.15)$$

яким визначається змінюваність за одиницю часу кількості об'єктів виробництва (популяції) як різниці між кількістю  $Q$  і  $M$  підприємств, що відповідно утворилися в популяції та вибули з неї — збанкрутували. Величини  $Q$  і  $M$  знаходимо з урахуваннями всіх впливових факторів, причин і обставин внутрішнього чи зовнішнього походження.

Звичайно, рівняння (3.15) запишемо у вигляді

$$\frac{dN}{dt} = (B - D)N, \quad (3.16)$$

де величини  $B$  і  $D$  — функція появи нових підприємств або їх зникнення з виробництва. У загальному випадку вони залежать від  $N$ , причому  $D(t_0) = m > 0$ ,  $m$  — природний рівень банкрутства виробництва (кількість ліквідованих учасників виробничого процесу); залежність  $B(N)$  логістичного характеру ( $S$  — подібна крива) — з часом утворення нового виробництва входить у стан насиченості, спочатку зростаючи ( $B(t_0) = n_0 \neq 0$ ).

У найпростішому випадку (достатньо задовільному для економічної практики), коли приймається  $B(N) = C$ ,  $C$  — стала величина асимптотичного насичення;  $D(N) = m + \mu N$  — лінійний закон банкрутства підприємств, тоді математична модель (ММ) набуває вигляду

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right), \quad (3.16a)$$

де  $K$  — місткість економічного середовища ( $N(t) \rightarrow K$  для  $t \rightarrow \infty$ );  $r$  — параметр (у демографії — мальтузіанський). Для правої частини  $F(N) = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right)$  звичайного диференціального



рівняння (3.16а) справджується умова  $F(0) = F(K) = 0$ ,  $0 < K < \infty$ . Для її похідної матимуть місце нерівності:  $F'(0) = r > 0$ ;  $F'(N) < F'(0)$  для  $N > 0$ . Фазове описання рівняння (3.16а) має нестійку точку рівноваги  $N_1 = 0$  і стійку  $N_2 = K$ . Вся траєкторія в фазовому просторі лежить під прямою  $N(t) = F'(0)N$ .

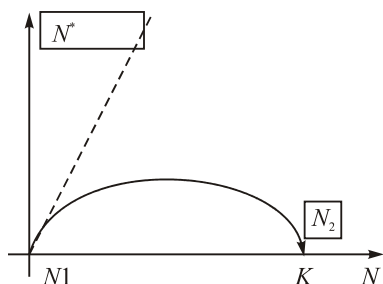


Рис. 3.19. Фазовий опис логістичної виробничої популяції

Серед можливих варіантів співвідношення між функціями  $B(N)$  і  $D(N)$  — появи і зниження кількості підприємств виробничого процесу, зупинимося на найбільш цікавому (рис. 3.20), коли справедлива нерівність  $n_0 > m$ : інтенсивність утворення агентів виробництва перевищує природне вибуття підприємств з виробничого процесу, отже, має місце лінійний закон зростання банкрутства помірному характеру. Фазовий опис такої виробничої популяції зображено на рис. 3.21.

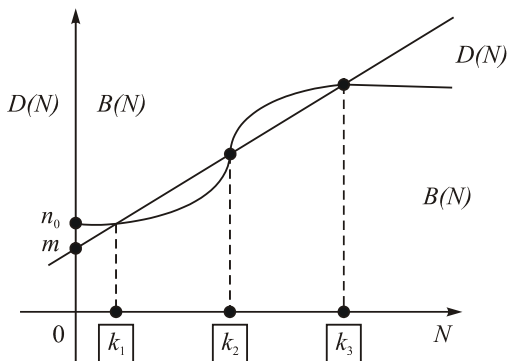


Рис. 3.20

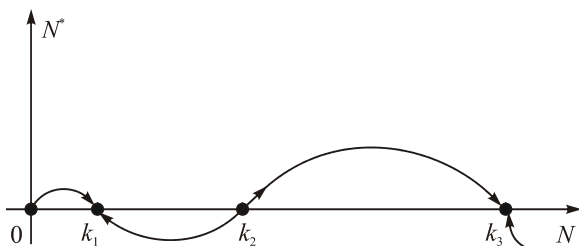


Рис. 3.21. Фазовий опис виробничої популяції

Серед чотирьох точок рівноважного стану дві ( $N_1^* = 0$ ,  $N_3^* = k_2$ ) характеризують нестійкий, а точки  $N_2^* = k_1$  і  $N_4^* = K$  — стійкий стан рівноваги. Виробнича популяція має два рівноважні значення щільності, причому менше  $N_2^* = k_1$  досягається для всіх  $N < k_2$ . Як тільки справдиться  $N > k_2$ , виробнича популяція буде прагнути до стану з більш високою щільністю  $N_4^* = K$ . Ось чому описана ситуація називається виробничою популяцією з двома рівнями щільності. Якщо для неї матиме місце рівняння (3.16а), то для його правої частини  $F(N)$  виконуються умови:

- а)  $F(0) = F(k_1) = F(k_2) = F(K) = 0$ ,  $0 < k_1 < k_2 < K < +\infty$ ;
- б)  $F(N) < 0$  для  $k_1 < N < k_2$ ,  $K < N < +\infty$ ;  
 $F(N) > 0$  для  $0 < N < k_1$ ,  $k_2 < N < K$ ;
- в)  $F'(0) > 0$ ,  $F'(k_1) < 0$ ,  $F'(k_2) > 0$ ,  $F'(K) < 0$ .

**Зауваження!** Інші можливі варіанти — пряма  $D(N)$  має одну ( $n_0 > m$ ) або дві ( $m > n_0$ ) точки перетину з  $S$ -кривою. В останньому випадку існують три точки рівноваги ( $0$ ,  $k$  і  $K$ ), серед яких перша і третя — стійкі, а друга  $N_2^* = k$  — ні, тобто для  $N < k$  виробнича популяція вироджується. Точка  $k$  називається критичною (порогом рівня щільності виробничого процесу, нижче якого настає колапс суспільства, параліч виробництва).

На кінець зазначимо, що наведену схему дослідження можна повторити для узагальненого логістичного рівняння

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - lN, \quad (3.16б)$$

де величина  $l$  — коефіцієнт інтенсивності вибуття членів виробничої популяції. Останній в (3.16б) доданок свідчить про певне самообмеження на зростання у виробничій популяції.

Подальше поширення логістичного підходу в літературі відоме як [23] модель «хижак у — жертва  $x$ » Вольтерра

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), & x(0) = x_0; \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta \cdot x), & y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

де додатні коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  — сталі величини і відповідно позначають таке:  $\alpha$  — природний приріст «жертв»;  $\beta$  — убуття «жертв» при зустрічі з «хижаками»;  $\gamma$  — природне убуття «хижаків»;  $\delta$  — частота зустрічей «хижака» і «жертви». Величини  $x_0$  і  $y_0$  — кількість «жертв» і «хижаків» у початковий момент часу.

Однією з можливих модифікацій математичної моделі Вольтерра (3.17) виступає така система двох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y - dx) \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta \cdot x), \end{cases} \quad (3.17a)$$

в якій враховується самообмеження на зростання популяції «жертв». Цей факт засвідчує третій доданок ( $-dx$ ) правої частини першого рівняння ММ (3.17).

Тепер розглянемо безпосереднє моделювання кількості зайнятих у сфері виробництва (послуг) і безробітних, взаємини яких носять антагоністичний характер. Існуюча між ними конкурентна боротьба за право працювати схиляє до використання зазначених вище результатів.

Нехай функція  $N_1(t)$  описує чисельність працевлаштованих, а функція  $N_2(t)$  — безробітних, їхня неперервна диференційованість у кожен момент часу  $t$ , що також додатньо визначено. Оскільки вказані групи населення користуються одним ресурсом — кількістю робочих місць у даному регіоні (суспільства загалом), то слушно динаміку чисельності працюючих і безробітних описати системою ЗДР 1-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2) \\ \frac{dN_2}{dx} = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases} \quad (3.18)$$

яка, будучи ММ міжвидової конкуренції (між працевлаштованими і безробітними), виступає в той же час подальшим розвиненням моделі (3.17). Дійсно, в кожному рівнянні ММ (3.18) мають місце доданки  $(-\alpha_2 N_2)$  і  $(-\alpha_1 N_1)$  подібно до того, як член  $(-dx)$  першого рівняння ММ (3.17а).

Із числа стаціонарних точок (особливих), які матимемо за умови рівності нулю похідних у ММ (3.18), запишемо четверту

$$N_1 = \frac{r_2 \alpha_2 - \beta_2 r_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2} \text{ і } N_2 = \frac{r_1 \alpha_1 - \beta_1 r_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}$$

як найбільш цікаву, яка повинна лежати в 1-й четверті і яку можна двояко записати:

а)  $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 > 0$ ,  $r_2 \alpha_2 - \beta_2 r_1 > 0$ ,  $r_1 \alpha_1 - \beta_1 r_2 > 0$ ;

б)  $\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 < 0$ ,  $r_2 \alpha_2 - \beta_2 r_1 < 0$ ,  $r_1 \alpha_1 - \beta_1 r_2 < 0$ .

Щоб уникнути громіздкого стандартного дослідження особливих точок, для аналізу фазових траєкторій надалі розглянемо особливі напрямки — лінії

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= \frac{r_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} N_1 \\ N_2 &= \frac{r_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} N_1 \end{aligned} \right\}, \quad (*)$$

на яких похідні набувають нульові значення. Потім визначаються знаки похідних:

$$\frac{dN_1}{dt} > 0: N_2 < \frac{r_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_2} N_1;$$

$$\frac{dN_2}{dt} > 0: N_2 < \frac{r_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} N_1,$$

в різних частинах першого квадранту координатної площини  $N_1ON_2$ , який розбивається прямими (\*).

Також можливі два варіанти:

- 1)  $\frac{r_1}{\alpha_2} > \frac{r_2}{\beta_2}$  і  $\frac{r_1}{\beta_1} > \frac{r_2}{\alpha_1}$ ;
- 2)  $\frac{r_1}{\alpha_2} < \frac{r_2}{\beta_2}$  і  $\frac{r_1}{\beta_1} < \frac{r_2}{\alpha_1}$ . (\*\*)

У загальному випадку існують чотири особливі точки, коли прямі (\*) перетинаються (рис. 3.22). Особливі точки 2 і 3 — стійкі вузли, особлива точка 1 (початок координат) є стійкий вузол, особлива точка 4 — сідло. Фазовий опис розглядуваної нами системи графічно зображено на рис. 3.22.

Залежно від співвідношення початкових чисельностей у системі залишається щось одне — або всі працюють, або всі безробітні. Можливість співіснування постійних чисельностей працюючих і безробітних малоймовірна, оскільки такому стану системи відповідає нестійка особлива точка 4 — сідло.

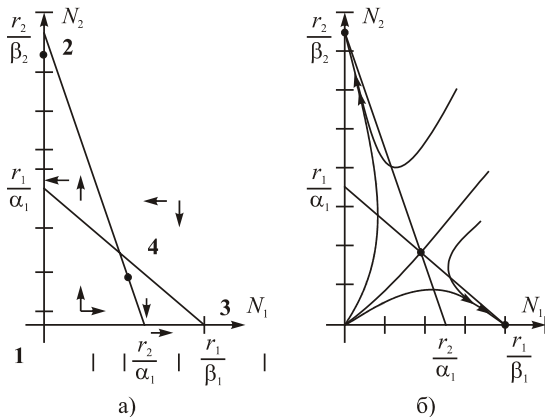


Рис. 3.22. Фазовий опис системи (\*\*): а) площина спадання і зростання кількості працюючих  $N_1$  і безробітних  $N_2$ ; б) фазовий опис

З точки зору економічного буття більше всього цікавить практична ситуація співіснування працюючих і безробітних, що можливо за умови — особлива точка 4 — стійкий вузол, особливі точ-

ки 2 і 3 — сідла (рис. 3.23). Як видно, існує значна кількість різноманітних можливих розв'язків ММ (3.18). Встановлення належної інтегральної кривої досягається широкомасштабним, обчислювальним експериментом — числовим інтегруванням системи рівнянь (3.18) за конкретних значень коефіцієнтів моделі і початкових умовах процесу моделювання.

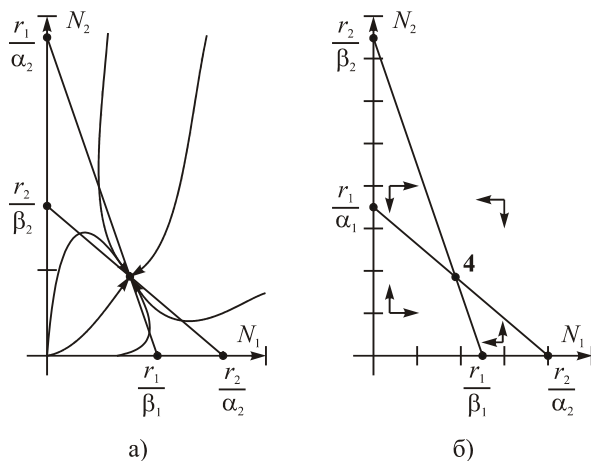


Рис. 3.23. Практична ситуація співіснування працюючих і безробітних:

- а) площина поведінки функцій  $N_1$  і  $N_2$ ;
- б) фазовий опис варіанта співіснування

### 3.5. Просторові моделі міграції трудових ресурсів

Проблема міграції у суспільстві працездатного населення вивчена недостатньо. Можливі ММ мають бути обов'язково просторовими, тобто відображати характер подій від їх місця, не тільки від часу (у припущенні однорідності). По-іншому, пошук робочого місця повинен описуватись математичними моделями з розподіленими параметрами — рівняннями у частинних похідних з однією і двома просторовими координатами та залежно від часу.

Нижче логічно продовжується попереднє дослідження проблеми зайнятості населення, виконане в припущенні рівномірного розподілу робочої сили та однорідності простору подій. Такий підхід сприяв утворенню класу ММ із зосередженими параметрами, тобто звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку та їх систем мінімальної розмірності. Інакше кажучи, ММ такого роду описують процеси розвитку подій у часі. Але пошук робочого місця перш за все перехід пересування від одного місця перебування до іншого, що звісно забирає певний час. Отже, міграційні процеси населення в пошуку місця трудової діяльності відбуваються в просторі і часі. Їх адекватне математичне відтворення з метою вивчення та прогнозування (інших можливостей просто немає) досягається через застосування диференціальних рівнянь у частинних похідних.

#### Ретроспектива проблеми

Вперше, ґрунтуючись на логістичних уявленнях про збільшення популяції (робочої сили), просторова модель з'явилась [137] ще 1921 року і набула вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1 - p) \cdot p + \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad (3.19)$$

де залежна змінна  $p$  описує популяцію (її щільність), незалежні змінні:  $t$  — час,  $x$  і  $y$  — просторові координати належним чином нормовані. Автор ММ (3.19) розглядав різні варіанти лінеаризації рівняння (3.19) для однієї просторової змінної  $x$ , щоб можна було записати аналітичні розв'язки.

Спеціальним переходом від рівняння

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1 - p) \cdot p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (3.19a)$$

з частинною похідною до системи розміру два для ЗДР 1-го порядку і наступним числовим її інтегруванням була встановлена наявність періодичних розв'язків початкової ММ (3.19). Їх найменші значення заходять у площину від'ємних значень, що не відповідає предмету дослідження. Також вони не задовольняють

вимог стійкості. Таким чином, спостерігаються ареали — місця, в яких результати моделювання узгоджуються з дійсністю.

За умови стаціонарності  $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = 0\right)$  для ММ (3.19а) було записано так званий *інтеграл енергії*  $E = \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2$ .

Також була встановлена асимптотична стійкість розв'язків, яка має місце у разі перевищення половини насиченості щільності популяції.

Для вивчення зростання популяції модель Хотеллінга (3.19а) модифікувалась, враховуючи найпростішу виробничу функцію  $q = \alpha \cdot (\beta \cdot p^2 - p^3)$ , де коефіцієнт  $\alpha$  визначається технологічною ефективністю, коефіцієнт  $\beta$  — масштабом виробництва.

Міграція пояснюється просторовими відмінностями у щільності населення та виробництві товару на душу населення. Вона відбувається в напрямі найбільшого зросту (градієнта) виробництва на душу населення, а її інтенсивність пропорційна різниці життєвих рівнів у різних місцевостях (точках чи площинах простору). Щільність населення відповідає кількості потенційних мігрантів, спроможних відгукнутися на зазначені вище відмінності. Математично цей факт відтворюється так званим *дифузійним*

членом  $\nabla \left( \frac{q}{p} \nabla p \right)$ , де символ  $\nabla$  — градієнт виразу чи змінної  $p$ .

Тоді модифікована ММ, що описує зростання і розповсюдження, тобто відтворює міграційні процеси, набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p(1 + q - \gamma \cdot p) + \nabla \cdot \left( \frac{q}{p} \nabla p \right), \quad (3.196)$$

де коефіцієнт  $\gamma$  являє собою прийнятний дохід на душу населення, що веде до стаціонарності. Для останнього рівняння етапи дослідження початкової ММ (3.19) повторюються.

Наведемо деякі результати: в фазовому просторі періодичні стаціонарні розв'язки ( $\alpha = 1,2$ ;  $\beta = 3$ ;  $\gamma = 3,4$ ) являють собою дві неперетинні множини замкнених траєкторій, які розподілені сидловою точкою і не заходять в площину від'ємних значень; період зростає разом з амплітудою, стійкість має місце на інтервалах



$[1,21; 0,78]$  і  $[1,25; \infty)$  для стаціонарного розв'язку; дифузійний член сприяє затуханню коливного розв'язку.

Згідно з модифікованого рівняння Хотеллінга (за допомогою виробничої функції) динаміка міграційних процесів графічно включає: чотири стійкі вузли, серед яких перебувають два просторово однорідні і два просторово неоднорідні, причому кожен розв'язок (однорідний чи ні) володіє своїм басейном тяжіння; також чотири нестійкі вузли і чотири сідлові точки.

Модель Хотеллінга характеризується як структурно нестійка, що являє собою онтологічну її властивість. Щоб зробити модель внутрішньостійкою, розглядався її так званий *стабілізаційний варіант*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1 - p)p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (\delta + \epsilon) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.19\text{в})$$

де величини  $\delta$  і  $\epsilon$  досить малі. Більш загально, додатковий член для моделі Хотеллінга має вигляд  $(\bar{u} + p \cdot \bar{v}) \cdot \nabla p$ , де постійні вектори  $\bar{u}$  та  $\bar{v}$  визначають інтенсивність і напрямки автономних компонент переміщення.

З точки зору економіки перший доданок  $\delta \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$  з'являється, коли кількість мігрантів пропорційна чисельності популяції, тобто загальній кількості переселенців, а другий доданок  $\epsilon \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$ , коли потік пропорційний швидкості зростання.

Для  $\epsilon \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$  у фазовому просторі можуть бути площини, в одній з яких енергія процесу прибуває, а в іншій — убуває. З'являються граничний цикл, спіралі — геометричне зображення розв'язків ММ.

Коли визначальні для напрямку автономного пересування постійні переходять через нуль, то граничний цикл збігається з гомоклінною сідловою петлею. У разі зміни спрямованості автономних пересувань можна спостерігати періодичні розв'язки, що набувають стійкості та втрачають її.

#### Математична формалізація проблеми

Правомірно розглядати міграцію членів популяції як в часі, так і в просторі, відслідковувати змінюваність щільності популяції в різних точках, або ділянках, скінченного простору — ареа-

лах. Для випадку однорідного простору або його малості має місце змінюваність чисельності від часу [55]. Але важливо знати просторову змінюваність щільності популяції, бо для різноманітних ділянок неоднорідного простору популяція може розвиватись по-різному, набуваючи на межах ареалу певні значення.

Іншими словами, розв'язок ММ (3.19) має підпорядкуватись початковій  $p(0, x, y) = f(x, y)$  і крайовій  $p(t, M) = \phi(t, M)$ , де  $M$  є точка  $M(x, y)$  на межі площини, а  $f(\cdot)$  і  $\phi(\cdot)$  — задані функції, умови.

Якщо популяція перебуває в обмеженій площині й не виходить за її межі, то граничні (крайові і початкова) умови набувають вигляду:  $p(M, 0) = f(x, y)$ ;  $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_r = 0$ , де вираз  $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_r$  — похідна в напрямку, перпендикулярному дотичній у тій точці межі, в котрій обчислюється похідна.

У випадку ММ явища з однією просторовою координатою зазначені граничні умови мають місце, але спрощується їх запис.

Свою роль також відіграє наявність потужних пакетів програм числового інтегрування систем ЗДР [3, 169]. Але суттєво на користь переходу до моделювання з використанням як ММ рівнянь з частинними похідними ситуація змінилась за останні роки — на початку ХХІ ст. [139], коли з'явилися довідники з точним розв'язанням великої кількості рівнянь у частинних похідних, накопиченими в різноманітних сферах природознавства і техніки.

На завершення вкажемо, що ММ (3.19) у літературі з синергетики називають рівняннями дифузійного типу, оскільки ними описують процеси переміщення групи людей (популяції) в просторі та часі. Також відомо, що міграційні процеси можуть з певних причин (внутрішнього чи зовнішнього походження) підсилюватися або придушуватися (вгамовуватися). З огляду на дійсність змушені будемо розглядати системи дифузійних рівнянь. Крім цієї причини до ММ такого типу можна дійти, розділяючи за деякими ознаками популяцію на її складові.

#### Аналітичні результати моделювання

Послідовно розглядаються відомі типи ММ проблеми міграції трудових ресурсів — рівняння дифузії з однією та двома просторовими змінними, ретельно виписуються їх точні розв'язки.

Рівняння математичної фізики параболічного типу з однією просторовою змінною (в іноземній літературі рівняння Фішера, у вітчизняній — рівняння Колмогорова — Петровського — Піскунова [КПП]), має різноманітні сфери застосування в природознавстві та техніці, а також в економіці, і записується у такий спосіб:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a \cdot p \cdot (1 - p), \quad (3.19a)$$

точні розв'язки якого матимуть вигляд:

$$p(x, t) = [1 + C \cdot \exp(-\frac{5}{6} \cdot a \cdot t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 \cdot a} \cdot x)]^{-2};$$

$$p(x, t) = [-1 + C \cdot \exp(-\frac{5}{6} \cdot a \cdot t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 \cdot a} \cdot x)]^{-2};$$

$$p(x, t) = \frac{1 + 2 \cdot C \cdot \exp(-\frac{5}{6} \cdot a \cdot t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 \cdot a} \cdot x)}{\left[1 + C \cdot \exp(-\frac{5}{6} \cdot a \cdot t \pm \frac{1}{6} \sqrt{6 \cdot a} \cdot x)\right]^2},$$

де величина  $C$  — довільна стала.

Більш загальне рівняння з нелінійною функцією  $F(p)$  виглядає так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F(p), \quad (3.20)$$

точні розв'язки якого з функціональним виокремленням змінних

$$p = p(x), \quad z = \varphi(t) \cdot x + \psi(t) \quad (3.21)$$

описуються системою ЗДР:

$$\begin{cases} \psi'_t + \frac{\psi}{\varphi} \cdot \varphi'_t = A_1 \cdot \varphi^2 + A_2; -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3 \cdot \varphi^2 + A_4; \\ \frac{p''_{zz}}{p'_z} = -A_1 - A_3 \cdot z; \frac{F(p)}{p'_z} = -A_2 - A_4 \cdot z, \end{cases} \quad (3.22)$$

де  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — довільні сталі, розв'язки якої:

$$\varphi(t) = \pm (C_1 \cdot \exp(-2 \cdot A_4 \cdot t) - \frac{A_3}{A_4})^{-1/2};$$

$$\psi(t) = -\varphi(t) \left[ A_1 \cdot \int \varphi(t) dt + A_2 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2 \right];$$

$$p(z) = C_3 \cdot \int \exp(-\frac{1}{2} \cdot A_3 \cdot z^2 - A_1 \cdot z) dz + C_4;$$

$$F(p) = -C_3 (A_4 \cdot z + A_2) \exp(-\frac{1}{2} \cdot A_3 \cdot z^2 - A_1 \cdot z),$$

де  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — довільні сталі.

Найбільш загальний тип рівняння, в яке входить (3.19в), матиме вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f(t) \frac{\partial p}{\partial x} + g(p), \quad (3.23)$$

де  $a$  — стала,  $f(t)$  — довільна функція.

Заміною змінною  $y = x + \int f(t) dt$  здобудемо простіше рівняння на зразок (3.20):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + g(p), \quad (3.23a)$$

яке матиме точний розв'язок типу хвилі, що біжить:  $p = p(z)$ ,  $\pm z = y + \lambda \cdot t$ , де  $\lambda$  — довільна стала; функція  $p = p(z)$  описується автономним ЗДР

$$a \cdot p''_{zz} - \lambda \cdot p'_z + g(p) = 0.$$

Перетворенням  $z = \left(\frac{a}{\lambda}\right) \cdot \xi$ ,  $U(p) = p'_\xi$  зводиться до рівняння Абеля

$$U \cdot U'_p - U + a \cdot \lambda^{-2} \cdot g(p) = 0,$$

яке володіє багатьма точними розв'язками для різних залежностей  $g = g(p)$  [36].

Розглянемо ММ трудової міграції з використанням двох просторових координат і наведемо їх точні розв'язки.

Узагальнене рівняння Хотеллінга набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + f(p), \quad (3.24)$$

розв'язання якого на зразок хвилі, що біжить, записуємо так:  $p = p(\xi)$ , де  $\xi = Ax + By + \lambda \cdot t$ , де  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda$  — довільні сталі, функції  $p(\xi)$  описуються автономним ЗДР

$$a(A^2 + B^2)p''_{\xi\xi} - \lambda \cdot p'_{\xi} + f(p) = 0,$$

точні розв'язки якого відомі [36].

ММ стаціонарного процесу трудової міграції являє собою рівняння (3.24) для  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , тобто

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(p),$$

розв'язання якого на зразок хвилі, що біжить, в неявній формі має вигляд:

$\int \left[ C + \frac{2}{A^2 + B^2} \cdot F(p) \right]^{-1/2} dp = Ax + By + D$ , де  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — довільні сталі,  $F(p) = \int f(p) dp$ .

Точне розв'язання останньої ММ запишемо  $p = p(\xi)$ ,  $\xi = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2}$ , де  $C_1$ ,  $C_2$  — довільні сталі, а функція  $p(\xi) = p$  описується ЗДР  $p''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \cdot p'_{\xi} = f(p)$ , розв'язки якого для різних нелінійностей  $f(p)$  відомі [36].

Отже, для просторово-часових моделей міграції трудових ресурсів виписані алгоритми аналітичних розв'язків. Моделювання міграційних процесів вимагає програмної реалізації точних розв'язків, що спряжене з числовим інтегруванням ЗДР, до яких зводяться початкові ММ.

Викладене вище сприяє глибшому онтологічному й адекватному моделюванню проблеми пересування популяції трудових ресурсів у межах держави, регіону або адміністративної одиниці. При цьому доведеться щоразу налаштовувати коефіцієнти ММ і вибирати нелінійні залежності, вказуючи необхідні початкові і крайові умови (на межах ділянок переміщення).

---

### 3.6. Функціонування фірми в економічному просторі

---

Підприємство для свого успішного існування має не стільки адекватно реагувати на змінюваність економічного середовища, скільки зобов'язано передбачувати події, розробляти альтернативні сценарії розвитку. Економічна діяльність, як відомо, наповнена фінансовими кризами, дефолтами на товарних біржах, інфляційними процесами тощо.

Зрозуміло, що досягти передбачуваності і керованості економічних процесів у суспільстві чи окремо взятої господарської одиниці (економічного агента) можна тільки з використанням методології та інструментарію математичного моделювання, де вербалізація проблеми виступає як етап на шляху побудови адекватної математичної моделі (ММ).

Наукових доробків з тематики моделювання нелінійної динаміки економіки, зокрема, на прикладі господарської одиниці (фірми), не багато, але їхня кількість невпинно зростає. Коротко оглянемо цитовані праці. В [118] чи не вперше запропоновано математичний опис економічного стану суспільства в координатах «виробники—продукт—управлінці». У [47] уточнено цю модель, а згодом в [84] вона дістала подальше розвинення. Про результати аналізу особливих точок згадуваної вище ММ на стійкість повідомляється в [16]: серед чотирьох груп особливих точок залежно від співвідношення між коефіцієнтами моделі спостерігаються стійкі і нестійкі, причому серед останніх — аперіодично і коливним чином.

Найперша модель Гудвіна економічного розвитку суспільства, яка зводиться до відомих (наприклад, Ван-дер Поля) рівнянь нелінійної механіки, ретельно і послідовно розглянута в [12].

### 3.6.1. Моделювання діяльності економічного агента

На підґрунті основних положень синергетики і кінетики записано ММ функціонування фірми. Визначальними факторами її діяльності оберемо кількість працюючих  $Y_1$ , величина власного капіталу  $Y_2$  та обсяг кредитів  $Y_3$ . До речі, побудована нами ММ [66] уточнює результат [148]. Також у нашій статті [148] викладено методику якісного аналізу системи трьох звичайних диференціальних рівнянь — просторової моделі, яка принципово відрізняється своїми можливостями від ММ на площині. Наведено деякі результати широкомасштабного обчислювального експерименту над побудованою ММ.

Концептологія побудови ММ економічних процесів і явищ ґрунтується на використанні двох фундаментальних понять: способу головних пропорцій та основного принципу кінетики. У нашому випадку рівняння ММ функціонування фірми будуть такими:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = -\gamma Y_1 + \alpha Y_2 + \alpha Y_2 Y_3 \equiv f_1(Y_1, Y_2, Y_3) \\ \dot{Y}_2 = \mu Y_2 - \beta Y_1 + \mu Y_3 - \beta Y_1 Y_3 \equiv f_2(\cdot) \\ \dot{Y}_3 = -\omega Y_3 + \delta Y_2 \equiv f_3(Y_1, Y_2, Y_3), \end{cases} \quad (3.25)$$

де змінна  $Y_1 = Y_1(t)$  описує кількість працівників фірми протягом часу  $t$ , змінна  $Y_2 = Y_2(t)$  відтворює власний капітал, а  $Y_3 = Y_3(t)$  — позичений капітал, тобто обсяг кредиту, а величини  $\dot{Y}_1$ ,  $\dot{Y}_2$ ,  $\dot{Y}_3$  є похідними по незалежній змінній  $t$ .

Другий і третій доданки правої частини  $f_i(\cdot)$  першого рівняння ММ (3.25) свідчать про те, що приріст кількості працюючих на фірмі прямопропорційний наявності власного капіталу  $Y_2$  і використанню кредиту  $Y_3$  за призначенням (зустріч капіталів відбулась —  $\alpha Y_2 Y_3$ ), а перший член вказує на скорочення кількості працівників на фірмі головним чином через відсутність фінансування та з інших менш важливих причин.

Члени правої частини другого рівняння ММ (3.25) показують, що швидкість  $\dot{Y}_2$  зростання власного капіталу визначається прямопропорційно його величині й обсягу кредитування (доданки  $\mu Y_2$  і  $\mu Y_3$ ) мінус витрати, пов'язані із зарплатою працівникам (до-

данки —  $\beta Y_1$  —  $\beta Y_1 Y_3$ ). Коефіцієнти  $\mu$  і  $\beta$  рівняння відображають частки використання власного капіталу  $Y_2$  і кредиту  $Y_3$  на зарплату працівників і не тільки на неї.

Третє рівняння системи (3.25) відтворює той факт, що на швидкість  $\dot{Y}_3$  змінюваності обсягу кредиту (можливість додаткового кредитування) позитивно впливає наявність власного капіталу ( $\delta Y_2$ ) і негативно — вже існуючі кредитні зобов'язання ( $-\omega Y_3$ ).

ММ (3.25) несуперечлива і може бути редукована до лінійної моделі діяльності фірми з урахуванням тільки двох основних факторів — власного капіталу  $Y_2$  і кількості працівників  $Y_1$ .

Розглянемо «м'яке моделювання», або техніку якісного аналізу ММ (3.25). Спочатку знайдемо стаціонарні зв'язки  $Y_{1s}$ ,  $Y_{2s}$ ,  $Y_{3s}$ , прирівнюючи до нуля похідні, тобто розглядається нелінійна система алгебраїчних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} -\gamma Y_1 + \alpha Y_2 + \alpha Y_2 Y_3 &= 0 \\ \mu Y_2 + \mu Y_3 - \beta Y_1 - \beta Y_1 Y_3 &= 0 \\ \delta Y_2 - \omega Y_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

З третього рівняння випливає, що  $Y_2 = \frac{\omega}{\delta} Y_3$ , а першого —  $Y_1 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\alpha\omega}{\delta} Y_3 + \frac{\alpha\omega}{\delta} Y_3^2 \right)$ . Підставивши ці вирази в друге рівняння алгебраїчної системи після очевидних перетворень, матимемо

$$Y_3 \left[ Y_3^2 + 2Y_3 + \left( 1 - \frac{\mu\gamma}{\beta\alpha} - \frac{\mu\gamma\delta}{\beta\alpha\omega} \right) \right] = 0.$$

Отже, перший корінь  $Y_3^{(1)} = 0$  і має місце тривіальна особлива точка  $(0, 0, 0)$ . Два інші корені запишемо у такий спосіб:

$$Y_3^{(2,3)} = -1 \pm \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\beta\alpha} + \frac{\mu\gamma\delta}{\beta\alpha\omega}}.$$

Тут слушно зауважити: оскільки шукані стаціонарні розв'язки мають перебувати в першому квадранті, то легко встановлюються співвідношення між коефіцієнтами ММ (3.25), а саме:

$$\mu\gamma > \beta\alpha, \quad (3.26a)$$



причому числові параметри  $\omega$  і  $\delta$  набувають довільних додатних значень, дотримуючись економічного змісту:

$$\frac{\mu\gamma}{\beta\alpha} \cdot \frac{\omega}{\omega + \delta} > 1. \quad (3.26б)$$

Вирази (3.26) впливають з вимоги додатності одного з коренів  $Y_s^{(2,3)}$ , щоб не обмежуватися тільки тривіальним стаціонарним розв'язком. Для цього має виконуватись умова  $\frac{\mu\gamma}{\beta\alpha} \left(1 + \frac{\delta}{\omega}\right) > 1$ , реалізувати яку можна двояко.

Між іншим, вказані [148] числові значення коефіцієнтів ММ не задовольняють нерівностям (3.26), що зайвий раз засвідчує її алогічність.

Стійкість стаціонарних розв'язків оцінюється, знаючи корені характеристичного рівняння [155]:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} - \lambda\right) & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_1} & \left(\frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} - \lambda\right) & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_2} & \left(\frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} - \lambda\right) \end{vmatrix}_{\substack{Y_1=Y_{1s} \\ Y_2=Y_{2s} \\ Y_3=Y_{3s}}} = 0 \quad (3.27a)$$

або

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (3.27б)$$

де

$$a_1 = -\left(\frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} + \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} + \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3}\right);$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} \end{vmatrix};$$

$$a_3 = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} \end{vmatrix}.$$

Якщо  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  шукані корені рівняння (3.27б), то виконується рівність  $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ ;  $a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ ;  $a_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ .

Тут використовувались позначення: вирази  $\frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial Y_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ;

$f_i(\cdot)$  — відповідно праві частини рівняння ММ (3.25)) являють собою частинні похідні; позначення  $|\cdot|$  відповідає визначнику 2-го порядку у разі знаходження коефіцієнта  $a_2$  і детермінанта 3-го порядку коефіцієнта  $a_3$ .

Конкретно у нашому випадку визначник (3.27а) набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} (-\gamma - \lambda) & \alpha & \alpha Y_2 \\ -\beta - \beta Y_3 & \mu - \lambda & \mu - \beta Y_1 \\ 0 & \delta & -\omega - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

котрий обчислюється в стаціонарній точці.

Досліджуючи характер коренів рівняння (3.27б) та їх знаків, використовують дискримінант рівняння

$$D_3 = -4 \left( a_3 - \frac{1}{3} a_1^2 \right)^3 - 27 \left( a_3 - \frac{1}{3} a_1 a_2 + \frac{2}{27} a_1^3 \right)^2;$$

умови Гурвіца —  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ; теорему Декарта: число додатних коренів алгебраїчного рівняння **рівне або менше** на парне число від кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів  $1, a_1, a_2, a_3$ .

**Зауваження!** Ця теорема застосовується також до числа від'ємних коренів рівняння і змін знаків послідовності  $-1, a_1, -a_2, a_3$ , тобто до коренів рівняння

$$-\lambda^3 + a_1 \lambda^2 - a_2 \lambda + a_3 = 0. \quad (3.27в)$$

## Класифікація особливих точок (сценарії виробничої діяльності)

1. **Стійкий вузол.** Для рівняння (3.27б) виконуються умови Гурвіца,  $D_3 \geq 0$ ; всі корені дійсні від'ємні. Траєкторії входять в особливу точку.

2. **Нестійкий вузол.** Умови Гурвіца виконуються для рівняння (3.27в),  $D_3 \geq 0$ ; всі корені додатні;  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 < 0$ . Траєкторії виходять з особливої точки.

3. **Стійкий фокус.** Умови Гурвіца виконуються для рівняння (3.27б);  $D_3 < 0$ ; два корені комплексні з від'ємними дійсними частинами, один корінь від'ємний. Траєкторії входять в особливу точку, закручуючись по спіралі.

4. **Нестійкий фокус.** Умови Гурвіца виконуються для рівняння (3.27в);  $D_3 < 0$ ; два комплексні корені з додатними дійсними частинами. Траєкторії закручені по спіралі і виходять з особливої точки ( $a_1 < 0$ ;  $a_2 < 0$ ;  $a_3 < 0$ ).

5. **Сідло першого порядку.** Всі три корені дійсні: два від'ємні, один додатний;  $D_3 \geq 0$ . Траєкторії, що входять в особливу точку, утворюють поверхню сепаратрис. Тільки дві траєкторії виходять з особливої точки, вони мають спільну дотичну.

6. **Сідло другого порядку.** Всі три корені дійсні, два додатні, один корінь від'ємний;  $D_3 \geq 0$ . Тільки дві траєкторії входять в особливу точку. Траєкторії, що виходять з особливої точки, утворюють поверхню.

7. **Сідло-фокус першого роду.** Два комплексні корені з від'ємними дійсними частинами, один корінь дійсний додатний. Всі траєкторії, що входять в особливу точку, закручені по спіралі й утворюють поверхню сепаратрис. Дві траєкторії виходять з особливої точки ( $D_3 < 0$ ,  $a_3 < 0$ ).

8. **Сідло-фокус другого роду.** Два комплексні корені з додатними дійсними частинами, один корінь дійсний від'ємний. Напрямок траєкторії протилежний напрямку траєкторії попереднього випадку ( $D_3 < 0$ ;  $a_3 > 0$ ).

9. **Нестійкий центр.** Два суто уявні корені, один дійсний додатний; виконується тільки необхідна умова існування кореня такого типу. Лише дві траєкторії виходять з особливої точки, інші лежать на паралельних циліндричних поверхнях.

10. **Стійкий центр.** Характеристичне рівняння має два уявні корені і один дійсний від'ємний. Напрямок траєкторій протилежний напрямку траєкторій попереднього випадку.

Усі випадки з одним або кількома нульовими коренями — критичні. Завданням є дослідження сідлових точок і точок сідло-фокус, які лежать на поверхні сепаратрис.

Конкретно для тривіальної особливої точки ММ (3.25) запишемо визначник

$$\begin{vmatrix} -(\gamma + \lambda) & \lambda & 0 \\ -\beta & \mu - \lambda & \mu \\ 0 & \delta & -(\omega + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

і характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + (\gamma - \mu + \omega)\lambda^2 + (-\mu\gamma + \omega\gamma - \mu\omega - \delta\mu + \beta\alpha)\lambda - \gamma\mu\omega - \delta\mu\gamma + \beta\alpha\omega = 0.$$

Його корені за числових значень [148] коефіцієнтів:  $\alpha = 5$ ;  $\beta = 8$ ;  $\gamma = 1$ ;  $\delta = 0,6$ ;  $\mu = 2,1$ ;  $\omega = 2,46$ , детермінують існування не тільки тривіальної особливої точки як виправданої предметно, і запис приблизно буде таким:  $\lambda_1 = -2,5$ ;  $\lambda_{2,3} = 0,65 \pm 6,02i$ , тобто один дійсний і два комплексні спряжені з додатною дійсною частиною. Отже, спостерігається особлива точка сідло-фокус другого роду, геометричне зображення якої наведено на рис. 3.24.

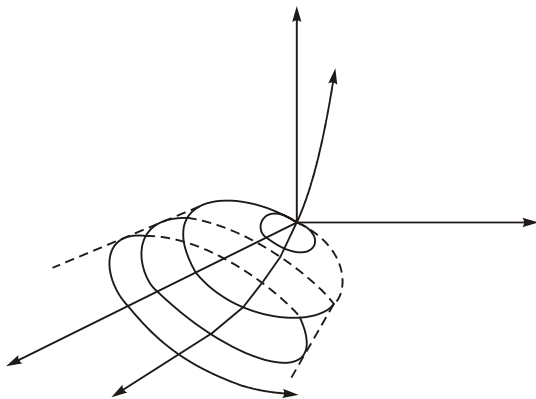


Рис. 3.24. Геометричне зображення особливої точки сідло-фокус другого роду

Деякі результати числового аналізу ММ (3.25). Система диференціальних рівнянь (3.25) за вказаних вище значеннях коефіцієн-

тів моделі чисельно інтегрувалась класичним методом Рунге—Кутта з постійним кроком *rk fixed* ( $Y, 0, 20, 400, N$ ) на часовому відрізку  $[0, 20]$ , використовуючи пакет Mathcad. Графічно результати числового моделювання відображено рис. 3.24—3.28, де згідно з пакетом прийнято позначення:  $Z_{k,1}$  відповідає незалежній змінній  $t$ ;  $Z_{k,2} = Y_1$  — кількості працівників фірми;  $Z_{k,3} = Y_2$  — капіталу;  $Z_{k,4} = Y_3$  — кредиту.

На рис. 3.27 зображено змінюваність у часі кількості працівників фірми, обсягів власного і позиченого капіталу, причому в перші три одиниці часу  $t$  відбуваються перехідні процеси для кожної змінної.

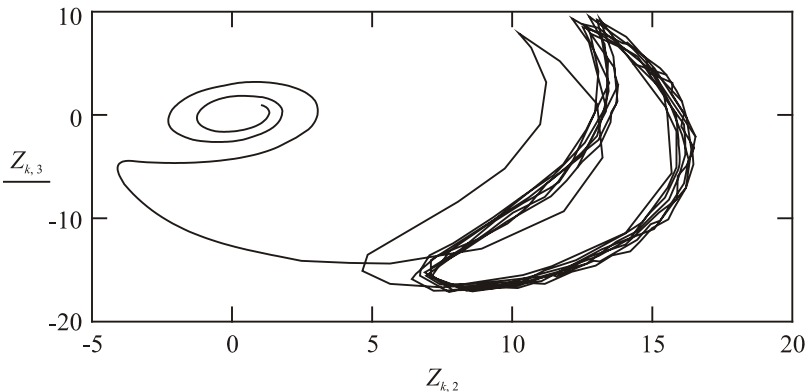


Рис. 3.25

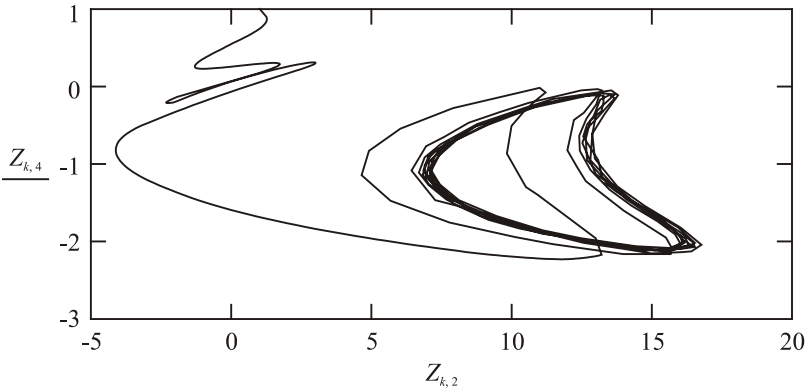


Рис. 3.26

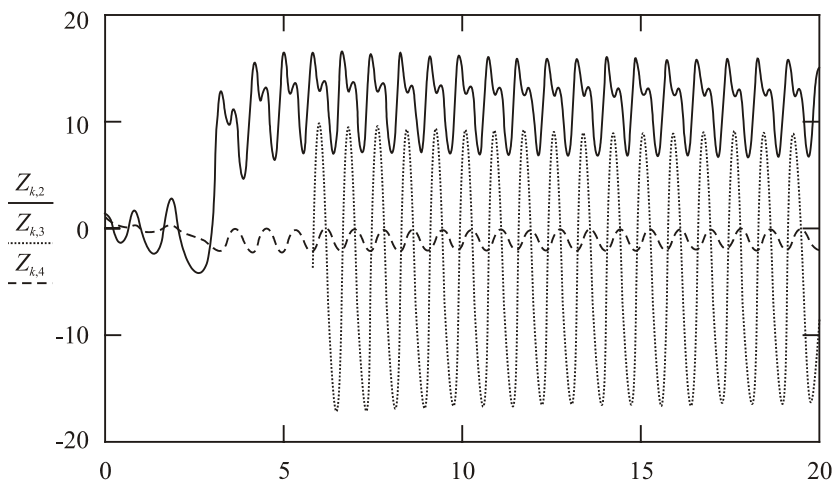


Рис. 3.27

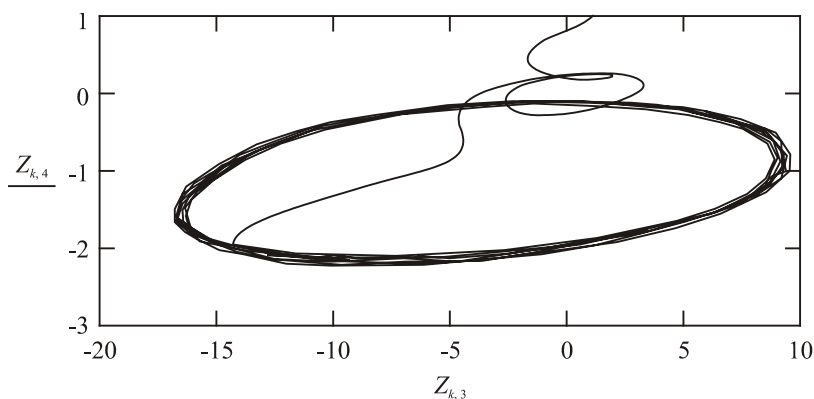


Рис. 3.28

Далі відбуваються стійкі періодичні коливання для окремо взятої змінної, причому кількість працюючих на фірмі стійко перебуває в деякому «коридорі значень», також капітал фірми сягає певної висоти і тільки обсяг кредитів стабілізується на незначному рівні.

Рис. 3.25, 3.26, 3.28 — фазові портрети в координатах: рис. 3.25 — «кількість працівників — власний капітал»; рис. 3.26 — «кількість працівників — обсяг кредитів»; рис. 3.28 — «власний капі-

тал-обсяг кредитів». На кожній фазовій координатній площині спостерігається граничний цикл достатньо складної конфігурації, на шляху до якого відбувається самоперетин фазової траєкторії. Наявність граничних циклів свідчить про стійкий характер поведінки фірми, складність якої зумовлена зовнішніми впливами.

Отже, результати дослідження, описаного в параграфі, сприяють розробці сценаріїв поведінки фірми у зовнішньому середовищі і вибору якомога кращого з множини можливих сценаріїв. Це дозволяє розглядати питання альтернативи коефіцієнтів ММ, щоб уникнути хаотичного атрактора, тобто краху фірми. З'являється можливість дослідити вплив на існування фірми тих чи інших факторів, перш за все позики капіталу або кількості працівників фірми. Також викладено певну методологію математичного моделювання економіки, в першу чергу так званого *м'якого моделювання* — розгляд стійкості траєкторій економічного розвитку об'єкта господарювання.

### **3.6.2. Комп'ютерне моделювання маркетингу і менеджменту фірми**

---

Два рушійні фактори — маркетинг і менеджмент, визначають місце фірми на ринку товарів. Час від часу вони або їхні акценти міняються, щоб адаптуватись до ринкової ситуації. Завжди актуальним залишається прогноз точок можливого рівноважного стану і процес адаптації до них, яким чином це відбуватиметься.

Запропонована в [80] математична модель поведінки фірми на споживчому ринку товарів була досліджена з використанням техніки якісного аналізу звичайних диференціальних рівнянь: особливі точки (рівноваги) і фазові портрети інтерпретувались як можливі шляхи розвитку економічної ситуації. Зазначимо, що автори [80] обмежились розглядом тривіальної рівноважної точки, хоча існує інша, більш приваблива з позиції економічної дійсності.

Нижче кількісно (способом числового інтегрування диференціальних рівнянь ММ) вивчається поведінка фірми на споживчому ринку товарів, розглядаючи відповідно до реалій економіки різноманітні структурні модифікації моделі для широкого спектра значень її числових коефіцієнтів. У такий спосіб, для кожного із розглядуваних варіантів, утворюється тренд можливого просування на ринку нової чи традиційної продукції фірми.

## Математична модель діяльності фірми

Спочатку опишемо стисло утворення рівнянь ММ. Нехай діяльність фірми на ринку описується функціями  $x = x(t)$  — функція маркетингу, якою характеризується спроможність адекватної реакції щодо ситуації на споживчому ринку товарів, тобто здатність пристосовуватись (або адаптації);  $y = y(t)$  — менеджменту функція, якою описується структура управління в фірмі та відображається рівень монолітності колективу. Зростання зазначених функцій відповідає процвітанню фірми або її стійкому становищу на ринку, а спад — послабленню ринкових позицій, що свідчить про невдалу реалізацію тактичного і стратегічного планів маркетингу чи послаблення корпоративного об'єднувального начала.

На підґрунті синергетичного принципу головних пропорцій швидкість змінюваності функції маркетингу записується

$$\dot{x} = \varphi_1(\mu)x + \varphi_2(\mu)y, \quad (3.28)$$

де перший доданок  $\varphi_1(\mu)x = f_{1x}$  описує управлінські рішення з реалізації плану маркетингу; другий доданок  $\varphi_2(\mu)y = f_{1y}$  — ступінь взаємозалежності функцій менеджменту і маркетингу; параметр  $\mu \in (-\mu_0, +\mu_0)$ ,  $0 < \mu_0 < \infty$  — управляючий маркетинговий параметр (УПМ);  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  — похідна. При цьому функції  $\varphi_i(\mu)$ ,  $i = 1, 2$  вказуються: для  $(-\mu, 0)$  вони відповідають прихильності до традиційної, що вже зарекомендувала себе на ринку, продукції і, можливо, частково для нової (модифікованої) продукції; для  $\mu \in (0, \mu_0)$   $\varphi_2(\mu) > 0$  свідчить про появу від фірми принципово нових товарів.

Змінюваність функції менеджменту визначається функцією  $f_{1y} = \varphi_2(\mu)y$  та кількісною характеристикою інерції управлінських рішень —  $f_{2y} = -\exp(-\alpha y)y$ , також кількісною характеристикою обмежень, зумовлених оцінкою ринкової ситуації керівництвом фірми, тобто  $f_{2y} = -\exp(-\beta x)x$ . Таким чином, швидкість змінюваності функції менеджменту описується диференціальним рівнянням

$$\dot{y} = \varphi_2(\mu)y - \exp(-\alpha y)y - \exp(-\beta x)x, \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0). \quad (3.29)$$



Вибір функцій  $f_{2y}$  і  $f_{2x}$  зумовлено міркуваннями: чим сильніше корпоративне об'єднання, тим менший вплив на необхідні зміни функції менеджменту. Випадок  $\alpha = 0$  говорить про максимальне розузгодження між рішеннями та їх реалізацією: потреба в докорінній перебудові внутрішнього управління фірмою, взаємозв'язків у ній постала нагально.

Отже, рівняння (3.28) і (3.29) утворюють ММ становища фірми на споживчому ринку товарів.

Розглянемо кількісні характеристики поведінки фірми, чисельно інтегруючи рівняння ММ.

#### Основні результати числового моделювання

Попередньо зазначимо таке. Математична модель виробничої діяльності економічного агента матиме вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + (1 + \mu)y \\ \dot{y} = -\exp\{-\beta x\}x + [1 + \mu - e^{-\alpha y}]y, \end{cases} \quad (3.30)$$

де коефіцієнт  $\mu$  відображає створення традиційної продукції ( $\mu < 0$ ) або нової ( $\mu > 0$ ); коефіцієнт  $\beta$  виступає мірою реалістичності оцінки керівництвом свого становища на ринку товарів; коефіцієнт  $\alpha$  вказує на ступінь розузгодженості між рішеннями керівництва та їх впровадженням.

Роль стартових умов для будь-якого економічного процесу зрозуміла. Для ММ (3.30) вибирались початкові умови  $x(0) = 1$  і  $y(0) = 1$ , чого завжди можна досягти нормуванням змінних.

Результати комп'ютерного моделювання об'єднані в групи, для кожної з яких наводять інтегральні криві [залежності функцій маркетингу  $x(t)$  і менеджменту  $y(t)$  від часу] і фазові портрети [криві на площині  $(xOy)$ ]. Всередині групи числові результати якісно збігаються. Для розрахунків використовувалось програмне середовище Mathcad і методи числового інтегрування диференціальних рівнянь, включаючи жорсткі системи.

Система рівнянь (3.30) — базова ММ досліджувалась для широкого діапазону числових значень коефіцієнтів  $\mu$ ,  $\beta$  і  $\alpha$  моделі, а саме:  $\mu \in [-0,5; 0]$ ,  $\alpha$  і  $\beta \in [0,1; 0,5]$ .

Графічно результати числового моделювання найбільш принципового характеру показано на рис. 3.29. З'ясувалось, що за наявності традиційної продукції ( $\mu < 0$ ) величина цього коефіцієнта не впливає на інтегральні криві маркетингу і менеджменту. З плином часу маркетинг припиняється, а функція управління заходить у площину від'ємних значень. Сукупно це означатиме, що фірма перебуває напередодні краху. Для випадку появи на ринку нового товару характер кривих практично однаковий (рис. 3.30) за виключенням, коли маркетингова функція стабілізується, а роль управління в нових умовах невпинно зростає (рис. 3.31). Очевидно, що така комбінація числових параметрів претендує на оптимальну комбінацію:  $Z^{(1)}$  — час,  $Z^{(2)}$  — функція маркетингу;  $Z^{(3)}$  — функція менеджменту.

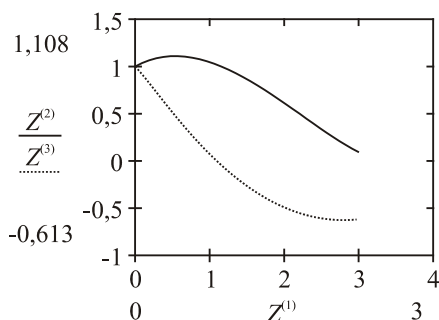


Рис. 3.29

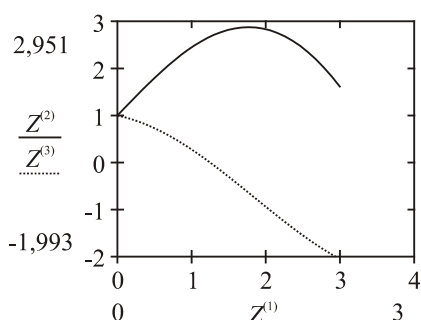


Рис. 3.30

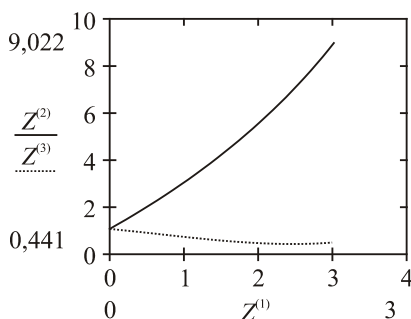


Рис. 3.31

Певний практичний інтерес викликає ситуація, коли коефіцієнт  $\mu$  лежить в околі точки нуль, тобто відбувається транзитивний процес переходу від виробництва з традиційним укладом до виходу на ринок товарів з новою продукцією. Виявилось, що для  $\mu = 0,04$  і  $\mu = -0,03$  (лівий окіл точки 0), при  $\alpha = \beta = 0,1$  результати числового інтегрування практично ідентичні (рис. 3.32 і 3.33).

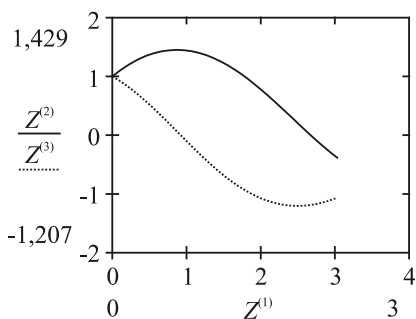


Рис. 3.32

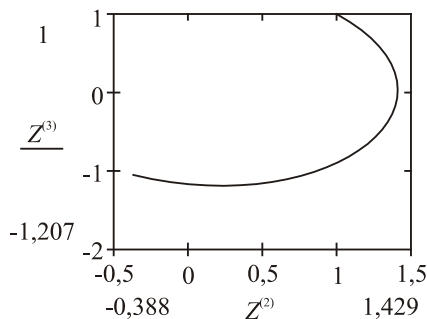


Рис. 3.33. Настають нелегкі часи

Також вивчалися екстремальні ситуації, а саме: величина  $\alpha = 0$ , що в рамках ММ означає максимальну розузгодженість між рішеннями керівництва фірми і діями працівників; коефіцієнт  $\beta = 0$  відповідає максимально нереалістичному оцінюванню керівництвом фірми стану справ на ринку товарів і власному становищу на ньому. У житті подібні ситуації зустрічаються через втрату контролю за реалізацією бізнес-плану або недостатньої кваліфікації працівників, також форс-мажорних обставин і викликаних ними розгубленості чи нерішучі дії, виключаючи навмисність.

Неадекватна оцінка становища фірми на ринку товарів може пояснюватись недостатньою і несвоєчасною поінформованістю та відсутністю елементарного передбачення розвитку подій, можливо, безпорадністю персоналу через дію виняткової динамічності подій.

Деякі результати числового моделювання приводяться на рис. 3.34 і 3.35. Привертає увагу якісна відмінність між ними у разі переходу до випуску нової продукції ( $\mu = 0,1$ ). На фазовому портреті з'являється замкнена крива.

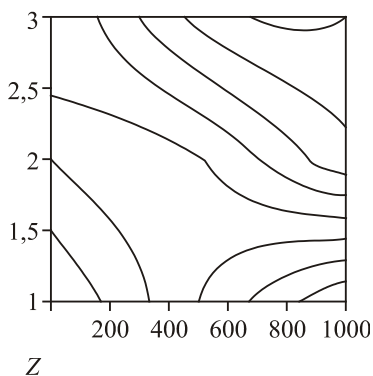


Рис. 3.34.  $\alpha = 0, \beta = 0,1,$   
 $\mu = -0,1$

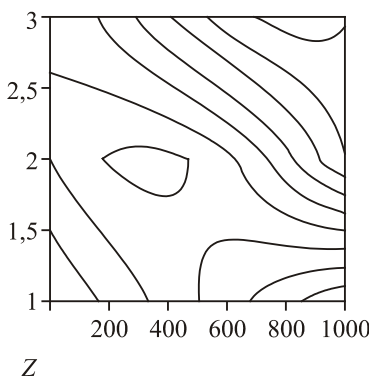


Рис. 3.33.  $\alpha = 0, \beta = 0,1,$   
 $\mu = 0,1$

Рисунки 3.36 і 3.37 ілюструють випадок  $\beta = 0$  для випуску старої ( $\mu = -0,1$ ) і нової ( $\mu = 0,1$ ) продукції за однакового рівня менеджменту ( $\alpha = 0,2$ ).

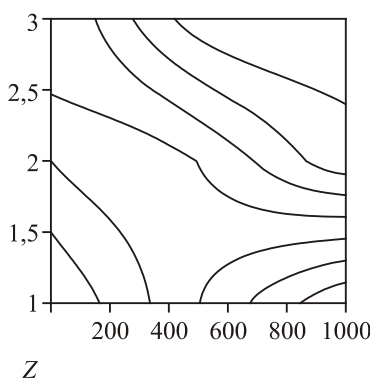


Рис. 3.36.  $\alpha = 0,2, \beta = 0,$   
 $\mu = -0,1$

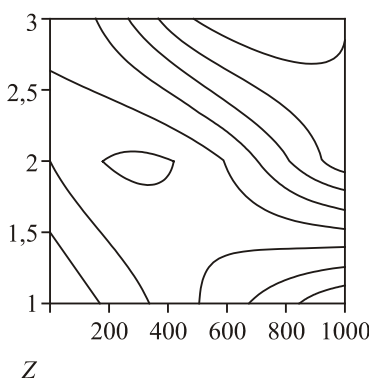


Рис. 3.37.  $\alpha = 0,2, \beta = 0,$   
 $\mu = 0,1$

Для випадку значної ( $\alpha = 2$ ) консолідації колективу фірми для  $\beta = 0,2$  і випуску старої продукції має місце принципово інші інтегральні криві (рис. 3.38) та фазовий опис (рис. 3.39) — криві монотонно зростають — фірма перебуває в стані злету. Між іншим, у всіх других варіантах числових значень  $\mu$  і  $\beta$  відповідні графіки являють собою спадні функції.

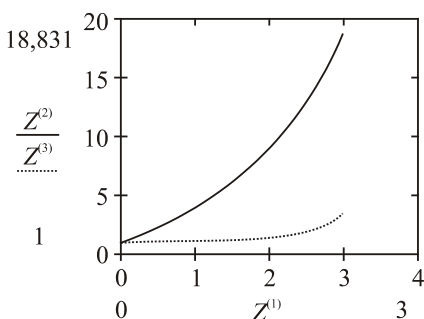


Рис. 3.38

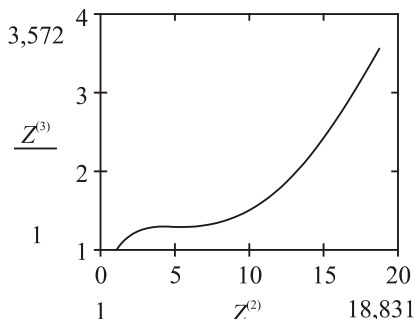


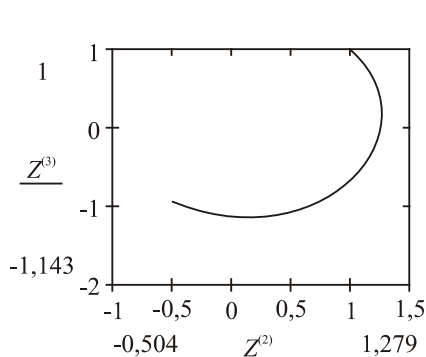
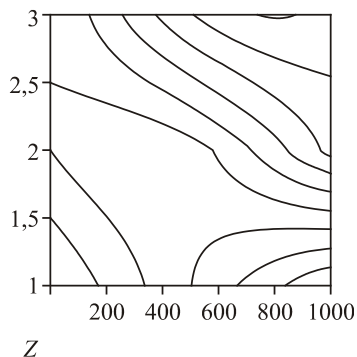
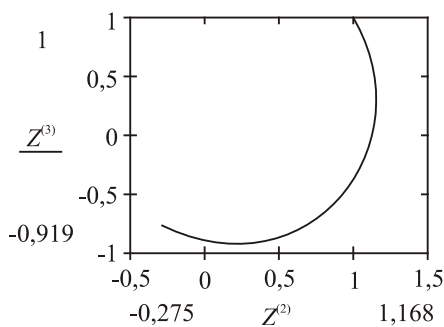
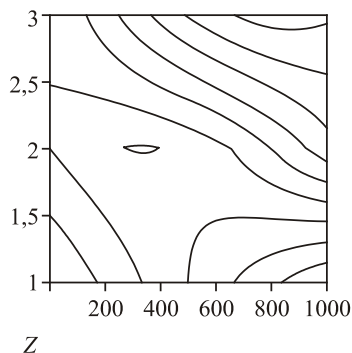
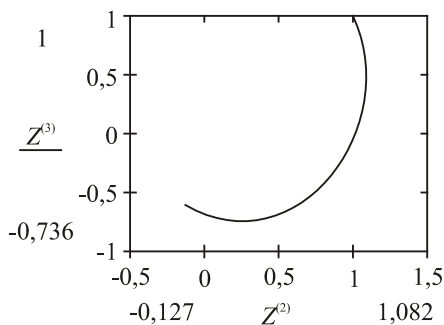
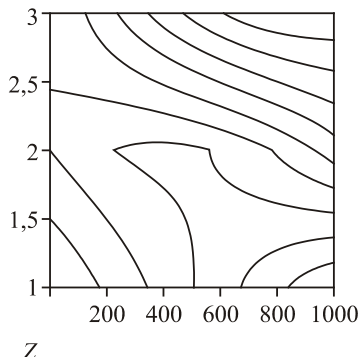
Рис. 3.39

На завершення розглянемо вкрай екстремальну ситуацію ( $\alpha = \beta = 0$ ) у діяльності фірми, коли діяльність її супроводжується повною відсутністю ( $\alpha = 0$ ) консолідації колективу та абсолютним незнанням ( $\beta = 0$ ) ситуації на ринку товарів. Описана ситуація не гіпотетична, як може здаватись на перший погляд. Вона може з'явитися з причин зовнішнього і/або внутрішнього походження, тоді ММ (3.30) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu \cdot x + (1 + \mu)y \\ \dot{y} = -x + \mu \cdot y. \end{cases} \quad (3.30a)$$

Система рівнянь (3.30a) чисельно досліджувалась для  $\mu = -0,2; -0,1; 0,2; 0,3$  на часовому інтервалі  $[0; 3]$  і для  $\mu = -0,7; 0,3; 0,7; 0,8$  на  $[0; 10]$  за стандартних початкових (стартових) умов.

У випадку від'ємних значень  $\mu$ , тобто випуску традиційної продукції, сценарії подій відтворені на рис. 3.40—3.43. Для додатних значень  $\mu$ , тобто випуску нової продукції, результати числового моделювання приводяться на рис. 3.44—3.47, що відповідає поведінці фірми в фазовому описі з координатами  $(x, y)$ . На рис. 3.40a—3.47a зображені інтегральні криві ММ. Закінчення графіків деяких з них на координатних вісях свідчить про припинення процесів маркетингу або менеджменту. Привертає увагу поява замкнених кривих, що вказує на циклічність досліджуваних процесів. Поведінка фазових описів майже стереотипна, але для випадків переходу на виробництво нової продукції вони виходять за існуючі межі значень.

Рис. 3.40.  $\mu = -0,1; [0,3]$ Рис. 3.40а.  $\mu = -0,1; [0,3]$ Рис. 3.41.  $\mu = -0,2; [0,3]$ Рис. 3.41а.  $\mu = -0,2; [0,3]$ Рис. 3.42.  $\mu = -0,3; [0,10]$ Рис. 3.42а.  $\mu = -0,3; [0,10]$

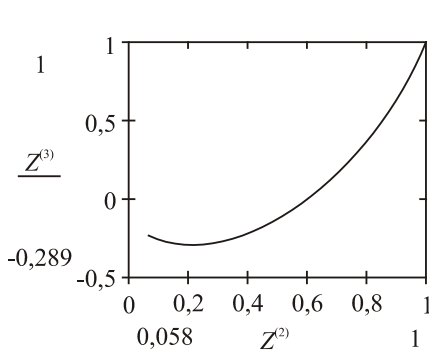


Рис. 3.43.  $\mu = -0,7; [0,10]$

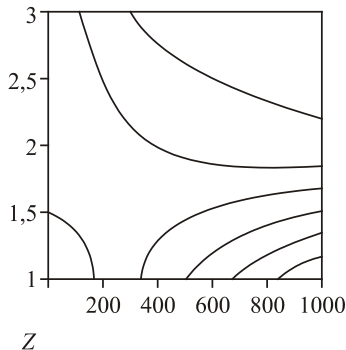


Рис. 3.43а.  $\mu = -0,7; [0,3]$

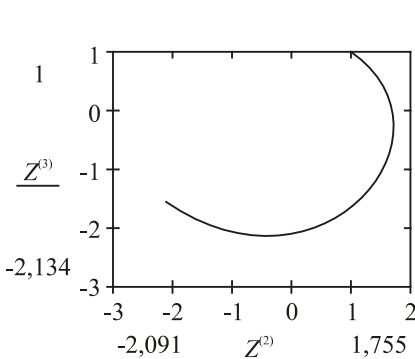


Рис. 3.44.  $\mu = 0,2; [0,3]$

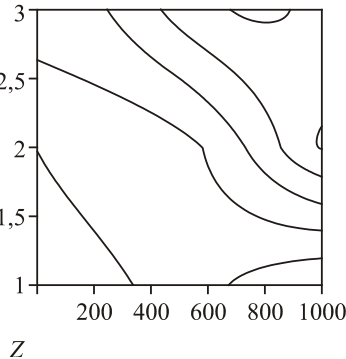


Рис. 3.44а.  $\mu = 0,2; [0,3]$

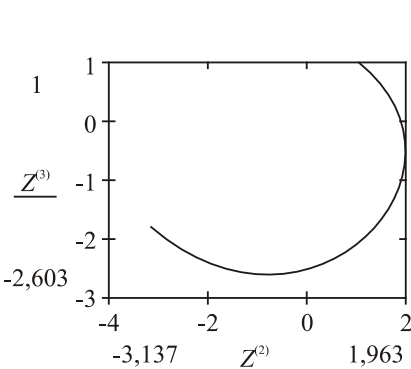


Рис. 3.45.  $\mu = 0,3; [0,3]$

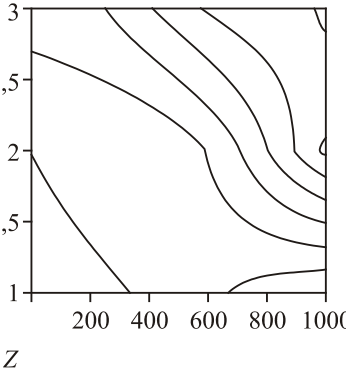
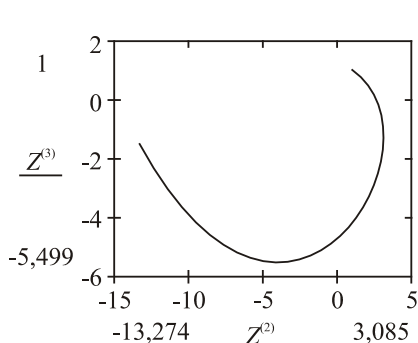
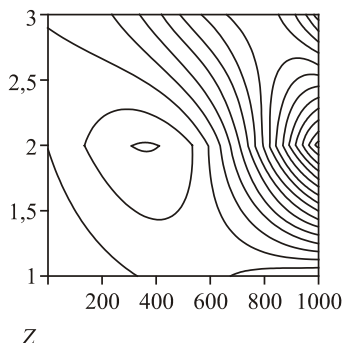
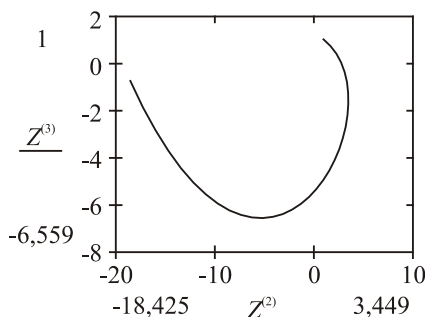
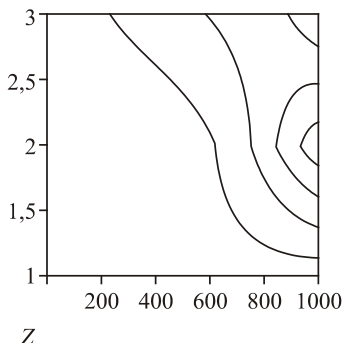


Рис. 3.45а.  $\mu = 0,3; [0,3]$

Рис. 3.46.  $\mu = 0,7$ ;  $[0,10]$ Рис. 3.46а.  $\mu = 0,7$ ;  $[0,10]$ Рис. 3.47.  $\mu = 0,8$ ;  $[0,10]$ Рис. 3.47а.  $\mu = 0,8$ ;  $[0,10]$ 

Таким чином, виконане числове моделювання діяльності фірми на ринку товарів відповідає кількісній оцінці процесів маркетингу і менеджменту для широкого діапазону скалярних параметрів ММ, що охоплює найбільш важливі в економічній практиці ситуації. Результати комп'ютерного моделювання корелюють з якісним аналізом ММ.

## Висновки

У центрі уваги розділу 3 стоять деякі характерні для економіки в цілому проблеми (еволюція економічної структури суспільства, ступінь зайнятості трудових ресурсів, функціонування



фірми тощо), котрі описуються адекватними математичними моделями. На підґрунті неперервних динамічних систем рівнянь вивчається економічний стан (досліджується процес його змінюваності), чим надаються сценарії еволюції, конструюючи умови для успішного досягнення задекларованої мети. Таким чином, математичне моделювання з використанням зазначених моделей сприятиме формуванню цілісної картини розвитку економічної системи.

Висвітлено результати якісного вивчення деяких нелінійних ММ макроекономіки. Вперше у моделюванні макроекономічної динаміки побудовано двовимірні параметричні описи на координатних площинах простору трьох параметрів ( $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ ). На прикладі ММ (3.4) структура параметричного опису визначається лініями: сідло-вузла  $s$ , нейтральності  $N$  і сепаратрисної петлі  $P$ , котрі утворюють чотири площини 1, 2, 3 і 5 (рис. 3.3б) зі спільною для них точкою  $K$ . В її околі розглядаються всі можливі біфуркації, а саме: а) у разі виходу з площини 2 до інших спостерігається жорсткий зрив рівноваги (стрімке падіння факторів), що може відбуватись навіть за малих кількісних значень змінних моделі; б) у разі перетину межі площин 2 і 3 має місце м'який зрив — зародження автоколивань навколо єдиної точки рівноваги; в) для перетину з площиною 3 в іншу, крім 2, може мати місце жорсткий зрив рівноваги з виходом на стійкий граничний цикл; г) у разі виходу з площини 5 в інші також може спостерігатися жорсткий зрив автоколивань і перехід системи до стійкої рівноваги в середині граничного цикла.

На підґрунті математичного моделювання здійснено дослідження гіпотетичної нелінійної економічної системи, а саме: а) якісно вивчено ММ з кількома стійкими атракторами; б) розглянуто динаміку поведінки траєкторії моделі залежно від її числових параметрів; в) ураховано стани насиченості та конкуренції.

Привернуто увагу до такого: а) існує так зване *порогове*, або критичне, значення числових коефіцієнтів ММ, перехід через яке принципово міняє режим функціонування; б) спостерігається розмаїття фазових описів та особливий характер їх поведінки поблизу межі стійкості; в) не тільки інтенсивність діянь ззовні, але й внутрішні механізми (стан) є визначальними для режиму функціонування економічної системи.

Одержані результати моделювання узгоджуються з вербальними уявленнями економічної спільноти про надскладний характер економіки. Але якщо класична економічна теорія розглядає

притаманні макроекономічні явища (процеси і тенденції), не варіюючи умови їх перебігу, то комп'ютерне моделювання (якісне і кількісне) проблем нелінійної економічної динаміки, здійснюючи багатоваріантний і широкомасштабний обчислювальний експеримент, сприяє кращому розумінню закономірностей макrorівня і як наслідок — формулюванню засад стратегії економічної політики суспільства.

В економічному просторі з координатами «капітал  $x$  суспільства — платоспроможний попит  $y$  — норма прибутку  $z$ » побудовано площинні моделі, за допомогою котрих вивчається перебіг економічних процесів, коли дві з числа трьох координати є функціями третьої за умови її зростання.

Результати такого вивчення формулюються так: а) інерційність капіталу, його слабе реагування на змінюваність норми прибутку і платоспроможного попиту згубно впливає на функціонування економічної системи, котра у своєму напрямі рухається до розпаду; б) малий платоспроможний попит також сприяє самознищенню системи, але з часом; в) непомірне зростання доходів та їх особисте споживання спонукають систему до занепаду, породжуючи тенденції до розрухи.

Ураховуючи запізнення і змінюваність величини відлову, розглянуто більш загальні, ніж відомі у літературі, неперервний і дискретний варіанти ММ динаміки неформальної економічної популяції, на підґрунті аналізу котрих описано сценарії розвитку подій.

Проблема зайнятості трудових ресурсів вивчалась з використанням: а) точкової моделі (системи звичайних диференціальних рівнянь), для якої ділянки змінюваності коефіцієнтів та співвідношення між ними визначають співіснування працюючих і безробітних; б) моделі з розподіленими параметрами (рівняння у частинних похідних) або просторово-часової чи дифузійної, на прикладі якої розкрито спосіб аналітичного моделювання.

Для моделювання життєдіяльності малого підприємства обрано три визначальні фактори:  $Y_1$  — кількість працюючих;  $Y_2$  — величина власного капіталу і обсяг кредитів  $Y_3$ , стосовно яких записано неперервну динамічну модель, що уточнює відомий у літературі результат. На прикладі цієї ММ виписано техніку якісного аналізу поведінки її розв'язків — динамічних траєкторій розвитку економічного агента. Також здійснено числове моделювання поведінки фірми на ринку товарів, ґрунтуючись на відомій у літературі ММ в координатах маркетингу і менеджменту.

### МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ ТА АДАПТАЦІЯ

**З**дійснено адаптивне комп'ютерне моделювання деяких проблем еволюції економічної системи.

---

#### 4.1. Кластер-процедура моделювання динаміки деяких соціально-економічних явищ як приклад ендогенної адаптації

---

Вперше в моделюванні здійснено кластеризацію різноманітних за змістом математичних моделей, яка вигідна у контексті пізнання адаптивних механізмів економіки. Наведено деякі результати обчислювального експерименту над ММ кластеризації, вказано на нові особливості поведінки розв'язку. Записано аналітичний розв'язок кластерної моделі.

Як відомо [19], кластер-процедура являє собою об'єднання двох (кількох) найбільш близько розташованих (в сенсі вибраної метрики) об'єктів (кластерів) в один кластер (груп). Це призводить до того, що початкове число  $n$  об'єктів зменшується і стає рівним  $(n-1)$ , причому один кластер буде мати два об'єкти, а  $(n-2)$  решти — по одному.

Пропонується застосувати принцип кластер-процедури в математичному моделюванні економіки, для використання якого наявні численні підстави. Одна з них розглядається далі.

У науковій літературі відома низка соціально-економічних явищ, математичне моделювання яких цілком відповідало потребам свого часу. Послідовно розглянемо здобутки на цьому шляху, виділяючи головне для кожної роботи і щоразу послідовно доповнюючи попереднє наступним результатом. Таким способом досягається повнота картини.

**Модель Річардсона** [131, 179]. Ця модель має також назву модель гонки озброєнь, яку справедливіше розглядати як модель

конфліктної ситуації, або загрози (погрози) однієї особи (групи людей) другій [143].

Відповідна лінійна система звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку записується:

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - mx + r \\ \dot{y} = dx - ny + s, \end{cases} \quad (4.1)$$

де функція  $x(t)$  описує витрати однієї сторони конфлікту,  $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$  її похідна;  $y(t)$  — витрати протилежної сторони конфлікту двох сторін,  $a, b, m, n$  — додатні сталі величини, коефіцієнти  $r$  і  $s$  відповідно до претензій, коли вони додатні, і доброї волі за  $r < 0, s < 0$ .

Побудова ММ (4.1) здійснювалась за майже очевидними гіпотезами: 1) кожна зі сторін конфлікту змінює швидкість зростання (збільшення або зменшення) власного військового потенціалу пропорційно обсягу витрат протилежної сторони; 2) чим більший поточний обсяг витрат на оборону, тим менша швидкість збільшення озброєнь; 3) одна сторона нарощує озброєння, керуючись своїми претензіями чи зазіханнями, незважаючи на політику щодо неї іншої сторони конфлікту.

Перше рівняння лінійної системи (4.1) задає горизонтальну швидкість, а друге — вертикальну швидкість точки, траєкторія руху якої в фазовому просторі описується ММ гонки озброєнь.

Можливі три сценарії розвитку подій:

А. Нескінченна гонка озброєнь при  $x \rightarrow \infty$  і  $y \rightarrow \infty$  ( $(mn - ab) < 0$ ;  $r > 0$ ;  $s > 0$  — ескаляція гонки озброєнь);

Б. Взаємне роззброєння при  $x \rightarrow 0$  і  $y \rightarrow 0$  ( $(mn - ab) > 0$ ;  $r < 0$ ;  $s < 0$ );

В. Рівновага озброєнь при  $x \rightarrow x^*$  і  $y \rightarrow y^*$  ( $(mn - ab) > 0$ ;  $r > 0$ ;  $s > 0$ ), де величини  $x^*$  і  $y^*$  є координати точки перетину прямих  $l_1$  (для  $\dot{x} = 0$ ) і  $l_2$  (для  $\dot{y} = 0$ ).

**Зауваження 1.** Якщо мають місце нерівності  $(mn - ab) < 0$ ;  $r < 0$ ;  $s < 0$ , то передбачення процесу подій суттєво залежить

від початкового стану  $(x_0, y_0)$  гонки озброєнь. Геометрично вказана ситуація розглянута на рис. 4.1.

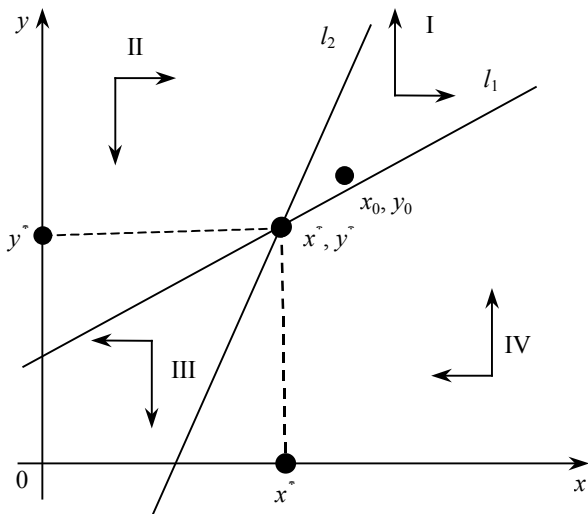


Рис. 4.1. Поведінка ММ (4.1)  
при  $r < 0$  або  $(ma) \cdot s < 0$

Якщо початковий рівень витрат на озброєння (точка  $(x_0, y_0)$ ) перебуває у ділянці I, то гонка озброєнь буде нескінченною.

Якщо точка  $(x_0, y_0)$  лежить у ділянці III, розв'язок ММ (4.1) відходить від рівноважного стану  $(x^*, y^*)$ , але прагне до точки  $(0, 0)$ , спостерігається взаємне роззброєння.

Отже, наявність доброї волі ( $r$  і  $s > 0$ ) в одній зі сторін протистояння ще не гарантує прийнятливий результат, який залежить від початкового стану процесу.

**Зауваження 2.** Стрілки на рис. 4.1 вказують на горизонтальну і вертикальну швидкості руху точки фазової площини.

Адекватність моделі Річардсона (4.1) була встановлена [131, 149, 179] на прикладі обсягів військових витрат воюючих сторін у Першій світовій війні.

На рис. 4.2 і 4.3 наведено одні з багатьох результатів числового моделювання протистояння двох сторін. У цьому випадку має міс-

це  $(mn - ab) = 1,3 > 0$ ;  $r = 0,5$  і  $s = 1$  — додатні; точка рівноваги  $x^* = 0,96$  і  $y^* = 0,92$  як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь —  $0,5y - x + 0,5 = 0$  і  $0,4x - 1,5y + 1 = 0$ . Для початкових умов  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$  конфлікт згасає (випадок роззброєння сторін).

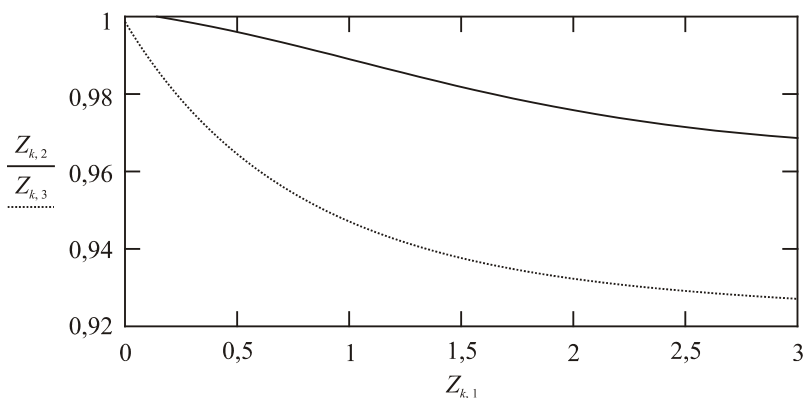


Рис. 4.2. Розвиток подій у часі на відрізку  $[0, 3]$

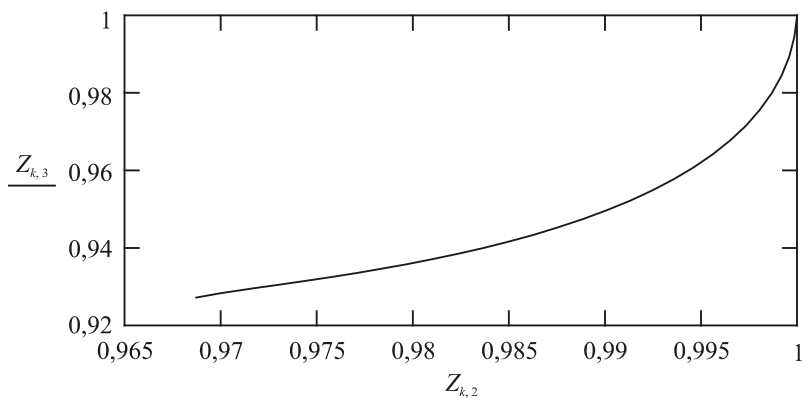


Рис. 4.3. Фазовий опис протистояння  
(випадок роззброєння сторін)

Недоліки ММ (4.1) виявляються у двох аспектах: сталості коефіцієнтів  $r$  і  $s$  та відсутності правила їх обчислення. Оскільки один з коренів характеристичного рівняння ММ (4.1) додатний, то для ста-

білізації розвитку подій у [149] пропонуються дві цілком природні можливості вибору коефіцієнтів  $r$  і  $s$ , а саме: 1) зусилля пропорційні різниці поточних значень кожної сторони конфлікту, тобто  $r$  і/або  $s$  рівні  $(-\gamma|x-y|)$ , і спрямовані на обох учасників конфлікту, причому вони зменшуються у разі досягненні паритету; 2) миротворчі дії на кожну сторону конфлікту записуються як  $(-\gamma|x+y|)$ , тобто один із учасників набуває крім власних побуджувальних мотивів ще більшої мотивації реагувати на дії іншої сторони.

Деякі результати широкомасштабного обчислювального експерименту над ММ (4.1) з використанням описаної вище стратегії примирення сторін наводяться на рис. 4.4—4.7. Легко вбачається значна ефективність другого варіанта  $(-\gamma|x+y|)$  зменшення рівня протистояння.

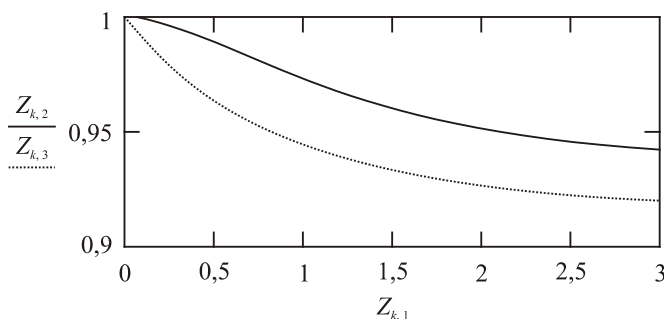


Рис. 4.4. Розвиток подій у часі  $Z_{k,1}$  для першого варіанта миротворчих зусиль

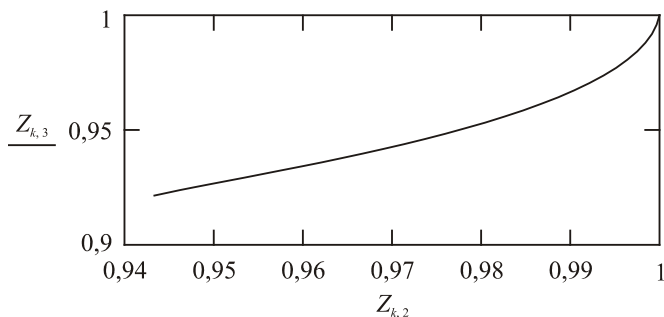


Рис. 4.5. Фазовий опис протистояння для першого варіанта примирення

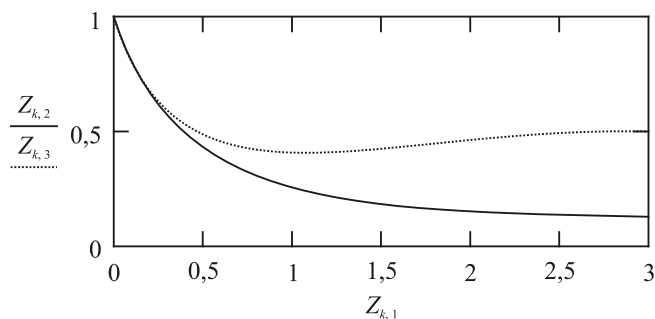


Рис. 4.6. Розвиток подій з часом  
для другого варіанта примирення

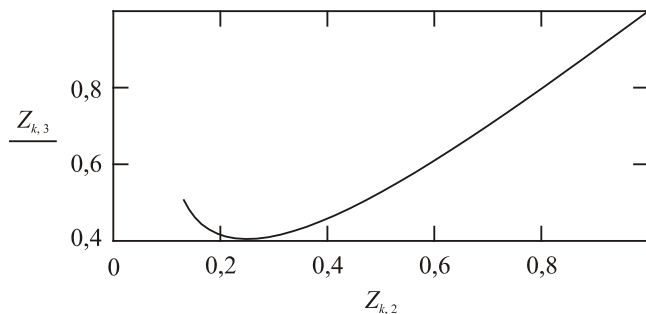


Рис. 4.7. Фазовий опис протистояння  
для другого варіанта примирення

У монографії [104] описано ММ довгих хвиль, яка з додержанням наших позначень записується так:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha \cdot x + \alpha \cdot b \cdot y \\ \dot{y} = -\beta \cdot y + \beta \cdot g \cdot p, \end{cases} \quad (4.1a)$$

де змінна  $x(t)$  відповідає темпу приросту продуктивності праці,  $y(t)$  — темпу приросту капіталоозброєності, а величина  $p = x - y$  — темп приросту норми прибутку; величини  $\alpha, \beta, b, g$  — так звані *структурні коефіцієнти*. Автори [104] зазначають,



що перше рівняння ММ (4.1а) відображає характер взаємодії процесів накопичення і науково-технічного прогресу, а друге рівняння являє собою рушійну силу, якою породжуються коливні рухи і визначаються їх поворотні точки. Аналізуючи результати числового моделювання, автори дійшли висновку, що провідна роль у виникненні довготривалих коливань в економіці належить вкладенням у радикально нову виробничу техніку.

Легко вбачається, що з точністю до знаків і виразів коефіцієнтів система рівнянь (4.1а) є окремим випадком ММ (4.1) при  $r = s = 0$ .

ММ функціонування в економічному середовищі фірми середньої величини матиме вигляд [143]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha \cdot y - \gamma \cdot x \\ \dot{y} = \mu \cdot y - \beta \cdot x \end{cases} \quad (4.16)$$

де  $x(t)$  — кількість співробітників на момент часу  $t$ ;  $y(t)$  — власний капітал, приймаючи наші позначення; коефіцієнт  $\alpha$  — частка власного капіталу, яку підприємство виділяє на зарплату; коефіцієнт  $\gamma$  — динаміка кількості працюючих з різних причин; коефіцієнт  $\mu$  — ефективність капіталовкладень; числовий параметр  $\beta$  — загальні витрати фірми на співробітників.

Отже, система диференціальних рівнянь (4.1б) з точністю до числових параметрів є окремим випадком ММ (4.1) і практично збігається з (4.1а).

У стандартному дослідженні стійкості стаціонарного розв'язку ( $x^* = y^* = 0$ ) ММ (4.1б) існують дві можливості: для  $\mu > \gamma$  має місце нестійкий фокус і стійкий для  $\mu < \gamma$ , причому  $\gamma$  — мале число (причин для звільнення працівників небагато);  $\alpha$  і  $\beta$  — значні за величиною і свідчать про витрати на співробітників;  $\mu$  — не може бути великим, бо фірма середня.

Доповнюючи попереднє (в сенсі стратегії моделювання), привернемо свою увагу до варіанта, коли величини  $\mu$  і  $\gamma$  мало різняться. На рис. 4.8 і 4.9 приводяться результати числових розрахунків для  $\gamma = 5$  і  $\mu = 4,8$ . З часом настає стійкий граничний цикл.

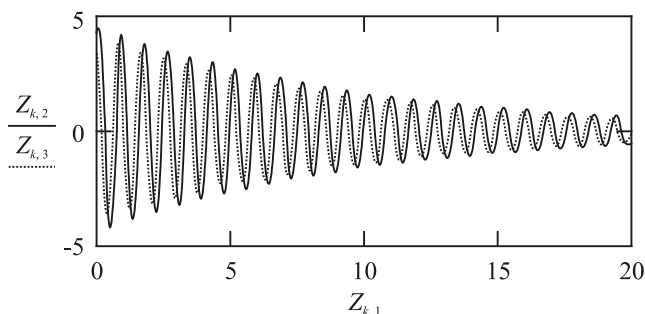


Рис. 4.8. Еволюція кількості працівників ( $x(t) = Z_{k,2}$ ) і капіталу ( $y(t) = Z_{k,3}$ ) фірми з часом

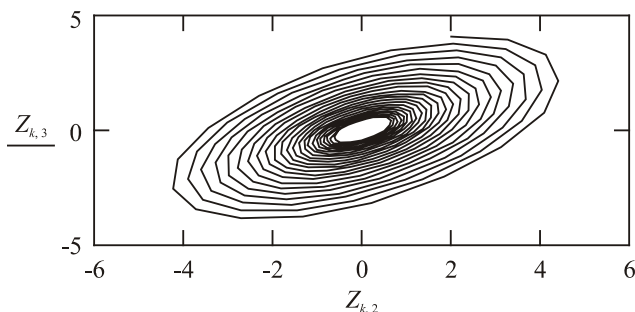


Рис. 4.9. Фазовий опис діяльності фірми — граничний цикл

Насамкінець, подамо аналітичний розв'язок кластерної ММ (4.1), записавши її у векторно-матричній формі

$$\dot{\bar{Z}} = A\bar{Z} + \bar{b}, \quad (4.2)$$

де  $\bar{Z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$  — вектор-стовпець змінних;  $\dot{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$  — вектор-стовпець похідних змінних; матриця  $A = \begin{pmatrix} -m & a \\ b & -n \end{pmatrix}$  числових параметрів ММ і постійний вектор-стовпець  $\bar{b} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ , що відображає наміри сторін.

Якщо  $\bar{Z}(0) = \bar{c}$  є вектор початкових умов, то аналітичний розв'язок ММ (4.2) записується

$$\bar{Z} = e^{A \cdot t} \cdot \bar{c} + A^{-1} \bar{b} (e^{A \cdot t} - E),$$

оскільки виконується таке:

$$e^{A \cdot t} (\dot{\bar{Z}} - A \bar{Z}) = \frac{d}{dt} (e^{-A \cdot t} \cdot \bar{Z}) = e^{-A \cdot t} \cdot b;$$

$$\bar{Z} = e^{A \cdot t} \cdot \bar{c} + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot b \, ds;$$

інтеграл набуває вигляду після ланцюжка очевидних перетворень

$$\begin{aligned} e^{A \cdot t} \cdot b \cdot \int_0^t e^{-A \cdot s} \, ds &= e^{A \cdot t} \cdot b \cdot (-A^{-1}) \int_0^t e^{-A \cdot s} \, d(-A \cdot s) = e^{A \cdot t} \cdot b (-A^{-1}) e^{-A \cdot s} \Big|_0^t = \\ &= A^{-1} \cdot b \cdot (e^{A \cdot t} - E). \end{aligned}$$

Для кластерної ММ вигляду

$$\dot{\bar{Z}} = A \cdot \bar{z} + \bar{b}(t); \quad \bar{Z}(0) = c, \quad (4.2a)$$

що відповідає урахуванню природних можливостей визначення величин  $r$  і  $s$ , аналітичний розв'язок записується [10]

$$\bar{Z} = e^{A \cdot t} \cdot \bar{c} + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot b(s) \, ds.$$

Щоб провести комп'ютерне моделювання, треба вміти обчислювати матричну експоненту  $e^{A \cdot t}$ .

З'ясовано, що деякі різноманітні за змістом соціально-економічні явища описуються однією й тією ж ММ, для якої записано аналітичний розв'язок. Широкомасштабний обчислювальний експеримент над кластерною моделлю показав існування граничного циклу для одного практично важливого випадку. Також здійснено числове моделювання конфлікту двох сторін, досліджено варіанти ефективного їх примирення.

## 4.2. Адаптивний якісний аналіз економічного партнерства

Розглянемо сценарії можливої співпраці двох країн (союзів) на підґрунті м'якого моделювання. Розкриємо адаптивну природу механізму взаємодії. Альтернатива доцільної поведінки визначається в моделі відповідними коефіцієнтами, серед яких визначальними є ті, що характеризують якість продукції галузі і ступінь міжгалузевих зв'язків.

Вербального характеру пропозиції (думки і заклики) в економічній літературі висловлюються, їх ціле розмаїття. Але наукових праць аналітичного плану з виваженими міркуваннями і рекомендаціями, як наслідок — якісного та кількісного комп'ютерного моделювання, поки що нема.

Між іншим, актуальність окресленого вище неминуша: проблема взаємовигідної й ефективної співпраці об'єктів господарювання завжди існує.

Метою дослідження виступає математичне відтворення процесу економічного партнерства двох країн та якісний аналіз математичної моделі, що включає таке: намітити шляхи можливого розвитку подій, сформулювати вимоги щодо вибору керуючих параметрів і коефіцієнтів моделі, надати економічне тлумачення результатам моделювання, реальну альтернативу сценарію економічної кооперації.

Мета досягається досить поширеним прийомом запозичення або перенесення відомого в одній сфері наукового знання до іншої, як це зазвичай відбувається в науці взагалі і економічній зокрема, починаючи з відомого з демографії рівняння Мальтуса. Останнім прикладом такого поширення може слугувати стаття [166], згідно з результатами якої динаміка зростання капіталу відтворюється рівнянням Ферхюльста (1838 р.), відомим спершу в теорії росту популяцій у природі. Серед здобутків математичної біології також відшукалася [157] подібна до розглядуваної нами проблеми задача.

Математична модель досліджуваної  
проблеми та особливі точки

Будучи подальшим поширення знаного в науці підходу Вольтерра—Лотки [23], математичні моделі динаміки процесів макроекономіки [52, 75, 85] суттєво перекликаються з системами ди-

ференціальних рівнянь, що описують біологічні та економічні нелінійні процеси з урахуванням явищ конкуренції, симбіозу тощо [8,138].

Для двох конкуруючих у взаємодії галузей економіки одного суспільства, споріднених своїм функціонуванням і кінцевою продукцією, справедливо записати рівняння динаміки обсягів виробництва

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon x - \alpha x^2 - \beta xy = f_1(x, y) \\ \dot{y} = \epsilon y - \alpha y^2 - \beta xy = f_2(x, y), \end{cases} \quad (4.3)$$

де  $x = x(t)$  — обсяг виробництва однієї з галузей, а  $y = y(t)$  — відповідно іншої в деякий момент часу  $t$ ;  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  і  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  — швидкість змінюваності обсягів продукції відповідної галузі; коефіцієнти:  $\epsilon$  — відтворення кожної з галузей;  $\alpha$  — внутрішньої конкуренції (у самій галузі);  $\beta$  — відображає конкуренцію між галузями.

Динамічна система рівнянь (4.3) володіє стаціонарними точками: 1) тривіальною  $x = y = 0$ ; 2)  $x = y = \epsilon/(\alpha + \beta)$ ; 3)  $x = \epsilon/\alpha$ ;  $y = 0$ ; 4)  $x = 0$ ,  $y = \epsilon/\alpha$  — розв'язками нелінійної алгебраїчної системи рівнянь, що отримується з (4.3) за умови  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ . Дійсно, вона набуває вигляду

$$\begin{cases} x(\epsilon - \alpha x - \beta y) = 0 \\ y(\epsilon - \alpha y - \beta x) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

звідси тривіальний розв'язок ( $x = y = 0$ ) очевидний. Координати стаціонарної точки 2) здобуємо, розв'язавши лінійну систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \epsilon \\ \beta x + \alpha y = \epsilon. \end{cases}$$

Коли в першому рівнянні системи (4.4) невідома  $x = 0$ , то з другого рівняння випливає  $y = \epsilon/\alpha$ , тобто координати стаціонарної точки 4. Аналогічно, коли  $y = 0$  у другому рівнянні системи (4.4), то з першого рівняння випливає  $x = \epsilon/\alpha$ , тобто координати

точки 3. Між іншим, останній розв'язок легко записати з огляду на симетрію.

Фазова площина стаціонарної точки зображена на рис. 4.10.

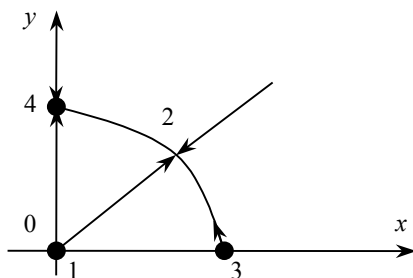


Рис. 4.10. Розташування стаціонарних точок

Техніка дослідження стаціонарних точок на стійкість полягає у такому. Для ММ (4.3) запишемо матрицю Якобі  $J = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$

( $x = \{x, y\}$ ;  $i, j = 1, 2$  конкретно у нашому випадку)

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} \epsilon - 2\alpha x - \beta y & -\beta x \\ -\beta y & \epsilon - 2\alpha y - \beta x \end{pmatrix},$$

котра обчислюється в кожній зі стаціонарних точок. Складається характеристичне рівняння  $\det(J - \lambda E) = 0$ , де  $\lambda$  — спектр власних значень;  $E$  — одинична матриця. Конкретно у розглядуваному випадку характеристичне рівняння набуватиме вигляду

$$\begin{vmatrix} (\epsilon - 2\alpha x - \beta y - \lambda) & -\beta x \\ -\beta y & (\epsilon - 2\alpha y - \beta x - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, дістанемо рівняння

$$\lambda^2 - \lambda \cdot Sp J + \det J = 0, \quad (4.5)$$

де слід матриці  $Sp J = \epsilon - 2\alpha x - \beta y + \epsilon - 2\alpha y - \beta x$  є сума елементів головної діагоналі матриці Якобі;  $\det J = (\epsilon - 2\alpha x - \beta y)(\epsilon - 2\alpha y - \beta x) - \beta^2 xy$  — числове значення визначника матриці Якобі, причому слід матриці та її детермінант обчислюються для кожної стаціонарної точки.

Залежно від коренів рівняння (4.5), тобто власних значень  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , можливі такі варіанти рухів в околі стаціонарних точок: 1) стійкий режим вузлового типу, коли  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  дійсні і від'ємні (на рис. 4.10 точка 2); система здійснює аперіодичні рухи і прагне повернутись до точки рівноваги; 2) нестійкий вузол (на рис. 4.10 точка 1), коли  $\lambda_1 > 0$  і  $\lambda_2$ ; система віддаляється від рівноважного стану; 3) нестійкий режим сідлового типу, коли величини  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  дійсні і протилежних знаків (на рис. 4.10 точки 3 і 4); 4) стійкий фокальний режим, коли корені  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  комплексні з від'ємною дійсною частиною; система здійснює стійкі періодичні коливання навколо точки рівноваги, що затухають (крива затягується); 5) нестійкий фокальний режим (крива траєкторії розкручується), коли дійсна частина коренів додатня; 6) стійкий режим типу центр, коли корені комплексні і нульовою дійсною частиною, тоді спостерігається періодичні коливання.

Перша стаціонарна точка нестійка при довільних додатних параметрах  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Для умови  $\beta < \alpha$  нестійкими є стаціонарні точки 3 і 4, лише рівноважна точка 2 стійка на зразок вузол. У випадку нерівності  $\beta > \alpha$  все відбувається навпаки, а саме: нестійка точка 2 — сідло, рівноважні 3 і 4 стають стійкими вузла. Іншими словами, одна із галузей на ринку витісняє іншу, причому перемагає та, стартові умови якої були кращими.

На підґрунті розглянутого вище постає цілком слушні і навіть закономірні запитання: Що буде у тому випадку, коли розглядати дві держави (два економічні союзи), в кожній з яких завжди знайдуться дві споріднені або близькі галузі виробництва, причому на ринок збуту вони виходять майже з однаковою продукцією (асортиментом товарів)? Яким чином поводитиметься кожна зі сторін? Чим і наскільки продиктовані поведінка учасників? Які фактори у розвитку подій є вирішальними? Які можливі сценарії взаємодії (антагоністична, партнерська).

Такі питання не надумані, вони відображають реалії економічного життя — стосунки між Україною і Росією на прикладі металургійного і коксохімічного виробництв, котрі тісно пов'язані між собою та значно конкурують на зовнішньому ринку. Наприклад, можна навести інші країни і виробничі галузі. Варто зауважити, що можуть фігурувати не тільки галузі виробництва, але й також інші сфери людської діяльності.

Зрозуміла незаперечна роль математичного моделювання у пошуку адекватних відповідей на сформульовані самим життям питання. До речі, скористатися досить поширеним економетричним моделюванням принципово неможливо, бо треба володіти статистичною сукупністю, котра, як правило, відсутня.

Нехай чисельне значення змінної  $x_1$  описує обсяги виробництва першої галузі однієї держави, а  $x_2$  — відповідно для іншої держави; змінні  $y_1$  та  $y_2$  — для другої галузі держав. Через сталу величину  $b$  позначається коефіцієнт міграції (вільного пересування) всередині кожної галузі для кожної зі сторін — учасників процесу. Тоді рівняння динаміки обсягів виробництв для кожної з галузей обох сторін записуються

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varepsilon x_1 - \alpha x_1^2 - \beta x_1 y_1 - b(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon x_2 - \alpha x_2^2 - \beta x_2 y_2 + b(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_1 &= \varepsilon y_1 - \alpha y_1^2 - \beta x_1 y_1 - b(y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon y_2 - \alpha y_2^2 - \beta x_2 y_2 + b(y_1 - y_2),\end{aligned}\tag{4.6}$$

що є узагальненням ММ (4.3).

Для зручності проведення якісного аналізу береться умова, що коефіцієнти  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  сталі й однакові у всіх рівняннях. Хоча в дійсності це не так, але на незначному інтервалі часу таке припущення цілком прийнятне. Цим самим виключається будь-яка дискримінація галузей в обох суспільствах та їх продукції на ринках збуту.

Розв'язуючи відповідну систему алгебраїчних рівнянь, знаходимо стаціонарні точки. Всього їх 16, з числа яких розглядаються ті, що підходять за змістом (координати точок дійсні і невід'ємні). Перші чотири корені аналогічні розв'язкам системи рівнянь (4.4), ураховуючи структуру ММ (4.6).

Наступні два корені матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\text{для стаціонарної точки 5} \quad & x_1 = \frac{1}{2\alpha}(\varepsilon - 2b + \sqrt{(\varepsilon - 2b)M}); \\ & x_2 = \frac{1}{2\alpha}(\varepsilon - 2b - \sqrt{(\varepsilon - 2b)M}); \quad y_1 = \frac{1}{2\alpha}(\varepsilon - 2b - \sqrt{(\varepsilon - 2b)M});\end{aligned}$$



$y_2 = \frac{1}{2\alpha}(\epsilon - 2b + \sqrt{(\epsilon - 2b)M})$ , де  $M = \epsilon - 2b \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ . Для подальшої зручності введемо значення:  $(\epsilon - 2b) = F$  і  $\sqrt{(\epsilon - 2b)M} = G$ . Тоді стаціонарна точка 6 має координати:  $x_1 = \frac{1}{2\alpha}(F - G)$ ;  $x_2 = \frac{1}{2\alpha}(F + G)$ ;  $y_1 = \frac{1}{2\alpha}(F + G)$ ;  $y_2 = \frac{1}{2\alpha}(F - G)$ . Привертає увагу симетричність координат в обох стаціонарних точках, що пояснюється структурою ММ (3.36).

Аналіз існування дійсних і додаткових координат зазначених стаціонарних точок 5 і 6 приводить до нерівності

$$b < \frac{\epsilon(\beta - \alpha)}{2(\alpha + \beta)}, (\alpha < \beta). \quad (4.7)$$

Ця умова накладає певні обмеження на коефіцієнти ММ (4.6), що відповідає ситуації, коли в межах однієї сторони партнерства галузь  $x$  витісняє іншу галузь  $y$ , і навпаки, у рамках іншої сторони співпраці.

Стаціонарна точка 7 має координати:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1}{2} + \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - V_1}; & x_2 &= \frac{u_2}{2} + \sqrt{\frac{u_2^2}{4} - V_2}; & y_1 &= \frac{u_1}{2} - \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - V_1}; \\ y_2 &= \frac{u_2}{2} - \sqrt{\frac{u_2^2}{4} - V_2}, & \text{де} & & U_1 &= \frac{A + \sqrt{B}}{2\alpha(\alpha + \beta)}; & U_2 &= \frac{A - \sqrt{B}}{2\alpha(\alpha + \beta)}; \\ A &= 3\epsilon\alpha + \epsilon\beta - 2\alpha\beta; & B &= \epsilon^2\alpha^2 + \epsilon^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 - 2\epsilon^2\alpha\beta - 8\alpha\beta b^2 + \\ &+ 4\epsilon\alpha\beta b - 4\alpha\beta^2 b; & V_1 &= \frac{C(D + \sqrt{B})}{2\alpha(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta)}; & V_2 &= \frac{C(D - \sqrt{B})}{2\alpha(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$$C = \epsilon\alpha + \beta b; \quad D = \epsilon\alpha - \epsilon\beta - 2\alpha\beta.$$

Наступні точки 8—10 виписуються, беручи до уваги симетричність (див., наприклад, точки 5 і 6).

Координати рівноважних точок 7—10 дійсні і невід'ємні, коли коефіцієнти ММ досліджуваного явища задовольняють нерівність

$$b < \frac{\epsilon(\beta - \alpha)}{2(\alpha + 2\beta)}, (\alpha < \beta). \quad (4.8)$$

## Якісний аналіз ММ проблеми

Зважаючи на теорему [176, с. 90] про стійкість розв'язків нелінійної ММ (4.6), розглянемо лінійну диференціальну систему  $\dot{y} = Ay$ , де  $A$  — матриця Якобі, обчислювана в кожній стаціонарній точці. Конкретно елементи цієї матриці часткових похідних записуються:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_1} \equiv \varepsilon - 2\alpha x_1 - \beta y_1 - b; & a_{12} &= \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_2} \equiv b; \\ a_{13} &= \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial y_1} \equiv -\beta x_1; & a_{14} &= \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial y_2} \equiv 0; & a_{21} &= b; & a_{22} &= \varepsilon - 2\alpha x_2 - \beta y_2 - b; \\ a_{23} &= 0; & a_{24} &= -\beta x_2; & a_{31} &= -\beta y_1; & a_{32} &= 0; & a_{33} &= \varepsilon - 2\alpha y_1 - \beta x_1 - b; & a_{34} &= b; \\ a_{41} &= 0; & a_{42} &= -\beta y_2; & a_{43} &= b; & a_{44} &= \varepsilon - 2\alpha y_2 - \beta x_2 - b. \end{aligned}$$

Відповідно до методики якісного аналізу складається характеристичне рівняння  $\det(A - \lambda E) = 0$ , де  $E$  — одинична матриця,  $\lambda$  — спектр власних значень. Конкретно для нашого випадку характеристичне рівняння записується

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - 2\alpha x_1 - \beta y_1 - b) - \lambda & b & -\beta y_1 & 0 \\ b & (\varepsilon - 2\alpha x_2 - \beta y_2 - b) - \lambda & 0 & -\beta y_2 \\ -\beta y_1 & 0 & (\varepsilon - 2\alpha y_1 - \beta x_1 - b) - \lambda & b \\ 0 & -\beta y_2 & b & (\varepsilon - 2\alpha y_2 - \beta x_2 - b) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Щоразу визначник розраховується в кожній стаціонарній точці. Спектр власних значень  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  визначає характер рухів в околі стаціонарних точок. Наприклад, для першої (тривіальної) точки рівноваги матиме місце детермінант

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - b) - \lambda & b & 0 & 0 \\ b & (\varepsilon - b) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon - b) - \lambda & b \\ 0 & 0 & b & (\varepsilon - b) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи його, одержимо характеристичне рівняння  $[(\varepsilon - b - \lambda)^2 - b^2]^2 = 0$ , звідси випливає, що  $[(\varepsilon - b - \lambda) - b] \times [(\varepsilon - b - \lambda) + b] = 0$ . З перших квадратних дужок матимемо  $\lambda_1 = \varepsilon - 2b$  і остаточно  $\lambda_1 = \lambda_2$  у зв'язку з піднесенням до квадрату; з другого співмножника добутку випливає  $\lambda_3 = \varepsilon$  і остаточно

$\lambda_3 = \lambda_4 = \varepsilon$  з тієї же причини. Отже, для  $\varepsilon > 0$  перша рівноважна точка нестійка.

Аналогічно діючи для стаціонарної точки 2  $\left( x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha + \beta} \right)$ , знаходимо власні значення:  $\lambda_1 = -\varepsilon$ ;  $\lambda_2 = -2b$ ;  $\lambda_3 = \frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{\alpha + \beta}$ ;  $\lambda_4 = -\varepsilon - 2b$ . Для нерівності  $\alpha > \beta$  характеристичні числа  $\lambda_i < 0$  ( $i=1,2,3,4$ ) і точка стійка; при  $\alpha < \beta$  власне значення  $\lambda_3 > 0$  і точка нестійка.

Аналіз стійкості стаціонарних точок 5 і 6 приводить до нерівності (4.8), яка є необхідною і достатньою умовою стійкості. Рівноважні точки 7—10 лежать на межі ділянок тяжіння, але за умови деяких обмежень параметрів можлива їхня нестійкість.

#### Сценарії економічного партнерства на підґрунті моделювання

Таким чином, можуть мати місце такі сценарії розвитку подій для випадку взаємодії двох держав, у кожній з яких є дві споріднені галузі виробництва (міграційно пов'язані суспільства):

1. Якщо внутрішньогалузева конкуренція  $\alpha$  більша за міжгалузову  $\beta$ , то в обох суспільствах будуть стійко існувати обидві галузі виробництва незалежно від рівня ізоляції між державами. Іншими словами, боротьба за якість продукції завжди виправдана. Серед перших чотирьох стаціонарних точок стійкою є точка 2.

2. Якщо виконується нерівність  $\alpha < \beta$ , то рівноправне співіснування двох галузей у кожній державі неможливе, для випадків:

а) нерівності  $b > \frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{2(\alpha + \beta)}$  — зазначеного співвідношення між

коефіцієнтами ММ міграційний процес досить суттєво впливає на еволюцію системи (об'єкта моделювання), де перемагає одна галузь, витісняючи конкурента;

б) для подвійної нерівності  $\frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{2(\alpha + \beta)} > b > \frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{2(\alpha + 2\beta)}$  матимуть мі-

сце стаціонарні точки 5 і 6, у державах-партнерах переважатимуть різні види, але спостерігатиметься нестійкість, тобто будь-яка ви-

падковість може призупинити її. У такому разі в системі існуватимуть перші шість стаціонарних точок, з числа яких стійкі 3 і 4;

в) для випадку нерівності  $b < \frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{2(\alpha + 2\beta)}$  — співвідношення між

коефіцієнтами системи існуватимуть всі десять рівноважних точок, з яких чотири (3—6) стійкі. При цьому існує ділянка стартових (початкових) умов у створенні продукції галузями, за яких об'єкт моделювання досягає рівноважного стану, але в кожного з партнерів переважатимуть різні види. Наприклад, у першій державі переважатиме галузь  $x$ , а у другій — вид  $y$ , причому деякі стаціонарні стани галузі  $y$  у першій державі і галузі  $x$  для другої існуватимуть лише за рахунок міграційного процесу.

Як видно, вплив міжгалузевої конкуренції на динаміку обсягів конкуруючих видів виробництва багатоманітний. Динаміка в свою чергу може здійснювати вплив на розподіл галузей та їх еволюцію, допускаючи явище інтерференції, коли показники однієї галузі взаємно підсилюються або послабляються.

Очевидно, що партнерство має забезпечувати успішність кожної сторони (не пригнічувати, а сприяти взаємно ефективному співіснуванню на ринку збуту).

---

### 4.3. Адаптивний кількісний аналіз математичної моделі нелінійної економічної динаміки

---

Із попереднього стає очевидним, що найпоширенішою ММ нелінійної динаміки виступає так звана *задача Коші* з початковою умовою, яка у нормальній формі записується

$$\dot{X} = f(t, X); \quad X = (t_0) = X_0, \quad (4.9)$$

де  $X$  — вектор змінних економічного стану;  $t$  — незалежна змінна, права частина  $f(X, t)$  — диференціальна функція за своїми змінними.

Система звичайних диференціальних рівнянь (4.9) також виступає як ММ динамічних систем іншої природи, наприклад, інтегральна електроніка. Як в економіці, так і в інших сферах застосування (4.9), зокрема в автоматизації проектування в електроніці, матиме місце проблема жорсткості рівнянь, породжувана наявні-

стю швидких і повільних змінних моделі [37]. Ця проблема суттєво впливає на результати моделювання (його ціну, точність, своєчасність), а інколи робить недосяжною мету моделювання.

Хоча на сьогодні відомі пакети програм числового аналізу задачі Коші (3.39), але бар'єр жорсткості (більш загально — проблема коректності) рівнянь моделі продовжує перебувати у центрі уваги: у кожного окремо взятого числового методу є переваги і недоліки. Зрозуміло, що ефективність застосування алгоритмів числового аналізу виявляється у своєрідному використанні множини обчислювальних схем — адаптивному їх використанню залежно від поведінки шуканого зв'язку (інтегральної кривої), об'єднуючи позитивні якості і зменшуючи вади.

Свого часу у САПР бар'єр жорсткості успішно долався [146], комбінуючи двосторонні однокрокові явні та напів-явні числові алгоритми змінного порядку точності і користуючись розробленою адаптивною стратегією вибору кроку числового інтегрування. Таким чином, здійснюється адаптивна організація комп'ютерного моделювання, у процесі якого відбувається найкращий у розумінні обчислювальних витрат вибір методу інтегрування з числа наявних, керуючись локальними властивостями розв'язку (інтегральної кривої).

Нижче викладено підхід, що дозволяє zorganizувати ефективний обчислювальний процес моделювання, ґрунтуючись на адаптивному управлінні тривалістю (довжиною) кроку  $h$  числового інтегрування і його трудомісткістю.

Нехай для числового розв'язання автономної ММ (4.9) використовуються обчислювальні схеми:

$$X_{n+1} = X + \sum_{i=1}^s p_{si} K_i; \quad (4.10)$$

$$K_i = hf \left( X_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j \right) \quad (4.11)$$

$$K_i = [E - hb_{ii} J(X_n)]^{-1} hf \left( X_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j \right), \quad (4.12)$$

де  $s$  — кількість етапів числового методу;  $E$  — одинична матриця;  $J(.)$  — матриця Якобі ММ (4.9). Формули (4.10) і (4.11) відповідають явній рекурентній обчислювальній схемі, а (4.9) і (4.12) — напів-явній.

Тип обчислювальної схеми у момент  $t_n$  доцільно вибрати, керуючись оцінкою трудомісткості

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{я}}}{\sigma_{\text{п}}}, \quad (4.13)$$

де  $\sigma_{\text{я}}$  і  $\sigma_{\text{п}}$  — сумарні обчислювальні витрати на відрізку інтегрування відповідно для явної і напів-явної схеми. Припускаючи, що після  $t_n$  числове інтегрування здійснюється з постійним (максимально можливим для числового алгоритму) кроком  $h_n^{\text{я},m}$  і  $h_n^{\text{п},m}$  відповідно матимемо:

$$\sigma_{\text{я}} = \frac{\sigma'_{\text{я}}(T_k - t_n)}{h_n^{\text{я},m}}; \quad (4.14)$$

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{\sigma'_{\text{п}}(T_k - t_n)}{h_n^{\text{п},m}}, \quad (4.15)$$

де  $\sigma'_{\text{я}}$  і  $\sigma'_{\text{п}}$  — трудомісткість одного кроку явної і напів-явної формули.

Трудомісткість одного кроку  $h$  явного різницевого методу визначається витратами  $\sigma_1$  на обчислення правої частини ММ. Явна рекурентна однокрокова формула вимагає  $\nu$  обчислень правої частини ММ  $f(\cdot)$  на кожному кроці  $h$  інтегрування, де величина  $\nu$  є порядок точності методу. Крім того, ще одне додаткове обчислення правої частини для оцінки локальної похибки апроксимації алгоритму. Отже, виконується

$$\sigma'_{\text{я}} \simeq (\nu + 1)\sigma_1. \quad (4.16)$$

Для випадку напів-явної однокрокової обчислювальної схеми (4.10), (4.12) матиме місце

$$\sigma'_{\text{п}} \simeq (\nu + 1)\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (4.17)$$

де  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — витрати з обчислення елементів матриці Якобі та розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). У разі різницевої апроксимації елементів матриці Якобі величина  $\sigma_2 \simeq N\sigma_1$  оцінюється, де  $N$  — розмірність ММ. Тоді остаточно матиме місце наближена рівність

$$\eta = \frac{h_n^{n,m}}{h_n^{s,m} \left( 1 + \frac{N+C}{v+1} \right)}, \quad (4.18)$$

де  $C = \sigma_3 / \sigma_1$ . Для випадку матриць із малим числом значущих елементів у задачах великої розмірності  $N$  береться  $C = 0$ . Отже, остаточно справджується формула

$$\eta = \frac{h_n^{n,m}}{h_n^{s,m} \left( 1 + \frac{N}{v+1} \right)}. \quad (4.19)$$

Перевірка отриманої рівності відбувається для кожної точки  $t_n$ .

Побудова адаптора на підґрунті (4.18) відрізняється від відомих у літературі підходів такими рисами: 1) наявністю змінної величини  $(1 + (N+C)/(v+1))$  замість емпіричної константи, що більш об'єктивно відображає реальний обчислювальний процес; 2) можливістю застосувати критерій (4.18) у довільній точці  $t_n$  інтервала інтегрування, що сприяє гнучкому управлінню процесом обчислень.

Значення  $h_n^{s,m}$  і  $h_n^{n,m}$  визначаються з обмежень на величину  $h$  кроку інтегрування. Розрізняють три види зумовлених обмежень, а саме:

- а) числовою стійкістю формул інтегрування;
- б) дискретизацією розв'язку різницевою схемою;
- в) лінеаризацією правої частини ММ.

Традиційно першим двом обмеженням приділяється значна увага, але обмеження на  $h$ , викликане лінеаризацією правої частини ММ, також важливе. За суттю, воно визначається умовою апроксимації  $\dot{X}(t)$  похідної — лівої частини ММ, також є рівнозначним фактором в організації адаптивного процесу числового моделювання.

Послідовно розглянемо всі три обмеження. За апроксимації розв'язку ММ поліномом Тейлора у момент  $t_{n-1}$  норма похибки дискретизації для однокрокової схеми  $v$ -го порядку точності матиме вигляд

$$\|\epsilon_n^v\| = \frac{1}{(v+1)! h_n^v \|X_{n-1}^{(v+1)}\| + O(h_n^{v+2})}, \quad (4.20)$$

де  $\|X_{n-1}^{(v+1)}\|$  — норма  $(v+1)$ -ї похідної розв'язку, обчислена в точці  $t_{n-1}$ . Застосування виразу (4.20) для двох послідовних моментів

$t_{n-1}, t_n$  часу приводить до відомої формули управління тривалістю кроку  $h$  інтегрування

$$h_{n+1} = h_n \sqrt[v+1]{E_d / \|E_n^v\|}, \quad (4.21)$$

де  $E_d$  — допустима локальна похибка. Тут покладається  $\frac{\|x_{n-1}^{(v+1)}\|}{\|x_n^{(v+1)}\|} = 1$ , оскільки  $(v+1)$ -а похідна полінома  $(v+1)$ -го степеня є величина стала.

Умова (4.21) є обмеження на крок  $h$ , викликане дискретизацією розв'язку ММ на підґрунті використовуваної обчислювальної схеми.

Додаткове обмеження на крок  $h$  зумовлено лінеаризацією ММ, що еквівалентно одній ітерації розв'язання СНАТУ при  $\dot{X} = 0$  алгоритмом Ньютона для нульового початкового наближення для змінної  $K_i$ , тобто  $K_i^{(0)} = 0$  для  $i = 1$  і

$$K_i = hf(X_n + bK_1) = hf(X_n) + hbJ(X_n). \quad (4.22)$$

Щоб дістати вираз для обмеження, скористаймось неперервним аналогом ітеративного методу (НАІМ) Ньютона

$$\frac{dX}{dt} = -[F'(X(t))]^{-1}F(X(t)), \quad \text{для якого справедлива рівність} \\ F(X(t)) = F(X(t_0))e^{-t}.$$

Таким чином, матимуть місце оцінки:

$$\|F(X(t_{n+1}))\| \leq E_d \Leftrightarrow F(X(t_0))e^{-t} \leq E_d \Rightarrow t \geq \ln \left( \frac{\|F(X(0))\|}{E_d} \right).$$

Тоді прогнозована кількість ітерацій для розв'язання СНАТУ\* методом Ньютона за вибраного початкового наближення  $X^{(0)}$  і заданої допустимої похибки  $E_d$  є ціла частина виразу

$$M \simeq \left\lceil \ln \left( \frac{\|F(X^{(0)})\|}{E_d} \right) \right\rceil.$$

Оскільки для напів-явного алгоритму  $M = 1$  за визначенням, то розглядаємо, як впливає на збіжність ітеративного процесу ве-

\* СНАТУ — система нелінійних і трансцендентних рівнянь.



личина  $F(X^{(0)})$  при заданих  $M$  і  $E_d$ . У нашому випадку справедливим буде таке:

$$X^{(0)} = K_1^{(0)}; \|F(X^{(0)})\| = \|F(K_1^{(0)})\| = \|K_1^{(0)} - h_n f(X_n + bK_1^{(0)})\| = h_n \|f(X_n)\|,$$

звідси одержуємо  $h_n \leq eE_d / \|f(X_n)\|$ . Остання нерівність є обмеженням на крок інтегрування за рахунок лінеаризації. Її також можна використовувати, коли стоїть питання про частоту обчислення матриці Якобі.

Позначимо величину  $h_n$ , що задовольняє останню нерівність, через  $HL$ , а рівність (4.21) — через  $HD$ , причому  $HD_{\text{я}}$  для явної схеми інтегрування і  $HD_{\text{п}}$  — для напів-явної; через  $HS$  — обмеження на крок, викликане стійкістю числового методу (для алгоритму Ейлера  $h_n \leq 2/\lambda$ ).

Числове інтегрування рівнянь ММ завжди починається з явної схеми. Спочатку зробимо два початкові кроки  $h_0$ , установлюючи некоректність даних. У момент  $t_0 + 2h_0$  включається управління тривалістю кроку інтегрування, похибка приблизно рівна  $E_d$  ( $E_{n+1} \leq E_d$ ), крок — максимально можливий. Так триває до моменту  $t_n$ , коли настає  $E_{n+1} > E_d$ , тобто порушується обмеження типу а) явної схеми. Це дозволяє кваліфікувати  $HS = h_{n-1}$ .

Таким чином, у момент часу  $t$  відбувається оцінка величин  $HD$ ,  $HL$ ,  $HS$ , зумовлена трьома видами обмежень. Знаючи їх, визначаються величини  $h_n^{s,m}$  і  $h_n^{n,m}$ :  $h_n^{s,m} = \min\{HD, HS\}$ ;  $h_n^{n,m} = \min\{HD, HL\}$ . Як наслідок, при  $\eta \leq 1$  крок інтегрування треба вести за явною схемою, інакше — за напів-явною. Наприклад, якщо

$h_n^{s,m} = HS$ ,  $h_n^{n,m} = HL$  і  $HL \leq HS \left(1 + \frac{N}{v+1}\right)$ , то наступний крок виконується за явною схемою, інакше — за напів-явною.

У разі виконання кожного кроку числового інтегрування процедура оцінки  $HD$ ,  $HL$ ,  $HS$  повторюється, і на підґрунті (4.19) знову приймається рішення. Для оцінки  $HS$  в момент  $t_{n+1}$  можна використовувати норму матриці Якобі, якщо відбулось переключення на напів-явний числовий алгоритм.

На завершення зазначимо, що співвідношення (4.18) відображає: а) властивість жорсткості ММ — величина  $HS$ ; б) рівень нелінійності моделі — величина  $HL$  і в) умову поліноміальної апроксимації розв'язку — величина  $HD$ ; г)  $N$ -розмірність задачі; д)  $v$ -порядок точності використовуваного числового методу; е) відношення трудомісткостей прийнятого методу розв'язання

СЛАР і обчислення правої частини ММ. Це ті фактори, що характеризують модель і метод її кількісного аналізу на поточний момент часу  $t_n$ . Побудований на підґрунті (4.18) адаптор об'єктивно відображає хід обчислювального процесу і слугує ефективним засобом управління числовим моделюванням.

Обчислювальна ефективність процедури адаптивної організації числового аналізу ММ (4.19) — задачі Коші з початковою умовою неодноразово висвітлювались у літературі, моделюючи системи різної природи.

---

#### 4.4. Математичне моделювання інфляції в Україні<sup>1</sup>

---

Інфляція властива будь-якому суспільству і є індикатором загального стану економіки. Для перехідної економіки інфляція характеризується не тільки значними амплітудами, особливо в початковий період інституційних перетворень, але й яскраво виявленими коливаннями.

Огляд концептуальних положень теорії інфляції вказує, що її розвинення являє собою синтез різноманітних ідей і точок зору, які, на перший погляд, мали бути несумісними. У сучасній літературі інфляція трактується як багатофакторне явище, що вимагає нових досліджень системного характеру, перш за все синергетичних.

Багатогранна природа інфляції виявляється в різновидах визначення цього явища. Будемо розуміти інфляцію як знецінення грошей, що виявляє себе через зростання цін.

Йдучи своїм шляхом до ринкової економіки, Українська держава подолала гіперінфляцію, відлуння якої дається взнаки досьогодні. Глобально розвинення інфляційних процесів в Україні має два періоди: 1991—1994 рр. — період гіперінфляції, коли місячні темпи інфляції визначались двозначним числом, і починаючи з 1995 р. спостерігається відносна фінансова стабілізація — місячні темпи не перевищували 10 %.

Щоб уникнути скрутних наслідків інфляції, варто здійснювати попередній аналіз проблеми інфляції, інструментом якого повинно виступати економіко-математичне моделювання. Донедавна в моделюванні інфляційних процесів головним чином використовувались економетричні моделі.

---

<sup>1</sup> Результати цього підрозділу одержано у співавторстві з аспірантом С. І. Пертенюм.

Нижче пропонується математична модель динаміки інфляційного процесу, при побудові якої враховується вплив грошової емісії як одного з головних збудників інфляційного процесу, та динаміка виробництва як фактора економічного розвитку суспільства. Саме економічне буття країн пострадянського простору, зокрема України, свідчить, що однією з найважливіших причин інфляції стала невиважена грошова емісія. Разом з тим якісний зв'язок інфляційних процесів і динаміки економічного зростання неоднозначний і є одним із пріоритетних напрямів економічного аналізу.

При побудові зазначеної ММ використовується класичне рівняння обміну Фішера

$$Mv = pY, \quad (4.23)$$

де  $M$  — кількість грошей, що перебуває в обігу;  $p$  — рівень цін;  $Y$  — реальний валовий внутрішній продукт;  $v$  — швидкість обігу грошей.

Надалі розглянемо рівняння

$$Y = \frac{1}{\rho} I, \quad (4.24)$$

де  $\rho$  — частка валових інвестицій у ВВП. Саме економічний розвиток (збільшення обсягів, покращення якості й оновлення засобів виробництва) стимулюється впровадженням інноваційних технологій і поліпшенням інвестиційного клімату, тобто за рахунок величини  $I$ .

З урахуванням грошової емісії рівняння (4.23) і (4.24) набувають вигляду

$$p = \frac{M_0 + \Delta M}{Y} v; \quad (4.25)$$

$$Y = \frac{1}{\rho} \left( I_0 + \frac{\xi \Delta M}{p} \right), \quad (4.26)$$

де  $\Delta M$  — обсяг грошової емісії;  $\frac{\xi \Delta M}{p}$  — частка грошової емісії, яка інвестована в економіку на підвищення обсягів виробництва з поправкою на індекс цін  $p$ .

Автори не претендують на повноту факторів і важелів впливу на динаміку реального виробництва, визначених у моделі. Досліджується окремий випадок зменшення інфляційного тиску на зростання економіки у вигляді інвестицій.

Співвідношення (4.25) і (4.26) є стаціонарними, тобто рівняння алгебраїчні. У разі зміни стану обидві праві частини порушуються і за деякий час досягають нових рівноважних значень  $p$  і  $Y$ . Однак дослідження динаміки інфляції в довільний момент часу вимагає розглядати звичайні диференціальні рівняння.

У науковій літературі зазначається існування лагу між приростом грошової маси і індексом споживчих цін. Подібна ситуація виникає при інвестуванні у виробництво (від інвестицій до реальних дивідендів минає час). Однак зазначені вище лаги різні, тобто існуючі економічні процеси від свого початку до завершення протікають з різною швидкістю.

З урахуванням цього факту автори пропонують принципово нову модель інфляції, в якій лаги описуються за допомогою кінетичної теорії хімічних реакцій.

Комп'ютерне вивчення інфляції:  
математична модель і основні результати

Рівняння (4.25) і (4.26) в кінетичній формі, коли швидкість відхилення деякого параметру пропорційна його відхиленню від значення рівноваги, мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = k_1 \left( \frac{M_0 + \Delta M}{Y} v - p_0 \right); \\ \frac{dp}{dt} = k_2 \left( \frac{1}{\rho} I_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\xi \Delta M}{p} - Y_0 \right), \end{cases} \quad (4.27)$$

де коефіцієнти  $k_1, k_2$  — відображають певним чином притаманне економіці запізнення процесів, величини  $v, \xi, k_1, k_2$  — вважатимемо постійними. У разі переходу до безрозмірних змінних  $\tilde{y} = Y/Y_0 - 1$  і нормованого індексу цін  $\tilde{p} = p/p_0$  система набуває вигляду

$$\begin{cases} p_0 \frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1 \left( \frac{M_0 + \Delta M}{(\tilde{y} + 1)Y_0} v - \tilde{p} p_0 \right), \\ Y_0 \frac{d\tilde{y}}{dt} = k_2 \left( \frac{1}{\rho} I_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\xi \Delta M}{p} - (\tilde{y} + 1)Y_0 \right). \end{cases} \quad (4.28)$$

Надалі поділимо перше рівняння на  $p_0$ , друге — на  $Y_0$  і матимемо

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1 \left[ \frac{1 + \frac{\Delta M}{M_0}}{(\tilde{y} + 1)} \left[ \frac{M_0 v}{p_0 Y_0} \right] - \tilde{p} \right], \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = k_2 \left[ \frac{1}{\rho} \frac{I_0}{Y_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\xi \Delta M}{\tilde{p} p_0 Y_0} - \tilde{y} - 1 \right]. \end{cases} \quad (4.29)$$

Використовуючи рівняння (4.23) і (4.24), ММ (4.29) переписується

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1 \left( \frac{1 + m(t)}{1 + \tilde{y}} - \tilde{p} \right) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = k_2 \left( \frac{d \cdot m(t)}{\tilde{p}} - \tilde{y} \right), \end{cases} \quad (4.30)$$

де  $d = \frac{\xi M}{p_0 I_0}$ ,  $m(t) = \frac{\Delta M(t)}{M_0}$  — безрозмірна функція грошової емісії,

$F(\tilde{p}, \tilde{y})$  — початковий момент рівноваги,  $F\left(\frac{1 + m(t)}{1 + \tilde{y}}, \frac{dm(t)}{\tilde{p}}\right)$  — кінцевий момент рівноваги. Початкові умови для ММ (4.30) фіксовані  $\tilde{p}(0) = 1$ ,  $\tilde{y}(0) = 0$ .

Диференціальна система (4.30) має чотири особливі точки, в яких похідні по  $\tilde{p}$  і  $\tilde{y}$  дорівнюють нулю, коли матиме місце так:

- |                               |                                  |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1) $k_1 \neq 0$ , $k_2 = 0$ ; | 2) $k_1 = 0$ , $k_2 \neq 0$ ;    |
| 3) $k_1 = 0$ , $k_2 = 0$ ;    | 4) $k_1 \neq 0$ , $k_2 \neq 0$ . |

Перші три точки не відповідають економічному змісту, оскільки перехід від одного стану рівноваги системи до нового відбувається миттєво.

У випадку 4) особлива точка матиме вигляд  $p_1 = 1 + m(t) - dm(t)$ ,  $y_1 = dm(t)/p_1$ . Аналіз характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + \lambda(k_1 + k_2) + k_1 k_2 \left( 1 - \frac{dm(t)}{1 + m(t)} \right) = 0, \quad (4.31)$$

у цій точці показує, що для  $0 < d < 1$  і  $m(t) > 0$  вона є абсолютно стійкою при  $t \rightarrow \infty$  (деталі наведено у дод. I).

Математична модель (4.30) є істотно нелінійною, тому її розв'язки (інтегральні криві або графіки величин  $\tilde{p}$  і  $\tilde{y}$ ) шукаються чисельним інтегруванням. Для побудови розв'язків використовується напів-явний числовий метод (сімейство формул Розенброка), оскільки ММ (4.30) є системою жорстких диференціальних рівнянь.

За числового аналізу системи кінетичних рівнянь корисно порівнювати її розв'язки з динамікою поведінки індексу цін без урахування валового випуску, коли ціни не погашаються зміною обсягу виробництва. У цьому випадку кінетика зміни індексу цін описується одним диференціальним рівнянням

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1(1 + m(t) - \tilde{p}), \quad (4.32)$$

його розв'язок (дод. II) для випадку разової емісії матиме вигляд

$$\tilde{p}(t) = 1 + m(1 - e^{-k_1 t}). \quad (4.33)$$

Надалі буде показано беззмисовність економічного дослідження інфляції без її впливу на виробництво.

Розрахунок інфляції реалізується на основі зміни індексу цін. За визначенням вона є динамічною величиною  $\pi = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$ , що залежить від часу.

Виходячи з (4.33) інфляція записується

$$\pi(t) = \frac{k_1 m e^{-k_1 t}}{1 + m(1 - e^{-k_1 t})}. \quad (4.34)$$

У граничному випадку, коли справджується  $k_2 \gg k_1$ , ММ (4.30) зводиться до одного нелінійного рівняння

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1 \left( \frac{1 + m(t)}{1 - dm(t)/\tilde{p}} - \tilde{p} \right), \quad (4.35)$$

розв'язок якого в окремому випадку разової емісії знаходять аналітично (дод. III)

$$(\tilde{p} - \tilde{p}_1) \tilde{p}^{-\frac{dm}{1+m}} = (1 - \tilde{p}_1) e^{\left(-\frac{\tilde{p}_1}{1+m}\right) k_1 t}. \quad (4.36)$$

Це рівняння (4.36) являє собою експоненціальне встановлення з часом нового рівноважного значення індексу цін  $\tilde{p}_1$ . В іншому граничному випадку, коли  $k_1 \gg k_2$ , спостерігається зв'язок  $\tilde{p} \approx (1 + m(t))/(1 + \tilde{y})$  і система звичайних диференціальних рівнянь (4.30), або модель із зосередженими параметрами, що свідчить про однорідність простору подій, зводиться до лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} + \frac{k_2 \tilde{p}_1}{1 + m(t)} \tilde{y} = \frac{k_2 dm(t)}{1 + m(t)}, \quad (4.37)$$

загальний розв'язок якого матиме вигляд (дод. IV):

$$y(t) = k_2 de^{-k_2 \tilde{p}_1 \int \frac{dt}{1+m(t)}} \int_0^t e^{k_2 \tilde{p}_1 \int \frac{dt'}{1+m(t')}} \frac{m(t')}{1+m(t')} dt' \quad (4.38)$$

і зображується у квадратурах для окремих випадків залежності емісії від часу  $m(t)$ .

Поведінку кінетичної моделі інфляції проілюстровано за допомогою елементарних прикладів функції грошової емісії.

На рис 4.11 наведено розв'язок ММ (4.30) для 20 %-ї разової емісії при  $d = 0,7$  і прямо протилежних відношеннях кінетичних коефіцієнтів  $k_2/k_1 = 0,2$  (крива 1) і при  $k_2/k_1 = 10$  (крива 2). Тут також проведено розв'язок рівняння (4.32), який будемо називати пасивним (крива 3). Характерно, що якщо виробництво відкликається на емітовані в нього гроші з великим запізненням ( $k_2 \ll k_1$ ), то індекс цін спочатку зростає, а потім мірою збільшення обсягу виробництва спадає до свого нового стану рівноваги  $p_1 = 1 + m(t) - dm(t)$ . Падіння індексу цін нижче початкового рівня викликає дефляцію,

що потребує додаткових досліджень. Це показано на рис. 4.12, де наведені ті самі розв'язки, але для інфляційних залежностей  $\pi(t)$ .

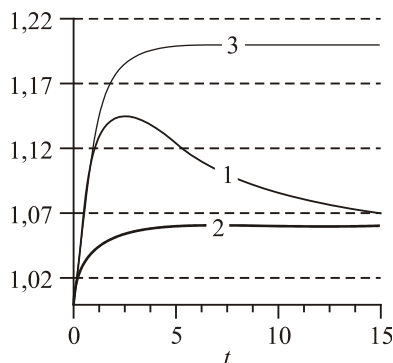


Рис. 4.11. Динаміка зміни індексу цін за 20 %-ї разової емісії у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) при  $d = 0,2$ ,  $k_2 / k_1 = 0,2$  (крива 1) і при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 10$  (крива 2) порівняно з розв'язком (10) (крива 3)

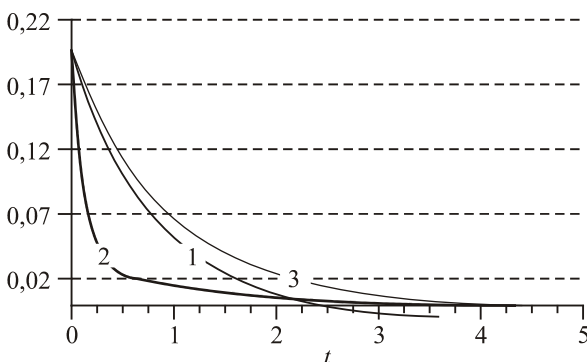


Рис. 4.12. Динаміка зміни інфляції за 20 %-ї разової емісії у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 0,2$  (крива 1) і при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 10$  (крива 2) порівняно з розв'язком (10) (крива 3)

Кращою є ситуація, коли  $k_2 > k_1$ , у цьому випадку виробництво встигає відслідкувати вкладені гроші, і підвищення цін не відбувається. Звідси витікає, що при  $d = 0,7$  у даному випадку зниження індексу цін відбувається в 2,4 раза.



Аналогічно для лінійно зростаючої емісії. Якщо емітувати таку саму суму грошей, але за деякий час  $t_0$ , то це не змінює остаточного індексу цін, однак уповільнює швидкість зростання індексу цін і істотно знижує величину інфляції (рис. 4.13). Емітовані гроші в галузь виробництва з швидкою віддачею (крива 2) дозволяють знизити інфляцію майже втричі порівняно з малою швидкістю (крива 1, рис. 4.14).

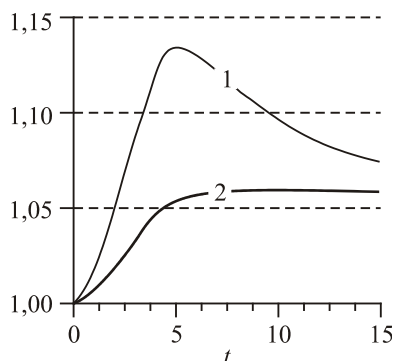


Рис. 4.13. Динаміка зміни індексу цін за 20 %-ї лінійної емісії у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 0,2$  (крива 1) і при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 10$  (крива 2)

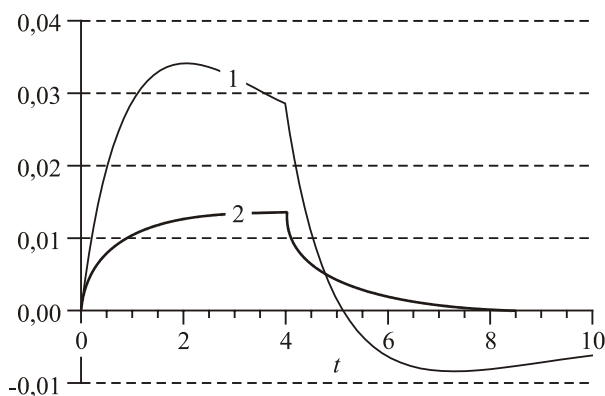


Рис. 4.14. Динаміка зміни інфляції за 20 %-ї лінійної емісії у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 0,2$  (крива 1) і при  $d = 0,7$ ,  $k_2 / k_1 = 10$  (крива 2)

Розглянемо тепер розв'язок ММ (4.30), побудований на прикладі економіки України в період 1992—2009 рр. (рис. 4.15): крива 1 — змодельований індекс цін при  $d = 0,4$ ,  $k_1 = 10$ ,  $k_2 = 0,001$ ; крива 2 — динаміка зміни індексу цін, за даними Держкомстату України.

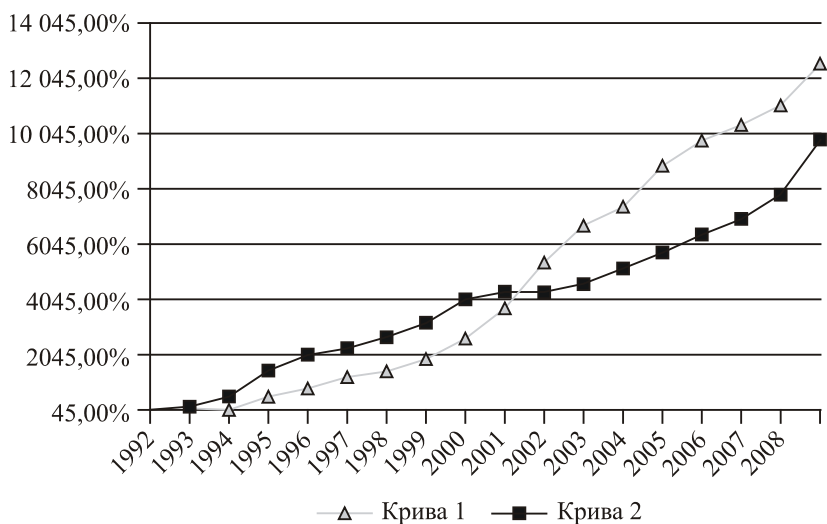


Рис. 4.15. Динаміка зміни індексу цін в умовах української економічної дійсності в 1992—2009 рр. у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) при  $d = 0,04$ ,  $K_1 = 10$ ,  $K_2 = 0,001$  (крива 1) порівняно з даними Держкомстату України (крива 2). Зміна індексу цін в обох графіках вимірюється у відсотках до початкового моменту (1992 р.)

Задача апроксимації та диференціювання таблично заданої функції грошової емісії  $m(t)$  розв'язується на основі кубічного інтерполяційного сплайну. Статистичні значення основних параметрів ММ (4.30) наведено у табл. 4.1.

Криві ілюструють схожу динаміку зміни, однак характерна різниця після 1999 року, коли розв'язок стрімко перевищує реальний індекс цін. У період від 1992—1999 рр. ВВП України зменшився на 60 %. Виходячи з цього і впливу динаміки ВВП на рівень інфляції параметр  $d$  фіксованим протягом 14 років бути не може. Більше того, він може набувати від'ємних значень, оскільки у кожний наступний момент рівноваги (грудень кожно-

го року) ВВП зменшується за постійного іноді навіть прогресуючого збільшення обсягів емісійної готівки.

Таким чином, повинна виконуватись умова  $d < p^2 / m(t)$  або  $d = \xi M / pI < 0$ . Остання нерівність виконується, коли  $\xi < 0$ , оскільки за своєю економічною природою параметри  $M, p, I$  набувають лише додатних значень.

Від'ємність параметра  $\xi$  пояснюється станом промисловості України в перші роки незалежності, коли підприємства за безцінь виставлялись на продаж, виводились за кордон їх активи, банкрутували в умовах конкурентного середовища та під тягарем податкової політики. Все це сприяло не підвищенню інвестиційної привабливості, як наслідок — підвищенню обсягів ВВП, а навпаки, поглибленню кризи українського виробництва.

Таблиця 4.1

## ОСНОВНІ МАКРОЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ В УКРАЇНІ 1992—2009 рр.\*

| Період                                                        | 1992   | 1993   | 1994    | 1995    | 1996   | 1997   | 1998    | 1999    |
|---------------------------------------------------------------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|
| Емісія готівки у % до попереднього періоду                    | —      | 2974   | 622     | 300     | 148    | 153    | 117     | 133     |
| Грошова маса (M2)                                             | 25     | 482    | 3216    | 6846    | 9023   | 12448  | 15432   | 21714   |
| порівняно з попереднім роком, %                               | 1041,6 | 1928   | 667,2   | 212,9   | 131,8  | 137,9  | 123,9   | 140,7   |
| Індекс споживчих цін у % до попереднього періоду              | 196    | 4835   | 991,2   | 477     | 180,3  | 115,9  | 110,6   | 122,7   |
| Індекс інфляції у % до попереднього періоду                   | 2100   | 10 256 | 501     | 281,7   | 139,7  | 110,1  | 120     | 119,2   |
| ВВП, млн грн                                                  | 503,3  | 1483   | 12 038  | 54 520  | 81 519 | 93 365 | 102 593 | 130 442 |
| Освоєно капітальних інвестицій у млн грн, у фактичних цінах * | 866    | 29 310 | 228 033 | 937 816 | 12 557 | 12 401 | 13 958  | 17 552  |
| Період                                                        | 2000   | 2001   | 2002    | 2003    | 2004   | 2005   | 2006    |         |
| Емісія готівки у % до попереднього періоду                    | 135    | 151    | 137     | 108     | 127    | 100    | 113     |         |

\* [www.ukrstat.gov.ua](http://www.ukrstat.gov.ua).

Закінчення табл. 4.1

| Період                                                      | 1992    | 1993    | 1994    | 1995    | 1996    | 1997    | 1998    | 1999 |
|-------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------|
| Грошова маса (M2)                                           | 31 544  | 45 186  | 34 321  | 94 855  | 125 483 | 193 145 | 259 413 |      |
| Порівняно з попереднім роком, %                             | 145,3   | 143,3   | 142,4   | 147,5   | 132,3   | 131,1   | 186,4   |      |
| Індекс споживчих цін у % до попереднього періоду            | 128,2   | 112     | 100,8   | 105,2   | 109     | 113,5   | 109,1   |      |
| Індекс інфляції у % до попереднього періоду                 | 125,8   | 106,1   | 99,4    | 108,2   | 112,3   | 110,3   | 111,6   |      |
| ВВП, млн грн*                                               | 170 070 | 204 190 | 225 810 | 267 344 | 344 822 | 424 741 | 524 946 |      |
| Освоєно капітальних інвестицій у млн грн, у фактичних цінах | 23 629  | 32 573  | 37 178  | 51 011  | 75 714  | 93 096  |         |      |

\* З 1992—1995 рр., у млрд крб.

В свою чергу гіпотеза про постійність коефіцієнтів  $k_1$  і  $k_2$  є також хибною. У 1995 р. НБУ почав проводити жорстку грошово-кредитну політику. В той же час темпи падіння виробництва почали знижуватись, відповідно лаги у грошовій системі і виробництві також змінилися. Отже, необхідно коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  розглядати як змінні у часі параметри моделі.

На рис. 4.16, 4.17 представлені розв'язки моделі порівняно з даними Держкомстату. Динаміку зміни параметрів  $d$ ,  $k_1$  і  $k_2$  наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

ДИНАМІКА ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ  $d$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ 

| Період     | 1992  | 1993  | 1994  | 1995  | 1996  | 1997  | 1998  | 1999 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $d$        | —     | −0,08 | −0,3  | −0,15 | −0,18 | −0,09 | −0,05 | 0,15 |
| $k_1^*$    | 100   | 93,2  | 86,4  | 79,6  | 72,8  | 66    | 59,2  | 52,5 |
| $k_2^{**}$ | 0,1   | 0,165 | 0,229 | 0,293 | 0,357 | 0,421 | 0,486 | 0,55 |
| Період     | 2000  | 2001  | 2002  | 2003  | 2004  | 2005  | 2006  |      |
| $d$        | 0,22  | 0,1   | 0,18  | 0,1   | 0,22  | −0,02 | 0,08  |      |
| $k_1^*$    | 45,7  | 38,9  | 32,1  | 25,3  | 18,5  | 11,7  | 5     |      |
| $k_2^{**}$ | 0,614 | 0,679 | 0,743 | 0,807 | 0,871 | 0,936 | 1     |      |

\*  $k_1$  зменшується лінійно від 100 до 5.

\*\*  $k_2$  зростає лінійно від 0,1 до 1

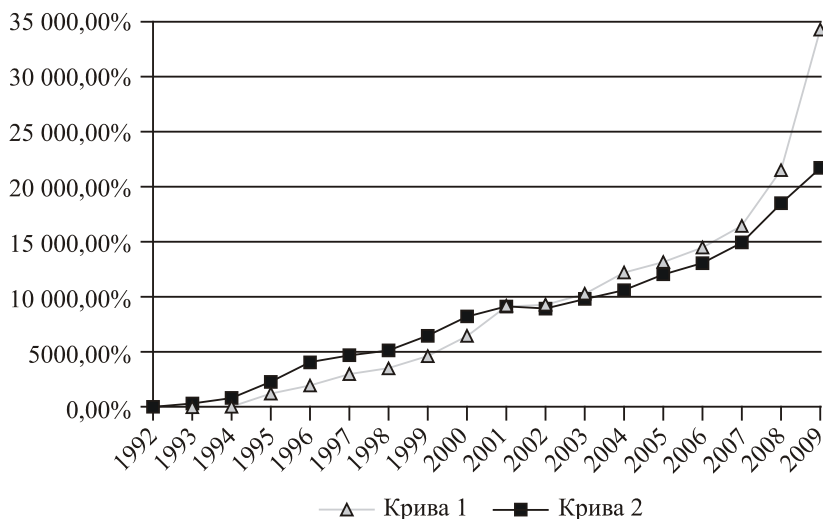


Рис. 4.16. Динаміка зміни індексу цін в умовах української економічної дійсності в 1992—2009 рр. у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) (крива 1) порівняно з даними Держкомстату України (крива 2)

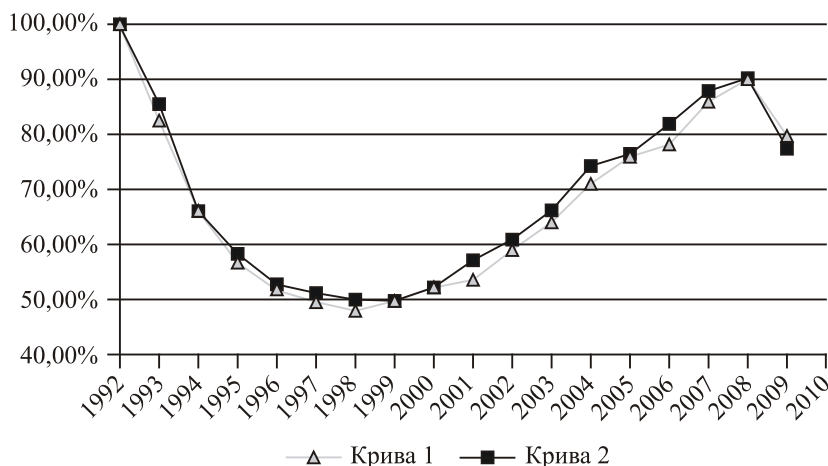


Рис. 4.17. Динаміка зміни ВВП в умовах української економічної дійсності в 1992—2009 рр. у рамках моделі кінетичних рівнянь (4.30) (крива 1) порівняно з даними Держкомстату України (крива 2)

Коефіцієнт кореляції для побудованих кривих становить 0,964, що свідчить про тісну динаміку зміни розв'язку з реально існуючим індексом цін в економіці. Однак в абсолютному вираженні існує різниця від 1994 до 2001 рр. Найбільше розходження припадає на 1996 рік. Об'єктивно це пояснюється неповнотою факторів інфляції в ММ (4.30). Аналіз структури грошової маси свідчить про зростання питомої ваги іноземної валюти. Станом на 1.08.1994 питома вага національної валюти становила 86,5 %, іноземної валюти — 13,5 %. Вже на 1.01.1995 відповідно 68,6 і 31,4 %. Таким чином, у цей період в Україні іноземна валюта стає найпривабливішим засобом зберігання грошей. Протягом 1995 року зростає обсяг витрат населення на купівлю іноземної валюти:

- перший квартал — 16,8 трлн крб.;
- другий квартал — 32,86 трлн крб.;
- третій квартал — 56,60 трлн крб.;
- за дев'ять місяців 1995 р. — 109,30 трлн крб.

Паралельно відбувається збільшення розміщення коштів за межами України. Якщо станом на 1.01.1995 залишок зазначених валютних коштів становив 23 573,9 тис. дол. США, то на 1.07.1995 ці суми зросли до 62 297,1 тис. дол. США.

Підвищення попиту на вільно конвертовану валюту сприяє зростанню валютних курсів, підвищенню інфляційних очікувань, викликає недовіру до національних грошей і на кінець підвищує швидкість обігу грошей. Зростання швидкості грошей за рівнянням Фішера (4.23) при спадаючому валовому продукті веде до зростання індексу цін  $p$ . Побудова кінетичної моделі інфляції на базі модифікованого закону Фішера

$$pY = (Mg + k \cdot Md),$$

де  $p$  — рівень цін;  $Y$  — ВВП;  $Mg$  — маса національної валюти;  $Md$  — маса іноземної валюти в обігу (долари США);  $k$  — обмінний курс;  $V$  — швидкість обігу грошей, вирішує проблему врахування впливу коливань валютних курсів на інфляцію.

Коефіцієнт кореляції для графіків становить ВВП 0,995. Результати, зображені на рис. 4.16, 4.17, дозволяють стверджувати про значну адекватність ММ (4.30) реально існуючим в українсь-

кому суспільстві процесам і явищам як у виробничій, так і в інфляційній сферах.

Виходячи з отриманих результатів прогнозоване значення інфляції на кінець 2010 р. становить 19,5 %.

Всеосяжний і глибокий теоретичний аналіз проблеми інфляції з метою вивчення її механізму неможливий без застосування математичного моделювання — багатоваріантних числових розрахунків рівнянь динаміки інфляційного процесу. Велика різноманітність факторів і передумов появи інфляції та спектр цілей моделювання сприяють створенню адекватних ММ та їх комп'ютерному дослідженню як єдино можливого способу пізнання економічної дійсності, передбачення наслідків реалій економіки. При цьому ставиться за мету забезпечення дієвої антиінфляційної політики та управління інфляційними процесами, також враховувати темп інфляції як важливого макроекономічного фактора, у ході розробки економічних планів.

Розроблено математичну модель динаміки інфляційного процесу в українській економіці. Дослідження ММ засобами якісного і числового аналізу показало адекватне відтворення реально існуючого в суспільстві процесу інфляції. Таким чином, комп'ютерне моделювання на підґрунті зазначеної ММ дає підстави для достовірного короткострокового горизонту прогнозування розвитку подій.

Звісно, для належного моделювання й адекватності моделі інфляційній дійсності недостатньо оперувати емісією готівки і темпами виробництва. Необхідним є урахування інших таких факторів впливу на інфляцію, як інфляцію витрат, доларизацію економіки, тіньову частку, інфляційні очікування, сезонність, політичні ризики тощо. Додаткового дослідження потребують визначення кінетичних коефіцієнтів, впливовість на них трансформаційних процесів перехідної економіки. Потребує розширення математичне рівняння приросту валового внутрішнього продукту, що являє собою предмет самостійного дослідження.

Дана праця, на наш погляд, сприятиме становленню нелінійної теорії динаміки інфляційних процесів, окремим чином елементи якої досить виразно виявлялись в умовах української дійсності.

## Математичні додатки

**I. Стійкість особливої точки**  $p_1 = 1 + m(t) - dm$ ,  $y_1 = \frac{dm(t)}{p_1}$

Для  $p_1 = 1 + m - dm$ ,  $y_1 = \frac{dm}{1 + m - dm}$  характеристичне рівняння записується

$$\begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & -k_1 \frac{1+m}{\left(1 + \frac{dm}{1+m-dm}\right)} \\ -k_2 \frac{dm}{(1+m-dm)} & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & -k_1 \frac{(1+m)(1+m-dm)^2}{(1+m-dm+dm)^2} \\ -k_2 \frac{dm}{(1+m-dm)} & -k_2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (k_1 + \lambda)(k_2 + \lambda) - k_1 k_2 \frac{dm}{1+m} = \lambda^2 + \lambda(k_1 + k_2) + k_1 k_2 \left(1 - \frac{dm}{1+m}\right) = 0.$$

Дискримінант даного рівняння  $D = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2 \left(1 - \frac{dm}{1+m}\right) =$   
 $= (k_1 - k_2)^2 + 4k_1 k_2 \frac{dm}{1+m}$  при  $d > 0$  і  $m > 0$  є додатним. Розв'язки характеристичного рівняння мають вигляд

$$\lambda_1 = \frac{-k_1 - k_2}{2} - \frac{\sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k_1 k_2 \frac{dm}{1+m}}}{2};$$



$$\lambda_2 = \frac{-k_1 - k_2}{2} + \sqrt{\frac{(k_1 - k_2)^2 + 4k_1k_2}{1+m}}.$$

Від'ємність першого кореня очевидна. Нерівність  $\lambda_2 > 0$  після піднесення до квадрату і спрощення матиме вигляд:

$\frac{dm}{1+m} > 1$  або  $dm < 1+m$ . Очевидно, при  $0 < d < 1$  і  $m > 0$ , другий корінь є від'ємним. Отже, особлива точка за даних умов є абсолютною стійкою при  $t \rightarrow \infty$ .

## II. Знаходження розв'язку рівняння (4.32)

У загальному випадку рівняння (4.32) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням. Його розв'язок у випадку разової емісії ( $m = \text{const}$ ) дістанемо методом варіації сталої

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1(1+m-\tilde{p}) \Rightarrow \tilde{p}' + \tilde{p}k_1 = k_1(1+m).$$

Для однорідного рівняння справедливим буде таке:

$\tilde{p}' + \tilde{p}k_1 = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{p}}{dt} = -k_1\tilde{p} \Rightarrow \ln|\tilde{p}| = -k_1t + \ln C_1$ , або  $\tilde{p} = C_1 e^{-k_1t}$ . Ураховуючи  $C_1 = C_1(t)$  і підставляючи в (4.32), матимемо  $C_1'(t)e^{-k_1t} - k_1C_1(t)e^{-k_1t} + k_1C_1(t)e^{-k_1t} = k_1(1+m)$ ,  $C_1'(t)e^{-k_1t} = k_1(1+m)$ , тоді  $C_1'(t)e^{-k_1t} - k_1C_1(t)e^{-k_1t}(1+m) \int e^{k_1t} dt = (1+m)e^{k_1t} + C_2$ .

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.32) матиме вигляд  $\tilde{p}(t) = 1+m + C_2 e^{-k_1t}$ . Ураховуючи початкову умову  $\tilde{p}(0) = 1$ , одержуємо одну з інтегральних кривих  $\tilde{p}(t) = 1+m(1-e^{-k_1t})$ , тобто рівняння (4.33).

Для визначення величини інфляції скористаємось тим, що

$$\pi = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}, \text{ тоді у нашому випадку } \pi = \frac{k_1 m e^{-k_1 t}}{1+m(1-e^{k_1 t})}.$$

## III. Знаходження розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.35)

Розглянемо перетворення (4.35):

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{dt} &= k_1 \left( \frac{1+m}{1+\frac{dm}{\tilde{p}}} \right) \text{ або } \frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1 \left( \frac{(1+m)\tilde{p}}{\tilde{p}+dm} - \tilde{p} \right) \Rightarrow \frac{d\tilde{p}}{dt} = \\ &= k_1 \frac{(1+m) - \tilde{p} - \tilde{p}^2 - \tilde{p}dm}{\tilde{p}+dm}. \end{aligned}$$

Покладаючи  $\tilde{p}_1 = 1 + m - dm$ , матимемо  $\frac{d\tilde{p}}{dt} = k_1 \frac{\tilde{p}\tilde{p}_1 - \tilde{p}^2}{\tilde{p} + dm}$ . Відокремлюючи змінні, одержимо  $\frac{(\tilde{p} + dm)d\tilde{p}}{\tilde{p}\tilde{p}_1 - \tilde{p}^2} = k_1 dt \Rightarrow \int \frac{(\tilde{p} + dm)d\tilde{p}}{\tilde{p}\tilde{p}_1 - \tilde{p}^2} =$   
 $= -k_1 \int dt \cdot \int \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p} - \tilde{p}_1} + dm \int \frac{d\tilde{p}}{(\tilde{p} - \tilde{p}_1)\tilde{p}} = -k_1 \int dt \Rightarrow \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1| + dm \int \frac{d\tilde{p}}{(\tilde{p} - \tilde{p}_1)\tilde{p}} =$   
 $= -k_1 t + \ln C$ . Інтеграл у лівій частині спрощується, розкладаючи підінтегральну функцію на елементарні дробы:

$$dm \int \frac{d\tilde{p}}{(\tilde{p} - \tilde{p}_1)\tilde{p}} = \frac{dm}{\tilde{p}_1} \left( - \int \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} + \int \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p} - \tilde{p}_1} \right) = -\frac{dm}{\tilde{p}_1} \ln|\tilde{p}| + \frac{dm}{\tilde{p}_1} \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1|.$$

$$\text{Отже, } \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1| - \frac{dm}{\tilde{p}} \ln|\tilde{p}| + \frac{dm}{\tilde{p}} \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1| = -k_1 t + C$$

$$\left( 1 + \frac{dm}{\tilde{p}} \right) \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1| - \frac{dm}{\tilde{p}_1} \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1| = -k_1 t + C = -k_1 t + C, \text{ або } (1+m) \times$$

$$\times \ln|\tilde{p} - \tilde{p}_1| - dm \ln|\tilde{p}| = -k_1 \tilde{p}_1 t + C.$$

Остаточно  $\frac{(\tilde{p} - \tilde{p}_1)^{1+m}}{\tilde{p}^{dm}} = C e^{-k_1 \tilde{p}_1 t}$ , ураховуючи початкову умову

$$\tilde{p}(0) = 1 \quad (1 - \tilde{p}_1)^{1+m} = C, \text{ тоді: } (\tilde{p} - \tilde{p}_1)^{1+m} \tilde{p}^{-dm} = (1 - \tilde{p}_1)^{1+m} e^{-k_1 \tilde{p}_1 t}.$$

Здобувши корінь степеня  $1+m$ , одержимо  $(\tilde{p} - \tilde{p}_1) \tilde{p}^{-\frac{dm}{1+m}} = (1 - \tilde{p}_1) e^{-\frac{\tilde{p}_1}{1+m} k_1 t}$ .

#### IV. Знаходження розв'язку лінійного неоднорідного диференційного рівняння (4.37)

Рівняння  $\frac{d\tilde{y}}{dt} + \frac{k_2 \tilde{p}_1}{1+m(t)} \tilde{y} = \frac{k_2 dm(t)}{1+m(t)}$  — лінійне неоднорідне відносно  $\tilde{y}$ . Розв'язок однорідного рівняння записується  $\tilde{y} = Ce^{-k_2 \tilde{p}_1 \int \frac{dt}{1+m(t)}}$ . Покладаючи  $C = C(t)$  і беручи до уваги розв'язок однорідного рівняння, матимемо  $C(t) = k_2 d \int_0^t e^{\frac{k_2 \tilde{p}_1 \int \frac{dt'}{1+m(t')}} \frac{m(t')}{1+m(t')} dt'$ . Остаточний шуканий розв'язок записується

$$y(t) = k_2 d e^{-k_2 \tilde{p}_1 \int \frac{dt'}{1+m(t')}} \int_0^t e^{\frac{k_2 \tilde{p}_1 \int \frac{dt'}{1+m(t')}} \frac{m(t')}{1+m(t')} dt'.$$

---

#### 4.5. Інтерактивна нелінійна динаміка макроекономіки

---

Стосовно складових або елементів економіки склалась думка [20, 43, 85] про складний динамічний, нелінійний, стохастичний характер їх взаємодії і взаємовпливу, чим зумовлена потреба у розробці і застосуванні моделей нелінійної динаміки економіки, ураховуючи перманентний характер її глибокої трансформації.

Математичне моделювання економіки якраз дозволяє не тільки відійти від констатації цього незаперечного факту, але розглядати ключові сценарії поведінки економічної системи у широкому діапазоні умов, не виключаючи експериментальні режими функціонування.

Таким чином, на підґрунті комп'ютерного моделювання з'являється можливість передбачати хід тих чи інших подій, якоюсь мірою керувати розвитком певних процесів. Заздалегідь бути готовим до них, але для здійснення обчислювального експерименту в економіці треба володіти відповідними математичними моделями. Більш того, треба вміти їх будувати. На жаль, цього поки що не спостерігається в економічній літературі, хоча існує в техніці, інших сферах природознавства, що, безумовно, має слугувати як надихаючий приклад.

Синергетика дедалі більше претендує на роль світогляду в сучасній економіці. Для уникнення синергетичної риторики чи рефлексії в середовищі економістів відчувається не тільки нестача успішно працюючих ММ, але й бракує також результатів комп'ютерного моделювання та їх обговорення на сторінках наукових видань, а також економічного тлумачення одержаних числових результатів. Усе ще істотно превалює, на жаль, вербальний характер робіт з економічного моделювання.

Економетричне моделювання принципово (завдяки передумові існування статистичної сукупності) на даний час не може відтворювати адекватно динаміку економічного стану. Звертаючи свій погляд на природознавство і техніку, вихід зі скрутного становища вбачається тільки у використанні диференціальних рівнянь (спочатку звичайних, що відповідатиме зосередженим системам, а потім у частинних похідних — розподіленим системам), які спроможні описати сценарії динаміки економічних подій у просторовому вимірі.

Однією з кількох відомих у літературі ММ на зразок зосереджених (скупчених), що описує динаміку економічного стану в часі, є синергетична модель [123], згідно з якою економічна еволюція описується безрозмірною системою звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку

$$\begin{cases} \dot{Q} = -Q + F \\ \sigma \dot{F} = -F + Qp \\ \delta \dot{p} = (p_e - p) - QF, \end{cases} \quad (4.39)$$

де залежна змінна  $Q$  — платоспроможний попит населення;  $F$  — виробнича функція суспільства;  $p$  — умовна ціна ( $p = P/U$  являє собою відношення дійсної ціни  $P$  до ліквідних коштів  $U$ ); параметр  $p_e$  відображає рівень купівельної спроможності членів суспільства і виступає керуючим; коефіцієнти  $\sigma, \delta \ll 1$  досить малі числа (характерний час змін попиту значно перевищує аналогічний чинник для виробничої функції та ціни); величини  $\dot{Q}, \dot{F}, \dot{p}$  — швидкості (перша похідна за часом  $t$  — незалежний змінний) змі-

нюваності платоспроможного попиту, виробничої функції й умовної ціни — координат економічного простору.

Нехтуючи лівою частиною відповідно другого і третього рівняння синергетичної моделі (4.39), було встановлено [123] аналітичні співвідношення

$$F = p_e \cdot \frac{Q}{1+Q^2} \text{ та } p = \frac{p_e}{1+Q^2}, \text{ тобто } (F = pQ). \quad (4.40)$$

Таким чином, зростання платоспроможного попиту сприяє збільшенню виробничої функції та зменшенню умовної ціни нижче рівня купівельної спроможності.

Також було записано функцію  $V = \frac{Q^2}{2} - \frac{p_e}{2} \cdot \ln(1+Q^2)$  так званого *ефективного потенціалу*, що відповідає основному рівнянню  $\dot{Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q}$  економічної еволюції. Для малих значень керуючого параметра  $p_e$  функція  $V(Q)$  є зростаючою, має екстремум в точці  $Q_0 = 0$ , що відповідає низькопродуктивному економічному стану (в суспільстві переважає бідне населення). Для випадку  $Q_0 \neq 0$ , що досягається зростанням  $p_e$ , має місце високопродуктивний стан (наявність середнього класу).

**Постановка проблеми і спосіб її розв'язання.** На відміну від викладеного в економічній літературі, де вивчалась еволюція економіки в часовому вимірі, наша увага зосереджується на нелінійній динаміці взаємовпливів економічних факторів. Пропонуємо розглядати так звані *площинні нелінійні моделі*, котрі відображають взаємозв'язки двох економічних факторів з третім, що виступає як незалежна змінна, тобто він вимушено змінюється. Саме така ситуація найбільш принагідна реально: зі зміною одного економічного показника, якого характеру відбуватимуться зрушення в інших факторах? Який рівень взаємовпливу між характеристиками економічного стану?

Згадувані нелінійні площинні ММ впливають з системи диференціальних рівнянь (4.39). Над ними пропонується провести широкомасштабний (багатоваріантний і детальний) обчислювальний експеримент (ОЕ) — здійснити числове інтегрування систем ЗДР за умов різноманітних коефіцієнтів моделей і початкових умов тощо.

Запропонований нижче підхід до вивчення деяких проблем динаміки еволюційної економіки є новим методом у нелінійному економічному аналізі, який принципово відрізняється від поширеного в середовищі економістів підходу.

Таким чином, увага економічного загалу акцентується на нелінійній динаміці економічного стану і привертається вона до новітнього інструменту дослідження проблеми, яким зумовлено майбутнє у вивченні економіки.

**Виклад основного матеріалу.** Доповнюючи попередні результати, скористаємося теоремою Тихонова, яка стверджує [154] таке: розв'язанню системи ЗДР 1-го порядку в нормальній формі, де біля частки похідних стоїть малий параметр, відповідає розв'язання мішаної системи алгебраїчних, прирівнявши до нуля малий параметр, і диференціальних рівнянь. У нашому випадку це означатиме пропозицію розглядати нелінійне ЗДР

$$\dot{Q} = -Q + p_e \cdot \frac{Q}{1 + Q^2} \quad (4.41)$$

замість системи рівнянь (4.39). Така редукція синергетичної моделі цілком виправдана для деякого часового інтервалу.

Чому варто розглядати рівняння (4.41)? Наглядним тлумаченням теореми Тихонова є скупчення транспорту на вулиці (так звана *міська пробка*), де рух вкрай сповільнений, але все ж таки він відбувається (надто довготривалої стоянки нема).

Результати числового інтегрування нелінійного рівняння (4.41) за початкових умов  $Q_0 = 0$  і  $Q_0 = 1$  наведено на рис. 4.18 і 4.19. Інтегральні криві відображають змінюваність платоспроможного попиту з часом для  $t \in [0; 2]$  і різних значеннях керуючого параметра  $p_e$ .

Привертає увагу таке: якщо для початкової умови  $y(0) = 0,1$  і  $p_e = \frac{4}{3}$  інтегральна крива практично лінійно зростає на  $[0; 1]$  до  $y(1) = 0,137$ , тобто незначно підвищується, то для  $y(0) = 1$  графік квазілінійно убуває до  $y(1) = 0,783$ ; для  $p_e = 4$  спостерігається зростання від  $y(0) = 0,1$  до  $y(1) = 0,964$  і від  $y(0) = 1$  до  $y(1) = 1,563$ , але при цьому змінюється характер поведінки кривої від вогнутості при  $y(0) = 0,1$  до опуклості при  $y(0) = 1$ . Варто зазначити, що для  $p_e = 2$  і  $y(0) = 1$  числовий розв'язок не одержано.

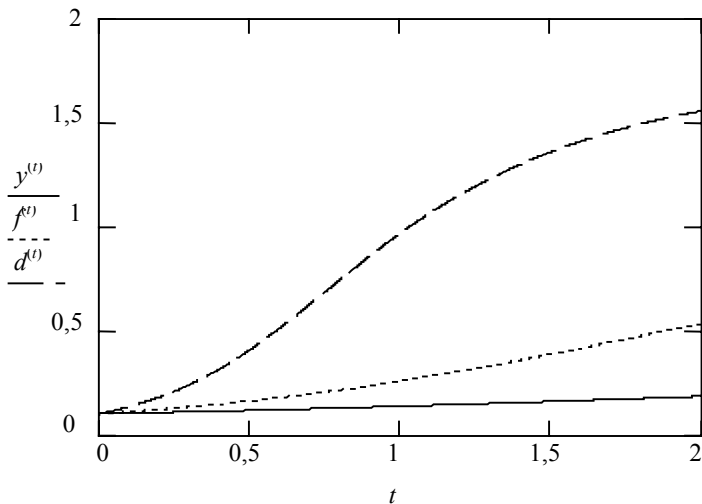


Рис. 4.18. Змінюваність у часі попиту  $Q$  для низькопродуктивного стану економіки залежно від величини  $p_e$

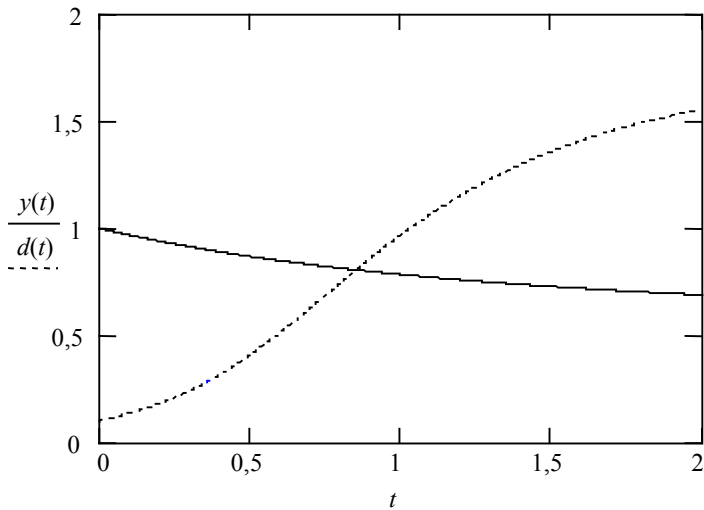


Рис. 4.19. Змінюваність з часом попиту  $Q$  для високопродуктивного стану економіки залежно від керуючого параметра  $p_e$

У праці [123] висловлено думку, що система рівнянь (4.39) належить до відомої моделі Лоренца. Дійсно, має місце симетричність: одночасна заміна знаку в змінних  $Q, F$  і  $p$  не змінює системи рівнянь. Виконується умова дисипативності: об'єм  $W$  фазового простору деформується за формулою  $W(t) = W(0) \cdot \exp\left\{-\left(1 + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\delta}\right) \cdot t\right\}$ , де вираз у круглих дужках є ди-

вергенція  $\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} + \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\right)$  фазового потоку. Заміною змінних  $x = Q$ ,  $y = F$  і  $z = p_e - p$  і спеціальним вибором безрозмірного часу  $t$  у  $t = \sigma \cdot \tau$  система рівнянь (4.39) набуває вигляду моделі Лоренца, а саме:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \\ \dot{y} = -y + p_e x - xz; \\ \dot{z} = -\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)z + \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)xy, \end{cases}$$

структура якої в точності збігається, але має місце відмінність у коефіцієнті  $\frac{\sigma}{\delta}$  біля доданку  $xy$  третього рівняння (при цьому  $r = p_e$  і  $b = \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)$ ).

Таким чином, маємо ще одне, нове (у сфері економіки), використання відомої моделі Лоренца, крім вже відомих застосувань у фізиці лазерів, електроніці тощо.

Дещо з результатів широкомасштабного обчислювального експерименту над ММ (4.39) економічної структури суспільства наведено на рис. 4.20 і 4.21.

На кожному з них відповідно для векторів початкових умов  $[0; 1; 1]^T$  і  $[1; 1; 1]^T$  при  $p_e = 4$ ,  $\sigma = \frac{1}{10}$  і  $\delta = \frac{1}{100}$  для  $t \in [0; 2]$  розташовано інтегральні криві  $Q(t) \equiv Z_{k,2}$ ,  $F(t) \equiv Z_{k,3}$  і  $p(t) \equiv Z_{k,4}$ , якими відображається розвиток у часі платоспроможного попиту населення, виробничої функції суспільства та діючої в ньому умовної ціни.



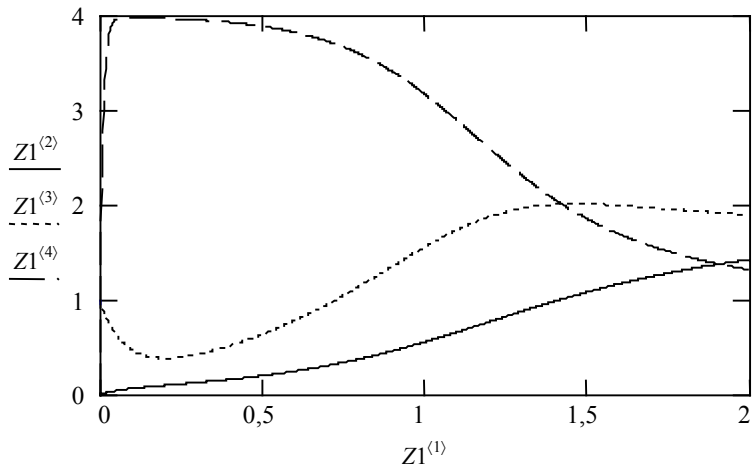


Рис. 4.20. Криві попиту  $Z_{k,2}$ ; виробничої функції  $Z_{k,3}$   
і умовної ціни  $Z_{k,4}$  на підґрунті ММ (3.69)  
для вектора  $[0; 1; 1]^T$  початкової умови

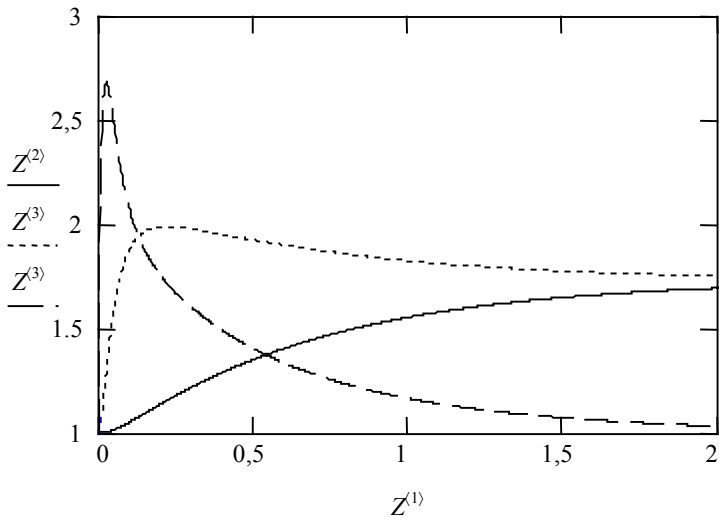


Рис. 4.21. Інтегральні криві ММ (4.39) для  $[1; 1; 1]^T$

В обох випадках еволюція подій якісно однакова: для низько-продуктивного економічного стану спостерігається неухильне і незначне зростання попиту; спочатку деякий спад (до точки  $t = 0,2$ ) виробничої функції, а потім її повільне монотонне зростання, нарешті — стрибок ціни (майже в чотири рази) і подальше уповільнене падіння, близьке до стабілізації на рівні 1,8.

Для високопродуктивного економічного стану ( $Q_0 \neq 0$ ) спостерігаються відмінності у числових даних — попит зростає майже у 2,5 рази, виробнича функція лишається на рівні 2,7, а ціна досягає піку  $p \approx 2,0$  при  $t \approx 0,05$  і дуже швидко падає до рівня 1,2.

**Виклад основних результатів.** Якщо друге і третє рівняння системи (4.39) розділити на перше, то матимемо так звану *площинну математичну модель*

$$\begin{cases} \frac{dF}{dQ} = \left( \frac{-F + Qp}{-Q + F} \right) \frac{1}{\sigma} \\ \frac{dp}{dQ} = \left( \frac{(p_e - p) - QF}{-Q + F} \right) \frac{1}{\delta}, \end{cases} \quad (4.42)$$

яка описує нелінійні залежності виробничої функції та умовної ціни від платоспроможного попиту [ $Q$  виступає незалежною змінною, розглядаються функції  $F(Q)$  і  $p(Q)$ ]. Чисельне інтегрування рівнянь ММ (4.42) на інтервалі  $Q \in [0; 4]$  має дати відповідь на питання щодо характеру поведінки функцій  $F(Q)$  і  $p(Q)$  через дію умови, що платоспроможний попит зростатиме в чотири рази. Іншими словами, чи варто сприяти збільшенню величини  $Q$  і як це позначиться на інших економічних факторах?

Результат числового моделювання на прикладі ММ (4.44) для  $\sigma = 1/10$ ,  $\delta = 1/100$ ,  $p_e = 4/3$  і  $Q \in [0; 4]$  наведено на рис. 4.22. Економічну систему обов'язково і дуже швидко спіткає занепад і цілковита розруха: виробнича функція  $Z^{<2>}$  якийсь час тримається (протягом  $2/3$  одиниць від наявного рівня попиту), а потім за подальшого зростання попиту катастрофічно падає. З падінням виробничої функції різко підвищиться умовна ціна  $Z^{<3>}$  у разі зростання попиту, що цілком логічно.

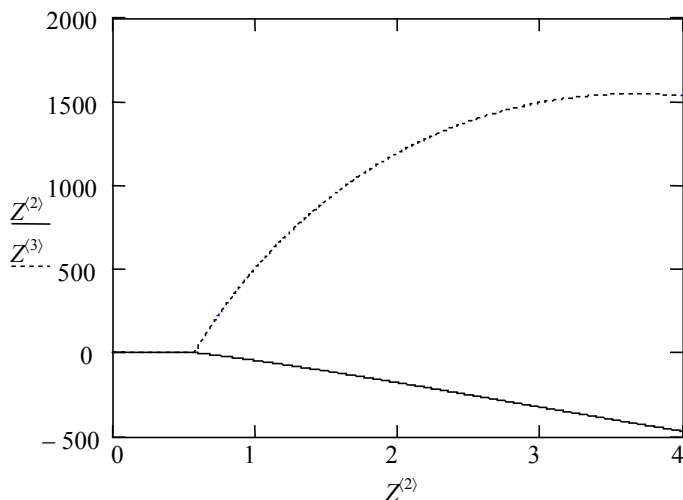


Рис. 4.22. Графіки залежності  $F(Q) = Z^{<2>}$  і  $p(Q) = Z^{<3>}$

Слід зауважити, що за інших числових значень параметра  $p_e$  не вдалось чисельно інтегрувати рівняння ММ через їхню жорсткість, навіть використовуючи спеціальні числові методи.

Діленням першого і третього рівняння системи (4.39) на друге її рівняння матимемо ММ

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dF} = \sigma \left( \frac{-Q + F}{-F + Qp} \right) \\ \frac{dp}{dF} = \frac{\sigma}{\delta} \left( \frac{(p_e - p) - QF}{-F + Qp} \right), \end{cases} \quad (4.43)$$

якою описують нелінійні залежності платоспроможного попиту населення та умовної ціни від змінюваності виробничої функції.

Отже, величина  $F$  є незалежна змінна і будуть розглянені функції  $Q(F)$  і  $p(F)$ , причому  $F \in [1; 2]$ , адже виробнича функція суспільства зростає на десятки процентів у найкращому варіанті (як правило, у межах 20 %). Результати числового дослідження ММ (4.43) наведено на рис. 4.23: а) — інтегральні криві для  $\sigma = 1/10$ ,

$\delta = 1/100$ ,  $p_e = 4/3$  і початкової умови  $[0;1]^T$ ; тобто низькопродуктивного економічного стану; б) — для  $[1;1]^T$ , тобто високопродуктивного стану.

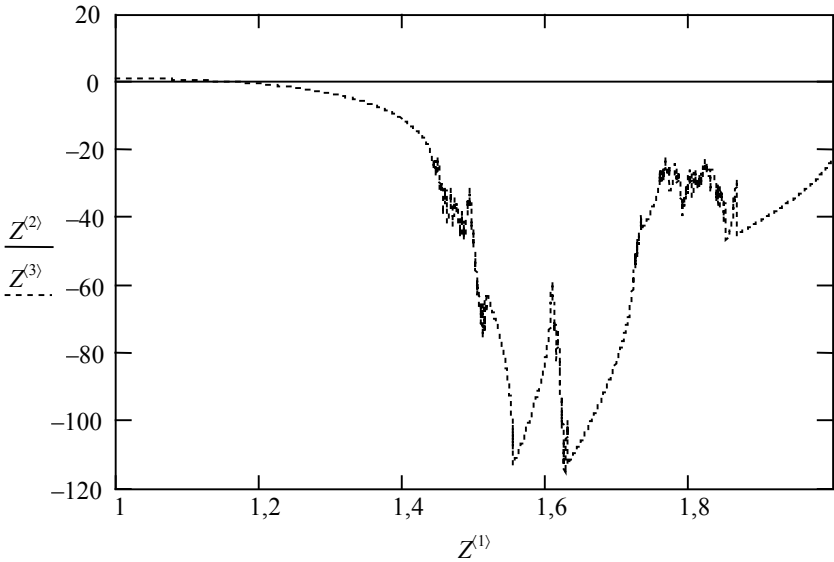
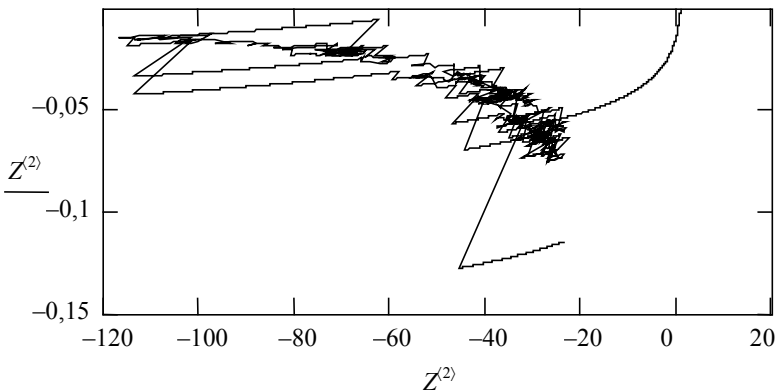


Рис. 4.23а. Графіки функцій  $Q(F)$  та  $p(F)$  (інтегральні криві) для низькопродуктивного економічного стану



Фазовий опис

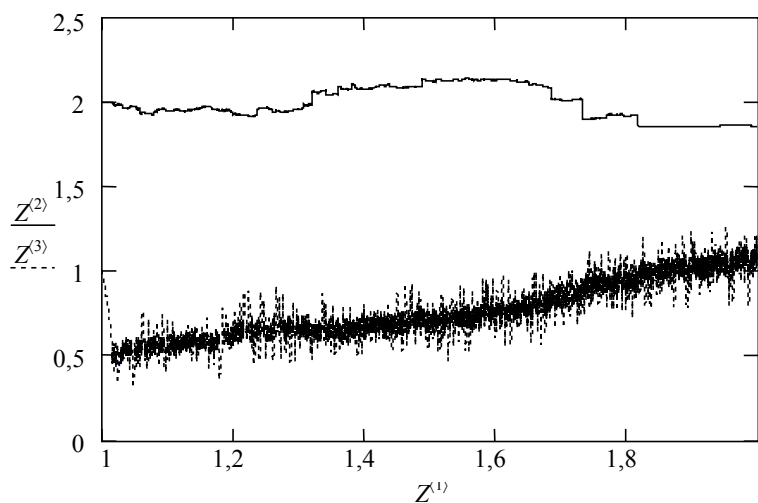
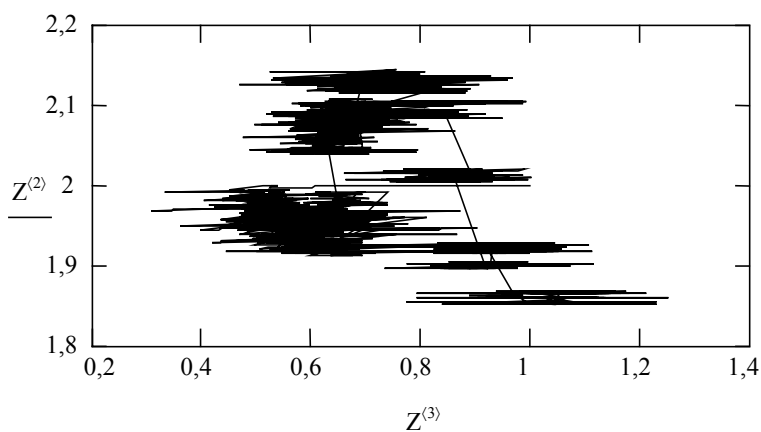


Рис. 4.236. Графіки функцій  $Q(F)$   
і  $p(F)$  (інтегральні криві і фазовий опис)  
для високопродуктивного стану економіки



Фазовий опис

Поділивши перше і друге рівняння системи (4.39) на третє, доходимо до ММ

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dp} = \delta \left( \frac{-Q + F}{(p_e - p) - QF} \right) \\ \frac{dF}{dp} = \frac{\delta}{\sigma} \left( \frac{-F + Qp}{(p_e - p) - QF} \right), \end{cases} \quad (4.44)$$

якою встановлюють нелінійні зв'язки платоспроможного попиту населення і виробничої функції суспільства за наявною умовною ціною, тобто величина  $p$  є незалежна змінна, і розглядають функції  $Q(p)$  і  $F(p)$ , причому остання з них вперше фігурує в економічному аналізі.

Інтервали змінюваності незалежної змінної мають бути  $p \in [1; 2]$ , коли ціни в суспільстві підвищуються помірно, і  $p \in [1; 10]$  через значне зростання, причому в окремих випадках правий кінець відрізка може набувати і більшого значення, коли ціни галопують.

Деякі результати обчислювального експерименту над ММ (4.44) для  $\delta = 1/10$ ,  $\delta = 1/100$ ,  $p_e = 4/3$  і 4 та  $p \in [1; 2]$  і  $p \in [1; 10]$  за початкової умови  $[1; 1]^T$  наведено нижче: на рис. 4.24а, б), в)) — інтегральні криві попиту  $Q(p)$  і виробничої функції  $F(p)$ ; на 4.25а), б), в)) — фазові описи.

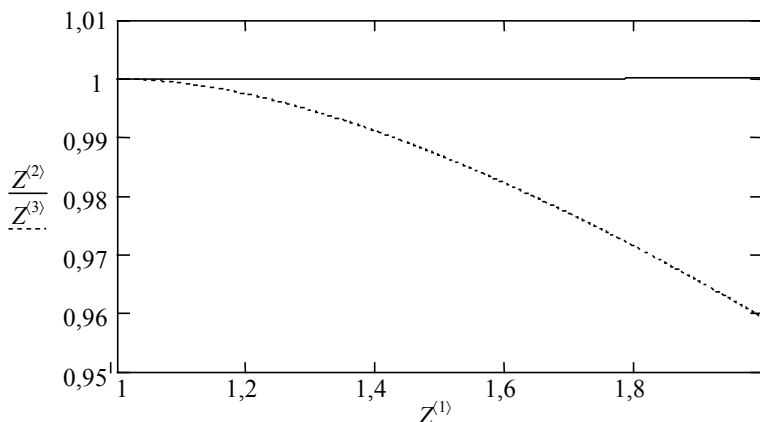


Рис. 4.24а. Інтегральні криві попиту  $Z^{<2>}$  і виробничої  $Z^{<3>}$  як функції ціни  $Z^{<1>}$  при  $p_e = 4/3$  для  $p \in [1; 2]$

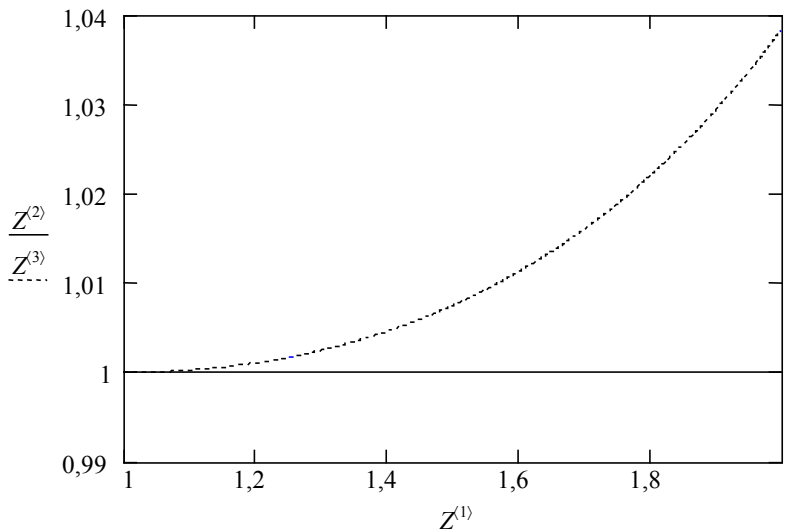


Рис. 4.24б. Інтегральні криві попиту  $Q(p) = Z^{<2>}$  і виробничої  $F(p) = Z^{<3>}$  при  $p_e = 4$  для  $p \in [1; 2]$

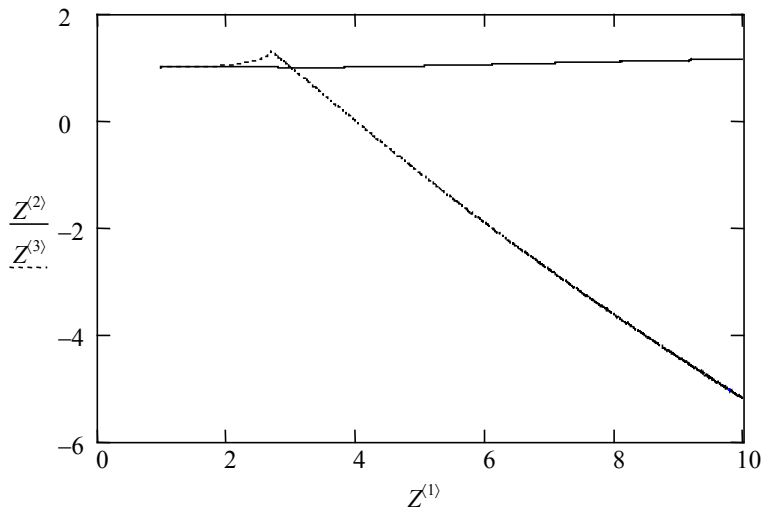


Рис. 4.24в. Інтегральні криві попиту  $Q(p) = Z^{<2>}$  і виробничої  $F(p) = Z^{<3>}$  при  $p_e = 4$  для  $p \in [1; 10]$

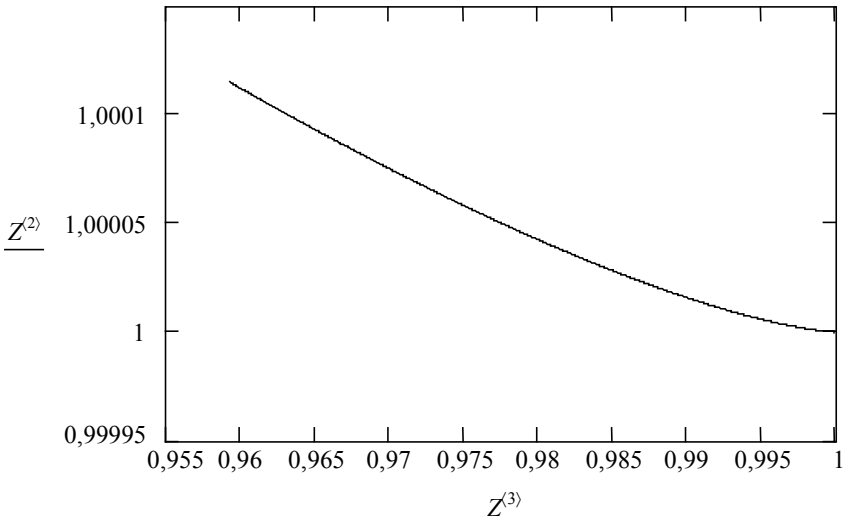


Рис. 4.25а. Фазовий опис у координатах виробничої функції  $Z^{<3>}$  і попиту  $Z^{<2>}$  при  $p_e = \frac{4}{3}$  для  $p \in [1; 2]$

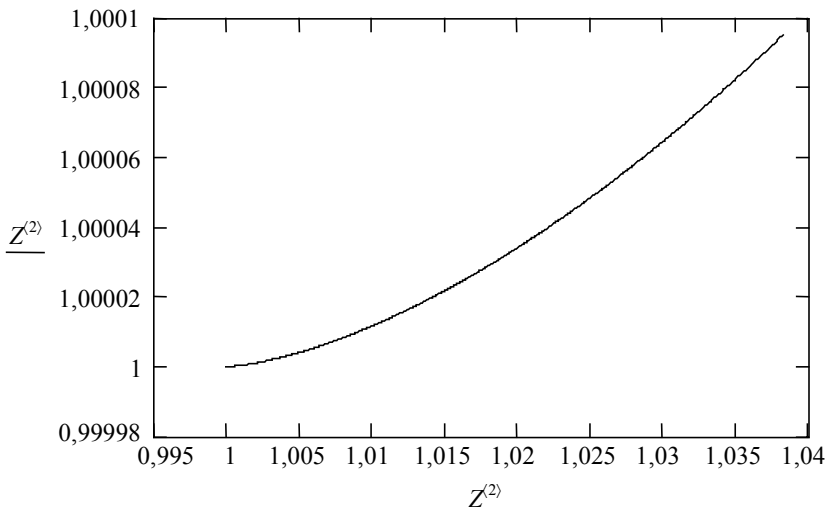


Рис. 4.25б. Фазовий опис для кривих  $Q(p)$  і  $F(p)$  при  $p_e = 4$  для  $p \in [1; 2]$



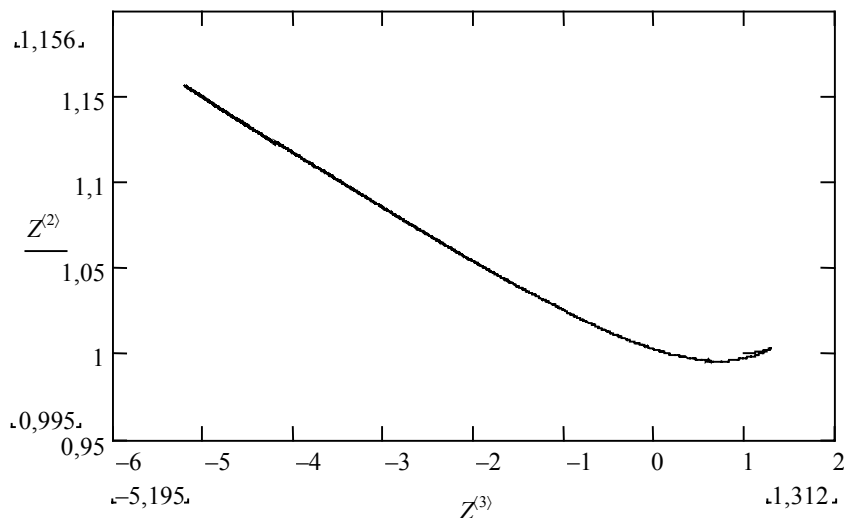


Рис. 4.25в. Фазовий опис для кривих  $Q(p)$   
і  $F(p)$  при  $p_e = 4$  для  $p \in [1; 10]$

**Тлумачення результатів комп'ютерного моделювання.** В усіх трьох варіантах а), б), в) через вимушене зростання ціни інтегральна крива попиту практично залишається сталою, при цьому графік виробничої функції незначно падає (до 0,96) для  $p_e = \frac{4}{3}$ , але зростає (до 1,04) як опукла вниз функція для  $p_e = 4$  за двократного зростання ціни.

При значному (на порядок) підвищенні ціни і  $p_e = \frac{4}{3}$  виробнича функція є спадною (до 0,2) за умов сталості  $Q(p)$ , але економічна система деградує вже для  $p \approx 2,5$  при  $p_e = 4$ .

Якого характеру спостерігається нелінійні взаємовпливи між економічними факторами, що фігурують у ММ (4.42)—(4.44)? Відповіді надають фазові описи на рис. 4.25а—4.25в, які засвідчують таке: рис. 4.25а відображає тенденцію малозначущого попиту за зменшення значень виробничої функції для  $p_e = \frac{4}{3}$ ; рис. 4.25б вказує на тенденцію підвищення попиту зі збільшенням виробничої функції для невеликого (до двох разів) зростання умовної ціни.

Для випадку значної інфляції (в 10 разів) при  $p_e = 4$  фазовий опис рис. 4.25в засвідчує тезу про незначне збільшення попиту у разі падіння рівня виробничої функції.

Отже, досліджено нелінійні взаємозв'язки і взаємовпливи таких важливих економічних факторів, як платоспроможний попит населення, виробничі сили суспільства і ціни. Підґрунтям дослідження виступають математичні моделі та їх числовий аналіз.

Вперше кількісним способом вивчається динаміка нелінійних взаємозв'язків між економічними факторами, скориставшись обчислювальним експериментом, де як математична модель фігурує система звичайних диференціальних рівнянь з початковою умовою — стартовою для розвитку економічного процесу. Також досліджуються нелінійні взаємовпливи між показниками економіки. Раніше ці проблеми дискутувались економічною спільнотою головно вербально, у кращому разі з використанням економічного підходу, який принципово різниться від викладеного в монографії, оскільки вимагає наявності статистичної сукупності.

Подальше вивчення проблем нелінійної динаміки макроекономіки, на наш погляд, потребує кількісного з'ясування ролі: а) початкових (стартових) умов розвитку економічного процесу; б) числових коефіцієнтів  $\sigma$  і  $\delta$  ММ; в) вибору керуючого параметра  $p_e$ , котрим відтворюється купівельна спроможність членів суспільства.

Слід з'ясувати межі змінюваності коефіцієнтів ММ, щоб уникнути хаотичного або близького до нього процесу розвитку подій.

У новітньому економічному аналізі світ нелінійних залежностей, якому органічно притаманна неоднозначність або багатоваріантність розвитку подій, тільки починає досліджуватись.

---

#### **4.6. Апостеріорне визначення деяких факторів економіки на підґрунті моделювання**

---

Нижче вказано формули обчислення темпу зростання економіки держави в цілому для неперервного і дискретного способу опису економічного стану, беручи до уваги частку внеску кожної галузі виробництва. Встановлено закон змінюваності у часі економічного фактора залежно від його еластичності.

#### **4.6.1. Визначення темпу еволюції економічної структури суспільства**

---

Традиційно поняття темпу  $\eta$  визначається на прикладі окремо взятої галузі суспільного виробництва — однієї зі складових економіки держави [15].

Будучи надскладною системою, економіка держави являє собою гармонічну сукупність багатьох різнорідних галузей господарства, яким притаманні різні життєві (часові) цикли свого функціонування. Це добре знане явище швидкоплинних і повільних процесів економіки, в якій настають події, а взаємозв'язки і взаємовпливи між ними відбуваються з різними за абсолютною величиною швидкостями.

При цьому мають місце полярні (додатні та від'ємні) зворотні зв'язки між елементами і складовими економічної системи. Зрозуміло, що в описаному випадку, реально досить поширеному, спостерігається різний внесок в економіку її складовими. Структура утворюваного в результаті виробничої діяльності економічного цілого завжди викликає інтерес.

Між іншим, проблема швидкоплинних і повільних змінних особливим чином виявилась у зв'язку з синергетичним дослідженням економіки, вона суттєво позначається на результатах математичного моделювання економіки.

В економічній літературі відсутні системні оцінки еволюції економіки суспільства, цебто стосовно темпу розвитку економічної системи загалом. Зазвичай у теоретичній і прикладній економіці поняття темпу економічного фактора вживається до окремо взятої галузі виробництва — моногенної складової економіки. Але економічна структура суспільства є гетерогенна — її становить низка напрямів виробничої діяльності, наприклад, важка і легка промисловість, сільське господарство тощо. Таким чином, цілком природно з'являється потреба такого способу оцінювання розвитку економіки, за якого відображався б цілісний характер економічної еволюції.

Оскільки має місце різний внесок галузей у загальнонаціональну економіку, то постає цілком слушне запитання: яким темпом свого розвитку володіє економічна структура суспільства? Таким чином, постає нагальна потреба мати спосіб обчислення темпу  $\eta$  еволюції економіки держави.

Наша мета полягає в тому, щоб вказати спосіб отримання системної оцінки темпу функціонування економіки в цілому, через її складові, ураховуючи частку внеску кожної компоненти економічного процесу, і записати відповідні формули, беручи до уваги неперервний і дискретний опис економічного стану.

Попередньо зазначимо за Великим економічним словником таке поняття, як «темп  $\eta$ » являє собою ступінь швидкості виконання справи в процесі чого-небудь [15].

Темп приросту є відношення абсолютного приросту фактора до рівня показника, взятого за основу порівняння. Зазвичай, темп приросту розраховується як відношення кожного абсолютного приросту фактора до попереднього його рівня. Згідно з тлумаченням з Економічно-математичного енциклопедичного словника [175] формула темпу приросту записується  $\delta_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$ .

Темп приросту є відношення величини економічного фактора у даний час до його величини за попередній такий же час або до величини за деякий інший час, взятий за базу порівняння. Формула темпу приросту матиме вигляд  $T_t = y_t / y_{t-1}$ .

Зв'язок між зазначеними вище поняттями задано формулою  $\delta_t = T_t - 1$ .

Темп економічного зростання являє собою найбільш загальний показник, яким характеризується економічна динаміка. Хоча саме ним найчастіше кваліфікується національна економіка, але при цьому не відображається якість економічного розвитку, оскільки не враховується змінюваність структури економіки.

Вважається, що динаміка обсягу  $N_1$  виробництва певної галузі відтворює її стан і всі ті процеси, що в ній відбуваються. Величина  $N_1$  виступає як узагальнена характеристика змінюваності внутрішнього стану протягом певного часу  $t$ , тоді для одногалузевої економіки темп її еволюції запишемо у такий спосіб:

$$\eta_1 = \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt}. \quad (4.45)$$

Зазначимо, що величина  $\eta_1$  — локальна за змістом; стаціонарна, тобто не залежить від  $t$  — набуває однакову кількість значень у будь-який момент часу. Темп цілком визначається тільки функціональним станом економіки. Він характеризує тенденцію еко-

номіки: змінюватись у бік занепаду для від'ємного числового значення темпу; зростати для  $\eta > 0$  і стагнувати при  $\eta = 0$ . Також справедлива рівність  $\eta(cN) = \eta(N)$ , зважаючи на (4.45) і властивість виносити сталу  $c$  за знак похідної.

Насамкінець наведемо формулу  $N(t) = N(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \eta_1 dt \right\}$  змінюваності обсягу створюваного у галузі товару, котра є результатом інтегрування рівності (4.45).

Тепер нехай криві динаміки обсягів —  $N_1$  і  $N_2$  виробництва відтворюють дві галузі однієї економіки з відповідними темпами  $\eta_1$  і  $\eta_2$  свого зростання.

Як визначити темп еволюції двогалузевої економіки в цілому? Діючи формально, з урахуванням (4.45) матиме місце таке: логічно покласти  $N = N_1 + N_2$ ; тоді справедливе перетворення

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{N_1 + N_2} \frac{d(N_1 + N_2)}{dt} \equiv \frac{1}{N_1 + N_2} \frac{dN_1}{dt} + \frac{1}{N_1 + N_2} \frac{dN_2}{dt} \equiv \\ &\equiv \frac{N_1}{N_1 + N_2} \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} + \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt}. \end{aligned}$$

Таким чином, одержуємо результат

$$\eta = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \eta_1 + \frac{N_2}{N_1 + N_2} \eta_2, \quad (4.46)$$

згідно з яким темп розвитку економічної системи загалом є середньозважене темпів кожної галузі. Співмножники  $W_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$  і

$W_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$  вказують на частку кожної галузі для економіки загалом, причому  $W_1 + W_2 = 1$ , тоді вираз (4.46) переписується

$$\eta = \sum_{i=1}^2 W_i \eta_i, \quad (4.46a)$$

де вектор  $\overline{W} = \{W_1, W_2\}$  відтворює економічну структуру суспільства.

Формула (4.46) легко узагальнюється для випадку  $n$  галузей виробництва в економіці держави

$$\eta = \sum_{i=1}^n W_i \eta_i, \quad (4.47)$$

де величина  $W_i = \frac{N_i}{\sum_{j=1}^n N_j}$  — частоті, причому  $\sum_{i=1}^n W_i = 1$ ;  $\bar{W}$  вказує

на структуру економічної спільноти. Отже, стан економіки загалом характеризується, а її еволюційні тенденції визначаються не переліком галузей, а їх структурою і виробничим потенціалом кожної з них.

Якщо динаміка обсягів виробництва відтворюється в окремо взяті моменти часу  $t_k$  (дискретно замість неперервного опису), то темп зростання визначається, наприклад, так

$$\eta_k = \frac{N(k+1)}{N(k)}, \quad (4.48)$$

де  $N(t) = N(t_k)$  і  $N(k+1) = N(t_{k+1})$ .

Інтегрування виразу виглядом (4.45) на інтервалі  $T = t_{k+1} - t_k$  отримаємо вираз  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \eta(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dN}{N} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} d(\ln N) = \ln \frac{N(t_{k+1})}{N(t_k)} = \ln \eta_k$ .

Звідки легко побачити, що для дискретного опису економіки її темп  $\eta_k > 1$  у випадку зростання,  $\eta_k < 1$  — для тенденції занепаду і  $\eta_k = 1$  у разі стагнації.

Насамкінець, зазначимо, у чому виявляється апостеріорний характер обчислення темпу  $\eta$  на підґрунті моделювання. Беручи до уваги динамічну модель  $\dot{x} = f(x, t)$  економічної системи, у будь-який момент часу завжди присутня похідна  $\dot{x}$  — одна зі складових формули темпу, а друга її складова  $x(t)$  є поточний результат комп'ютерного моделювання.

#### 4.6.2. Щомоментне визначення еластичності

На завершення наголосимо на такому. Згідно з [175] еластичність є числова характеристика відносної змінюваності однієї з двох взаємопов'язаних величин за фіксованої зміни ін-

шої. Еластичність виражається відношенням темпів приросту відповідних величин, а саме: якщо темп приросту величини  $Y$  позначити  $E(Y)$ , тобто  $E(Y) = dY/Y$ , а темп приросту величини  $X$  через  $X(Y) : X(Y) = dX/X$ , то еластичність  $Y$  по  $X$  рівна

$$\frac{E(Y)}{E(X)} = \frac{dY}{dX} \div \frac{Y}{X}.$$

За визначенням еластичність  $E_t$  функції  $y = f(t)$  описана формулою  $E_t = \frac{t}{y} \frac{dy}{dt}$ , де  $t$  — незалежна змінна. Таким чином, добуток  $t$  на темп є еластичність. Перепишучи формулу еластичності  $\frac{E_t dt}{t} = \frac{dy}{y}$  ? інтегруванням останнього виразу отримуємо рівність

$f(t) = f(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{E_t dt}{t} \right\}$ , яка встановлює закон змінюваності в часі початкової функції  $y = f(t)$  залежно від еластичності.

Якщо у виразі для кривої Гомперца  $\ln \left( \frac{1}{f} \frac{df}{dt} \right) = a - kt$ , де  $f = f(t)$ ,  $a$  і  $k$  — сталі величини, урахувати дефініцію еластичності і здійснити такі перетворення:  $\ln \left( \frac{t}{f} \frac{df}{dt} \right) = \ln \left( \frac{t}{f} \frac{df}{dt} \right) + \ln t$ ;  $\ln E_t = a - kt + \ln t$ ; після операції потенціювання  $E_t = t \exp \{a - kt\}$ , то остаточно матимемо  $E_t = A t e^{-kt}$  де  $A = e^a$ . Останній вираз для еластичності являє собою функцію Ріккера [25], якій за певних умов властивий стан детермінованого хаосу (відбувається циклічне подвоєння частоти амплітуди).

Одержаний аналітичний результат збігається з думкою [15, с. 410], що еластичність є здатністю системи поглинати турбулентність (певною мірою не допускати хаосу) або, інакше, спостерігається стабільність у певних межах. Більше того, стійкість стосується збереження інформаційних параметрів економічної системи: для рівноважного стану стійкість засвідчує адаптацію елементів і коефіцієнтів системи до ендогенно змінюваних умов. Еластичність відображає потребу у збереженні інформаційних характеристик.

Отже, вперше в літературі встановлено тенденції економічної еволюції у вигляді формули: а) темпу зростання економіки як цілого, складовими якої є  $n$  виробничих галузей; б) залежності обсягу виробництва від темпу економічного фактора; в) змінюваності деякої функції від еластичності. Аналітично показана можливість еластичності як процесу у часі набути хаотичного стану.

Сформульовано властивості такого економічного показника, як темп розвитку.

Побудовано вектор  $\bar{W}$  економічної структури суспільства, координати якого відображають внесок кожної галузі виробництва у загальноекономічний потенціал.

---

## Висновки

---

В економіко-математичному моделюванні запропоновано кластеризацію різноманітних за змістом ММ, які являють собою лінійну неоднорідну систему звичайних диференціальних рівнянь. Такий прийом вигідний у пізнанні адаптивних механізмів економіки, бо відбувається взаємозбагачення досягнутими результатами стосовно окремо взятої моделі.

Розглянуто сценарії можливої співпраці двох країн (союзів) на підґрунті м'якого моделювання — якісного аналізу рівнянь ММ. Розкрито адаптивну природу механізму взаємодії. Альтернатива доцільної поведінки визначається не стільки стартовими умовами, скільки коефіцієнтами ММ, серед яких визначальними є боротьба за якість продукції галузі і ступінь міжгалузевих зв'язків. Очевидно, що партнерство має забезпечувати успішність кожної сторони (не пригнічувати, а сприяти ефективному співіснуванню на ринку збуту), бути взаємовигідним.

Оскільки для практики математичного моделювання нелінійної економічної динаміки також має місце бар'єр жорсткості рівнянь моделі (через наявність швидкоплинних і повільних змінних), то для його подолання залучено адаптивну процедуру числового інтегрування, яка успішно застосовувалась у САПР інтегральної електроніки.

У підрозділі 4.4 розроблено ММ динаміки інфляційного процесу в українській економіці. Дослідження ММ засобами якісно-



го і числового аналізу показало адекватне відтворення реально існуючого у суспільстві процесу інфляції. Таким чином, комп'ютерне моделювання на підґрунті зазначеної ММ (4.27) дає підстави для достовірного короткострокового горизонту прогнозування розвитку інфляції.

Використовуючи одну з відомих у літературі скупчених моделей економіки, були встановлені закономірності поведінки з часом кривих платоспроможного попиту  $Q$ , виробничої функції  $F$  та умовної ціни  $p$  для низько- і високопродуктивного суспільства. Моделювалась інтерактивна динаміка факторів економічної системи (зі зміною в характері одного відбувається зрушення в інших двох) за допомогою площинних ММ в координатах:  $(Q(p), F(p))$ ;  $(Q(F), p(F))$ ;  $(F(Q), p(Q))$ . Варто підкреслити, що коли залежності  $Q(p)$  чи  $p(Q)$  традиційно фігурують в економічному аналізі, то інші розглядаються вперше.

В кінці розділу наведено формули обчислення темпу зростання економіки суспільства загалом для неперервного і дискретного способу опису економічного стану, беручи до уваги частку внеску кожної галузі виробництва. Установлено закон змінюваності з часом економічного фактора залежно від його еластичності.

### ВИБІР ТРАЄКТОРІЙ НЕЛІНІЙНОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

**З** огляду на незаперечний факт свідомого і якомога кращого облаштування живої природи та раціональної доцільності всього суцього ідея оптимальності є однією з головних у теорії систем.

Пізнання процесів оптимізації стало предметом досліджень багатьох наукових дисциплін і напрямів. В економіці — одній з трьох [81] форм соціально-економічних процесів, котра об'єднує в єдине ціле і розрізнені виробництва, і обмін різноманітними товарами і послугами. Наприклад, практика економічних досліджень насичена лінійним програмуванням. Але економіка визначається як різновид динамічної системи, еволюція якої вимагає якомога ефективнішого керування у досягненні відповідних цілей.

Ефективне управління економічною системою (за суттю, прийняття низки рішень щодо можливого шляху розвитку) належить до числа важливих проблем економічної динаміки, котрими забезпечується раціоналізація структури економіки, підтримка її розвитку, реалізація мети, взагалі кажучи, здійснення низки цільових програм функціонування економіки.

На шляху постановки і розв'язання оптимізаційних задач моделювання нелінійної економічної динаміки мають місце об'єктивні труднощі:

- 1) нестійкість математичних моделей і числових методів їх розв'язання;
- 2) наближений характер цілей і можлива їхня змінюваність;
- 3) часткове і не зовсім вдале урахування онтологічно існуючих обмежень;
- 4) математичне моделювання економічних систем як великих, так і надскладних є досить ускладненим, носить приблизний характер і не завжди забезпечує прийнятну точність.

У зв'язку з нагальними проблемами раціонального планування й ефективного управління в ринкових умовах, котрим притаманна нелінійна динаміка, ідеї оптимальності застосовуються в економіці, незважаючи на низку труднощів їх поширення на недостатньо структуровані динамічні системи.

### 5.1. Алгоритмізація математичної теорії оптимальних процесів на прикладі точкової (скупченої) моделі

У попередніх розділах було математично описано деякі макроекономічні явища і процеси. Оскільки економічна система неперервно розвивається, то моделі, що претендують на адекватне відтворення процесів економіки, також мають бути відповідними, тобто поява точкових моделей — систем звичайних диференціальних рівнянь цілком закономірна і навіть правомірна.

Побудовані ММ мають низку параметрів, від числових значень котрих суттєво міняється поведінка інтегральних кривих — розв'язків моделей або траєкторії еволюції об'єкта моделювання. Серед множини альтернативних шляхів, безумовно, знайдеться найкращий у деякому сенсі, що відповідатиме оптимальному варіанту (набору) числових коефіцієнтів ММ, беручи до уваги спрощений і приблизний характер самих моделей. Так як у природі завжди існують якомога кращі варіанти розвитку, то резонно припустити, що оптимальний шлях слід шукати на підґрунті ММ з використанням математичної теорії оптимальних процесів. Цілком логічно, що теорія економічного оптимуму має бути саме динамічною, розвиваючи класичну (перш за все лінійну) оптимізацію задач розподілу ресурсів і благ.

Оптимальні розв'язки, або траєкторії ММ, нелінійної економічної динаміки сприяють умінню передбачати наслідки сьогоднішніх рішень для економіки завтрашнього дня, надаючи футурологічні сценарії прийдешнього.

Грунтуючись на працях [52, 83, 98, 135, 152], попередньо сформулюємо основні поняття і фундаментальні теореми математичної теорії оптимальних процесів, орієнтуючись на управління динамічною економічною системою.

Узагальнена задача оптимального керування для неперервної динамічної системи записується як

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \varphi(x, u, t) dt \rightarrow \text{extr}; \\ \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \\ u(t) \in U^t, t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0, x(T) = x_T, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

де величина  $x = x(t) \Leftrightarrow x = \{ \{x_{(i)}^i\} \}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  є вектор економічного стану розмірності  $n$  і називається фазовою траєкторією, наприклад, національний дохід, фондоозброєність тощо;  $u = u(t) \Leftrightarrow u = \{ \{u_{(j)}^j\} \}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  є вектор управління (величина норми накопичення);  $U^t$  — обмеження на управління;  $x_0$  — початковий стан,  $x^i(T) = x_{i1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \leq n$  відповідає кінцевому стану (обмеження не для всіх змінних); перший вираз називається функціоналом, який досягає екстремального значення на множині розв'язків ММ (друга строка), оцінюючи якість процесу.

Вимагається за час  $T$  ( $T$  — горизонт планування) економічну систему перевести від початкового стану  $x_0$  до кінцевого  $x(T)$ , екстремізуючи критерій ефективності (функціонал) або, інакше, треба визначити оптимальний процес  $(x^*(t), u^*(t))$ , для якого виконуються умови (5.1). Функціонал описує процеси економічної системи.

Якщо  $\psi(t)$  — двоїста змінна до  $x(t)$ , то має місце функція Гамільтона, яка узагальнено записується

$$H(x, \psi, u, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u, t) - \phi(x, u, t), \quad (5.2)$$

де  $\{f_i(x, u, t)\} = f(x, u, t)$  є вектор-функція, або права частина диференціального рівняння (ММ), а другий доданок — підінтегральна функція виразу для функціонала.

Для функції Гамільтона виконується таке:

$$H(x^*(t), \psi(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U^t} H(x^*(t), \psi(t), u(t), t); \quad (5.3)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial H(x^*(t), \psi(t), u^*(t), t)}{\partial x_i} \Big|_{x^*(t)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.4)$$

Принцип максимуму Понтрягіна сформулюємо у такий спосіб: якщо вектор  $U^*(t)$  відображає оптимальне керування у моделі (5.1), функція  $x^*(t)$ , відповідно при  $u^*(t)$  описує оптимальну траєкторію, а інтегральна крива  $\psi = \psi(t)$  розрахована для  $x^*(t)$  і  $u^*(t)$  згідно з (5.4) є траєкторія двоїстості змінної, то для  $\forall t \in [0, T]$  виконується рівність (5.3) — оптимальне управління надає екстремального значення функції Гамільтона.

Зауважимо, що принцип максимуму Понтрягіна надає тільки необхідну умову існування максимуму, тобто невиконання принципу засвідчує відсутність максимуму.

Запишемо фундаментальні теореми оптимальності для функціоналу  $L$  більш загального вигляду

$$L = \int_0^T \varphi(x, u, t) dt + F(x(T)) \rightarrow \min. \quad (5.5)$$

Якщо права частина  $x(T)$  траєкторії процесу фіксована, то другий доданок  $F(x(T))$  функціонала також стала величина і не впливає на пошук оптимального розв'язку.

**Твердження 1** (необхідна умова оптимальності). Якщо для задачі (5.1) існує оптимальний процес  $(x^*(t), u^*(t))$ , то знайдеться вектор-функція  $\psi(t) = \{\psi_i(t)\}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ , для якої виконується:

а) функція Гамільтона досягає максимуму по змінній  $u$  для  $x^*(t)$  і  $\psi(t)$  при значенні  $u^*(t)$  і  $\forall t \in [0, T]$  — має місце (5.3);

б) двоїсті змінні  $\psi_i(t)$  задовольняють систему диференціальних рівнянь (5.4);

в) при  $t = T$  оптимальний розв'язок (траєкторія оптимального процесу) задовольняє умову трансверсальності

$$\psi_i(T) = - \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} \Big|_{x^*(T)} \quad (i = m+1, m+2, \dots, n).$$

**Твердження 2** (достатні умови оптимальності). Для задачі (5.1) з критерієм якості розв'язку у вигляді (5.5) і доповненням  $x(T) \in V_x^t$  оптимальність шуканого процесу матиме місце за виконання умов:

а) підінтегральна функція  $\varphi(x, u, t)$  функціонала випукла по змінних  $x$  і  $u$  для  $\forall t \in [0, T]$ ;

б) другий доданок  $F(x(T))$  також випукла функція по змінній  $x$ ;

в) диференціальні рівняння процесу лінійні  $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik}(t)$ ;

г) в обмежуючі множини  $U^t$  і  $V_x^t$  на управління випуклі, але допускається виродження в одну кінцеву точку  $x(T) \in V_x^t$ .

У наступних двох підрозділах демонструється практичне використання елементів теорії оптимізації стосовно деяких елементарних задач економічної динаміки.

## 5.2. Кероване досягнення траєкторії найкращого економічного зростання

Для пострадянських держав вкрай важливе значення має функція соціальної захищеності населення з низки об'єктивних причин і обставин, які склались історично. Економіки цих країн переживають певні труднощі: неефективний капітал і максимальне споживання відповідають нестійкому рівноважному стану.

Історія економічних взаємовідносин свідчить, що тимчасові невдачі суспільства й економіки успішно долаються лише самим населенням країни, тобто за рахунок власних трудових зусиль. Іноді подолання економічної кризи пов'язують із закордонною допомогою. Між іншим, кожна із можливостей ліквідації економічної невідповідності в суспільстві повинна бути своєчасною, оперативно діючою. На прикладі математичної моделі неокласичної теорії оптимального зростання враховується запізнення вводу фондів, що цілком природно для реальної економіки.

Макроекономічний стан процесу розширеного відтворення, припускаючи немиттєве перетворення інвестицій у фонди, описується [52, 90] неперервною динамічною моделлю Солоу в стандартній формі для абсолютних показників:

$$\begin{aligned} Y &= I + C; \\ Y &= F(K, L); \\ \dot{K} &= -\delta K + V, K(0) = K_0; \\ \dot{V} &= sI - sV; \\ L &= L_0 e^{nt}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

де перше рівняння — баланс розподілу валового внутрішнього продукту (ВВП) на інвестиції  $I = \rho Y$  і невиробниче споживання

$C = (1 - \rho)Y$ ;  $\rho$  — норма накопичення і  $0 < \rho < 1$ ; друге рівняння — лінійно-однорідна виробнича функція ВВП залежно від ресурсів:  $K$  — фонди,  $L$  — кількість працюючих; третє рівняння — динаміка фондів ( $\dot{K}$  — похідна по часу або  $\frac{dK}{dt}$ ) залежно від зно-

су і вводу фондів;  $\delta$  — частка вибулих за рік основних виробничих фондів чи коефіцієнт амортизації  $0 < \delta < 1$ ; величина  $K_0$  — початковий стан капіталу; четверте рівняння — динаміка вводу фондів з урахуванням інвестицій і запізнення у вводі фондів і  $s$  — відповідний коефіцієнт; п'яте рівняння — динаміка трудових ресурсів, число  $n \in (-1; 1)$  — річний темп приросту кількості працюючих,  $L_0$  — початковий обсяг наявних трудових ресурсів.

Сукупність числових значень ендегенних змінних  $Y, I, C, K, V, L$  стану економіки в кожен момент часу створюють траєкторії зростання економічної системи. На множині технологічно допустимих траєкторій розглядаються питання прогнозування результатів її функціонування, вибору керуючих дій. Традиційні екзогенні змінні — коефіцієнти  $\rho, \delta, n, s$  беруться як постійні.

З використанням відносних показників:  $k = \left(\frac{K}{L}\right)$  — фондоозброєність праці;  $y = \left(\frac{Y}{L}\right)$  — середня продуктивність праці;  $i = \left(\frac{I}{L}\right)$  — питомі інвестиції (на одного зайнятого);  $c = \left(\frac{C}{L}\right)$  — подушне споживання;  $v = \left(\frac{V}{L}\right)$  — питома запізнення фондів і властивостей неокласичної виробничої функції, модель Солоу набуває вигляду

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -dk + v, k(0) = k_0, (d = \delta + n); \\ \dot{v} &= -\xi v + s\rho f(k), (\xi = s + d); \\ c &= (1 - \rho)f(k),\end{aligned}\tag{5.7}$$

де функція  $f(k)$  залежності продуктивності праці від фондоозброєності живої праці є монотонно зростаючою, строго вгнутою. Математична модель (5.7) теорії економічного зростання, в якій

враховується лаговий характер інвестицій, переписується в більш зручній для подальшого розгляду формі:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -dk + v; \\ \dot{v} &= -\xi v + sf(k) - sc.\end{aligned}\quad (5.7a)$$

Відмовляючись від умови  $p = \text{const}$ , сформулюємо динамічну задачу економічного зростання, в якому керуючим параметром виступатиме питоме споживання  $c(t)$ , причому виконується нерівність  $0 < \underline{c} \leq c(t) \leq f(k(t))$ , де  $\underline{c}$  — гранично допустима нижня межа. Управління полягає в тому, щоб за допомогою директив, змінюючи  $c(t)$ , на плановому горизонті  $T$  дисконтована корисність від споживання прагнула до найбільшого значення, тобто

$$\int_0^T e^{-rt} U(c(t)) dt \rightarrow \max, \quad (5.8)$$

де  $r = p - n > 0$  параметр дисконтування;  $U(c)$  — функція корисності споживання, стосовно якої виконуються стандартні припущення (додатня  $U(c) > 0$ , зростаюча  $\dot{U}(c) > 0$ , з убуваючою граничною корисністю  $U''(c) < 0$ ).

Задача управління полягає в максимізації інтегралу добробуту (5.8) за умови (5.7a), розв'язок  $c^*(t)$ ,  $k^*(t)$ ,  $v^*(t)$  якої відповідає оптимальним траєкторіям, які знаходять за принципом максимуму Понтрягіна

$$H(\psi, x, u, t) = \sum_{i=1}^2 \psi_i f_i(x, u, t),$$

де  $\psi_i(t)$  — спряжені змінні, вектор  $x(k, v)$ ,  $u = c$  — керуючий параметр,  $f_i(x, u, t)$  — праві частини диференціальних рівнянь (5.7). Отже, спряжена система звичайних диференціальних рівнянь записується  $\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ ,  $(i = 0, 1, 2)$ . За вибраного допустимого управління і початкової умови  $x(0) = x_0$  однозначно визначається фазова траєкторія  $x(t)$ .



Щоб максимально скористатись одержаним результатом [178], перепишемо умову (5.7а)

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -dk + v \\ \dot{v} &= -dv - sv + sf(k) - sc, \end{aligned} \quad (5.7б)$$

яка остаточно набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}(k + v) = -d(k + v) + (1 - s)v + sf(k) - sc. \quad (5.9)$$

Далі розглядається задача максимізації інтеграла добробуту за умови (5.9). Здійснюючи відомі кроки, матимемо: гамільтоніан записується

$$H = U(c)\exp(-rt) + \psi[sf(k) - sc - d(k + v) + (1 - s)v];$$

його максимізація

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c)e^{-rt} - \psi s = 0 \Rightarrow U'(c) = s\psi e^{rt} \quad (5.10)$$

свідчить, що гранична корисність  $U'(c)$  питомого споживання дорівнює тіншовій ціні капіталу  $\psi$ , домноженій на величину  $se^{rt}$ ; також матиме місце

$$\frac{\partial^2 H}{\partial c^2} = u''(c)e^{-rt} < 0.$$

З принципу максимуму витікає два рівняння:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial k} \Leftrightarrow \dot{\psi} = -\psi[sf'(k) - d];$$

$$\frac{d}{dt}(k + v) = \frac{\partial H}{\partial \psi} \Leftrightarrow (\dot{k} + \dot{v}) = [sf(k) - sc - d(k + v) + (1 - s)v].$$

Із першого рівняння і (5.10) безпосередньо встановлюємо

$$c' = -\frac{U'(c)}{U''(c)}[sf'(k) - (d + r)].$$

Два останні вирази формують систему диференціальних рівнянь, дискретизація якої алгоритмом Ейлера дає:

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= k_i + \Delta t_i [st(k_i - sc_i - dk_i)]; \\ c_{i+1} &= c_i + \Delta t_i \left[ -\frac{u'(c_i)}{u''(c_i)} (sf'(k_i) - (\delta + p)) \right]; \\ v_{i+1} &= v_i + \Delta t_i [-dv_i + (1-s)v_i], \end{aligned} \quad (5.11)$$

використовуючи прийом розщеплення процесу числового інтегрування. Попереднє (5.11) у загальному вигляді запишемо:

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= f_1(k_i, c_i, n_i); \\ c_{i+1} &= f_2(k_i, c_i); \\ v_{i+1} &= f_3(v_i), \end{aligned} \quad (5.11a)$$

де  $n_i$  — керуючий параметр підвищення трудових ресурсів у момент часу  $t_i$ , оскільки  $d_i = n_i + \delta$ .

Нерухома точка  $(k^*, c^*)$  знаходиться з умови рівності нулю похідних, тобто

$$c^* = f^*(k) - \frac{n_0 + \delta}{s} k^* - \frac{(n_0 + \delta)}{s} v^* + \frac{(1-s)}{s} v^* \text{ і } f'(k^*) = \frac{\delta + p}{s}. \quad (5.12)$$

Для кваліфікації точки  $(k^*, c^*)$  на фазовій площині обчислюється в ній якобіан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k} & \frac{\partial f_1}{\partial c} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k} & \frac{\partial f_2}{\partial c} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial k} & \frac{\partial f_3}{\partial c} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

який у підсумку зводиться до відомого [178] визначника другого порядку

$$J = (1 + \Delta t(n_i + \delta + 1 - s)) \begin{vmatrix} -\frac{U'(c)}{U''(c)} sf''(k^*) \Delta t & -\Delta t \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Відмінність полягає лише у множнику  $s$  для елемента  $a_{21}$ , також постійна величина перед детермінантом.

Характеристичне рівняння має вигляд  $\lambda^2 - trJ + \det J = 0$ , де слід матриці  $trJ = 2 + \Delta tr$ , визначник  $\det J = (1 + \Delta tr) - \frac{u'(c)}{u''(c)} sf''(k^*) \Delta t^2$ . Власні значення визначаються формулами

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(trJ + \sqrt{\Delta}) \text{ і } \lambda_2 = \frac{1}{2}(trJ - \sqrt{\Delta}), \text{ де величина } \Delta = (rtJ)^2 - 4 \det J.$$

Як наслідок, нерухома точка є  $(k^*, c^*)$ . До неї веде єдина стійка траєкторія: початкове  $k_0$  і споживання  $c_0$  повинні обиратись так, щоб попадати до неї. Поза цією траєкторією матиме місце проїдання капіталу, або голодне споживання.

Правильний вибір величини  $k_0$  і  $c_0$  завжди проблемний (важко вцілити на потрібну траєкторію). Можливість уникнути зазначених крайнощів виявляється у стабілізації нестійкої динамічної траєкторії (виході на бажану криву) за допомогою відомого в літературі OGY-методу.

Розрахункова формула приросту керуючого параметра записується

$$\Delta n = \frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \left[ r + \left( r^2 + \frac{4u'(c^*)}{u''(c^*)} sf''(k^*) \right)^{1/2} \right]}{\left[ r + \left( r^2 + \frac{4u'(c^*)}{u''(c^*)} sf''(k^*) \right)^{1/2} \right] \Delta t k^*} \times \left[ \left( r + \left( r^2 + \frac{4u'(c^*)}{u''(c^*)} sf''(k^*) \right)^{1/2} \right) \Delta k_i - \Delta c_i \right],$$

оскільки матриця лінеаризації для випадку, що розглядається (запізнювання вводу фондів), звалась до відомого виразу. Ефект впливу запізнення позначається появою множника  $s$  в останній формулі.

Процес стабілізації нестійкої траєкторії виявляється у такому: для початкових значень  $k_0, c_0, n_0$ , з рівняння (5.12) знаходимо  $k_0^*$  і

$c_0^*$ , далі з (5.11) вираховуємо величини  $k_1$  і  $c_1$ . За допомогою останньої формули матимемо поправку  $\Delta n_1$  і нове значення  $n_1 = n_0 + \Delta n_1$  керуючого параметра  $n$ . У такий спосіб здійснюється ітераційний процес в припущенні, що з плином часу числові значення  $k_i$ ,  $c_i$ ,  $n_i$ , а також  $k_0^*$  і  $c_0^*$  стабілізуються на фазовій площині у координатах  $(k, c)$ .

Отже, у підрозділі на прикладі моделі Солоу з урахуванням інвестиційного лагу, що характерно для економіки, розглянута можливість контролювати утворення хаотичних розв'язків (щоразу досягати потрібної траєкторії).

---

### 5.3. Моделювання оптимального розподілу капіталовкладень

---

Встановлення оптимальних пропорцій між споживанням і накопиченням продовжує залишатись актуальним [5, 51, 89, 91, 100], оскільки безпосередньо стосується або зростання добробуту членів суспільства (інтегральна оцінка), або сприяє поглибленню соціальної напруженості. Гострота цієї проблеми особливо відчувається в державах пострадянського простору з відомих причин.

Згадуваним роботам властиве спільне:

1. Питоме (подушне) споживання виступає незалежною змінною функцією  $I(c)$  корисності споживання, яка змінюється з часом.

2. Максимізація інтеграла  $\int_0^T I(c) e^{-rt} dt$  добробуту суспільства (підінтегральна функція  $I(c)$  дисконтується при параметрі  $r$ ) здійснюється за умов, якими виступає або звичайне диференціальне рівняння Солоу — основне рівняння керованого об'єкта [5, 51, 91, 100], або система двох ЗДР, що додатково враховує запізнювання введення фондів.

3. Умови пункту 2) доповнюються рівнянням швидкості  $\frac{dc}{dt}$  зміни керуючого параметра.

4. Шукана оптимальна траєкторія складається з ділянок розв'язку рівнянь для прямої і спряжених змінних, що встановлюється використанням принципу Понтрягіна.

5. OGY-метод застосовується [70] для досягнення стійкої траєкторії економічного розвитку.

Пункти 1—5 відповідають алгоритму дослідження проблеми оптимальних пропорцій споживання і накопичення, в якій здійснюється скалярне управління процесом пошуку, тобто з числа факторів впливу враховується дія одного. У кожній окремо взятій з числа цитованих праць була встановлена формула чисельних значень параметра управління, наприклад, темпу зростання трудових ресурсів [89, 90].

Аналітичні результати такого роду стали можливі унаслідок найменшої розмірності розв'язуваної задачі.

Нижче пропонується системне дослідження проблеми, що виявляється в одночасному і сукупному обліку кількох факторів впливу, що відповідає векторному управлінню процесом пошуку якнайкращих траєкторій. У такому разі зростає розмірність моделюваної задачі, чим передбачається одержання тільки числових результатів.

Узагальнена, агрегованого типу, модель дослідження оптимального зростання односекторної відкритої економіки з кінцевим горизонтом  $T$  управління і позитивною нормою  $r$  дисконтування записується:

$$\begin{aligned} & \max \int_0^T I(c) e^{-rt} dt; \\ & \dot{k} = -(\delta + n)k + a + v; \\ & c = (1 - \rho)f(k); \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$0 < c \leq c(t) \leq f(k) + a,$$

де  $k$  — питома фондоозброєність,  $\delta$  — рівень амортизації капіталу;  $n$  — темп зростання населення;  $a$  — питома величина зовнішньої допомоги;  $v$  — питома запізнювання фондів;  $\rho$  — норма накопичення;  $s$  — коефіцієнт запізнювання введення фондів;  $f(k)$  — виробнича функція. Виконуються початкова  $\kappa(0) = \kappa_0$  і гранична  $\kappa(T) = \kappa^T > 0$  умови.

Рівняння (5.13) утворюють математичну модель складеного типу, з якої випливають раніше відомі. Наприклад, при  $a = 0$  ма-

тимемо [70] модель зі скалярним управлінням пошуку стабільної траєкторії, а за відсутності зовнішньої допомоги і запізнювання введення фондів має місце задача [5, 100].

Резонно припустити, що функція корисності споживання  $I(c, a) = I(\bullet)$  залежить як від власне докладених зусиль членів суспільства, так і міжнародної допомоги, тоді ММ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^T I(\bullet) e^{-rt} dt &\rightarrow \max; \\ \dot{k} &= -(\delta + n)k + a + v; \\ \dot{v} &= -(s + \delta + n)v + sf(k) - sc, \end{aligned} \quad (5.14)$$

оскільки  $\rho f(k) = f(k) - c$ ;  $0 < c \leq c(t) \leq f(k) + a$ ,

де  $k$  і  $v$  — змінні стани, а  $\bar{u} = [a, c]^*$  — вектор управління (знак \* транспонування). Отже, матиме місце векторна задача максимізації функціонала, зміст якої полягає в такому: здійснювати таке управління, щоб досягались оптимальні траєкторії  $c^*(t)$ ,  $k^*(t)$ ,  $v^*(t)$ , за яких добробут суспільства ставав би максимальним.

Таким чином, має місце задача моделювання динамічного раціонального управління системою господарювання, за якого фазовими координатами виступають змінні стани  $k$  і  $v$ , величинами, що управляють, — змінні  $c$  і  $a$ , цільовий функціонал — інтегральна оцінка добробуту досягає максимального значення.

Згідно з принципом Понтрягіна будується функція Гамільтона, яка в нашому випадку записується

$$H(\bullet) = \Psi_0 f_0 + \Psi_1 f_1 + \Psi_2 f_2,$$

де  $\Psi_0 = 1$ ,  $f_0 = e^{-rt} I(\bullet)$ ;  $\Psi_1 = e^{-rt} q_1$ ,  $f_1 = -(\delta + n)k + a + v$ ;  $\Psi_2 = e^{-rt} q_2$ ,  $f_2 = -(s + \delta + n)v + sf(k) - sc$ .

Змінні  $q_1, q_2$  спряжені до змінних стану, множник  $e^{-rt}$  приводить цінності до теперішнього часу.

Відповідно до принципу максимуму оптимальне управління максимізує функцію Гамільтона, тобто

$$\frac{\partial H(\bullet)}{\partial c} = 0 \text{ і } \frac{\partial H(\bullet)}{\partial a} = 0 \text{ або}$$

$$\frac{\partial I(\bullet)}{\partial c} - s q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{s} \cdot I'_c(\bullet) \quad (5.15a)$$

$$i \quad \frac{\partial I(\bullet)}{\partial a} = q_1 + I'_a(\bullet) = 0 \Rightarrow q_1 = -I'_a(\bullet). \quad (5.15б)$$

Таким чином, тіньові вартості власних капіталовкладень і міжнародної допомоги уздовж оптимальної траєкторії дорівнюють частковим граничним корисностям.

Для спряжених змінних визначається система ЗДР за теорією оптимального управління

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (i = 1, 2).$$

Відповідно до (5.4) у нашому випадку матимемо конкретну систему рівнянь

$$\frac{dq_1}{dt} = (2\delta + n)q_1 - s f'(k)q_2 \quad (5.16a)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = -q_1 + (s + 2\delta + n)q_2, \quad (5.16б)$$

опускаючи очевидні викладення.

Диференціюванням (5.15a) встановлюється вираз

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{1}{s} I''_{cc}(\bullet) \frac{dc}{dt},$$

підстановкою якого в (5.16б) одержуємо після очевидних перетворень рівняння швидкості зміни питомого споживання

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{\sigma(c)} \cdot c, \quad (5.17)$$

де позначено

$$\sigma(c) = \frac{I''_{cc}(\bullet) \cdot c}{s I'_a(\bullet) + (s + 2\delta + n) I'_c(\bullet)}.$$

Останній вираз є частковою еластичністю граничної корисності, що характеризує кривизну функції корисності.

Діючи аналогічно, на підставі (5.15б) і (5.16а) встановлюється рівняння

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\tilde{\sigma}(a)} \cdot a \quad (5.18)$$

швидкості зміни міжнародної допомоги (темп її здійснення), де прийнято позначення  $\tilde{\sigma}(a) = \frac{I''_{aa}(\bullet)a}{(2\delta + n)I'_a(\bullet) - f'(k) \cdot I'_c(\bullet)}$ , що відповідає частковій еластичності функції корисності.

Рівняння (5.14), (5.17) і (5.18) з початковою умовою  $k(0) = k_0$  визначають траєкторії, серед яких перебувають оптимальні — такі, що складаються з розв'язків ЗДР для первинних і подвійних змінних.

**Зауваження 1.** Нижні індекси виразів  $I'_a(\bullet)$  і  $I''_{aa}(\bullet)$  свідчать про відповідного порядку похідні функції  $I(\bullet) = I(c, a)$  корисності споживання.

Застосування відомого OGY-методу в нашому випадку полягає у такому. Рівняння (5.14), (5.17) і (5.18) утворюють замкнену систему автономних достатньо гладких ЗДР

$$\dot{z} = F(z, \mu), \quad (5.19)$$

де  $z$  — вектор фазового простору;  $\mu$  — вектор управління;  $F(\bullet)$  — вектор-функція правої частини.

Інтегруванням (5.19) за допомогою найпростішої явної схеми  $z_{n+1} = z_n + hF_n$  Ейлера, де  $h$  — крок переходу від поточної стадії  $n$  до наступної  $(n+1)$  і  $F_n = F(z_n, \mu_n)$ , одержуємо дискретну систему керуючих дій у вигляді зворотного зв'язку.

$$z_{n+1} = P(z_n, \mu_n), \quad (5.20)$$

тобто матиме місце ітераційний процес, в загальному випадку нелінійний. Вище передбачається  $z_n = z(t_n)$  і  $\mu_n$  є значення вектора керуючих параметрів на проміжку  $[t_n, t_{n+1}]$ , компоненти ве-



личини  $\mu_n$  становлять темп  $n_i$  зростання трудових ресурсів і величина  $a_i$  міжнародної допомоги в момент часу  $t_i \in [t_n, t_{n+1}]$ .

**Зауваження 2.** Точність подання неперервної задачі (5.19) дискретною залежить як від величини кроку  $h$  числового інтегрування, так і формули дискретизації (для схеми Ейлера похибка апроксимації  $O(h^2)$ ). Величина  $h$  також виступає параметром, що впливає на стійкість і збіжність числових розв'язків.

**Зауваження 3.** Проблеми переходу від неперервної задачі (5.19) до її дискретного варіанта (5.20) значною мірою долаються, використовуючи неявні формули числового інтегрування (наприклад, формула Ейлера  $z_{n+1} = z_n + hF_{n+1}$ ) і змінну тривалість кроку  $h_n$  інтеграції.

Лінеаризацією відображення (5.20) Пуанкаре в околі  $(z_0, \mu^*)$  де  $z_0$  — нерухома точка, а  $\mu^*$  відповідає  $z_0 = z^*(0, \mu^*)$ , отримуємо лінійну систему

$$y_{n+1} = Ay_n + BU_n, \quad (5.21)$$

де  $A = \frac{\partial P(z_0, \mu^*)}{\partial z}$  і  $B = \frac{\partial P(z_0, \mu^*)}{\partial \mu}$  матриці Якобі;  $y_n = z_n - z_0$ ,  $U_n = \mu_n - \mu^*$ .

Стабілізуюче управління для лінійного зворотного зв'язку (5.21) досягається таким вибором стану управління  $U_n = -Cy_n$  і матриці  $C$ , щоб послідовні наближення відображали шукану стійку траєкторію.

$$y_{n+1} = (A - BC)y_n. \quad (5.22)$$

Це стає можливим за умови, що спектр власних значень матриці  $(A - BC)$  розташований у крузі з радіусом 1.

**Зауваження 4.** Матриці  $A$  і  $B$  формуються чисельно. Для застосовності описаного алгоритму необхідно також знати власні значення і власні вектори, чим вказуються стійка і нестійка многостатність нерухомої точки відображення Пуанкаре. Тоді траєкторія коригується на кожній ітерації у бік стійкої многостатності нерухомої точки.

Велика проблема — вибір початкової точки стабілізаційного процесу.

Таким чином, стабілізація нерухомої точки відображення Пуанкаре (5.20) і граничного циклу системи ЗДР (5.19) досягається в ньому малими діями, що управляють в дискретні моменти часу.

Отже, для запропонованої узагальненої моделі неокласичної теорії оптимального економічного розвитку, що враховує системно темп використання робочої сили, рівень міжнародної допомоги, запізнювання введення фондів, розглянуто стабілізацію траєкторії якнайкращого зростання за допомогою OGY-методу — процесу послідовних наближень (простої ітерації). У прикладній економіці у ході моделювання якнайкращих пропорцій накопичення і споживання досить обмежитися такими характеристиками, що найбільш впливають на економічне зростання, — темпом зміни трудових ресурсів, запізнюванням введення капіталу і рівнем міжнародної допомоги.

---

## Висновки

---

Висвітлено ключові моменти практичної оптимізації макроекономічної динаміки. На прикладі двох елементарних проблем макроекономіки (задачі досягнення найкращої траєкторії економічного зростання та оптимального розподілу капіталовкладень) показано застосування алгоритму оптимізації динамічної системи.

Більш загально, викладене в розд. 5 окреслює шлях оптимізації процесів нелінійної економічної динаміки, котрі описуються скупченою (точковою) ММ. Але по-справжньому пошук оптимальних динамічних траєкторій тільки починається, вбачаючи практичне розв'язання проблем реальної економіки. На цьому шляху належить вирішити щонайменше два принципові завдання: а) донести широкому економічному загалу низку результатів математичної теорії динамічних систем, тобто їх алгоритмізувати, подати доступно; б) розробити відповідне програмне забезпечення, яке має місце у випадку лінійного програмування для задач економіки.

## Розділ 6

---

### ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ РИЗИКУ В СИСТЕМІ ЕКОНОМІЧНОЇ БЕЗПЕКИ

---

#### 6.1. Аналіз ризику та безпеки економічних систем

---

В умовах ринку між суб'єктами, суб'єктами та об'єктами господарювання існує низка аспектів, зокрема:

- множинність, що додає стохастичності, не відмінюючи детермінований характер відносин;
- багатоваріантність матеріальних взаємин, які відбуваються неоднаково в подібних умовах;
- ієрархічність структури взаємин і багаторівневі зв'язки (прямі та зворотні);
- одночасне володіння інформацією;
- асиметрична інформація — ситуація, коли одні учасники ринку володіють важливими даними, а інші — ні.

Зазначене не сприяє однозначній поведінці суб'єкта господарювання навіть тоді, коли мета і шляхи її досягнення цілком зрозумілі, адже складові економічного життя не завжди піддаються оцінюванню. Проте приймати рішення за незрозумілої цілком обстановки треба, доводиться ризикувати — ухвалюючи рішення в умовах неповної інформації, що завжди матиме наслідки.

Щоб приймати належні (своєчасні, адекватні) управлінські рішення в економіці, щоб бути успішними в ринкових, стрімко змінюваних умовах, треба навчитися передбачати поведінку об'єктів господарювання — співучасників (або гравців) ринку. З'ясувалося, що ортодоксальних підходів прогнозування, що ґрунтуються на теорії рівноважного економічного стану, вже замало. Вони виявилися неспроможними передбачати хід подій, сприяти досягненню бажаного.

Особливість новітньої економіки та її ризикології полягає в такому:

- значне число різновидів економічного ризику, незнаних раніше;
- системний характер економічної ризикології, зумовлений різними за природою елементами та численними взаємозв'язками (прямими і зворотними, з полярними знаками) і взаємовпливами між ними та складовими реальної економіки;

- обмежений час для прийняття виважених рішень;
- варіативність ключових змінних економічного процесу чи явища (так званих *параметрів порядку*);
- незворотність перебігу економічних подій, що позбавляє можливості повернутися до точки зміни траєкторії еволюції економіки;
- поява так званих *синергетичних ризиків* і вікон вразливості, з огляду на біфуркаційну діаграму.

Також зовнішнє оточення сучасної економіки апіорі є нелінійним, нестійким і нерівноважним. Математичні моделі (ММ), статичні чи динамічні, в багатьох випадках належать до класу некоректних задач, яким притаманне таке: надзвичайна чутливість до варіації початкових умов; крім циклічних процесів за певних умов проявляється детермінований хаос.

Зазначене вище пояснює невідповідність наявних усталених концептуальних підходів до вивчення економічної еволюції з метою ефективного управління економічними системами в період стрімких глобальних збурень. Нагальність адекватного оцінювання рівня вразливості суспільства (суб'єкта господарювання) — економічної безпеки — вимагає розроблення нових підходів до вивчення динаміки економічного ризику, підґрунтям яких мають стати методи нелінійної динамік і теорії катастроф.

Існують об'єктивні та суб'єктивні причини невизначеності і породженого цим ризику — незнання достовірного, відсутність однозначного. Все це засвідчує потребу в наближеному оцінюванні всього того, що складає економічний ризик функціонування економічної системи.

Як один із кількісних підходів до розв'язання проблеми прогнозування розвитку економічних систем пропонується скористатися відомою в математиці нерівністю С. А. Чаплигіна, суть якої, на прикладі задачі Коші для одного рівняння, полягає в побудові верхньої і нижньої оцінок меж для початкової (вихідної) задачі, котрі охоплюють шуканий розв'язок, але кожна з них простіше інтерпретується, ніж вихідне рівняння. По-іншому, шуканий розв'язок охоплюється — береться у так звану *вилку* [89]. Такий спосіб відомий в економетриці під час вивчення явища гетероскедастичності, також у гідродинаміці — трубка току, та в комп'ютерному моделюванні режимів функціонування нелінійних електричних кіл [102].

Різновидом зазначеного вище слід вважати стрес-тестування, під яким розуміють подання фінансового стану підприємства або

економіки в цілому за певного набору особливих умов, які можуть бути спричинені кількома факторами ризику протягом декількох періодів часу [11, с. 4]. Даний метод оцінювання динаміки невизначеності націлений на встановлення радикальних (критичних) станів об'єкта дослідження, які можуть відбутися в дійсності. Однак не всі стрес-стани є реальними. Тому необхідною умовою проведення даної процедури є з'ясування множини всіх сценаріїв об'єкта дослідження. Сценарій — це можливий майбутній стан системи, що має відповідну тривалість у часі [11, с. 3]. Після відсіювання всіх стрес-станів, що не входять у множину допустимих сценаріїв, зазвичай обираються найбільш оптимістичний та песимістичний стани.

Стрес-тестування також активно застосовується для управління ризиком при фінансовому моделюванні. Важливим фактором, яким не можна знехтувати, є рівень ризику моделі — це потенціал для несприятливих наслідків у результаті рішень, прийнятих на основі помилок, допущених в економіко-математичних моделях [6, с. 2]. Помилки моделі можуть спричинити фінансові втрати, зумовити порушення стратегії розвитку, навіть поширення паніки на фондових ринках. Аналогічно, у результаті значних агрегувань та узагальнень моделям економічного зростання властива суттєва похибка, яка поглиблюється з плином часу. Особливо вираженою дана проблема є для всіх лінійних моделей, які придатні лише для короткострокового прогнозу. Описане вище доцільно графічно звести на рис. 6.1.1.

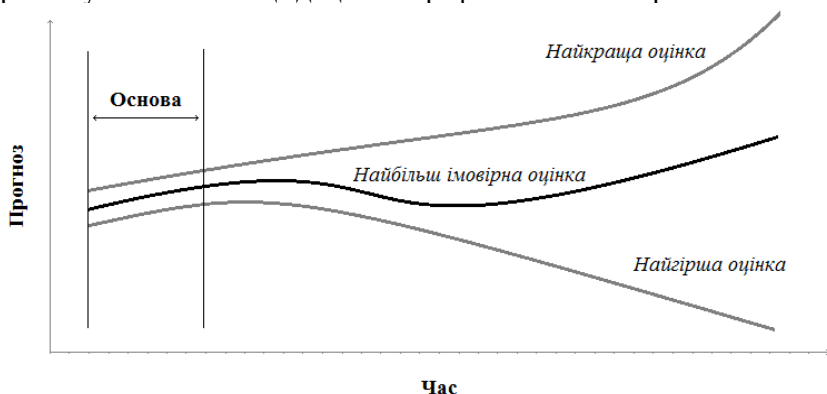


Рис. 6.1.1. Графічне узагальнення компонентів стрес-тестування під час прогнозу об'єкта дослідження

Джерело: складено автором.

Кожна крива на рис. 6.1.1 несе окреме смислове навантаження в контексті оцінки ризику економіко-математичної моделі. У табл. 6.1.1 наведено основні поняття стрес-тестування.

Таблиця 6.1.1

**ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТРЕС-ТЕСТУВАННЯ**

|                          |                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Найкраща оцінка          | Стан найвищої динамічної траєкторії, яка об'єктивно можлива за впливу заздалегідь визначених факторів                                                                                            |
| Найгірша оцінка          | Такий об'єктивно можливий стан, що характеризується найнижчими темпами приросту прогнозованої величини                                                                                           |
| Найбільш імовірна оцінка | Оцінка стану, який вважається найбільш імовірним. Зазвичай у даній ролі виступають числові розрахунки економіко-математичної моделі                                                              |
| Основа                   | Визначений термін, упродовж якого реальні значення спостережень не мають виходити за межі усталених оцінок. Як правило, основа — це такий проміжок часу, на який налаштовується стрес-тестування |

Джерело: [1]

Разом з тим належить визначитися зі способом комп'ютерного оцінювання поведінки істинного розв'язку та числовою мірою ризику.

## 6.2. Числове (комп'ютерне) оцінювання траєкторії економічної еволюції та ризиків

Взаємозв'язок між ризиком та інерційністю економічної системи формалізується [231, 37] алгебраїчним виразом:

$$Risk(C^i) = \frac{(C_{\max}^i - C_{\min}^i)}{(C_{\max}^i + C_{\min}^i)/2} \cdot 100\%, \quad (6.2.1)$$

де  $C^i$  — випадкова величина, реалізація якої відображає значення ціни акції  $i$ -го виду протягом проміжку часу  $[t_0; T]$ ;  $C_{\max}^i$  і  $C_{\min}^i$  — відповідно максимальне й мінімальне значення ціни акції  $i$ -го виду серед низки її реалізацій, отриманих упродовж досліджуваного проміжку часу [9, 137].

Внаслідок нескладних (майже очевидних) алгебраїчних перетворень формула (6.2.1) набуває вигляду:

$$Risk(C^i) = 2 - \frac{4}{C_{\max}^i / C_{\min}^i + 1} \Leftrightarrow \left( Risk(C^i) = \frac{C_{\max}^i + C_{\min}^i - 2 \cdot C_{\min}^i}{(C_{\max}^i + C_{\min}^i) / 2} \right). \quad (6.2.2)$$

Коли має місце  $C_{\max}^i = C_{\min}^i$ , то  $Risk(C^i) = 0$ , що цілком природньо; можна стверджувати, що відсутній суттєвий ризик для усталеного процесу розвитку економічного об'єкта. Для  $(C_{\max}^i / C_{\min}^i) = 3$  маємо  $Risk(C^i) = 1$ . Якщо величина  $C_{\max}^i$  зростає, то відношення  $(C_{\max}^i / C_{\min}^i)$  і знаменник також підвищуються, а дріб зменшується, тобто виконується  $Risk(C^i) \rightarrow 2$ . Таким чином, маємо числовий критерій настання кризи для розвитку економічної системи. Дійсно, інтерпретуючи відношення  $(C_{\max}^i / C_{\min}^i)$  як ступінь поляризації суспільства (поділ населення на багатих і бідних, формула (6.2.2) вказує на зародження і розвиток стану соціальної кризи.

Для двох чисел  $a > 0$  і  $b > 0$  відповідно має місце середнє:

- арифметичне  $m_a = (a + b) / 2$ ;
- геометричне  $m_g = \sqrt{a \cdot b}$ ;
- гармонійне  $m_h = 2 \cdot a \cdot b / (a + b)$ ;
- квадратичне  $m_k = + \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ .

Але  $a \cdot b = m_g^2$ , і тому справедлива рівність  $m_k = + \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + m_g^2}$ ,

звідки матимемо  $R = \sqrt{2 \cdot (m_k^2 - m_g^2)}$ .

З урахуванням структури формули (6.2.1) запишемо числову міру ризику:

$$Risk = \frac{\sqrt{2 \cdot (m_k^2 - m_g^2)}}{m_a} \Leftrightarrow Risk = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{m_k^2}{m_a^2} - \frac{m_g^2}{m_a^2}}. \quad (6.2.3)$$

З огляду на ланцюг нерівностей  $m_k \geq m_a \geq m_g \geq m_h$  нехтуємо виразом  $(m_g/m_a)^2$ , оскільки він менше за 1. Тоді матимемо наближену формулу

$$Risk \leq \sqrt{2} \cdot \frac{m_k}{m_a} \quad (6.2.4)$$

для оцінювання згори числової міри ризику.

У табл. 6.2.1 подано результати моделювання міри ризику еволюції української економіки, причому величини  $a_1, a_2, \dots, a_n$  відповідають обсягу ВВП України для поточного року.

Таблиця 6.2.1

МІРА РИЗИКУ ЕВОЛЮЦІЇ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ за 1991–2013 рр.

| Роки          | Ризик за формулою |         |
|---------------|-------------------|---------|
|               | (6.2.3)           | (6.2.4) |
| 1991–2013 рр. | 0,463             | 1,452   |
| 1991–2008 рр. | 0,508             | 1,461   |
| 2009–2013 рр. | 0,088             | 1,416   |

Джерело: [213]

Слушно зауважити таке. Якщо числові результати міри ризику (точкові оцінки) подати у вигляді ланцюгового (неперервного) дробу [25], то матимемо інтервальне оцінювання, що більш прийнятне з огляду на точність економічної інформації.

---

### 6.3. Числова міра поведінки розв'язку деяких моделей економічної динаміки

---

У монографії [195] зазначається, що ортодоксальні динамічні моделі економіки не враховують ризик. Певним чином цей недолік можна усунути, скориставшись викладеним.



### 6.3.1. Класичні динамічні моделі економіки

Надалі розглядається сукупне застосування пропозиції п. 6.1 і формули числової міри п. 6.2.

#### 6.3.1.1. Оцінювання економічного ризику на підґрунті моделі Харрода — Домара

Для моделювання траєкторії ризику за допомогою лінійних моделей звернемося до класичного розв'язку моделі Харрода — Домара:

$$I(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dY(t)}{dt}, \quad (6.3.1)$$

де  $\alpha$  — гранична продуктивність капіталу;  $Y$  — величина національного доходу.

З рівності (6.3.1) видно, що у розглядуваній моделі єдиним фактором, що пов'язує інтенсивність економічної динаміки з обсягом інвестицій, виступає гранична продуктивність капіталу. Така «механічна зв'язка» ігнорує суб'єктивний бік економічних відносин, нелінійних причинно-наслідкових зв'язків та ролі очікувань у суспільстві. З позицій математичних залежностей даний прояв суб'єктивності в економіці може або послабити, або посилити вплив інвестицій на динаміку національного доходу. Наприклад, зростання позитивних очікувань в економіці може зумовити ефект мультиплікатора ефективності для кожної грошової одиниці інвестицій; в іншому разі це спричинить паніку, поширюватиме дезінформацію та викличе неефективність цільових інвестицій може погасити механічну віддачу від капіталу. З метою врахування приведеного недоліку класичної моделі Харрода — Домара була утворена її фрактальна модифікація:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha \cdot Y^{\left(1+\frac{1}{k}\right)}(t), \quad (6.3.2)$$

де  $k \in R$  — скаляр, що вибирається з множини дійсних чисел, виключаючи значення  $k \neq 0, \pm 1$ .

У процесі виконання останньої умови вираз  $\left(1 + \frac{1}{k}\right)$  ніколи не може набувати значення 1, цим самим виключаючи нейтральність постійного та невідворотного впливу суб'єктивного боку господарських відносин. Виходячи з властивостей фрактальної модифікації рівняння Харрода — Домара (6.3.2), варіація скаляра  $k$  дозволяє охопити класичний розв'язок (6.3.1). Тоді набуває актуальності така подвійна нерівність:

$$\alpha \cdot Y^{\left(1+\frac{1}{k_1}\right)}(t) \leq \alpha \cdot Y(t) \leq \alpha \cdot Y^{\left(1+\frac{1}{k_2}\right)}(t), \quad (6.3.3)$$

де  $\alpha \cdot Y^{\left(1+\frac{1}{k_1}\right)}(t) = \frac{dY(t)}{dt}$  — функція опису найгіршої оцінки (песимістичного прогнозу) динаміки національного доходу  $Y(t)$  (далі  $Y_{k < 0}(t)$ );  $\alpha \cdot Y^{\left(1+\frac{1}{k_2}\right)}(t) = \frac{dY(t)}{dt}$  — функція найкращої оцінки динаміки  $Y(t)$  (далі  $Y_{k > 0}(t)$ ); скаляри  $k_1 < 0$  та  $k_2 > 0$ .

З позицій економічного змісту фрактальної модифікації (6.3.2) межі подвійної нерівності (6.3.3) виступають оцінками динамічних траєкторій оптимістичних та песимістичних очікувань у суспільстві. Систематичне тяжіння динаміки національного продукту до однієї з меж коридору (6.3.3) є сигналом про зміну лінійного тренду, а отже, породження невизначеності. Будь-яка зміна в очікуваннях зростання доходу викликає ризик, адже всі економічні агенти опиняються у новому (зміненому) середовищі. Ступінь відхилення від найбільш ймовірного результату  $\alpha \cdot Y(t)$  та одночасного наближення до функцій очікувань у суспільстві слід розглядати як міру динаміки загрози зміни економічного тренду.

З метою математичного втілення даної логіки звернемося до популярного в економічній літературі рівняння ризику (6.2.1). Застосування даної формули до нерівності (6.3.3) полягає у пошуку найбільшої відносної величини відхилення на проміжку періоду  $T$ .

Оскільки відстань між прогнозованим (поточним) трендом і межами негативних та позитивних оцінок стрес-тесту визначається як  $Y(t) - Y_{k<0}(t)$  та  $Y_{k>0}(t) - Y(t)$  відповідно. Замінімо чисельник виразу (6.2.1) на різницю відстаней до стрес-оцінок (6.3.3). Тоді формула ризику дійсна на всіх значеннях моментів часу  $t$  замість періодів  $T$ , де  $T \in \{t\}$ . Враховуючи те що неможливо визначити, яка відстань буде арифметично більшою, а міра ризику не може бути менша за 0, чисельник (6.2.1) набуває абсолютного вигляду:

$$| [Y(t) - Y_{k<0}(t)] - [Y_{k>0}(t) - Y(t)] |, \quad (6.3.4)$$

де  $Y(t)$  — фактична або розрахункова величина національного доходу.

Подаючи знаменник формули ризику рішенням (6.3.1) та беручи до уваги (6.3.4), після арифметичних перетворень отримуємо формулу динаміки ризику:

$$r(t) = \left| \frac{Y_{k>0}(t) + Y_{k<0}(t)}{Y(t)} - 2 \right| \times 100\%, \quad (6.3.5)$$

де  $r(t)$  — міра загрози зміни тренду.

Формула (6.3.5) виражає міру загрози зміни траєкторії зростання національного доходу на величину  $r(t)\%$  від  $Y(t)$  у момент часу  $t+1$ . Як вже було зазначено, зміна тренду може вплинути на ділову активність, впливаючи на появу нових змін у майбутньому. Тому частку  $r(t)\%$  варто також розглядати як міру загрози настання економічної кризи, тобто потреба системи національного господарства адаптуватися до нового середовища.

Таким чином, якщо фактичні значення доходу  $Y(t)$  рівновіддалені від меж коридору (6.3.3), загроза настання економічної кризи мінімальна; із наближенням національного доходу до розрахункових оцінок  $Y_{k>0}(t)$  або  $Y_{k<0}(t)$  система набуває рис нестійкості з позиції сталості прогнозованого економічного тренду. Зрозуміло, що у разі зміни тренду будь-яка лінійна економіко-математична модель втрачає здатність до точного економічного

прогнозу. Таким чином, вираз (6.3.5) варто розглядати не лише як інструмент оцінювання динаміки ризику макроекономічної системи, а також і динаміки точності економіко-математичної моделі. Для цього в знаменнику виразу (6.3.5) необхідно замінити реальні значення національного доходу на розрахункові за класичним розв'язком моделі (6.3.1).

Отже, розроблений на основі підходу стрес-тестування механізм визначення динаміки ризику для складних економічних систем є унікальним та новим способом опису та аналізу мінливості економічної системи. Його функціональність передбачає не лише оцінки траєкторії ризику економічної системи, але й визначення рівня точності моделі під час економічного прогнозу.

#### *6.3.1.2. Оцінювання ризику на підґрунті неокласичного рівняння Солоу*

Лінійна парадигма моделювання економічної динаміки, як було з'ясовано вище в даному розділі, є універсальним засобом вивчення малодосліджених аспектів об'єкта моделювання. Такими є питання математичного відтворення еволюційного розвитку складних господарських систем та динамічної траєкторії міри їх невизначеності. За природою лінійні економіко-математичні інструменти є неадекватними для опису низки характеристик економічної системи.

Однією з відомих моделей нелінійного динамічного математичного інструментарію є неокласична модель економічного зростання Роберта Солоу. Неокласичні моделі економічного зростання не містять недоліки таких кейнсіанських моделей, як лінійна модель Харрода — Домара, і точніше описують особливості макроекономічних процесів. Нестабільність динамічної рівноваги є більшою мірою наслідком відсутності взаємозамінності факторів виробництва. Перевагою моделі Р. Солоу є розмежування факторів виробництва і поетапне дослідження впливу кожного з них на процес довгострокового зростання національного доходу країни. [211, с. 51].

Саме з аналізу моделі Харрода — Домара розпочав дослідження економічного зростання Р. Солоу в праці «До питання про теорію економічного зростання» (1956) [10], в якій заклали основи

власного підходу до вирішення проблеми. У свою модель економічного зростання Р.Солоу включив тільки два із трьох можливих джерел зростання — працю і капітал. Автор також вперше розглянув технічний прогрес не тільки як автономний чинник, що зумовлює зростання ефективності виробництва, але й зміни, які впливають на виробничі функції. У відповідності ж до принципів неокласичної теорії, пропорції між капіталом і працею повинні бути змінними. Саме в цьому полягає неокласичний характер теорії зростання Р.Солоу [47, с. 153–154].

Порівняно з кейнсіанським рівнянням Харрода — Домара, ряд переваг моделі економічного зростання Солоу притаманне наступне:

- ураховується динамічний баланс заощаджень та інвестицій;
- неокласична концепція сукупної пропозиції об'єднана з кейнсіанським сукупним попитом;
- темп зростання народонаселення та технологічного прогресу є також чинниками зростання національного продукту;
- застосовується для пояснення еволюції економік країн, що розвиваються.

В основу моделі Солоу покладено неокласичну виробничу функцію з поняттям ефективної робочої сили  $AL$ , яка умовно записується так:

$$Y = f(K, AL). \quad (6.3.6)$$

Враховуючи сталу віддачу на капітал, виробнича функція (3.3.6) набуває форми:

$$y = f(k), \quad (6.3.7)$$

де  $y = \frac{Y}{L}$  — обсяг виробництва на одиницю праці;  $k = \frac{K}{L}$  — капіталозабезпеченість.

Відомо, що Робертом Солоу було використано виробничу функцію Кобба — Дугласа. Враховуючи форму запису (6.3.7), значення виробництва на одиницю праці знаходимо так [132, с. 15]:

$$y = Ak^{\alpha}, \quad (6.3.8)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт еластичності за капіталом.

Оскільки у моделі Солоу забезпечується рівність  $I = S = sY$ , а національний дохід є сумою інвестицій та споживання  $Y = I + C$ , то:

$$C = (1 - s)Y, \quad (6.3.9)$$

де частка  $0 < s < 1$  — норма заощаджень.

Тоді динаміка зростання капіталу буде становити:

$$\dot{K} = sY - \delta K, \quad (6.3.10)$$

де  $\delta$  — норма амортизації основного капіталу  $K$ .

Динаміка убутання основних засобів  $K$  також залежить від темпів зростання населення та технологічного прогресу. Тоді зростання капіталозабезпеченості становить:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{(AL)^2} [A\dot{L} + L\dot{A}] = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} \quad (6.3.11)$$

Нехай  $n = \dot{L}/L$  — темп приросту населення,  $g = \dot{A}/A$  — темп зростання НТП; інтенсивна змінна капіталозабезпеченості  $k$  залежна від моменту часу  $t$ .

Тоді, враховуючи, що  $k = \frac{K}{AL}$ ,  $y = \frac{Y}{AL}$  та виробничу функцію (6.3.8), здійснимо заміну виразу (6.2.32) [10, с. 69]:

$$\dot{k}(t) = sA \cdot k^\alpha(t) - (n + g + \delta)k(t). \quad (6.3.12)$$

Рівняння (6.3.12) є класичною динамічною нелінійною моделлю економічного зростання. У той же час вона є рівнянням Бернуллі, аналітичний розв'язок має такий вигляд:

$$k(t) = k_0 \left( (1 - M) \cdot e^{(\alpha-1)bt} + M \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (6.3.13)$$

де константа  $M = \frac{sAx_0^{\alpha-1}}{b}$ ;  $k_0 = \frac{K_0}{L_0}$  — початкова умова; коефіцієнт  $b$  сумарно враховує рівень зношеності капіталозабезпеченості, приріст населення і НТП, тобто  $b = n + g + \delta$ .

Оскільки коефіцієнт еластичності за капіталом  $\alpha$  є дійсним числом, розв'язок (6.3.13) дійсний по всій множині значень, коли зберігається умова (6.3.14).

$$(1-M) \cdot e^{(\alpha-1)bt} + M > 0 \text{ або } t > \ln\left(1 - \frac{sAx_0^{\alpha-1}}{b}\right) \cdot \frac{1}{(\alpha-1)b} \quad (6.3.14)$$

З умови (6.3.14) зрозуміло, що аналітичний розв'язок (6.3.13) не є універсальним для всіх періодів  $T = \{t_i\}$  для  $i = \overline{1, n}$ . Крім того, з (6.3.14) впливає інша обов'язкова умова  $M < 1$ . З цього варто зробити висновок, що аналітичний розв'язок (6.3.13) є доцільним лише для моделювання коротко- та середньотермінових величин, тоді як потреба в довготерміновому прогнозі може бути вирішена за допомогою розв'язку диференційного рівняння першого порядку (6.3.12) чисельними методами, наприклад Рунге — Кутта.

Відомо, що для  $t \rightarrow \infty$  за незмінних зовнішніх умов моделі  $\dot{k}(t) = 0$ . Тоді значення  $k(t)$  буде називатися рівноважним обсягу капіталу  $k^*$  і визначається за такою формулою:

$$k^* = \left(\frac{sA}{b}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (6.3.15)$$

Якщо  $k(0) < k^*$ , то значення моделі (3.3.12) будуть зростати з плином часу аж поки  $k(t) = k^*$ . Для іншої ситуації, коли поточна капіталомісткість  $k(0) > k^*$  — значення змінної  $k(t)$  буде поступово спадати до того моменту часу  $t^*$ , коли  $k(t^*) = k^*$  (рис. 6.3.1)

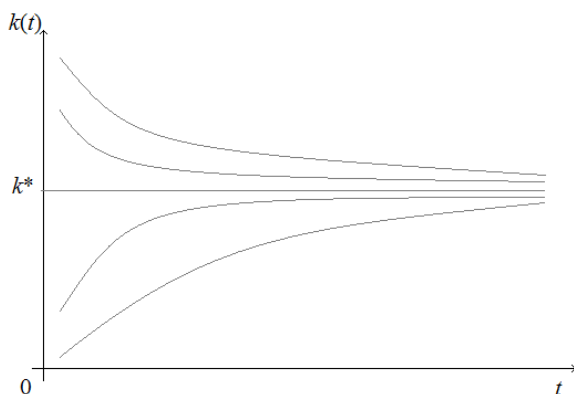


Рис. 6.3.1. Вплив рівноважного рівня капіталозабезпеченості на динаміку моделі Солоу

Властивість неокласичної моделі економічного зростання Солоу, зображена на рис. 6.3.1, виконується лише за умови, що всі її внутрішні параметри лишаються незмінними упродовж усіх моментів часу  $T = \{t_i\}$  для  $i = 1, n$ . Однак на противагу даній гіпотезі нелінійна природа економічної системи постійно та систематично мігрує від одного стаціонарного стану до іншого. Тому цілком очікуваною є та об'єктивна ситуація, коли всі параметри системи є також залежними від плину часу. Висловлене вище можна математично узагальнити виразом (6.3.16).

$$\dot{k}(t) = s(t)A(t) \cdot k^{\alpha(t)}(t) - (n(t) + g(t) + \delta(t))k(t). \quad (6.3.16)$$

Звичайно, модель (6.3.16) є надскладною для її аналізу, а отже, й використання для математичного моделювання економічної системи. Проте ідея, закладена в неї, свідчить, що для кожного моменту часу  $t$  цілком можливий окремий та неортодоксальний рівноважний обсяг капіталу  $k^*(t)$  так, що  $k^*(t) \neq k^*(t+1)$ , математичне визначення якого, однак, є неможливе.

З метою врахування природи динаміки та характеру адаптаційного розвитку економічної системи, доцільно визначити інтервальні межі коридору значень  $k(t)$  в аналітичній формі, які од-



ночасно формують область можливих (імовірних) траєкторій національного доходу, що враховує об'єктивну невизначеність рівноважного стану  $k^*$  для кожного моменту часу  $t$ .

Тоді, нижня межа коридору прогнозованих значень  $k$  отримується як добуток розв'язку моделі (6.3.12) та експоненційно спадаючий з часом  $t$  мультиплікатор. Аналогічним чином, верхня межа коридору утворюється за допомогою добутку на зростаючий експоненційний мультиплікатор. Тоді зазначене вище узагальнюються у наступну нерівність:

$$k(t) \cdot \exp(-\gamma t) \leq k(t) \leq k(t) \cdot \exp(\gamma t), \quad (6.3.17)$$

де  $0 < \gamma < 1$  — міра місткості коридору допустимих відхилень.

Подвійна нерівність (6.3.17) формує експоненційний коридор у динамічному просторі можливих динамічних траєкторій (сценаріїв) за умови відхилення  $k^*(t)$  від глобального (закладеного у економічну модель) рівноважного стану  $k^*(0)$ . При  $\gamma \rightarrow 1$  межі коридору в значній мірі відхиляються від прогнозованих значень  $k(t)$  за моделлю (6.3.12); навпаки, коли  $\gamma \rightarrow 0$ , коридор є вузьким й охоплює лише незначні відхилення траєкторії. Тому параметр  $\gamma$  відповідає за міру місткості альтернативних (неврахованих моделлю) динамічних траєкторій капіталозабезпеченості при хронічній нестійкості внутрішніх параметрів неокласичної моделі економічного розвитку Солоу. Оскільки межі коридору рівновіддалені від  $k(t)$ , налаштування параметру  $\gamma$  є індивідуальним та залежить від статистичних даних, на яких будується модель.

Повертаючись до концепції стрес-тестування, описаної в розділі 6.1, та її основних термінів (див. табл. 6.1.1), слід повторити вищезгадане з позиції оцінювання динаміки ризику, але з використанням неокласичної моделі Солоу (6.3.12). Тоді ліва частина нерівності (6.3.17) називається динамічною функцією найгіршої оцінки капіталозабезпеченості. Аналогічно права межа — це нелінійна функція найкращої оцінки  $k(t)$ . Особливості динаміки лівої та правої меж коридору характеризуються рівномірним відда-

ленням від неперервного розв'язку  $k(t)$  з плином часу. Що вужча місткість коридору, тобто  $\gamma \rightarrow 0$ , то більший ризик того, що прогнозоване значення моделі містять похибку. І, навпаки, що більше значення міри місткості коридору, то менша міра точності закладена в інтервальний прогноз. Зважаючи на це, одночасне збереження прийнятної точності та врахування можливих похибок інтервалом можливе за утримання середньої місткості коридору з нерівності (3.3.17) для  $\gamma \rightarrow \hat{\gamma}$ , де  $\hat{\gamma}$  — оптимальна міра місткості коридору допустимих відхилень. Оцінювання даного параметру відбувається на ділянці основи (див. рис. 6.3.1) у такий спосіб, щоб всі статистичні спостереження були охоплені межами коридору (6.3.17).

З метою оцінювання міри відхилення реального економічного тренду від прогнозу, трансформуємо формулу динаміки ризику (6.2.1). Модифіковане рівняння визначається як відношення різниці відстаней поточних значень величини капіталобезпе́ченості від лівої та правої меж коридору, тобто  $([\hat{k}(t) - k(t) \cdot \exp(-\gamma)] - (k(t) \cdot \exp(\gamma) - \hat{k}(t)))$ , до значення статистичного спостереження величини  $\hat{k}(t)$ . Провівши алгебраїчне спрощення та припустивши, що міра ризику є завжди додатною величиною, формула динаміки ризику на основі моделі економічного зростання Солоу набуває вигляду:

$$r(t) = \left| \frac{k(t)}{\hat{k}(t)} [\exp(-\gamma) + \exp(\gamma)] - 2 \right| \times 100\%, \quad (6.3.18)$$

де  $r(t)$  — міра загрози зміни тренду;  $\hat{k}(t)$  — вхідні статистичні величини капіталобезпе́ченості.

Зміщення спостережуваної величини  $k(t)$  до крайніх значень нерівності (6.3.17) є сигналом зміни динамічної траєкторії у результаті переходу рівноважного стану від  $k^*(0)$  до  $k^*(t)$ . Тоді значення  $r(t)\%$  вказує на усереднену частку капіталобезпе́ченості в момент часу  $t$ , на величину якої буде змінена тенденція при переході з  $k^*(0)$  до  $k^*(t)$ .

У випадку, коли не вся статистична інформація може бути відома для періоду  $T^u = \{t_j^u\}$  для  $j = 1, m$ . У такому разі формула (6.3.18) перетворюється у вираз для оцінки ризику моделі:

$$a(t) = [3 - (\exp(-\gamma t) + \exp(\gamma t))] \times 100\%, \quad (6.3.19)$$

де  $a(t)$  — ступінь детермінованості прогнозу.

З формули (6.3.19) випливає, що найвища детермінованість прогнозу (100%) досягається для  $\gamma = 0$  тобто тоді і лише тоді, коли інтервальний прогноз (6.3.17) перетворюється в точковий. Однак для всіх  $\gamma \neq 0$ , як уже зазначалося, такий прогноз буде містити значну похибку та низьку точність, адже неможливо змодельовати динаміку об'єкта дослідження з такою точністю. З плином часу  $t$ , міра детермінованості значень моделі буде знижуватися, адже місткість коридору буде експоненційно збільшуватися, тим самим зменшуючи детермінованість економічного прогнозу. Величина міри місткості коридору знижує рівень детермінованості прогнозу таким чином: при  $\gamma \rightarrow 0$  спадання точності є помірним; при  $\gamma \gg 0$  — межі коридору значно відхиляються від прогнозованих значень моделі (3.3.12), зводячи конкретику прогнозу майже до нуля ( $a(t) \rightarrow 0$ ).

#### *6.3.1.3. Оцінювання ступеня ризику розвитку вітчизняної економіки*

Оцінювання динаміки ризику економічної системи є одним з головних завдань відтворення макроекономічної динаміки, еволюції внутрішніх та зовнішніх процесів та слугує запобіганню кризовим процесам. Розроблений у розділі 6.2 інструментарій оцінювання динаміки ризику дозволяє оцінити міру загрози зміни економічного тренду на основі лінійних та нелінійних моделей економічного зростання.

Узагальненим підходом до визначення динаміки траєкторії ризику слід вважати формулу загрози тренду (6.2.1) з використанням фрактальних модифікацій моделі Харрода — Домара.

Вже досліджено, що врахування ефекту запізнення дозволяє підвищити результативність моделювання з позиції точності та відповідності економіко-математичної моделі реальному об'єкту. Тому доцільним є використання лагово-фрактальної модифікації класичного рівняння Харрода — Домара, що розглядається нижче.

В економічній теорії спростовано постулат, що інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу. Вдаючись до поняття «інвестиції», його можна визначити як тимчасову відмову економічного суб'єкта від споживання наявних у його розпорядженні ресурсів (коштів) і використання цих коштів для зростання свого добробуту в майбутньому [41]. Тому безпосередньо між моментом відмови від споживання до розпорядження коштами у майбутньому проходить певний час, визначений в економічній літературі як «інвестиційний лаг». Інвестиційний лаг охоплює період часу від початку проектування об'єкта інвестування до його введення в дію. [157, с. 60].

Отже, нехай постійна  $\tau$  — це частка одиниці періоду  $t$  (року, кварталу, місяця), яка відповідає за міру інвестиційного лагу. Тоді модель (6.3.1) набуває такого вигляду:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha Y(t - \tau) \quad (6.3.20)$$

Динамічна лінійна модель (6.3.20) — це одновимірна лагова модифікація рівняння Харрода — Домара. В економічній літературі зазвичай концепція лагу в господарській системі представлена простими авторегресійними моделями [157, с.59]. Однак, на відміну від урахування детермінованого впливу результуючих змінних за попередній період, величина лагу  $\tau$  в моделі (6.3.20) є мірою сповільнення динаміки порівняно з класичним розв'язком (6.3.1). У разі врахування лагу за умови постійного експоненційного розвитку обсяг інвестицій у момент часу  $(t - \tau)$  є меншим за

відповідний обсяг у період  $(t)$ , тому  $\frac{dY(t)}{dt}$  є меншою. Таке при-

пущення відповідає сучасному уявленню про функціонування економічної системи.

З метою розв'язку диференційного рівняння (6.3.20) розкладемо даний вираз на ряд Тейлора та проведемо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}\alpha Y(t - \tau) &\equiv Y'(t) = \alpha Y(t) - \alpha \tau Y'(t) + \dots; \\ (1 + \alpha \tau) Y'(t) &= \alpha Y(t).\end{aligned}$$

Тоді вираз (3.3.20) узагальнюється до:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \alpha \tau} Y(t). \quad (6.3.21)$$

На відміну від (6.3.20), рівняння (6.3.21) має простий аналітичний розв'язок:

$$Y(t) = Y_0 \cdot \exp\left\{\frac{\alpha t}{1 + \alpha \tau}\right\}. \quad (6.3.22)$$

Розв'язок (6.3.22) дійсний для всіх значень  $\tau$ , за винятком

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}.$$

Шляхом об'єднання фрактальної та лагової модифікацій отримуємо таке рівняння:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha \cdot Y\left(1 + \frac{1}{k}\right)_{(t-\tau)} x'_{t=a \cdot x(t)}, \quad (6.3.23)$$

Диференційне рівняння (6.3.23) є лагово-фрактальною модифікацією класичного рівняння Харрода — Домара, що забезпечує врахування запізнення та суб'єктивного (фрактального) фактору процесу інвестування. Заміною змінної  $t - \tau = T$ , (6.3.23) переписується:

$$Y'(T + \tau) = \alpha \cdot Y\left(1 + \frac{1}{k}\right)(T). \quad (6.3.24)$$

Скориставшись лінійними членами ряду Тейлора, отримаємо:

$$\begin{aligned}Y(T + \tau) &= Y(T) + \tau \cdot Y'(T) \dots; \\ Y'(T + \tau) &= Y'(T) + \tau \cdot Y''(T) \dots,\end{aligned}$$

маємо економіко-математичну модель (6.3.24), а в остаточному вигляді:

$$\tau \cdot Y''(T) + Y'(T) - \alpha \cdot Y\left(1 + \frac{1}{k}\right)(T) = 0. \quad (6.3.25)$$

Хоча лагово-фрактальна модель (6.3.25) не має аналітичного розв'язку, числовий розв'язок даного диференційного рівняння другого порядку є визначений на всій множині  $T$  та  $k$ , за винятком  $k = 0$ .

Використовуючи статистичні дані, наведені у табл. 6.3.1, встановлюємо параметри диференційного рівняння другого порядку (6.3.25):  $Y_0 = 1$ ,  $Y'_0 = 0,01$ ,  $\alpha = 0,021$  та  $\tau = 1$ . На рис. 6.3.2 нанесені нормалізовані вхідні значення ВВП України та результати моделювання для  $\tau = 1$ , а також дві інтегральні криві, які охоплюють нормалізовані спостереження статистичної вибірки національного доходу, а саме: верхня крива має параметр  $k = 0,695$ , а нижня —  $k = -1,989$ .

Таблиця 6.3.1

**ЗНАЧЕННЯ ІНФЛЯТОРА, РЕАЛЬНОГО ВВП ТА ДОХОДІВ  
ДО ДЕРЖАВНОГО БЮДЖЕТУ УКРАЇНИ за 1991–2013 рр.**

| Рік  | Інфлятор ВВП* | Реальний ВВП ** | Нормалізоване значення | Доходи до державного бюджету ** | Нормалізоване значення |
|------|---------------|-----------------|------------------------|---------------------------------|------------------------|
| 1991 | 62,003        | 1853,90         | 2,238                  | 142,61                          | 1,000                  |
| 1992 | 33,224        | 1671,15         | 2,017                  | 213,50                          | 1,497                  |
| 1993 | 0,967         | 1433,57         | 1,730                  | 375,55                          | 2,633                  |
| 1994 | 0,092         | 1104,62         | 1,333                  | 321,95                          | 2,258                  |
| 1995 | 0,018         | 970,61          | 1,172                  | 256,58                          | 1,799                  |
| 1996 | 10,85         | 873,14          | 1,054                  | 305,54                          | 2,143                  |
| 1997 | 9,16          | 846,74          | 1,022                  | 196,44                          | 1,377                  |
| 1998 | 6,37          | 830,50          | 1,002                  | 170,81                          | 1,198                  |
| 1999 | 4,87          | 828,47          | 1,000                  | 151,76                          | 1,064                  |
| 2000 | 4,30          | 877,20          | 1,059                  | 175,09                          | 1,228                  |
| 2001 | 4,24          | 958,42          | 1,157                  | 196,96                          | 1,381                  |
| 2002 | 4,47          | 1009,19         | 1,218                  | 202,86                          | 1,422                  |
| 2003 | 4,13          | 1104,62         | 1,333                  | 220,14                          | 1,544                  |
| 2004 | 3,59          | 1238,64         | 1,495                  | 234,02                          | 1,641                  |
| 2005 | 2,88          | 1273,16         | 1,537                  | 249,51                          | 1,750                  |
| 2006 | 2,51          | 1366,57         | 1,650                  | 320,24                          | 2,246                  |
| 2007 | 2,05          | 1474,19         | 1,779                  | 321,72                          | 2,256                  |

## Закінчення табл. 6.3.1

| Рік  | Інфлятор ВВП* | Реальний ВВП ** | Нормалізоване значення | Доходи до державного бюджету ** | Нормалізоване значення |
|------|---------------|-----------------|------------------------|---------------------------------|------------------------|
| 2008 | 1,59          | 1506,67         | 1,819                  | 368,59                          | 2,585                  |
| 2009 | 1,41          | 1285,34         | 1,551                  | 345,22                          | 2,421                  |
| 2010 | 1,23          | 1336,11         | 1,613                  | 314,72                          | 2,207                  |
| 2011 | 1,08          | 1407,18         | 1,699                  | 328,40                          | 2,303                  |
| 2012 | 1,00          | 1411,24         | 1,703                  | 373,96                          | 2,622                  |
| 2013 | 1,00          | 1454,93         | 1,756                  | 351,17                          | 2,462                  |

\* Для періоду 1991–1995 рр. інфлятор ВВП у купоно-карбованцях.

\*\* млрд грн у цінах 2013 р.

Джерело: розрахунок на основі [177]

Необхідно зауважити, що не всі фактичні значення з рис. 6.3.2 перебувають між двома інтегральними кривими (6.3.25) для  $k > 0$  і  $k < 0$ . Деяка статистична інформація може містити окремі екстремальні значення, випадковості та шум, включення яких до інтервалу суттєво спотворить результати. Тому в даному дослідженні це було враховано.

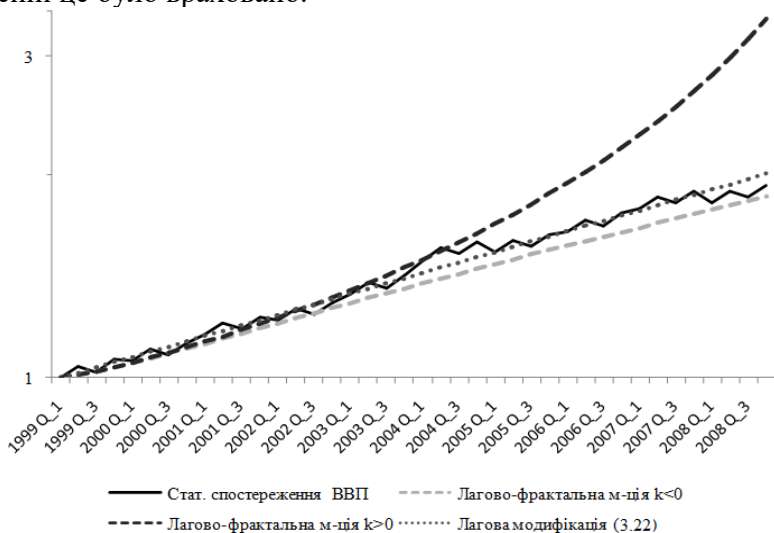


Рис. 6.3.2. Інтегральні криві результатів моделювання української економіки на основі моделі (6.3.22)

Після визначення нижньої та верхньої меж інтервалу на всій довжині фактичних спостережень, необхідної та достатньої умови для числового розрахунку міри ризику зміни тренду за формулою оцінювання ступеня ризику (6.2.1), траєкторія динаміки ризику графічно відтворена на рис. 6.3.3.

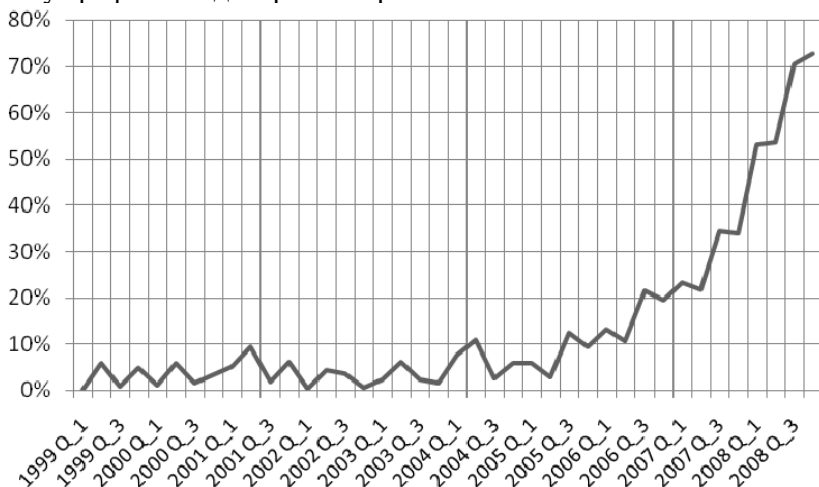


Рис. 6.3.3. Динаміка загрози економічного спаду ВВП України, 1999–2008 рр.

Джерело: розрахунок автора.

На рис. 6.3.3 показано різке зростання міри ризику з 10% для проміжку 1999–2004 рр. на 40% у середньому для 2005–2008 рр. Даний яскравий приклад поступового нагромадження загрози є наслідком заломлення економічної динаміки в 2004 р. Як результат, протягом 2004–2008 рр. ризик експоненційно нагромаджувався і становив 50 зі 100% можливих перед настанням економічної кризи 2008–2009 рр. в Україні.

Можливості прогнозування економічної динаміки лінійною моделлю (6.3.24) обмежені лише ділянками з однорідними траєкторіями. Натомість застосування нелінійних інструментів моделювання дозволяє здійснити більш точну ідентифікацію ризиків настання кризових явищ. Для цієї мети доцільно вдатися до рівняння Солоу (6.3.12) для розробленої подвійної нерівності (6.3.17) для визначення рівня загрози настання кризових явищ



для періоду 2000–2016 рр. Вхідною інформацією служать статистичні спостереження, наведені у табл. 6.3.2.

Таблиця 6.3.2

**ДИНАМІКА ПРАЦЕЗДАТНОГО НАСЕЛЕННЯ ТА ВАРТІСТЬ  
ОСНОВНИХ ЗАСОБІВ УКРАЇНИ В ПЕРІОД 2000–2013 рр.**

| Рік  | L, тис. чол. | K, млн грн* |
|------|--------------|-------------|
| 2000 | 33310        | 673291,6    |
| 2001 | 34441        | 676693,9    |
| 2002 | 34314        | 678555,1    |
| 2003 | 34187        | 668242,6    |
| 2004 | 34060        | 645586,4    |
| 2005 | 33933        | 579952,2    |
| 2006 | 33806        | 621045,9    |
| 2007 | 33679        | 660513,5    |
| 2008 | 33498        | 675070,3    |
| 2009 | 33346        | 575902,3    |
| 2010 | 33216        | 598647,2    |
| 2011 | 33100        | 630490,2    |
| 2012 | 33013        | 632309,8    |
| 2013 | 32940        | 651886,5    |

\* У цінах 1999 року.

Джерело: розрахунки на основі інформації [212]

Значення параметрів моделі (6.3.12) визначалися у такий спосіб. Виходячи з рівності (6.3.8), було прийнято таку гіпотезу:  $A=1$ . Відомо, що частка заощаджень в українській економіці в середньому становить 25% ( $s = 0.25$ ) [177]. Тоді, беручи за основу аналітичний розв’язок (6.3.13), динаміка рівня капіталозабезпеченості України за період 2000–2009 рр. може бути змодельована для таких параметрів:  $k_0 = 20,213$ ,  $\alpha = 0,256$ ,  $b = 0,0033$ . Оптимізація останніх двох параметрів була проведена з метою збільшення точності відтворення числових розв’язків за моделлю (6.3.12) стосовно статистичної бази. Для визначення міри динаміки ризику було побудовано межі коридору допустимих відхи-

лень  $k(t)$ , користуючись подвійною нерівністю (6.3.17) для  $\gamma = 0,01667$ , зображені на рис. 6.3.4 разом з розв'язком моделі Солоу. Результати числових значень ex-post прогнозом на 2010–2013 рр. також графічного зведені на рис. 6.3.4.

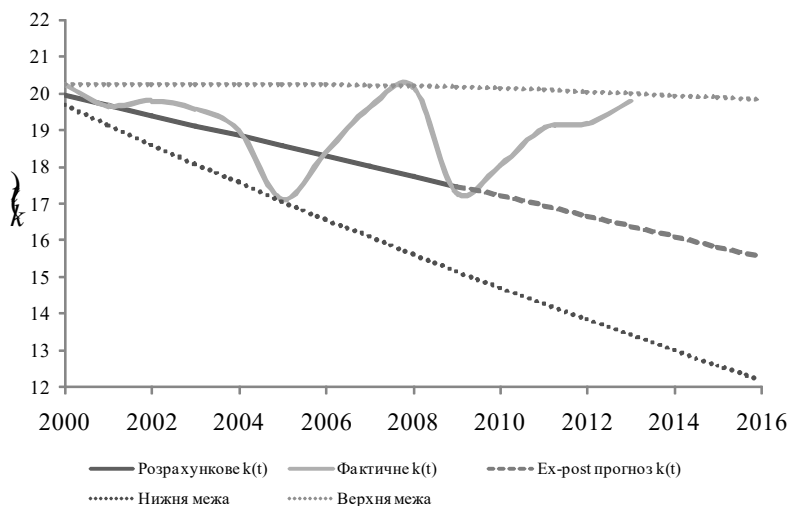


Рис. 6.3.4. Результати моделювання капіталозабезпеченості за рівнянням Солоу

Джерело: розрахунок автора

Розв'язок нелінійної моделі Солоу представлений квазілінією (нелінійною траєкторією, властивості якої подібні лінійній). Високий рівень похибки ex-post прогнозу пояснюється нездатністю моделі враховувати короткострокові коливання. Спеціалізацією розв'язку (6.3.12) є представлення довгострокового тренду. Тому його застосування у парі з інтервальними кривими подвійної нерівності (6.3.17) є виправдане з позиції врахування тимчасових відхилень та коливань. Траєкторія динаміки ризику, розраховано за формулою (6.3.18), зображена на рис. 6.3.5.

Зважаючи на систематичну амортизацію основних засобів національного господарства прогнозовані значення ризиків з рис. 6.3.5 у період 2008–2014 рр. передбачили загрозу економічного спаду в 2008 р., а також вказують на посилення загрози для періоду 2009–2014 рр. Звичайно, здатність інтервального прогнозу

відображення майбутніх станів економічної системи з часом втрачає точність. Тому доцільно також розрахувати рівень детермінованості прогнозу за виразом (6.3.19), значення якого для періоду 2000–2016 рр. приведені на рис. 6.3.6.



Рис. 6.3.5. Динаміка ризику української економіки на основі нелінійної моделі Солоу на період 2000–2016 рр.

Джерело: розрахунок автора.

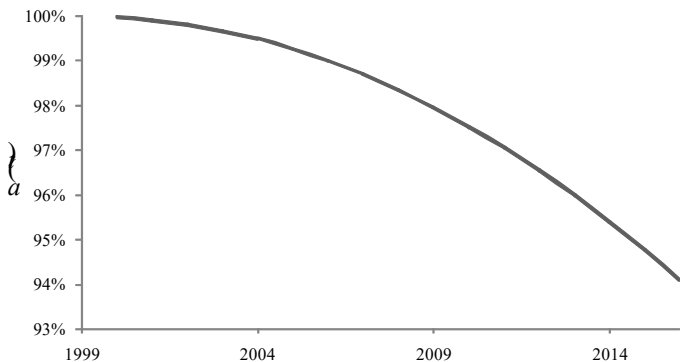


Рис. 6.3.6. Рівень детермінованості нелінійної моделі Солоу на період 2000–2016 рр.

Джерело: розрахунок автора.

Отже, рис. 6.3.6 засвідчує високий рівень точності інтервального прогнозу моделі Солоу для української економіки. Таким чином, нелінійний інструментарій моделювання економічної динаміки та динаміки ризику економічного спаду є більш гнучкий та функціональний порівняно з лінійним апаратом на основі класичного рівняння Харрода — Домара. Концепція визначення міри динаміки ризику також продемонструвала свою універсальність і була застосована до різних за суттю моделей економічного зростання.

#### *6.3.1.4. Моделювання динаміки ризику зростання економік країн світу*

Концепція оцінювання динаміки економічного ризику спроможна використовуватися не лише для українських реалій, що характеризуються низкою відмінностей від високорозвинених країн світу, але й здатна відтворити міру динаміки загрози зростання будь-якої національної економіки з певним рівнем точності.

Крім того, приведений у даному дослідженні інструментарій адаптований до таких економік, які характеризуються помірними темпами зростання національного продукту. Розглянуто чотири інші економіки світу: Канада, Італія, Японія та Польща. Вибір Канади був зумовлений ідеальним балансом позитивних показників росту та стабільності економічної системи в цілому. Італія — приклад країни, яка поступово втрачає потенціал до зростання через структурні складнощі. Японія є економікою застою, з хронічною дефляцією та пасткою величезного зовнішнього боргу. Польща, на відміну від всіх попередніх держав, здійснила останнім часом перехід до числа країн з високим рівнем зростання економіки. Тому помітно, що кожна з приведених економік є важливою з точки зору дослідження структурних характеристик із використанням розроблених економіко-математичних моделей.

Підхід, сформований раніше, є універсальним, тому може бути застосований для інших країн. Скориставшись класичною моделлю Харрода — Домара та її фрактальною модифікацією (6.3.2), на основі статистичної інформації з додатку табл. А. 1 були змодельовані траєкторії розвитку чотирьох економік і графічно подані на рис. 6.3.7.

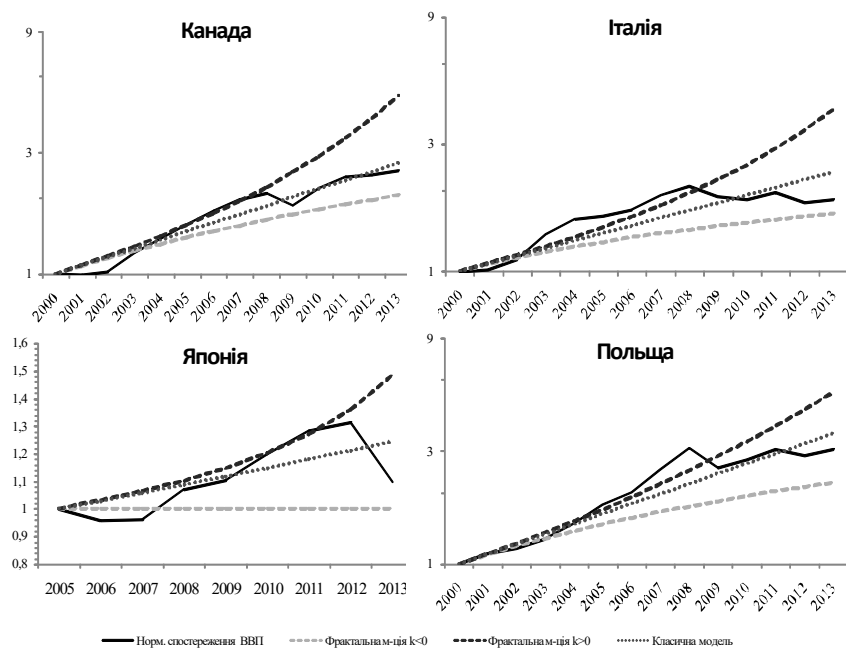


Рис. 6.3.7. Результати моделювання динаміки деяких економік світу для 2000–2013 рр.

Джерело: розрахунки автора на основі [5].

Статистичні дані нормалізованих значень ВВП країн підтверджують їх належність до різних станів з позиції інтенсивності економічної динаміки. Хоча лінійний апарат модифікацій Харрода — Домара допускає багато узагальнень, він є спроможним до моделювання таких показників, як внутрішній валовий продукт. Оскільки більшість статистичних (нормалізованих) спостережень були охоплені фрактальними кривими на рис. 6.3.7, доцільно виконати розрахунок динаміки ризику за виразом (6.2.1). Результати розрахунків наведено на рис. 6.3.8.

На рис. 6.3.8 продемонстровано, що найбільш стабільним економічним трендом володіє Канада, як представник країн з розвинутою економікою та високими темпами зростання національного продукту. Найбільший рівень ризику можна знайти на графіку Японії. Хронічні низькі темпи приросту ВВП та нестійкість на-

пряму економічної траєкторії зумовлюють підвищення загрози економічного спаду країни. Подібним сценарієм представлено на рис. 6.3.8 італійську економіку, яка за останні десять років втратила значну частку ВВП так само, як і потенціал для його відновлення. Крива загрози зміни динамічної траєкторії економічного тренду демонструє кардинальну зміну стану польської економіки від тієї, що швидко розвивається, до застою. За період 2000 — 2008 рр. національний дохід Польщі зріс втричі, фактично засвідчивши вихід країни з блоку пострадянських економік Східноєвропейського регіону. Результати моделювання також зведено у додатку табл. А.1.

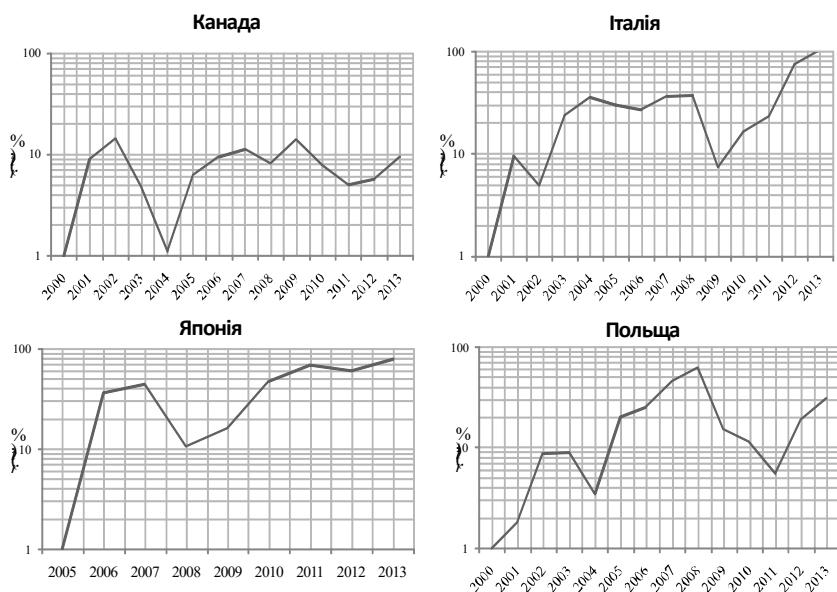


Рис. 6.3.8. Динаміка ризику світових економік на основі лінійного апарату Харрод — Домара

Джерело: розрахунки автора.

Аналогічним чином динаміку загрози зростання капіталомісткості одержимо за виразами (6.3.12) та (6.3.17). Необхідна статистична інформація подана в додатку табл. Б. 1, а результати моделювання показано на рис. 6.3.9.

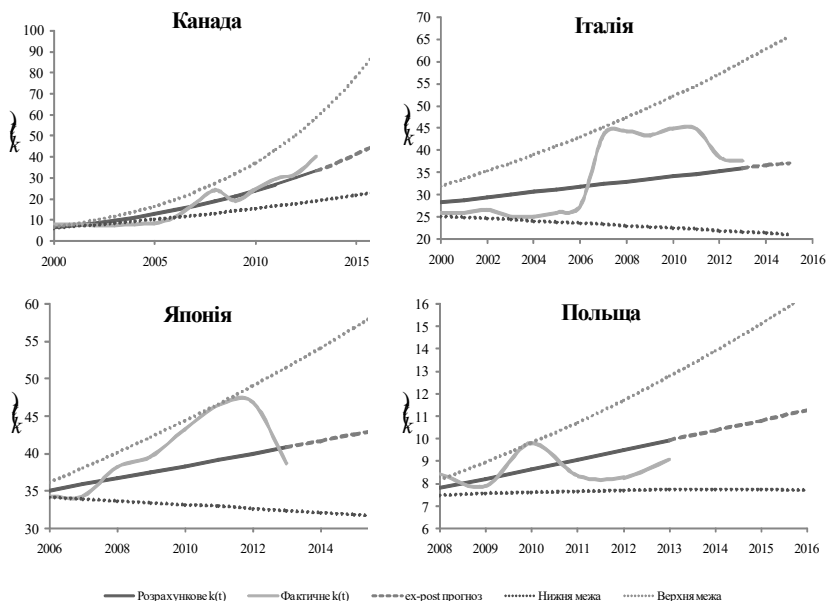


Рис. 6.3.9. Моделювання капіталозабезпеченості світових економік на основі нелінійного рівняння Солоу

Джерело: розрахунки автора на основі [5].

З рис. 6.3.9 зрозуміло, що три країни (Італія, Японія та Польща) переживають помірну стагнацію капіталозабезпеченості, і як результат — сповільнення темпів економічного зростання. Канада, однак, слугує прикладом економіки, що суттєво нагромадила обсяг капіталу за період з 2000 по 2013 рр., забезпечуючи у такий спосіб стале економічне зростання. Скориставшись виразом (6.3.18), матимемо результати числових розрахунків, наведені на рис. 6.3.10.

Динаміка загрози зростання капіталозабезпеченості цих країн суттєво не відрізняється від значень рис. 6.3.8. Канада характеризується низькою мірою загрози та впевненим економічним трендом. Сповільнення економічного зростання у період 2001–2005 рр. стало тривожним сигналом для експоненційної траєкторії капіталозабезпеченості, в результаті чого, темпи приросту обсягу капіталу підвищились і лишаються стабільно високими. Подібною поведінкою до канадської економіки володіє національна економіка Італії. Передусім воно характеризується поступовою

стабілізацією тренду та низькими темпами приросту обсягу капіталу. Японія також характеризується високою невизначеністю та несталістю динаміки капіталозабезпеченості, яку можна помітити з волатильності інтегральної кривої статистичних спостережень  $k(t)$ . У Польщі, як вже було зазначено, відбувся перехід від високих темпів зростання доходу й обсягу основних засобів до помірних темпів.

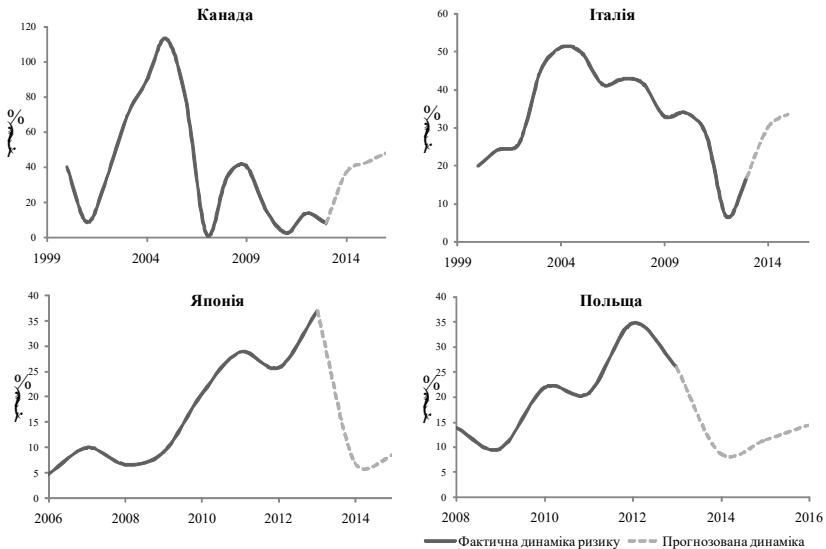


Рис. 6.3.10. Динаміка ризику капіталозабезпеченості світових економік на основі нелінійного рівняння Солоу

Джерело: розрахунки автора.

### 6.3.2. Площинні динамічні моделі

#### 6.3.2.1. Аналітичне моделювання коеволюції офіційної й нелегальної економік

За сутністю сектори (легальної) офіційної (ЛЕ) і (тіньової) нелегальної (ТЕ) економік є конкуруючими або антагоністичними в сенсі свого призначення. Відтак варто скористатися



відомою в науці моделлю «жертва — хижак», де в ролі жертви фігуруватиме ЛЕ, а хижак — ТЕ [86].

Нехай змінною  $x_1 = x_1(t)$  описано обсяг ЛЕ суспільства,  $x_2 = x_2(t)$  — обсяг ТЕ. За відсутності нелегального сектору економіки стан офіційної економіки традиційно описується класичним логістичним рівнянням  $\dot{x}_1 = x_1(a_1 - b_1x_1)$ , де  $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$  — похідна змінної  $x_1$ , скалярні коефіцієнти  $a_1$ ,  $b_1$  відображають, відповідно, фактори зростання і вичерпаності наявних можливостей. Присутність ТЕ сприяє врахуванню не лише внутрішніх для ЛЕ можливостей, але вимагає взяти до відома зовнішні впливи пригнічуючого для офіційної економіки характеру. Припускається, що зазначене вище пропорційне білінійному добутку  $b_{12}x_1x_2$  з коефіцієнтом пропорційності  $b_{12}$ .

Вочевидь, подібні міркування справедливі стосовно впливу ЛЕ на ТЕ. Як результат, отримуємо таку нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + b_{12}x_2x_1 + c_1x_1^2 \\ \dot{x}_2 = a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 + c_2x_2^2 \end{cases} \quad (6.3.26)$$

Це так звана *площинна точкова математична модель* (ММ) економічної динаміки (типу моделі Вольтерра — Лотки), але з урахуванням явища конкуренції [48]. По суті має місце ще один приклад використання поняття конкуренції в реальній економіці. Саме конкуренція, будучи ознакою ринкової економіки, володіє різноманітними типами взаємодії між учасниками ринку (в нашому випадку — це симбіоз, хижацтво, аменсалізм тощо), що реалізується знаками коефіцієнтів ММ (6.3.26).

Стійкість динамічної моделі (6.3.26) детермінується співіснуванням між добутками внутрішньовидових факторів  $c_1$ ,  $c_2$  зменшування і міжвидових факторів  $b_{12}$ ,  $b_{21}$  пригнічуючого характеру [85]. Якщо виконується нерівність  $b_{12} \times b_{21} < c_1 \times c_2$ , тобто внутрішні чинники домінують (відіграють більшу роль) або мають вище значення, ніж фактори конкуренції, то на підґрунті ММ (6.3.26)

динаміки стверджується таке: можливе співіснування ЛЕ і ТЕ при деякому постійному співвідношенні між коефіцієнтами моделі.

Для зручності динамічну модель (6.3.26) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + a q x_2 x_1 + a p x_1^2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_2 + b p x_1 x_2 + b q x_2^2 \end{cases} \quad (6.3.27)$$

покладаючи:  $a_1 = \alpha$ ,  $b_{12} = a q$ ,  $c_1 = a p$ ,  $a_2 = \beta$ ,  $b_{12} = b p$ ,  $c_2 = b q$ .

Над першим рівнянням ММ (6.3.27) виконуємо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\ln x_1) &= [a(p x_1 + q x_2) + \alpha]; \\ \ln x_1(t) \Big|_0^t &= \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt \Leftrightarrow \quad (6.3.28) \\ \Leftrightarrow \ln \left( \frac{x_1(t)}{x_1(0)} \right) &= \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt \end{aligned}$$

Звідси впливає вираз

$$x_1(t) = x_1(0) \times \exp \left\{ \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt \right\}. \quad (6.3.29)$$

Аналогічним чином отримуємо такий саме вираз для змінної  $x_2$ :

$$x_2(t) = x_2(0) \times \exp \left\{ \int_0^t [b(p x_1 + q x_2) + \beta] dt \right\}. \quad (6.3.30)$$

Мають місце рівності:

$$\begin{aligned} \int_0^t [a(p x_1 + q x_2) + \alpha] dt &= a \int_0^t [(p x_1 + q x_2)] dt + \alpha t; \\ \int_0^t [b(p x_1 + q x_2) + \beta] dt &= b \int_0^t [(p x_1 + q x_2)] dt + \beta t. \end{aligned}$$

Оскільки виконуються рівності  $e^{aZ} = (e^Z)^a$  і  $\exp\{(a+b)\} = e^a \times e^b$ , то справедливо записати таке:

$$e^{\int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt} = \left( e^{\int_0^t (px_1 + qx_2) dt} \right)^a;$$

$$\exp \left\{ b \int_0^t [(px_1 + qx_2)] dt \right\} = \left( e^{\int_0^t (px_1 + qx_2) dt} \right)^b.$$

Тоді вирази (6.3.29) і (6.3.30), відповідно, набувають вигляду:

$$x_1(t) = x_1(0) \times \exp \left\{ a \int_0^t (px_1 + qx_2) dt \right\} \times e^{at} \equiv x_1(0) \times \left( \exp \left\{ \int_0^t (px_1 + qx_2) dt \right\} \right)^a \times e^{at};$$

$$(x_1(t))^{1/a} = (x_1(0))^{1/a} \times \exp \left\{ \int_0^t (px_1 + qx_2) dt \right\} \times e^{\frac{at}{a}}. \quad (6.3.31)$$

Аналогічно

$$(x_2(t))^{1/b} = (x_2(0))^{1/b} \times \exp \left\{ \int_0^t (px_1 + qx_2) dt \right\} \times e^{\frac{\beta t}{b}}. \quad (6.3.32)$$

Відношення останніх двох виразів записується

$$\frac{(x_1(t))^{1/a}}{(x_2(t))^{1/b}} = \frac{(x_1(0))^{1/a}}{(x_2(0))^{1/b}} \times \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} \right) dt \right\} \Leftrightarrow C \times \exp \left\{ \frac{(b\alpha - a\beta)t}{ab} \right\},$$

де величина  $C$  є стала інтегрування. Останній вираз піднесемо до

степеня  $ab$  і отримаємо  $\frac{x_1^b}{x_2^a} = C^{ab} \times \exp \{ (b\alpha - a\beta)t \}$  — загальний ін-

теграл динамічної моделі (6.3.27). Звідси впливає функціональ-  
на залежність рівня обсягу ЛЕ від ТЕ, яка записується

$$x_1 = x_2^{a/b} \times C^a \times \exp \left\{ \left( \alpha - \frac{a}{b} \beta \right) t \right\}; \quad (6.3.33)$$

навпаки — залежність рівня обсягу ТЕ від ЛЕ матиме вигляд

$$x_2 = x_1^{b/a} \times C^{-b} \times \exp \left\{ \left( \beta - \frac{b}{a} \alpha \right) t \right\}. \quad (6.3.34)$$

Одержані формули засвідчують про таке:

а) коли справджується нерівність, то спостерігається спад виробництва (рецесія економіки) з плином часу;

б) якщо виконується нерівність — спостерігається зменшення обсягу ТЕ;

с) дозволяють прогнозувати обсяги ЛЕ і ТЕ для довільного моменту часу  $t$ , заздалегідь вибираючи числові значення коефіцієнтів динамічної моделі.

Економіко-математичне моделювання динамічного режиму значно спрощується [85], якщо здійснити перехід до так званої *безрозмірної моделі*. У нашому випадку заміною змінних  $t = \tau/a$ ;

$x_1 = \frac{\alpha}{ap} u_1$ ;  $x_2 = \frac{\beta}{bq} u_2$  отримаємо динамічну модель у безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1(1 - u_1 - \varepsilon_1 u_2) \\ \dot{u}_2 = u_2(1 - u_2 - \varepsilon_2 u_1) \end{cases}; \quad (6.3.35)$$

де величини  $\varepsilon_1 = \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{a}{b}$ ;  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ ;  $\varepsilon_2 = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{b}{a}$  — скалярні коефіцієнти.

Остаточно величини  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  записуємо  $\varepsilon_1 = \gamma \frac{a}{b}$ ;  $\varepsilon_2 = \frac{b}{\gamma a}$ . Має

місце рівність  $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 = 1$ .

Зауважимо, що, на відміну від початкової ММ (6.3.27), безрозмірна динамічна модель (6.3.35) володіє лише трьома скалярами.

Перепишемо формулу (6.3.33) в безрозмірних координатах, користуючись вказаною вище заміною змінних. Після очевидних перетворень вона набуває вигляду:

$$u_1 = \frac{ap}{\alpha} \times \left( \frac{\beta}{bq} u_2 \right)^{a/b} \times C^a \times \exp \{ (1 - \varepsilon_1) \tau \}.$$

Отже, обсяг офіційної економіки зростатиме за умови  $\varepsilon_1 < 1$ .

Аналогічно формула (6.3.34), якою оцінюється обсяг тіньової економіки, має вигляд:

$$u_2 = \frac{bq}{\beta} \times \left( \frac{\alpha}{ap} u_1 \right)^{b/a} \times C^{-b} \times \exp \left\{ \left( \frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a} \right) \tau \right\}.$$

Обсяг ТЕ зменшуватиметься, коли матиме місце нерівність:

$$\left( \frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{a} \right) < 0 \Leftrightarrow a\beta < \alpha b.$$

На рис. 6.3.11 відображено динаміку рівня тіньової економіки у відсотках від обсягу офіційного ВВП [62].



Рис. 6.3.11. Динаміка рівня тіньової економіки за окремими методами, % від обсягу офіційного ВВП [62]

Деякі результати обчислювального експерименту за різних початкових умов та параметрів з використанням динамічної моделі (6.3.35) взаємодії ЛЕ і ТЕ наведено на рис. 6.3.12 та 6.3.13 ( $Z_{i,1}$  — час,  $Z_{i,2}$  — рівень ЛЕ,  $Z_{i,3}$  — рівень ТЕ). Розрахунки було проведено за допомогою програмного пакета MathCad 14 і є авторською розробкою.

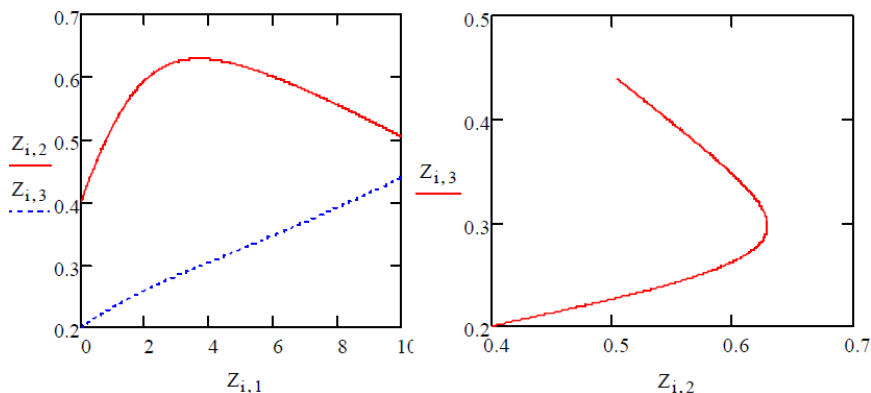


Рис. 6.3.12. Інтегральні криві (зліва) та фазовий портрет (справа) ММ (6.3.35)  
Джерело: авторська розробка.

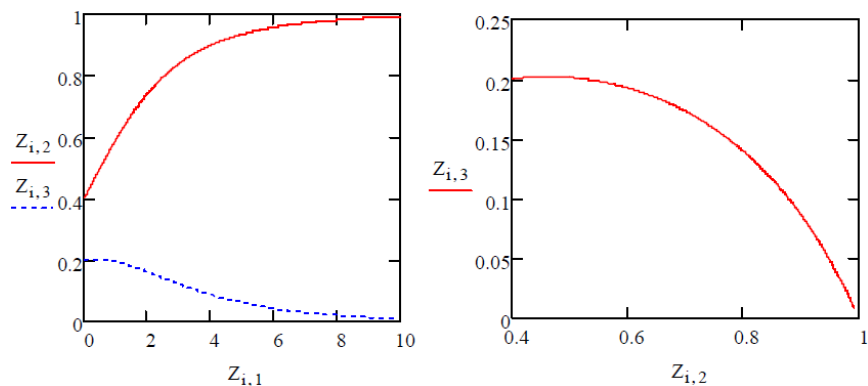


Рис. 6.3.13. Інтегральні криві (зліва) та фазовий портрет (справа) ММ (6.3.35)  
Джерело: авторська розробка.

Таким чином, у розглянутому дослідженні механізм взаємодії офіційної й нелегальної економік відтворено з використанням однієї з точкових математичних моделей нелінійної динаміки. Для динамічної площинної моделі отримано аналітичний розв'язок, на підґрунті якого здійснюється прогнозування взаємозалежних обсягів ЛЕ і ТЕ у будь-який момент часу. Сформульовано умови для коефіцієнтів динамічної моделі, за виконання яких відбувається зростання обсягу ЛЕ або спостерігається рецесія економіки та має місце зменшення обсягу ТЕ.

*6.3.2.2. Оцінювання ризику в контексті еволюції  
макроекономічної системи на підґрунті матричної  
лінійної динамічної моделі*

Динамічна модель економічного зростання типу Харрода — Домара зі споживанням у найбільш загальному вигляді записується таким чином [39]:

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot Y(t) + \frac{dC(t)}{dt}, \quad (6.3.36)$$

де  $Y(t)$  — національний дохід у момент часу  $t$ ;  $a$  — гранична продуктивність капіталу;  $C(t)$  — невиробниче споживання у момент часу  $t$ .

Динаміка обсягу споживання  $C(t)$  задається екзогенно. Цей показник може вважатися постійним у часі, зростати з заданим постійним темпом або мати якусь іншу динаміку (у перших двох випадках набагато простіше отримати розв'язок моделі) [145, с. 44-45].

У праці [95] відображено узагальнення одновимірної моделі (6.3.36) шляхом її представлення у матричній формі. Подібна модифікація дає змогу описувати систему з довільним числом змінних. Нижче наведено варіант матричної форми динамічної моделі Харрода — Домара з незмінним темпом приросту невиробничого споживання:

$$\dot{Y}(t) = A \cdot Y(t) + B, \quad (6.3.37)$$

де  $Y(t)$  — вектор-стовпчик значення змінних моделі у момент часу  $t$  розмірності  $n \times 1$ ;  $A$  — матриця коефіцієнтів, що описують лінійні взаємозв'язки між кожною парою змінних, розмірності  $n \times n$ ;  $B$  — вектор-стовпчик незалежного приросту змінних (багатовимірний аналог приросту споживання) розмірності  $n \times 1$ ;  $n$  — кількість змінних моделі, що представляють різні макроекономічні показники.

Оскільки в реальній економіці спостерігається лаг між зміною чинників та їх впливом на показники, наприклад, запізнення приросту доходу по відношенню до інвестицій, що зумовили даний приріст, доцільно вдосконалити модель (6.3.37) з метою врахування лагових явищ. Тоді система (6.3.37) набуватиме такого вигляду:

$$\dot{Y}(t) = A \cdot Y(t - \tau) + B, \quad (6.3.38)$$

де  $Y(t)$  — вектор-стовпчик значень змінних моделі у момент  $t$ ;  $A$  — матриця коефіцієнтів лінійних взаємозв'язків змінних;  $\tau \geq 0$  — величина лагу взаємозв'язку змінних;  $B$  — вектор-стовпчик незалежного приросту змінних.

Модель (6.3.38) являє собою систему диференціальних рівнянь. Для пошуку розв'язку даної системи її необхідно переписати таким чином, щоб позбутися запізнення  $(-\tau)$  у складі аргументу функції  $Y(t - \tau)$ . У праці [104, с. 795] подібне перетворення виконувалось за допомогою ряду Тейлора. Нагадаємо, що рядом Тейлора для функції  $f(x)$  називається степеневий ряд такого вигляду:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots, \quad (6.3.39)$$

де  $f(x)$  — функція, що нескінченно диференційована в околі точки  $a$ .

Виконаємо розклад функції  $Y(t - \tau)$  в околі точки  $t$  в ряд Тейлора, використовуючи лише лінійні доданки (похідні першого порядку):

$$Y(t - \tau) = Y(t) + \frac{Y'(t) \cdot (t - \tau - t)}{1} = Y(t) - \tau \cdot Y'(t), \quad (6.3.40)$$

Підставляючи праву частину виразу (6.3.40) у рівняння (6.3.38), отримуємо:

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) - \tau \cdot A \cdot Y'(t) + B, \text{ або}$$

$$Y'(t) + \tau \cdot A \cdot Y'(t) = A \cdot Y(t) + B, \text{ і нарешті:}$$

$$(E + \tau \cdot A) \cdot Y'(t) = A \cdot Y(t) + B, \text{ тобто}$$

$$Y'(t) = (E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot Y(t) + (E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot B, \quad (6.3.41)$$

де  $Y'(t)$  — похідна  $Y(t)$  по часу  $t$ ;  $E$  — одинична матриця тієї ж розмірності, що й матриця  $A$ .

Інтегруванням рівняння (6.3.41) по незалежній змінній  $t$  отримується його аналітичний розв'язок:

$$Y(t) = e^{(E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot t} \cdot Y_0 + (E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot (e^{(E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot t} - E) \cdot B, \quad (6.3.42)$$

де  $Y(t)$  — вектор-стовпчик значень змінних моделі у момент часу  $t$ ;  $e^{(E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot t}$  — експонента матриці  $(E + \tau \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot t$ ;  $E$  — одинична матриця,  $\tau$  — скалярна величина лагу,  $A$  — матриця коефіці-



єнтів лінійних взаємозв'язків змінних;  $t$  — момент часу, для якого розв'язується рівняння;  $Y_0$  — вектор-стовпчик значень змінних у момент  $t = 0$ ;  $B$  — вектор-стовпчик незалежного приросту змінних;  $n$  — кількість змінних моделі.

Динаміка змінних моделі (6.3.42) залежить від конкретних значень матриці  $A$ , векторів  $Y_0$  і  $B$ , а також від величини лагу  $\tau$ . Для відтворення реальної динаміки національної економіки у координатах «ВВП — податки» на підґрунті моделі (6.3.42) необхідно знайти такі значення  $A$ ,  $B$  і  $\tau$ , щоб розрахункові значення змінних  $Y(t)$  максимально наближалися до реальних значень відповідних показників для кожного часового періоду. Значення скалярних компонент вектора  $Y_0$  встановлюються на рівні статистичних значень показників, що відповідають першому періоду спостережень.

Для вирішення даної задачі скористаємося однією із модифікацій методу найменших квадратів (МНК). У зв'язку з нелінійним характером динаміки змінних моделі (6.3.42), для знаходження достатнього наближення виникає необхідність в ітеративному процесі на базі МНК.

Нехай  $\theta_0$  — вектор-стовпчик, що містить початкові значення налаштовуваних параметрів моделі (6.3.42):

$$\theta_0 = \{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{21} \quad a_{22} \quad b_1 \quad b_2 \quad \tau\}, \quad (6.3.43)$$

де  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  — початкові значення матриці  $A$ ,  $b_1, b_2$  — початкові значення вектора  $B$ ;  $\tau$  — початкове значення величини лагу.

Початкові значення скалярних компонентів  $A$  і  $B$  обираються довільно в інтервалі  $[-1; 1]$ , а початкове значення лагу  $\tau$  — емпірично, виходячи з приблизної тривалості запізнення взаємовпливу розглядуваних економічних змінних. Тоді результатом кожної ітерації МНК буде вектор-стовпчик  $\Delta\theta_i$ , що представляє необхідну зміну значень параметрів моделі з метою наближення до цільової динаміки:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta_i, \quad (6.3.44)$$

де  $\theta_i$  — вектор-стовпчик параметрів моделі на  $i$ -тій ітерації МНК;  $\Delta\theta_i$  — результат  $i$ -тої ітерації МНК.

З наближенням розв'язків моделі (6.3.42) до цільової динаміки з використанням класичного МНК існує ризик виникнення хаотичних явищ, пов'язаних із проходженням розрахункової матриці через окіл однієї із точок її виродження. Подібна поведінка може спричинити низьку точність результатів МНК, тому для вирішення задачі з оптимізації параметрів моделі (6.3.42) доцільно скористатися модифікацією методу МНК, відому як алгоритм Левенберга — Марквардта (в зарубіжній літературі часто фігурує назва методу *DampedLeastSquares*). Згідно із зазначеним алгоритмом розв'язок задачі оптимізації зводиться до такого рівняння [2, с. 39]:

$$\Delta\theta = J^T (J \cdot J^T + \lambda^2 I)^{-1} e, \quad (6.3.45)$$

де  $\Delta\theta$  — вектор-стовпчик розмірності  $p \times 1$ , що представляє зміну параметрів системи наприкінці даної ітерації;  $J = \{J_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial e_i}{\partial \theta_j} \right\}$  — матриця Якобі розмірності  $m \times p$ , що характеризує величину зміни помилки  $e_i$  у разі нескінченно малої зміни значення параметра  $\theta_j$ ;  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $\lambda \geq 0$  — демпфуюча константа, значення якої вибирається емпірично і повинно бути якомога меншим, але достатньо великим, щоб усунути нестійкість в околі точки виродження матриці  $J \cdot J^T$ ;  $e$  — вектор-стовпчик розмірності  $m \times 1$ , що представляє помилку по кожному із критеріїв оптимізації;  $m$  — кількість критеріїв оптимізації;  $p$  — кількість параметрів системи, що оптимізуються.

У розглядуваній задачі оптимізації помилкою обрано суму квадратів відхилень розрахункових значень від статистичних для кожної зі змінних моделі (6.3.42):

$$e_i = \sum_{t=1}^T (Y_t^{(i)} - \tilde{Y}_t^{(i)})^2, \quad (6.3.46)$$

де  $e_i$  —  $i$ -й елемент вектора помилок,  $i = \overline{1, 2}$ ;  $Y_t^{(i)}$  — розрахункове значення  $i$ -го показника за період  $t$ ;  $\tilde{Y}_t^{(i)}$  — цільове (статистичне) значення  $i$ -го показника за період  $t$ ;  $T$  — кількість періодів спостереження.

Оскільки аналітичний розрахунок похідних помилки  $e$  моделі (6.3.42) по кожному з її налаштовуваних параметрів  $\theta_i$  є занадто складною математичною задачею, для пошуку елементів матриці

Якобі  $\{J_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial e_i}{\partial \theta_j} \right\}$  використовується числовий метод розрахунку

похідних. У такому випадку значення елементів матриці Якобі обчислюються за формулою:

$$\{J_{ij}\} = \frac{e_i(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + h, \theta_{j+1}, \dots, \theta_p) - e_i(\theta_1, \dots, \theta_p)}{h}, \quad (6.3.47)$$

де  $\{J_{ij}\}$  — елемент матриці  $J$ , що розташований на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпчика,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, p}$ ;  $e_i(\dots)$  — величина помилки  $i$ -го показника при заданих значеннях параметрів моделі (6.3.42);  $\theta_j$  — значення параметра моделі (6.3.42), що оптимізується;  $h$  — крок обчислення похідної, значення якого повинно обиратися якомога меншим, але й достатньо великим, щоб похибка комп'ютерного обчислення залишалась на прийнятному рівні;  $m = 2$  — кількість змінних моделі (6.3.42);  $p = 7$  — кількість параметрів моделі (6.3.42), що підлягають оптимізації.

Розглянемо статистичні дані розвитку української економіки, на базі яких можна відтворити динаміку еволюції національної економіки в координатах «ВВП — податки». У табл. 6.3.3 подано значення номінальних обсягів ВВП та доходів до зведеного державного бюджету за 1996–2016 рр., а також реальні обсяги відповідних показників у цінах 1996 р., що дають змогу оцінити їх динаміку з урахуванням інфляції.

З метою більш коректного (з позицій математичного моделювання) представлення даних наявні часові ряди макроекономічних показників варто нормалізувати. Нами використано формулу нормалізації для ВВП:

$$Y_t^{(n)} = \frac{Y_t^{(s)}}{\min_{i=1, T}(Y_i^{(s)})}, \quad (6.3.48)$$

де  $Y_t^{(n)}$  — нормалізоване значення ВВП за  $t$ -ий період;  $Y_t^{(s)}$  — значення реального ВВП за  $t$ -ий період;  $T$  — кількість періодів спостережень.

Таблиця 6.3.3

## ПОКАЗНИКИ МАКРОЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ УКРАЇНИ за 1996–2016 рр.

| Рік  | Номінальний обсяг ВВП, млрд. грн. | Номінальний обсяг податків*, млрд. грн. | Дефлятор ВВП, % | Акумуляований дефлятор**, % | Реальний обсяг ВВП, млрд. грн. | Реальний обсяг податків, млрд. грн. |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------------|-----------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1996 | 81.519                            | 30.200                                  | —               | 100.0                       | 81.519                         | 30.200                              |
| 1997 | 93.365                            | 28.100                                  | 118.1           | 118.1                       | 79.056                         | 23.793                              |
| 1998 | 102.593                           | 28.900                                  | 112.1           | 132.4                       | 77.493                         | 21.829                              |
| 1999 | 130.442                           | 32.900                                  | 127.3           | 168.5                       | 77.399                         | 19.521                              |
| 2000 | 176.128                           | 49.100                                  | 123.1           | 207.5                       | 84.896                         | 23.667                              |
| 2001 | 211.175                           | 54.900                                  | 110.2           | 228.6                       | 92.367                         | 24.013                              |
| 2002 | 234.138                           | 61.900                                  | 105.3           | 240.7                       | 97.257                         | 25.712                              |
| 2003 | 277.355                           | 75.300                                  | 108.2           | 260.5                       | 106.477                        | 28.908                              |
| 2004 | 357.544                           | 91.500                                  | 115.3           | 300.3                       | 119.048                        | 30.466                              |
| 2005 | 457.325                           | 134.200                                 | 124.1           | 372.7                       | 122.700                        | 36.006                              |
| 2006 | 565.018                           | 171.800                                 | 114.9           | 428.3                       | 131.936                        | 40.116                              |
| 2007 | 751.106                           | 219.900                                 | 122.8           | 525.9                       | 142.824                        | 41.814                              |
| 2008 | 990.819                           | 297.893                                 | 129.0           | 678.4                       | 146.051                        | 43.911                              |
| 2009 | 947.042                           | 272.967                                 | 112.6           | 763.9                       | 123.977                        | 35.734                              |
| 2010 | 1120.585                          | 314.506                                 | 113.7           | 868.5                       | 129.020                        | 36.211                              |
| 2011 | 1349.178                          | 398.554                                 | 114.2           | 991.9                       | 136.024                        | 40.182                              |
| 2012 | 1459.096                          | 445.525                                 | 107.8           | 1069.2                      | 136.462                        | 41.668                              |
| 2013 | 1465.198                          | 442.789                                 | 104.3           | 1115.2                      | 131.383                        | 39.705                              |
| 2014 | 1586.915                          | 456.067                                 | 115.9           | 1292.5                      | 122.776                        | 35.285                              |
| 2015 | 1988.544                          | 652.031                                 | 138.9           | 1795.3                      | 110.763                        | 36.318                              |
| 2016 | 2383.182                          | 782.74                                  | 117.1           | 2102.3                      | 113.360                        | 37.233                              |

\* Під податками маються на увазі доходи до зведеного державного бюджету.

\*\* Під акумульованим дефлятором мають на увазі дефлятор ВВП з 1996 р. як базового періоду.

Джерело: розрахунки автора на основі [176, 177].

Для розрахунку нормалізованих значень податків було використано ту ж базу нормалізації, що й у випадку з ВВП, що обу-

мовлено необхідністю збереження співвідношення між обсягами ВВП та податків у нормалізованих часових рядах:

$$G_t^{(n)} = \frac{G_t^{(s)}}{\min_{i=1,T}(Y_i^{(s)})}, \quad (6.3.49)$$

де  $G_t^{(n)}$  — нормалізоване значення податків за  $t$ -й період;  $G_t^{(s)}$  — значення реального обсягу доходів до зведеного державного бюджету за  $t$ -й період;  $Y_i^{(s)}$  — значення реального ВВП за  $i$ -й період;  $T$  — кількість періодів спостережень.

Результатом нормалізації вихідних рядів статистичних даних є часові ряди, представлені у табл. 6.3.4.

Таблиця 6.3.4

**НОРМАЛІЗОВАНІ ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ МАКРОЕКОНОМІЧНОГО  
РОЗВИТКУ УКРАЇНИ за 1996–2016 рр.**

| Рік  | Нормалізовані значення<br>реального обсягу ВВП | Нормалізовані значення реального обсягу<br>доходів до зведеного державного<br>бюджету |
|------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1996 | 1.053                                          | 0.390                                                                                 |
| 1997 | 1.021                                          | 0.307                                                                                 |
| 1998 | 1.001                                          | 0.282                                                                                 |
| 1999 | 1.000                                          | 0.252                                                                                 |
| 2000 | 1.097                                          | 0.306                                                                                 |
| 2001 | 1.193                                          | 0.310                                                                                 |
| 2002 | 1.257                                          | 0.332                                                                                 |
| 2003 | 1.376                                          | 0.373                                                                                 |
| 2004 | 1.538                                          | 0.394                                                                                 |
| 2005 | 1.585                                          | 0.465                                                                                 |
| 2006 | 1.705                                          | 0.518                                                                                 |
| 2007 | 1.845                                          | 0.540                                                                                 |
| 2008 | 1.887                                          | 0.567                                                                                 |
| 2009 | 1.602                                          | 0.462                                                                                 |
| 2010 | 1.667                                          | 0.468                                                                                 |
| 2011 | 1.757                                          | 0.519                                                                                 |
| 2012 | 1.763                                          | 0.538                                                                                 |
| 2013 | 1.697                                          | 0.513                                                                                 |
| 2014 | 1.586                                          | 0.456                                                                                 |
| 2015 | 1.431                                          | 0.469                                                                                 |
| 2016 | 1.465                                          | 0.481                                                                                 |

Джерело: розрахунки автора

Для подальшого моделювання динаміки української економіки на підґрунті (6.3.42) було виконано комп'ютерну реалізацію математичного інструментарію (6.3.44)–(6.3.47) у програмному пакеті Mathcad 14. Для розв'язку задачі оптимізації моделі (6.3.42) використано значення параметрів оптимізаційного алгоритму:  $A = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.10 \\ 0.05 & -0.05 \end{pmatrix}$  — початкова матриця коефіцієнтів лі-

нійних взаємозв'язків між змінними,  $B = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.00 \end{pmatrix}$  — початковий вектор незалежного приросту змінних,  $\tau = 2.5$  — початкова величина лагу взаємозв'язку між змінними,  $\lambda = 0.1$  — демпфуюча константа,  $h = 0.00001$  — крок обчислення елементів матриці Якобі.

Особливу увагу слід приділити обґрунтуванню вищезазначеного вибору початкового значення  $\tau$ . Глибокий економіко-математичний аналіз проблеми лагу між виникненням інвестиційних потоків та відповідним приростом валового випуску продукції в межах української економіки було проведено у праці [226], де з використанням економетричних моделей встановлено, що для більшості галузей економіки України спостерігається лаг в межах від 2 до 3 років. На підставі цих даних вирішено використовувати значення лагу, рівне 2,5 року, на початковій ітерації на базі рівняння (6.3.45) з припущенням, що вказане значення з великою ймовірністю сприятиме найбільш швидкій і точній збіжності моделі (6.3.42) з цільовою динамікою змінних.

У результаті проведення 211 ітерацій методу (6.3.45) отримано наступний вектор, що містить оптимізовані значення параметрів моделі (числа округлені до третього знаку після коми):

$$\theta_{211} = \{-0.047 \quad -0.398 \quad 0.080 \quad -0.308 \quad 0.134 \quad -0.119 \quad 2.462\}, \quad (6.3.50)$$

Згідно зі значеннями скалярних компонент вектора (6.3.50), оптимізовані параметри моделі (6.3.42) отримують такі значення:

$$A = \begin{pmatrix} -0.047 & -0.398 \\ 0.080 & -0.308 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.134 \\ -0.119 \end{pmatrix}, \quad \tau = 2.462. \text{ Вектор початкових}$$

значень змінних дорівнює  $Y_0 = \begin{pmatrix} 1.053 \\ 0.390 \end{pmatrix}$ . Підставивши вказані значення параметрів в аналітичний розв'язок (6.3.42) динамічної моделі (6.3.41), отримуємо числові закономірності (6.3.51), якими описується еволюція макроекономічної динаміки України у координатах «ВВП — податки» за 1996–2016 рр.

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0.164 & -0.979 \\ 0.196 & -0.478 \end{pmatrix} \cdot t \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1.053 \\ 0.390 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.595 & 2.410 \\ -0.483 & 2.177 \end{pmatrix} \times \\ \times \left[ \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0.164 & -0.979 \\ 0.196 & -0.478 \end{pmatrix} \cdot t \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0.134 \\ -0.119 \end{pmatrix}, \quad (6.3.51)$$

де  $y(t)$  — значення обсягу ВВП у момент часу  $t$ ;  $g(t)$  — значення обсягу податків у момент часу  $t$ ;  $\exp\{\dots\}$  — експонента матриці;  $t \geq 0$  — розглядуваний момент часу.

Проаналізувавши отримані значення скалярних компонент матриці  $A$ , можна зробити висновок, що за розглядуваний період виробничі потужності української економіки схильні до постійного, хоча і незначного спаду в результаті перевищення амортизації над інвестиціями в капітал ( $a_{11} = -0.047 < 0$ ). Податкове навантаження справляє істотно більший негативний вплив на накопичення національного капіталу ( $a_{12} = -0.398 < 0$ ). Динаміка доходів до державного бюджету, як і варто було очікувати, перебуває у прямо пропорційній залежності від обсягу національного доходу ( $a_{21} = 0.080 > 0$ ). А державний сектор економіки не є самодостатнім: доходи до державного бюджету не збільшуються в результаті використання бюджетних коштів, а, навпаки, схильні до швидкого зниження ( $a_{22} = -0.308 < 0$ ).

Аналіз отриманих значень вектора  $B$  вказує на значне зростання ВВП за рахунок зростання невиробничого споживання ( $b_1 = 0.134$ ), а також істотне скорочення доходів до державного бюджету через чинники, не враховані у моделі ( $b_2 = -0.119$ ). Усереднена тривалість запізнення між зміною розглядуваних показників (національного доходу та податків) та їх впливом один на

одного становить  $\tau = 2,462$  роки. Підкреслимо, що даний лаг також стосується впливу змінних самих на себе, наприклад, інвестування у капітал за рахунок доходів приватного сектору, що зумовлюватиме майбутнє зростання виробничих потужностей і подальше збільшення доходів.

На основі моделі (6.3.51) отримано розрахункові значення обсягів ВВП та доходів до зведеного державного бюджету за 1996–2016 рр. (діапазон незалежної змінної  $t = [0; 20]$ ), динаміка яких представлена на рис. 6.3.14. З метою порівняння на графіку також показано динаміку нормалізованих реальних значень зазначених показників за табл. 6.3.4. Крім того, було проведено екстраполяцію обсягів ВВП та податків на три роки після останнього періоду ( $t = [20; 23]$ ), що дало змогу зробити прогноз їх динаміки на 2017–2019 рр., який також подано на рис. 6.3.14. Наголосимо, що подібно до лінійних регресійних моделей, розглядувана модель довгострокового розвитку дає можливість отримати лише очікуваний тренд, хоча його точність значно вища порівняно з результатами моделей типу лінійної регресії.

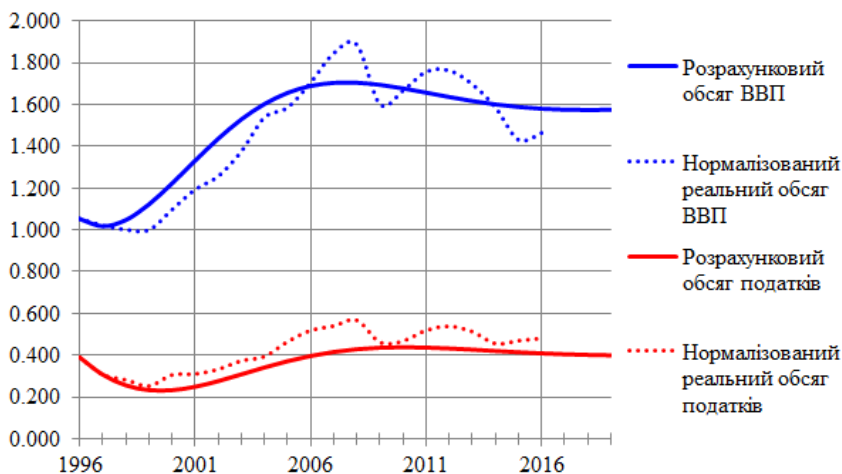


Рис. 6.3.14. Динаміка розрахункових та нормалізованих реальних значень ВВП і доходів до зведеного державного бюджету України за 1996–2019 рр.

Джерело: власні розрахунки.



Для більш ґрунтового аналізу української економіки доцільно оцінювати ризик по кожній із координат моделі (6.3.51). Для виконання даної задачі було використано формули, наведені нижче.

$$r_*^{(j)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{(m_k^{(j)})^2 - (m_g^{(j)})^2}{(m_a^{(j)})^2}}, \quad (6.3.52)$$

де  $r_*^{(j)}$  — величина ризику для  $j$ -го показника;  $j = \overline{1, s}$ ,  $s$  — кількість показників (залежних змінних) розглядуваної моделі;  $m_k^{(j)}$  — середнє квадратичне значень  $j$ -го показника;  $m_g^{(j)}$  — середнє геометричне значень  $j$ -го показника;  $m_a^{(j)}$  — середнє арифметичне значень  $j$ -го показника, тобто

$$m_k^{(j)} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^{(j)})^2}, \quad (6.3.53)$$

де  $m_k^{(j)}$  — середнє квадратичне значень  $j$ -го показника;  $x_i^{(j)}$  — значення  $j$ -го показника за  $i$ -й період;  $n$  — кількість рівнів часового ряду.

$$m_g^{(j)} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i^{(j)}}, \quad (6.3.54)$$

де  $m_g^{(j)}$  — середнє геометричне значень  $j$ -го показника;  $x_i^{(j)}$  — значення  $j$ -го показника за  $i$ -й період;  $n$  — кількість рівнів часового ряду.

$$m_a^{(j)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{(j)}, \quad (6.3.55)$$

де  $m_a^{(j)}$  — середнє арифметичне значень  $j$ -го показника;  $x_i^{(j)}$  — значення  $j$ -го показника за  $i$ -й період;  $n$  — кількість рівнів часового ряду. Кожен із показників ступеня ризику, оцінений згідно з (6.3.52), може набувати значення в інтервалі від 0 до 1.

За формулою (6.3.52) з використанням значень показників моделі (6.3.51), розрахованих для періоду 1996–2016 рр. (діапазон

незалежної змінної  $t = [0; 20]$ ), отримано такі величини ризику:  $r_*^{(1)} = 0.330$  — для ВВП,  $r_*^{(2)} = 0.418$  — для податків. Для періоду 1996–2019 рр., що включає прогнозовані значення показників на майбутні роки (діапазон незалежної змінної  $t = [0; 23]$ ), ризик набуває значень  $r_*^{(1)} = 0.311$  і  $r_*^{(2)} = 0.395$  для ВВП та податків відповідно. Незважаючи на критичні значення ризику, наведені результати вказують на очікуване його зниження — збільшення стійкості динаміки розвитку української економіки у найближчі роки.

Отже, у модифікації (6.3.42) класичної динамічної лінійної моделі Харрода — Домара (6.3.36) успішно усунено такі принципи недоліки вихідної моделі, як одновимірність та безлагова реалізація впливу чинників на показники. Для відтворення реальної динаміки економічних показників на базі методу найменших квадратів розглянуто математично-програмний інструментарій, що дозволяє знаходити оптимальні значення параметрів зазначеної моделі. З використанням даного інструментарію на підґрунті статистичних даних української економіки за 1996–2016 рр. отримано модель (6.3.51), що описує динаміку розвитку економіки України у координатах «ВВП — податки». Параметрам моделі надано економічну інтерпретацію. Побудовано прогноз динаміки вказаних показників на 2017–2019 рр. Проведено оцінювання так званого *покоординатного ризику* для кожного із показників економічної системи.

Можна виокремити перспективи подальших досліджень у напрямі вдосконалення представленої модифікації моделі Харрода — Домара. По-перше, дослідницький інтерес становить подальше збільшення числа залежних змінних динамічної моделі з метою більш цілісного опису макроекономічної системи. По-друге, доцільно провести деталізацію величини лагу по кожній із залежних змінних моделі, оскільки використання єдиної величини для всіх показників є істотним спрощенням об'єкта моделювання. По-третє, автоматизація процедур пошуку оптимальних значень параметрів моделі має принципове значення для класу динамічних моделей на базі диференціальних рівнянь, тому актуальною залишається проблема вдосконалення математичного і програмного інструментарію оптимізації параметрів моделі з метою відтворення цільової динаміки показників.

---

## 6.4. Деякі аспекти економічної безпеки суспільства

---

### 6.4.1. Прогнозування ризику валютної паніки за допомогою динамічної моделі

---

На економічну безпеку суспільства серйозно впливає ситуація валютної паніки, коли одна частина людей штурмують банківські установи, подаючи негативний приклад іншій групі населення, тобто її інфікуючи. Лише третя частина людей не бере участь в ажіотажі. Фінансова паніка має всі риси епідемії.

Зазначений епідеміологічний характер розвитку конфліктної ситуації у суспільстві дозволяє побудувати динамічну модель явища, користуючись відомими результатами у сфері медицини [16, 32, 44]. Нехай має місце таке: функція  $y(t)$  описує ту частину членів суспільства, котрі бажають негайно придбати валюту, тобто інфікованих вірусом панічних настроїв; функція  $x(t)$  для кожного моменту часу  $t$  відповідає кількості осіб, серед яких може розповсюджуватися інфекція фінансового страху — потенційні носії вірусу; виконуються рівності:  $x(t) = n$  і  $y(t) = a$ , де  $n$  і  $a$  відповідають початковому стану валютної паніки. Очевидне виконання рівності:

$$x + y = n + a \quad (6.4.1)$$

для  $\forall t \in [0, T]$  кожного моменту часу  $t$  на інтервалі існування явища валютної паніки.

Будемо вважати, що вірус паніки передається безпосередньо при зустрічі осіб першої та другої частин населення, тобто він пропорційний добутку  $xy$  — білінійному закону взаємодії.

Для проміжку часу  $\Delta t$  справедливо записати:

$$x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = -\beta \cdot x \cdot y \cdot \Delta t \Leftrightarrow \dot{x}(t) = -\beta \cdot x \cdot y, \quad (6.4.2)$$

де величина  $\beta$  є коефіцієнт передачі панічних настроїв;  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  є похідна, або швидкість передачі паніки (її розповсюдження). Ураховуючи рівність (6.4.1), динамічна модель (6.4.2) переписується

$$\dot{x}(t) = -\beta \cdot x(n + a - x), \quad x(t_0) = n \quad (6.4.3)$$

як задача Коші з початковою умовою — математична модель (ММ) динаміки процесу поширення паніки у суспільстві. Для неї елементарно записується аналітичний розв'язок

$$x(t) = \frac{n \cdot (n + a)}{n + a \cdot \exp\{\beta \cdot (n + a) \cdot t\}}, \quad (6.4.4)$$

який надає закон спадання чисельності потенційних носіїв паніки.

Із рівності (6.4.1) через вирахування виразу (6.4.4) впливає закон збільшення кількості панікуючих:

$$y(t) = \frac{(n + a) \cdot a \cdot \exp\{\beta \cdot (n + a) \cdot t\}}{n + a \cdot \exp\{\beta \cdot (n + a) \cdot t\}}. \quad (6.4.5)$$

Цей результат іншими міркуваннями було отримано в [155, с. 234]. Володіючи функціями  $x(t)$  і  $y(t)$ , легко розрахувати ймовірність поширення панічних слухів, яка виступає кількісною оцінкою рівня відповідного ризику.

Зазначимо, що через вплив засобів масової інформації реальний процес поширення паніки може відрізнятись від білінійного закону.

Для більш повного відтворення реальний подій припустимо існування функції  $z(t)$ , яка відповідає чисельності групи осіб з імунітетом до паніки, тобто тих, що вже придбали валюту ( $z(t_0) = z_0$ ). Вочевидь, виконується рівність

$$x + y + z = n + a + z_0 \equiv N. \quad (6.4.1a)$$

У випадку перевищення порогового рівня  $y^*$  паніки швидкість змінюваності тих, хто піддається панічним слухам, описується рівнянням (3.4.2). Швидкість змінюваності кількості тих, хто вже піддався впливу панічних слухів, тобто інфікованих, складається з прибутку ( $\beta \cdot x \cdot y$ ) і убутку ( $-\gamma \cdot y$ ), де величина  $\gamma$  — так званий коефіцієнт придбання валюти. Математично вищесказане записується:

$$\dot{y}(t) = \beta \cdot x \cdot y - \gamma \cdot y. \quad (6.4.6)$$

Оскільки з множини бажаючих лише частка купує валюту, то швидкість змінюваності чисельності таких осіб з імунітетом описується:

$$\dot{z}(t) = \gamma \cdot y. \quad (6.4.7)$$

Сукупність виразів (6.4.2), (6.4.6) і (6.4.7) утворює динамічну модель валютної паніки

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta \cdot x \cdot y \\ \dot{y} = \beta \cdot x \cdot y - \gamma \cdot y \\ \dot{z} = \lambda \cdot y \end{cases} \quad (6.4.8)$$

з початковими умовами:  $x(t_0) = n$ ;  $y(t_0) = a$ ;  $z(t_0) = z_0$ .

Стосовно ММ (4.4.8) відомо таке. Чисельність інфікованих і тих, хто піддається вірусу паніки, описуються [32] відповідними виразами:

$$y + x - \frac{\gamma}{\beta} \cdot \ln x = a + n - \frac{\gamma}{\beta} \cdot \ln n \quad (6.4.9)$$

$$\text{і} \quad x = n \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{\lambda} \cdot z\right\}. \quad (6.4.10)$$

Підстановкою (6.4.10) і виразу функції  $y(t)$ , що отримуються з (6.4.9), до третього рівняння динамічної моделі дістанемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\dot{z}(t) = \gamma \cdot \left[ (n + a) - z - n \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{\gamma} \cdot z \cdot t\right\} \right], \quad (6.4.11)$$

яке інтегрується числовими методами або за допомогою розв'язання нелінійної функції  $\exp\left\{-\frac{\beta}{\gamma} \cdot z \cdot t\right\}$  в ряд Маклорена. Підстановкою до рівності (6.4.10) або (6.4.9) наближеного розв'язку  $z(t)$  для кожного моменту часу матимемо числові значення функцій  $x(t)$  і  $y(t)$ .

Інша можливість проявляється в отриманні оцінки зверху для функції  $z(t)$ : має місце диференціальна нерівність

$\dot{z}(t) \leq \gamma \cdot [(n+a) - z]$  при нехтуванні для правої частини (6.4.11) від'ємним доданком  $n \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{\gamma} \cdot z \cdot t\right\}$ ; диференціальна нерівність легко інтегрується:

$$z(t) \leq (n+a) \cdot [1 - \exp\{-\gamma \cdot t\}] + z_0 \cdot \exp\{-\gamma \cdot t\}.$$

Таким чином, встановлені вище вирази функцій  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  від незалежної змінної  $t$  описують еволюцію конфліктної ситуації з плином часу.

Знайдемо єдиний розв'язок ММ, оскільки праві частини рівнянь динамічної моделі (6.4.8) задовольняють умовам відповідної теореми (функції  $f_i(x, y, z, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) неперервні разом зі своїми частинними похідними для деякої замкненої області.

Здійснюється редукція динамічної моделі (6.4.8): діленням першого рівняння системи (6.4.8) на її третє матимемо диференціальне рівняння з розділеними змінними  $\frac{dx}{dz} = -\frac{\beta}{\gamma} \cdot x$ ; його загальний інтеграл —  $\ln x = -\frac{\beta}{\gamma} \cdot z + c_1$ . Стала  $c_1$  інтегрування приймається такою:  $c_1 = \ln n + \frac{\beta}{\gamma} \cdot z_0$ . Тоді шуканий розв'язок набуває вигляду

$$x(z) = n \cdot \exp\left\{\frac{\beta}{\gamma} \cdot (z_0 - z)\right\} \quad (6.4.12)$$

після очевидних перетворень.

Діленням другого рівняння ММ (6.4.8) на її третє отримується диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot x - 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot n \cdot \exp\left\{\frac{\beta}{\gamma} \cdot (z_0 - z)\right\} - 1,$$

розв'язок якого записується:

$$y(z) = n \cdot (-1) \cdot \exp\left\{\frac{\beta}{\gamma} \cdot (z_0 - z)\right\} - z + c_2.$$

Константа  $c_2 = N \equiv f + n + z_0$  в силу припущень. Таким чином, отримується

$$y(z) = N - n \cdot \exp \left\{ \frac{\beta}{\gamma} \cdot (z_0 - z) \right\} - z. \quad (6.4.13)$$

Формули (6.4.12) і (6.4.13) являють собою закони змінюваності кількості учасників панічних подій залежно від кількості власників валюти. Вони вказують на те, що зі зростанням числа  $z$  власників валюти кількість  $y(z)$  жадаючих її набути і число  $x(z)$  схильних це зробити, спадають, що цілком зрозуміло і природньо.

Володіючи функціональними залежностями змінюваності числа учасників подій, на підставі класичного визначення ймовірності можна розрахувати числову міру еволюції процесу валютної паніки (ризикі різного характеру). Зокрема, одна з кількісних оцінок рівня ризику  $W$  може визначатися за виразом  $W = \frac{y(z)}{N}$ .

Отже, на підставі отриманих вище результатів, вибираючи числові параметри динамічної моделі, можна розглядати превентивні сценарії економічної безпеки суспільства у випадку ситуації валютної паніки.

#### **6.4.2. Аналітичне оцінювання динаміки ризику економічної еволюції з урахуванням корупції та тіньової економіки**

---

В центрі уваги будь-якого суспільства стоїть питання його економічної безпеки — викорінення потворних явищ корупції та тіньової економіки, якими супроводжується легальний економічний процес. В той же час вони є вічними супутниками економічного життя. Інтерес суспільства до вивчення соціально значимих (негативних) явищ неминучий, бо саме вони детермінують ступінь економічної безпеки і впливають на прийняття виважених управлінських рішень.

На базі аналогій між досліджуваною нами проблемою та відомою задачею з математичної біології [43] щодо співіснування популяцій трьох залежних один від одного видів пропонується

математична модель (ММ) динаміки взаємодії корупції, тіньової та легальної економік.

Попередньо приймемо таку гіпотезу: корупція живиться тіньовою економікою, котра, зокрема, співіснує з легальною економікою, водночас зростання останньої нічим не обмежується. Вважатимемо також, що корупція значно зменшується за відсутності тіньової економіки. Звичайно, висловлені вище припущення не відображають у всій повноті взаємозв'язки і взаємовпливи між корупцією і тіньовою економікою, які паразитують на тілі легально діючої економіки. Необхідно наголосити, що в науковій літературі вивченню цих складових економічного процесу приділяється ще недостатньо уваги.

Слушно синтезувати таку математичну модель (ММ) нелінійної парадигми еволюції економіки в координатах: корупція —  $N_1(t) = N_1$ , тіньова економіка —  $N_2(t) = N_2$  і легальна економіка —  $N_3(t) = N_3$ , яку можна представити у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку:

$$\begin{cases} \beta_1 \frac{dN_1}{dt} = (-\alpha_1 \beta_1 + a N_2) N_1 \\ \beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (-\alpha_2 \beta_2 - a N_1 + b N_3) N_2, \\ \beta_3 \frac{dN_3}{dt} = (\alpha_3 \beta_3 - b N_2) N_3 \end{cases} \quad (6.4.14)$$

де величини  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  відповідно є характерними проміжками часу стосовно релаксації змінних моделі;  $\alpha_i$  ( $i=1,2,3$ ),  $a, b$  — відповідні числові коефіцієнти моделі; вважатимемо, що  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b > 0$ . Приймемо також гіпотезу, що функції  $N_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) диференційовані, а їхні числові значення відповідають обсягам корупції, тіньової та легальної економік у деякий момент часу  $t$ .

Сутність системи рівнянь (6.4.14) є досить прозорою й очевидною. Дійсно, характер зростання обсягів легальної економіки є експоненціальним за відсутності тіньової економіки, що впливає з третього рівняння моделі. Водночас, зростання обсягів ті-



ншової економіки гальмує зростання обсягів легальної економіки, що відображається відповідним доданком  $-bN_2$ . Щодо другого рівняння системи (6.4.14), то за відсутності змінної  $N_3$  рівень обсягів тіньової економіки експоненційно спадає, оскільки з другого рівняння моделі випливає, що функція  $N_2$  є функцією експоненціального виду з від'ємним показником степеня. Насамкінець, аналізуючи перше рівняння системи (6.4.14), бачимо, що корупція  $N_1$  зникає, коли відсутня тіньова економіка (знову ж таки функція  $N_1$  експоненціального вигляду з від'ємним показником степеня).

Для функцій  $N_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), числові значення яких відображають обсяги корупції, тіньової та легальної економік, описуються такими виразами:

$$N_1(t) = N_1(t_0) \cdot \exp \left\{ \left( \frac{a}{\beta_1} \cdot \bar{N}_2 - \alpha_1 \right) \cdot (t - t_0) \right\}, \quad (6.4.15)$$

де  $\bar{N}_2$  — середнє значення обсягів тіньової економіки за період  $(t - t_0)$ ; зрозуміло, що зростання тіньової економіки сприяє зростанню обсягів корупції за рахунок доданка  $\frac{a}{\beta_1} \cdot \bar{N}_2$ :

$$N_2(t) = N_2(t_0) \cdot \exp \{ -\alpha_2 \cdot (t - t_0) \} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1 \cdot (t - t_0) \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{b}{\beta_2} \cdot \bar{N}_3 \cdot (t - t_0) \right\}, \quad (6.4.16)$$

де  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_3$  — середні величини обсягів корупції та легальної економіки (за період  $(t - t_0)$ ); перший експоненціальний множник  $\exp \{ -\alpha_2 \cdot (t - t_0) \}$  свідчить про спадання рівня обсягів тіньової економіки з плином часу, що є прикметою самоорганізації розглядуваної економічної системи. Другий співмножник  $\exp \left\{ -\frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1 \cdot (t - t_0) \right\}$  вказує на те, що корупція живиться за рахунок тіньової економіки, яка сплачує своєрідний податок

(від'ємний показник степеня). Третій експоненціальний співмножник засвідчує те, що тіньова економіка паразитує на тілі легальної економіки (співіснує з нею). Проаналізуємо аналітичний вираз стосовно динаміки обсягів легальної економіки:

$$\bar{N}_3(t) = N_3(t_0) \cdot \exp \left\{ \left( \alpha_3 - \frac{b}{\beta_3} \cdot \bar{N}_2 \right) \cdot (t - t_0) \right\}. \quad (6.4.17)$$

З (6.4.17) випливає, зокрема, що зростання обсягів тіньової економіки негативно впливає на зростання обсягів легальної економіки, зменшуючи ці обсяги за рахунок від'ємного доданка  $\frac{b}{\beta_3} \cdot \bar{N}_2$  експоненціальної функції.

Метод отримання вищенаведених аналогічних виразів для  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  продемонструємо на прикладі отримання виразу функції  $N_2$  як найбільш громіздкого. Друге рівняння ММ (6.4.14) можна подати у такому вигляді:

$$\frac{dN_2}{dt} = \left( -\alpha_2 - \frac{a}{\beta_2} N_1 + \frac{b}{\beta_2} N_3 \right) dt.$$

Інтегруючи його, матимемо вираз:

$$\ln \frac{N_2(t)}{N_2(t_0)} = -\alpha_2 \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^t \left( \frac{b}{\beta_2} N_3 - \frac{a}{\beta_2} N_1 \right) dt.$$

Користуючись теоремою про середнє для визначеного інтеграла, приводимо останній вираз до такого вигляду:

$$\ln \frac{N_2(t)}{N_2(t_0)} = -\alpha_2 \cdot (t - t_0) + \left( \frac{b}{\beta_2} \bar{N}_3 - \frac{a}{\beta_2} \bar{N}_1 \right) \cdot (t - t_0).$$

Потенціюючи останнє рівняння, записуємо остаточний результат (6.4.16):

$$N_2(t) = N_2(t_0) \cdot \exp\{-\alpha_2 \cdot (t - t_0)\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{a}{\beta_2} \cdot \bar{N}_1 \cdot (t - t_0)\right\} \cdot \exp\left\{\frac{b}{\beta_2} \cdot \bar{N}_3 \cdot (t - t_0)\right\},$$

де  $N_2(t_0)$  — початкова умова, або стартова величина, обсягів тіньової економіки.

Зазначимо, що від рівностей (6.4.15) — (6.4.17) можна перейти до оцінок зверху для обсягів корупції, тіньової та легальної економік, нехтуючи членами зі знаком мінус у рівняннях ММ (6.4.14). Відповідні нерівності матимуть вигляд:

$$N_1(t) \leq N_1(t_0) \cdot \exp\{\bar{N}_2 \cdot (t - t_0)\}; \quad (6.4.15a)$$

$$N_2(t) \leq N_2(t_0) \cdot \exp\{\bar{N}_3 \cdot (t - t_0)\}; \quad (6.4.16a)$$

$$N_3(t) \leq N_3(t_0) \cdot \exp\{\alpha_3 \cdot (t - t_0)\}. \quad (6.4.17a)$$

Зазначимо, що, зважаючи на нерівність (6.4.17a), аналітичні вирази оцінок (6.4.15a) і (6.4.16a) можна зробити більш зручними для аналізу, виключивши в них середні величини  $\bar{N}_3$  і  $\bar{N}_2$ .

Важливо також розглянути питання стосовно кількісного оцінювання рівня ризику взаємного співіснування відповідних обсягів тіньової та легальної економік, чинники яких сумісні, але можуть бути як залежними, так і незалежними.

Як один із показників кількісного оцінювання рівня ризику візьмемо ймовірність співіснування відповідних обсягів тіньової та легальної економік (оцінка зверху). Нехай подія  $A$  відповідає тіньовій економіці, а подія  $B$  — легальній економіці. З теореми додавання двох сумісних і незалежних подій має місце рівність [35]:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \quad (6.4.18)$$

де ймовірності настання тієї чи тієї події свідчитимуть про міру відповідного ризику. Зрозуміло, що події  $A$  і  $B$  утворюють повну групу подій. Рівень обсягів кожної з економік оцінюється для довільного моменту часу, використовуючи нерівності (6.4.16a) і (6.4.17a).

На підґрунті класичного визначення ймовірності справедливими будуть такі оцінки ймовірностей  $P(A)$  та  $P(B)$ :

$$P(A) = \frac{N_2}{N_2 + N_3} \text{ і } P(B) = \frac{N_3}{N_2 + N_3}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (6.4.18), одержимо:

$$P(A + B) = 1 - \frac{N_2 \cdot N_3}{(N_2 + N_3)^2}. \quad (6.4.18a)$$

Використовуючи добре відому числову нерівність  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , з якої випливає оцінка  $\frac{ab}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{4}$ , можна дійти висновку, що  $P(A + B) \leq 0,75$ . Ця нерівність інтерпретується таким чином: ймовірність незалежного співіснування легальної (ЛЕ) і тіньової (ТЕ) економік суспільства не може сягати менше від 0,75. Відповідно, для іншого випадку (унеможливлення зазначеного співіснування ЛЕ і ТЕ) рівень ймовірності такої події не може перевищувати 0,25. Очевидно, останню числову оцінку можна сприймати як міру ризику співіснування відповідних обсягів ЛЕ і ТЕ. Вона є критичною межею, перевищення якої сигналізує про незадовільний стан економічної структури суспільства.

Оскільки оцінки (6.4.16a) і (6.4.17a) функцій  $N_2$  і  $N_3$ , якими описуються обсяги тіньової та легальної економік, залежать від часу  $t$ , то цілком слушно говорити про динамічну кількісну оцінку рівня ризику відповідних обсягів тіньової економіки та легальної економіки.

Для сумісних і залежних подій формула (6.4.18) набуває такого вигляду:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B) \quad (6.4.18б)$$

де  $P_A(B)$  є умовна ймовірність події  $B$  за настання події  $A$ .

На завершення розглянемо ризик співіснування корупції, тіньової та легальної економік в суспільстві. Беручи до уваги попередні позначення, покладемо, що подія  $C$  відповідає корупції. Відповідна теорема для трьох сумісних подій  $C$ ,  $A$  та  $B$  записується так [35]:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ -P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC), \quad (6.4.19)$$

$$\text{де } P(A) = \frac{N_2}{N_1 + N_2 + N_3}; \quad P(B) = \frac{N_3}{N_1 + N_2 + N_3}; \quad P(C) = \frac{N_1}{N_1 + N_2 + N_3}.$$

Для випадку незалежних подій наступні три доданки легко розписуються (див. вищенаведене для формули (6.4.18)), а для останнього доданку  $P(ABC)$  можна скористатись оцінкою

$$\frac{abc}{(a+b+c)^3} \leq \frac{1}{27}, \text{ яка є наслідком добре відомої нерівності} \\ \frac{(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

У випадку сумісних і залежних подій формула (6.4.19) набуває вигляду: наступні її три доданки ( $P(AB)$ ,  $P(AC)$ ,  $P(BC)$ ) записуються аналогічно тому, як це було здійснено згідно з формулою (6.4.18б); останній доданок формули (6.4.19) для сумісних і залежних подій набуває вигляду

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A \cdot P_{AB}(C), \quad (6.4.20)$$

де величина  $P_{AB}(C)$  — умовна ймовірність  $C$ , ураховуючи те, що події  $A$  і  $B$  відбулися.

На підґрунті прийнятого концептуального положення щодо взаємного існування корупції, тіньової економіки і легально діючої економіки, запропонована математична модель (ММ) функціонування економічного механізму.

Отримані у дослідженні вирази для залежних змінних ММ дозволяють оцінити обсяги та ймовірності співіснування складових економічної еволюції, також розглянути окремо співіснування ймовірності відповідних обсягів тіньової та легальної економік, як один із показників кількісного оцінювання рівня ризику. Оскільки оцінки ймовірностей залежать від часу  $t$ , то можна говорити про динаміку числової міри ризику співіснування відповідних обсягів легальної, тіньової економіки та корупції.

Зважаючи на відсутність статистичної інформації про обсяги корупції та тіньової економіки, ще одне призначення результатів цієї наукової праці полягає в превентивному оцінюванні розгля-

нутих складових, орієнтуючи державні органи на відповідне, своєчасне та адекватне реагування стосовно зниження ступеня ризику та обсягів корупції та тіньової економіки.

---

## Висновки

---

У результаті проведення аналізу отриманих прикладних рішень моделювання еволюції економічної системи на основі лінійної та нелінійної парадигм, а також сучасних аналітичних підходів до оцінювання динаміки ризиків, слід сформулювати такі висновки.

1. Розглянуто лінійну парадигму моделювання економічної системи як базовий засіб аналізу складних макроекономічних категорій. Недоліки та значні узагальнення лінійних моделей розглянуті як поступки, які дозволяють модифікувати відомі математико-економічні моделі.

2. Удосконалено та модифіковано класичну модель Харрода — Домара. Враховано феномен запізнення, вплив суб'єктивних факторів на механічне зростання національного доходу. Також розроблено та описано випадок матричного узагальнення моделі Харрода — Домара, який сприяє багатофакторному аналізу та прогнозу складних макроекономічних систем.

3. На основі одновимірної моделі Харрода — Домара отримано рівняння об'єктивного визначення динаміки ризику економічної системи як міри загрози зміни економічного тренду. Розроблена концепція динаміки ризику базується на популярному в західній практиці методу стрес-тестування.

4. Рівняння динаміки ризику адаптовано до нелінійного апарату моделі економічного зростання Солоу. Новий підхід щодо оцінювання невизначеності зміни економічного тренду розроблений з метою згладжування недоліків моделі Солоу та надання їй більш повного економічного сенсу з позицій можливості моделювання слабо детермінованих систем із фактором невизначеності.

Попередній матеріал присвячений експериментальному економіко-математичному моделюванню складних економічних системи на підґрунті розробленого інструментарію числового відтворення еволюції динамічних систем, а також тестуванню

нового автономного апарату визначення міри динаміки ризику. Як результат, здійснено моделювання еволюції української економіки, а також проведено детальний аналіз динаміки ризику чотирьох країни світу: Канади, Італії, Японії та Польщі. Таким чином, після проведення конструктивного аналізу економік світу за допомогою економіко-математичних моделей виявлено таке.

1. Еволюція економічної системи є результатом взаємодії основних трьох ознак: структури, зростання та ризику. У даному дослідженні припускається, що будь-який економіко-математичний апарат, який здатний окремо змоделювати дані ознаки, є також спроможним відтворювати еволюційні процеси.

2. Нормалізація часових рядів може бути представлена темпами зростання до базового періоду. Основною вимогою, однак, є те, що дані мають бути попередньо позбавлені від інфляційного чинника.

3. Лінійний математичний апарат довів свою ефективність у точному відтворенні ознак еволюційності на монотонних ділянках економічного тренду. Нелінійна модель Солоу та її інтервальна адаптація продемонстрували точність при моделюванні довгострокових економічних процесів.

4. Експериментально досліджений феномен запізнення з позиції його впливу на точність лінійних моделей економічного зростання. Чисельні розрахунки економіки України довели факт зміни інтервалу запізнення як окремої ознаки трансформації народного господарства.

5. Динамічна траєкторія ризику визначена як ефективний інструмент моделювання поточних та майбутніх станів економічної системи. Також концепція динаміки ризику, розроблена у даному дослідженні, довела свою універсальність та гнучкість на прикладі застосування з лінійними та нелінійними економіко-математичними моделями для відтворення його динамічних характеристик для п'яти країн світу.

**П**роблема пізнання адаптивних (самоорганізуючих) механізмів функціонування економіки постає як першочергове завдання, щоб адекватно реагувати на виклики ринку.

У монографії на прикладі низки визначальних для макроекономіки процесів та явищ здійснюється математичне (якісне) і комп'ютерне (кількісне) моделювання нелінійної економічної динаміки, знання якої сприяє прийняттю адекватних управлінських рішень. Також на підґрунті математичних моделей (ММ) та інструментарію їх аналізу вдається пізнати іманентно притаманні адаптивні механізми економіки, прагнучи до керованого (регульованого) розвитку економічних подій замість спонтанної еволюції.

Невідпорний факт, що від загальноновживаного вербального осмислення економіки треба переходити до розгляду кількісних сценаріїв майбутнього розвитку — прогнозування характеру економічних подій у часі тобто змінюваність факторів економіки з плином часу і на фазових площинах, тобто взаємозалежності економічних показників між собою. Сценарії розвитку економічних подій одержуються єдиною можливим способом — математичним моделюванням динамічних процесів економіки, яке вимагає уміння будувати адекватні ММ і використовувати потужний апарат їх якісного та кількісного аналізу, котрий становить інструментарій моделювання економіки і сприяє ефективності процесу моделювання у цілому. Узагальнюючи, можна стверджувати, що такий підхід ставить метою відійти від традиції сприймати наслідки причин і перейти до їх передбачення, тобто готуватись до спричинених наслідків. Також з'являється можливість навчитися формувати належні причини, щоб одержувати потрібні наслідки.

Математичне моделювання економіки перш за все допускає значну варіацію параметрів і коефіцієнтів моделі, чим вибудовуються правдоподібні (з точки зору фахівців-економістів) сценарії розвитку подій, не виключаючи екстремальні варіанти та катастрофічного характеру. Саме так відслідковується певний зв'язок між причинами явища і наслідками їх сукупної дії, який у разі такого підходу глибоко вивчається. Тут найголовніше те, що від превалюючого в сучасній науці, зокрема економічній, традиційного прямолінійного зв'язку між категоріями «причина—наслідок» відбувається перехід



до сучасного і більш загального та значно багатшого за своєю перспективою способу — нелінійного багатогранного дослідження взаємовпливу зазначених категорій.

Математичне моделювання нелінійної макроекономічної динаміки, долучивши цілу низку наукових дисциплін (теоретична і прикладна економіка, економічний аналіз, синергетика, інформатика тощо), сприяє появі багатющої методології і потужного інструменту досліджень реальності економіки. Саме тому воно все глибше просякає у теорію та практику економічних досліджень. Але варто зауважити, що тут з'являються певні труднощі, пов'язані з оволодінням згадуваного арсеналу знань.

У моделюванні нелінійної економічної динаміки постають кілька наріжних проблем:

а) розроблення алгоритмізованої побудови динамічних рівнянь ММ;

б) розмежування моделі та її автора, щоб інші дослідники могли зіставити з власними результатами;

в) встановлення взаємозв'язків між моделями різних авторів для одного класу економічних явищ чи процесів.

Узагальнюючи, матеріал монографії доводить до висновку, що адаптивне наскрізно математичне моделювання економіки характеризується гнучкістю побудови, вивчення і застосування моделей для розв'язання задач аналізу, синтезу і прогнозування економічної дійсності. Йому притаманне таке:

а) поглиблений кількісний аналіз проблем економіки;

б) ефективне і прискорене досягнення кінцевої мети;

в) можливість формулювання і дослідження нових, раніше недоступних економічних задач, відкриваючи додаткові фактори коеволюції складових економіки.

Адаптивне економіко-математичне моделювання надає уявлення, як можна ініціювати процеси прискореного і самостимулюючого економічного зростання, виступаючи як засіб системних досліджень економічної теорії та розв'язання прикладних проблем економіки. Воно виступає тільки складовою, хоча дуже важливою і вкрай необхідною у прийнятті належних управлінських рішень, які б відповідали часу та обставинам подій у суспільстві.

Слушно, на наш погляд, завершити монографію словами Ч. Дарвіна: «Виживає не самий сильний або самий розумний, а самий пристосований до змін».

## **С**писок використаних джерел

---

1. Best Case, Worst Case: Modeling Language Spotlight // MG Taylor Corporation. — 1998. — April. [Remote resource]. — Web: [http://www.mgtaylor.com/mgtaylor/gl ashead/bestcase\\_wor stcase.htm](http://www.mgtaylor.com/mgtaylor/gl%20ashead/bestcase_worstcase.htm).
2. Buss, Samuel R., and Kim, Jin-Su. Selectively Damped Least Squares for Inverse Kinematics // In Journal of Graphics Tools. — 2015. — Vol. 10, No. 3. — P. 37-49.
3. Gianni De Nicolò, Andrea Gamba, Marcella Lucchetta. Microprudential Regulation in a Dynamic Model of Banking // The Review of Financial Studies. — 2014. — Vol. 27, No. 7. — P. 2097-2138.
4. Goodwin R. M. The non — linea accelerator and the persistence of business cycles // *Econometrica*. — 1951.
5. Google Public Data Explorer [Remote resource]. // Google inc. — 2016. — Web: <https://www.google.com/publicdata/directory>
6. Guidance on Model Risk Management: To the officer in charge of supervision at each federal reserve bank // US Federal Reserve System. — 2011. — April. — 5 p.
7. Lazzati, N., Menichini, A. A. A Dynamic Model of the Firm. Structural Explanations of Key Empirical Findings // *Financial Review*. — 2015. — Vol. 50, No. 3. P. 341-361.
8. OraSure Technologies, Inc. URL: <http://www.orasure.com/> (Last accessed: 27.06.2017).
9. Renn O. Typology of risks // *Journal of risk research*. — 2003. — 6 (4-6). — p. 511-524.
10. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth / Robert M. Solow // *The Quarterly Journal of Economics*. — 70 (1). — 1956. — P. 65-94.
11. Stress Testing and Scenario Analysis // International Actuarial Association. — Ontario. — 2013. — July. — 40 p.
12. U. S. Securities and Exchange Commission. URL: <http://www.sec.gov/> (Last accessed: 27.06.2017).
13. Аганин Ю.И. Хищник — жертва. Экономические приложения // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. — Екатеринбург: УГТУ — УПИ, 2008. — Вып. 4. — С. 10-17.

14. Аганин Ю. И. Оптимальное управление в динамических моделях монополии // *Вестник ГУУ*. — 2016. — №3. — С. 190-194.
15. Алексеев А. А. Практичні моделі макроекономіки / А. А. Алексеев, Д. А. Алексеев. — К: Наукова думка, 2006. — 266 с.
16. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987. — 158 с.
17. Андриевский Б. Р. Элементы математического моделирования в программных средах Matlab и Scilab / Б. Р. Андриевский, А. А. Фрадков. — СПб.: Наука, 2001. — 601 с.
18. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели: (Доклад на Всерос. конференции «Математики и общество. Математическое образование на рубеже веков.» Дубна, 18 — 22 сент. 2000г.) [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1156628&s>.
19. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 296 с.
20. Багриновский К. А. Моделирование процессов адаптации экономических систем / К. А. Багриновский, Н. Н. Тренев // *Экономика и математические методы*. — 1999. — Т. 35. — № 2. — С. 138-150.
21. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. — М.: Наука, 1985. — 185с.
22. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — Москва-Ижевск: Ин-тут компьютер. исслед., 2003. — 368с.
23. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М.: Наука, 1976. — 996 с.
24. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
25. Бескин Н. М. Замечательные дроби. — Мн.: Выш. Школа, 1980. — 128 с.
26. Биологическая кибернетика: Учеб. пособие для ун-тов / А. Б. Коган, Н. П. Наумов, В. Г. Режабек, О. Е. Чораян. — М.: Высш. шк., 1972. — 384 с.
27. Блякьер А. Анализ нелинейных систем. — М.: Мир, 1969. — 321 с.
28. Бобкова И. А. Экспериментальная микроэкономика: некоторые проблемы и подходы / И. А. Бобкова, М. И. Левин // *Экономика и математические методы*. — 1997. — Т. 33. — Вып. 1. — С. 13-25.

29. Богданов Ю. С. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие / Ю. С. Богданов, Ю. Б. Сыроид. — Мн.: Высш. школа, 1983. — 239 с.
30. Большой экономический словарь / Под ред. А. Н. Азрилияна — 5-е изд. доп. и перераб. — М.: Ин-т новой экономики, 2002. — 1280 с.
31. Бурак А. И. Моделирование экономического развития человеческого общества. — Режим доступа: // [http://www.library.mephi.ru/data/scientific\\_sessions/2003/7/086.html](http://www.library.mephi.ru/data/scientific_sessions/2003/7/086.html).
32. Бэйли Н. Математика в биологии и медицине. — М.: Мир, 1970. — 323 с.
33. Вабенко И. Н. Динамика неформальной экономической популяции в России // Экономика и математические методы. — 2003. — Т. 39. — № 1. — С. 120-122.
34. Василькова В. В. Порядок и хаос в развитии социальных систем. — СПб.: Изд-во «Лань», 1999. — 480 с.
35. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с.
36. Вероятность и математическая статистика: [Энциклопедия] / Под ред. Ю.В. Прохорова. — М.: Большая российская энциклопедия, 1999. — 910 с.
37. Верченко П. І. Дослідження інерційності українських цінних паперів за допомогою інструментарію ризикології / П. І. Верченко, І. Ф. Шатарська // Фінанси України. — 2007. — № 7. — С. 128-140.
38. Витлинский В. В., Коляда Ю. В. Адаптация и регуляризация как способы снижения риска в моделировании нелинейных экономических процессов // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: тр. междунар. науч. школы МАБР, (Санкт-Петербург, 22-25 июня 2004 г.). Санкт-Петербург: ГОУВПО «СПбГУАП», 2004. — С. 265-267.
39. Вітлінський В. В. Вплив лагу на чинники еволюції макроекономічної системи та оцінювання ризику на підґрунті матричної лінійної динамічної моделі / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, Т. О. Рожок // Емерджентні методи для емерджентної економіки: Монографія / За заг. ред. Соловійова В. М., Кібальник Л. О. — Черкаси: Видавець Вовчок О. Ю., 2017. — 324 с.
40. Вітлінський В. В. Зміна парадигми в сучасній теорії економікоматематичного моделювання / В. В. Вітлінський, А. В. Матвійчук // Економіка України — 2007. — №.11. — С. 35-43.

41. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник — К.: КНЕУ, 2005. — 438 с.
42. Волкова В. Н. Теория систем: Учеб. пособие / В.Н. Волкова, А.А. Денисова — М.: Высш. шк., 2006. — 511 с.
43. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. — М.: ИКИ, 2004. — 288 с.
44. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 286 с.
45. Вольтерра В. Математическая, теория борьбы за существования / Пер. с фр. — М.: Наука, 1976. — 286 с.
46. Гальчинський А. Теорія грошей: Навч. посібник. — К.: Основи, 1998.
47. Горкіна Л. П. Теорія економічного зростання: нобелівський аспект / Л. П. Горкіна, М. В. Довбенко // Економіка і прогнозування. — 2005. — №3. — С. 147-157.
48. Григоркив В. С., Буяк Л. М., Паучок В. К. Моделирование взаимодействия легальной и теневой экономик на макроуровне // Кибернетика и системный анализ.— 2008.— №1. — С. 127-136.
49. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике: элементарное введение: Учеб. пособие. — Изд. 2-е, испр. — М: Ком Книга, 2006. — 208 с.
50. Даніч В. М. Моделювання лавиноподібних процесів у соціально-економічних системах: Автореферат дис.. ... д-ра екон. наук / Київський нац. екон. ун-т ім. В. Гетьмана. — К., 2006. — 36 с.
51. Делокаров К. Х. Системная парадигма современной науки и синергетики // Общественные науки и современность — 2000. — № 6. — С. 110-118.
52. Дементьев М. Денежно — кредитная политика и инфляционные процессы в России. — Новосибирск: ИЭ и ООП СО РАН, 1994. — 21 с. — (Препринт № 127).
53. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
54. Дербенцев В. Д. Особливості інфляційних процесів в Україні // Вісник Київського національного торгово-економічного університету. — 2001. — Вип. 1. — С. 11-23.
55. Динамическая теория биологических популяций / Под. ред Р. А. Полуэктова — М.: Наука, 1974. — 365 с.

56. Динаміка економічного ризику на основі лагово-фрактальної модифікації рівняння Харрода — Домара [Текст]: матеріали наук.-практ. конф., Хмельницький, 11-12 листопада 2016 р.: тези доповідей / [Ю. В. Коляда, В. А. Бондар]. — Хмельницький. — 2016 — С. 156-159.

57. Добровольський О. А. Розробка динамічної моделі банку та її використання в стратегічному плануванні і управлінні: автореферат. — Дніпропетровськ., 2002. — 18 с.

58. Евстигнеев В. Р. Идеи И. Пригожина в экономике. Нелинейность и финансовые системы // Общественные науки и современность. — 1998. — № 1. — С. 112-121.

59. Евстигнеева Л. П. Методологические основы экономической синергетики: научный доклад / Л. П. Евстигнеева, Р. Н. Евстигнеев. — М.: Ин-т экономики РАН, 2007. — 64 с.

60. Егоров Д. Г. Зачем экономике синергетика? / Д. Г. Егоров, А. В. Егорова // Общественные науки и современность. — 2006. — № 3. — С. 149-154.

61. Забродский В. А. Адаптация экономических систем на основе упреждаемости // Экономическая кибернетика. — 2000. — №3-4. — С. 40-45.

62. Загальні тенденції тіньової економіки у I кварталі 2012 // Міністерство економічного розвитку і торгівлі України, 2012 // [www.me.gov.ua](http://www.me.gov.ua).

63. Зайцев В. Р. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Р. Зайцев, А. Д. Полянин. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

64. Занг В. Б. Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 1999. — 380 с.

65. Иванилов Ю. П. Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. — М.: Наука, 1979. — 304 с.

66. Иващенко П. А. Адаптация в экономике — Харьков: Вища шк., 1986. — 141 с.

67. Ісаєва Т. М. Математичне моделювання економічних систем: синергетичний підхід // Вісник Бердянськ. університету менеджменту і бізнесу — 2009. — № 4. — С. 27-34.

68. Казначеев В. П. Биосистема и адаптация. — Новосибирск: Наука, 1973. — 74 с.

69. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

70. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы / Пер. с англ. Ю. П. Гупало, А. А. Пионтковского. — М.: Мир, 1982. — 216 с.
71. Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии: Учеб. пособие для студентов химико-технол. вузов / В. В. Кафаров, А. И. Бояринов. — М.: 1969. — 564 с.
72. Качинський А. Б. Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи. — К.: ПНБ, 2004. — 472 с.
73. Кемени Д. Г. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения / Д. Г. Кемени, Д. Л. Снелл; ред. И. Б. Гутчин / Пер. В. Г. Миркин. — М.: Изд-во «Сов. радио,» 1972. — 192 с.
74. Клейнер Г. Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Экономика и математические методы. — 2001. — Т. 37. — № 3. — С. 111-126.
75. Климов В. И. Простейшая модель экономического развития общества / В. И. Климов, П. С. Ланда // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика — 1993. — Т. 1. — № 3-4. — С. 36-44.
76. Князева Е. Н. Синергетика как новое мировидение: диалог с И. Пригожиным / Е. Н. Князева, С. П. Курдюмов // Вопросы философии. — 1992. — №12. — С. 3-20.
77. Козацький В. П. Інфляція: вплив на економіку і шляхи подолання // Вісник економічної науки України. — 2005. — № 1(17) — С. 145-147.
78. Козик В. В. Застосування моделі Лоткі-Вольтерра для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції / В. В. Козик, Ю. І. Сидоров, І. Б. Сворцов, О. Б. Тарасовська // Актуальні проблеми економіки. — 2010. — № 2. — С. 252-260.
79. Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для студ. вузов. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 399 с.
80. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование: моделирование макроэкономических процессов и систем. — М.: ЮНИТИ — ДАНА, 2005. — 295 с.
81. Количественные методы в теории переходной экономики: [круглый стол] // Экономика и математические методы. — 2002. — Т. 34. — № 2. — С. 105-110.
82. Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей популяции // Проблемы кибернетики. — 1972. — Вып. 25. — С. 100-106.

83. Коляда Ю. В. адаптивна модель нелінійної динаміки функціонування комерційного банку / Ю. В. Коляда, А. О. Харламов // Моделювання та інформаційні системи в економіці: зб. наук. праць / відп. ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2012. — Вип. 87. — С. 176–189.

84. Коляда Ю. В. Адаптивна парадигма моделювання економіки // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. пр. / Відп. ред. В. К. Галіцин. — 2009. — Вип. 80. — С. 74-90.

85. Коляда Ю. В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки: монографія/ Ю. В. Коляда. — К.: КНЕУ, 2011 — 297 с.

86. Коляда Ю. В. Аналітичне моделювання коеволюції офіційної й нелегальної економік / Ю. В. Коляда, К. А. Семашко // Актуальні проблеми економіки. — 2016. — № 3. — С. 345-352. — Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape\\_2016\\_3\\_42](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2016_3_42)

87. Коляда Ю. В. Вивчення проблеми зайнятості на підставі математичної моделі // Вчені записки КНЕУ: Зб. наук. пр. / Відп. ред. А.Ф. Павленко. — К.: КНЕУ, 2006. — Вип. 8. — С. 165-170.

88. Коляда Ю. В. Динамічна траєкторія економічного ризику на підґрунті моделі Вальтерра — Лотки / Ю. В. Коляда, І. Ф.Шатарська / Моделювання та інформаційні системи в економіці: зб. наук. праць / відп. ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2018. — Вип. 96. — С. 130–136.

89. Коляда Ю. В. Дискретные рекуррентные реализации непрерывного аналога одного итеративного процесса решения нелинейных уравнений / Ю. В.Коляда, В. П.Сигорский // Кибернетика. — 1980. — №3. — с. 24-28.

90. Коляда Ю. В. Кінетичні моделі макроекономіки // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. пр. / Відп. ред. В. К. Галіцин. — 2007. — Вип. 76. — С. 129-141.

91. Коляда Ю. В. Кластер-процедура моделювання динаміки соціально-економічних явищ // Формування ринкової економіки: Зб. наук. пр. / Відп. ред. О. О. Беляєв. — 2009. — Вип. 21. — С. 541-551.

92. Коляда Ю. В. Комп'ютерне моделювання й аналіз розвитку фірми на підґрунті динамічної тривимірної моделі з використанням оптимізаційних методів / Ю. В. Коляда, Т. О. Рожок / Моделювання та інформаційні системи в економіці: зб. наук. праць / відп. ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2017. — Вип. 93. — С. 157–174.

93. Коляда Ю. В. Комп'ютерне моделювання поведінки фірми на ринку товарів // Формування ринкової економіки: Зб. наук. пр. / Відп. ред. О. О. Беляєв. — 2009. — Вип. 22. — С. 650-660.



94. Коляда Ю. В. Математичне моделювання інфляції в Україні / Ю. В. Коляда, С. І. Пертен // Економічна кібернетика. — 2011. — № 3. — С. 16-24.
95. Коляда Ю. В. Матричне узагальнення класичної моделі Харрода — Домара / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, В. А. Бондар // Прикладні аспекти прогнозування розвитку складних соціально-економічних систем: Монографія / за ред. О. І. Черняка, П. В. Захарченка. — Бердянськ: Видавець Ткачук О. В., 2015. — С. 30-40
96. Коляда Ю. В. Моделирование распределения капиталовложений как способ уменьшения социального риска // Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в сложных системах: Труды Международ. науч. шк. МАБР — 2006 (Санкт-Петербург, 4-8 июля, 2006г.) / ГОУ-ВПО «СПбГУАП». СПб., 2006. — 451с. — Библиогр.: С. 307-311.
97. Коляда Ю. В. Моделювання динаміки ризику на підґрунті моделі Солоу [Текст] / Ю. В. Коляда, В. А. Бондар // «Розвиток соціально-економічних систем в сучасних умовах» (м. Харків, 16-17 грудня 2016 р.). — Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2016.
98. Коляда Ю. В. Моделювання діяльності економічного агента // Вчені записки КНЕУ: Зб. наук. пр. / Відп. ред. А. Ф. Павленко. — К.: КНЕУ, 2009. — Вип. 11. — С. 287-293.
99. Коляда Ю. В. О принципе построения программ машинного анализа электронных схем / Ю. В. Коляда, В. П. Сигорский // Реф. информация о законч. НИР в вузах УССР. Радиоэлектр., автомат. и связь. — К.: Вища шк., 1976. — Вып. 9. — С. 47-48.
100. Коляда Ю. В. Оцінювання впливу зміни коефіцієнтів узагальненої моделі Вольтерра — Лотки на еволюцію соціально-економічних систем / В. О. Тукало, Ю. В. Коляда // Бізнес-Інформ. — 2012. — №3. — С. 67-71.
101. Коляда Ю. В. Про динаміку неформальної економічної популяції // Формування ринкової економіки: Зб. наук. пр. / Відп. ред. О. О. Беляєв. — Вип. 19. — 2008. — С. 351-356.
102. Коляда Ю. В. Проблемная адаптация численного анализа электронных схем. II. Двусторонние процессы / В. П. Сигорский, Ю. В. Коляда, Н.М. Колодницкий // Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. — 1987. — Т. 30. — №6. — с. 40-47.
103. Коляда Ю. В. Просторові моделі міграції трудових ресурсів // Вчені записки КНЕУ: Зб. наук. пр. / Відп. ред. А. Ф. Павленко. — К.: КНЕУ, 2008. — Вип. 10. — С. 247-253.

104. Коляда Ю. В. Ризики настання кризового стану на підґрунті ортодоксальних моделей економічної динаміки [Текст] / Ю. В. Коляда, В. А. Бондар // Молодий вчений. — 2016. — №12. — С. 80-93.

105. Коляда Ю. В. Розвинення моделі Гудвіна // Вчені записки КНЕУ: Зб. наук. пр. / Відп. ред. А. Ф. Павленко. — К.: КНЕУ, 2007. — Вип. 9. — С. 247-253.

106. Коляда Ю. В. Синергетичне моделювання економічного стану суспільства // Економіка і держава. — 2010. — № 4. — С. 28-31.

107. Коляда Ю. В. Узагальнена модель Харрода-Домара, відтворююча спадкоємність економіки // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. пр. / Відп. Ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2007. — Вип. 75. — С. 263-271.

108. Коляда Ю. В. Узагальнення моделювання флуктуацій економіки // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. пр. / Відп. ред. В. К. Галіцин. — К.: КНЕУ, 2006. — Вип. 74. — С. 260-270.

109. Коляда Ю. В. Управляемое достижение динамической траектории наилучшего экономического роста как мера снижения риска социальной незащищенности / Ю. В. Коляда, И. В. Юн / Моделирование и Анализ Безопасности Риска в Сложных Системах: Тр. Междунар. науч. шк. МАБР — 2005 (Санкт-Петербург, 28 июня — 1 июля, 2005 г.) / ГОУВПО «СПбГУАП» СПб., 2005. — С. 343-347.

110. Комаров С. И. Представление знаний, содержащихся в математических моделях экономики / С. И. Комаров, А. А. Петров, И. Г. Поспелов, Л. Я. Поспелова // Теория и системы управления. — 1995. — № 5. — С. 81-99.

111. Кондратьев Н. Д. Проблемы экономической динамики. — М.: Экономика, 1989. — 460 с.

112. Концепції та інструментарій нелінійної економічної динаміки / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, А. Я. Махоткіна // Моделювання та інформаційні системи в економіці: зб. наук. праць. — К.: КНЕУ, 2011. — Вип. 84. — С. 29-35.

113. Конюховский П. В. Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. — СПб.: Питер, 2001. — 224 с.

114. Кораблін С. Динаміка інфляції в постсоціалістичних країнах // Банківська справа. — 1999. — № 2. — С. 12-16.

115. Кораблін С. Інфляція та економічне зростання для України, що вийшла із зони інфляційного придушення виробництва, монетарне

зниження цін сьогодні не безпечніше, ніж чотири роки тому для Аргентини // Дзеркало тижня. — 2003. — 15-21 березня. — С. 2-4.

116. Кочура Є. В. Моделювання макроекономічної динаміки: Навч. посібник / Є. В. Кочура, В. М. \ Косарев. — К.: Центр навч. літератури, 2003. — 236 с.

117. Кривцун Л. А. Структурні зрушення в нерівноважних економічних системах: (Монографія) — Харків: НТУ «ХПІ», 2007. — 428 с.

118. Кудрявцев И. К. Введение в теорию неравновесных химических систем. — М., 2000. — 290 с.

119. Кудрявцев И. К. Модели неравновесных химических систем и возможности экономической интерпретации / И. К. Кудрявцев, Л. А. Асланов // Философия хозяйства: Альманах Центра обществ. наук экономическ. факультета МГУ — М.: Изд-во ИТРК. — 2001. — № 13. — С. 210-218.

120. Кузнецов Б. Гипотеза синергетического рынка в свете феноменологической теории фазовых переходов Л. Ландау // Вопросы экономики. — 2005. — № 8. — С. 22-31.

121. Кузнецов В. В. Об устойчивости рыночного положения фирмы / В. В. Кузнецов, В. В. Фирсакова // Экономика и математические методы. — 2000. — Т. 36. — № 3. — С. 136-139.

122. Куснер Ю. С. Принципы движения экономической системы / Ю. С. Куснер, И. Г. Царев. — М.: Физматлит, 2008. — 193 с.

123. Лабутин В. К. Очерки адаптации в биологии и технике. — Л.: Энергия, 1970. — 190 с.

124. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2003. — 192 с.

125. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — 496 с.

126. Лебедев В. В. Математическое и компьютерное моделирование экономики / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. — М.: НВТ Дизайн, 2002. — 256 с.

127. Левин М. И. Коррупция как объект математического моделирования / М. И. Левин, М. Л. Цирик // Экономика и математические методы. — 1998. — Т. 34. — Вып. 3. — С. 40-61.

128. Левин М. П. Математические модели коррупции / М. И. Левин, М. Л. Цирик // Экономика и математические методы — 1998. — Т. 34. — Вып. 4. — С. 34-55.

129. Левицкий Е. М. Адаптация в моделировании экономических систем. — Новосибирск: Наука, 1977. — 208 с.
130. Ляшенко О. І. Контролювання хаосу шляхом зміни структури економіки // Економіка: проблеми теорії та практики: Зб. наук. пр. — Вип. 195. — В 4 т. — Т. 4. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2004. — С. 978-986.
131. Ляшенко О. І. Математичне моделювання динаміки відкритої економіки: (Монографія). — Рівне: Волинські обереги, 2005. — 360 с.
132. Ляшенко О. І. Модель економічного зростання Солоу-Свена з екзогенним капіталоінтенсивним технологічним прогресом / О. І. Ляшенко // Інвестиції: практика та досвід. — 2013. — № 15. — С. 14-16.
133. Ляшенко О. І. Стабілізація траєкторії в моделях оптимального економічного зростання // Економічна кібернетика. — 2004. — № 3-4 (27-28). — С. 83-90.
134. Магницкий Н. А. Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 320 с.
135. Маевский В. Экономическая эволюция и экономическая генетика // Вопросы экономики. — 1994. — № 4. — С. 28-35.
136. Майнцер К. Сложность и самоорганизация. Возникновение новой науки и культуры на рубеже века // Вопросы философии. — 1997. — № 3. — С. 48-61.
137. Малинецкий Г. Г. Нелинейная динамика и проблемы прогноза / Г. Г. Малинецкий, С. П. Курдюмов // Вестник РАН. — 2001. — Т. 71. — №3. — с. 210-224.
138. Манків Г. Н. Макроекономіка: підручник для України: пер. з англ. / Г. Н. Манків; Наук. ред. пер. С. Панчишин. — К.: Основи, 2000. — 588 с.
139. Маршалл А. Принципы экономической науки. — М.: Прогресс, 1993.
140. Математическая биофизика / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. — М.: Наука, 1984. — 304 с.
141. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, И. Г. Болтянский, Р. В. Галекелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
142. Математические модели трансформационной экономики: учеб. пособие / Т. С. Клебанова, Е. В. Раевнева, К. А. Стрижиченко, Л. С. Гурьянова, Н. А. Дубровина. — Харьков: ИД «ИНЖЭК», 2004. — 280 с.

143. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндруса и Р. Мак-Лоуна — М.: Мир, 1979. — 248 с.
144. Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах // Под ред. Н. Н. Моисеева и А. А. Петрова — М.: Наука, 1986. — 296 с.
145. Математичні моделі та методи ринкової економіки [Текст] : навч. посіб. / В. В. Вітлінський, О. В. Піскунова. — К. : КНЕУ, 2010. — 531 с.
146. Мельник Л. Г. Экономика развития: (Монография). — Сумы: ИТД «Университетск. кн.», 2006. — 662 с.
147. Меншиков С. М. Длинные волны в экономике. Когда общество меняет кожу? / С. М. Меншиков, Л. А. Клименко. — М.: Междунар. отношения, 1982. — 189 с.
148. Меншуткин В. В. Математическое моделирование популяций и сообществ животных. — Л.: Наука, 1971. — 196 с.
149. Меркулов В. И. Опыт применения термодинамических методов в экономике // Экономика и математические методы. — 2002. — Т. 38. — № 2. — С. 97-104.
150. Методы эволюционной и синергетической экономики в управлении: (Монография) / В. А. Довлятовский, А. И. Касаков, И. К. Коханенко. — Отрадная: РГЭУ — ИУБ и П, 2001. — 577 с.
151. Милованов В. П. Неравесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. — М.: УРСС, 2001. — 263 с.
152. Милованов В. П. Синергетика и самоорганизация: экономика. Биофизика — М.: Ком Книга, 2005. — 168 с.
153. Михалевич М. В. Моделирование переходной экономики: модели, методы, информационные технологии / М. В. Михалевич, И. В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2005. — 670 с.
154. Могилевский В. Д. Методология систем: вербальный подход / отд-ние экон. РАН; науч.-ред. Совет изд-ва «Экономика» — М.: ОАО «Издательство» Экономика, 1999. — 251 с.
155. Моделирование экономической динамики: Учебное пособие / Клебанова Т. С., Дубровина Н. А., Полякова О. Ю. и др. — Харьков: Издательский Дом «ИНЖЭК», 2004. — 244 с.
156. Моделювання економічної динаміки : навч. посібн. / Г. В. Лавінський, О. С. Пшенишнюк, С. В. Устенко, О. Д. Шарапов. — К.: Вид-во «Атіка», 2006. — 276 с.

157. Моделювання економічної динаміки: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. — Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 244 с.

158. Модифікації моделей нелінійної динаміки та сценарії розвитку банку / Ю. В. Коляда, А. О. Харламов, В. І. Трохановський // Моделювання та інформаційні системи в економіці: зб. наук. праць. — К.: КНЕУ, 2012. — Вип. 86. — С. 236-244.

159. Моисеев Н. Н. Естественнонаучное знание и гуманитарное мышление // Обществен. Науки и современность. — 1993. — Вып. 2. — С. 63-75.

160. Моисеев Н. Н. Логика динамических систем и развитие природы и общества // Вопросы философии. — 1997. — № 4. — С. 3-10.

161. Мочерний С. Синергетичний перехід в економічному дослідженні // Економіка України. — 2001. — № 5. — С. 44-51.

162. Мясников А. А. Предпосылки возникновения синергетических эффектов в экономике // Экономическая теория. — 2008. — Т. 8 (45). — С. 101-104.

163. Накоряков В. Е. Кинетическая модель инфляции / В. Е. Накоряков, В. Г. Гасенко // Экономика и математические методы. — 2004. — Т. 4. — № 1. — С. 129-134.

164. Наumenкова С. В. Основні тенденції розміщення грошової маси та їх вплив на формування грошово-кредитної політики // Вісник Національного банку України. — 2006. — № 1. — С. 19-26.

165. Неймарк Ю. И. Математическая модель «производители — продукт — управленцы» // Динамика систем. Динамика, стохастичность, бифуркации: Межвузовск. сб. науч. тр. — Горький, 1990. — С. 84-90.

166. Нелінійна динаміка процесу функціонування комерційного банку на підґрунті неперервної математичної моделі / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, А. О. Харламов // Бізнес-інформ: наук. журнал. — Х., 2012. — Вип. № 3. — С. 29-34.

167. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. — М.: Высш. шк., 1986. — 304 с.

168. Нуреев Р. Теория развития: новые модели экономического роста (вклад человеческого капитала) // Вопросы экономики — 2000. — № 9. — С. 136-146.

169. Нусратуллин В. Экономический анализ с позиций неравновесия, синергетики и кибернетики // Общество и экономика. — 2004. — № 9. — С. 5-28.

170. Овечко А. В. Модели и методы адаптивной экономики / А. В. Овечко, В. Л. Петренко, В. Н. Тимохин. — Донецк: Юго-Восток, 2003. — 155 с.
171. Олемской О. І. Синергетична модель економічної структури суспільства / О. І. Олемской, О. В. Ющенко, С. В. Кохан // Журн. фіз. досліджень — 2004. — Т. 8. — № 3. — С. 268-278.
172. Опыт математического моделирования экономики / А. А. Петров, И. П. Поспелов, А. А. Шананин. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 544 с.
173. Орлова Е. В. Управление хаотической динамикой цен в модели ценовой конкуренции // Автоматика и телемеханика. Москва: НАУКА, 1936, 2017. — № 1. С. 19-34.
174. Осипов Ю. Принципы хозяйственной самоорганизации. — М.: 1993.
175. Основы физической экономики / Д. С. Конторов, Н. В. Михайлов, Ю. С. Саврасов. — М.: Радио и связь, 1999. — 184 с.
176. Офіційний веб-сайт Державної казначейської служби України [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://www.treasury.gov.ua/main/uk/doccatalog/list?currDir=146477>
177. Офіційний веб-сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>
178. Пашнюк Л. О. Теоретичні аспекти адаптації підприємства до ринкових умов господарювання // Актуальні проблеми економіки — 2007. — № 1. — С. 76-81.
179. Петренко В. Л. Проблемы адаптации в условиях сложной динамики экономических систем / В. Л. Петренко, В. Н. Тимохин // Экономическая кибернетика. — 2001. — №1-2. — С. 4-15.
180. Петрик О. І. Аналіз чинників інфляції та її прогнозування в Україні / О. І. Петрик, Ю. О. Половнєв // Економіка і прогнозування — 2003. — № 1. — С. 86-103.
181. Пешель М. Моделирование сигналов и систем. — М.: Мир, 1981. — 300 с.
182. Плотинский Ю. М. Модели социальных процессов: Учеб. пособие для вузов. — М: Логос, 2001. — 296 с.
183. Полтерович В. М. Факторы коррупции // Экономика и математические методы. — 1998. — Т. 34. — Вып. 3. — с. 30-39.

184. Полянин А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. О. Зайцев. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.
185. Пономаренко О. І. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі: Навч. посібник / О. І. Пономаренко, В. О. Пономаренко. — К.: Либідь, 1995. — 240 с.
186. Поспелов И. Г. Модель современной экономики России: методы, технология, результаты / Материалы Международ. форума «Проекты будущего: междисциплинарный подход.» 16-19 октября 2006г., Звенигород. — 7 с. (rosperi@ccas.ru)
187. Пригожин И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой / И. Пригожин, Ч. Стенгерс. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 321 с.
188. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. — М.: Инжевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 198 с.
189. Пугачова Е. Г. Самоорганизация социально-экономических систем: Учеб. пособие / Е. Г. Пугачова, К. Н. Соловьевко. — Иркутск: Изд-во БГУЭП — 2003. — 196 с.
190. Растрингин Л. А. Адаптация сложных систем. — Рига: Зинатне, 1981. — 375 с.
191. Ризниченко Г. Ю. Биофизическая динамика продукционных процессов / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. — М.: Ин-т компьютер. исслед., 2004. — 464 с.
192. Ровинский Р. Е. Синергетика и процессы развития сложных систем // Вопросы философии. — 2006. — № 2. — С. 162-169.
193. Рожок Т. О. Моделювання динаміки функціонування фірми в умовах ринкової економіки // Глобальні та національні проблеми економіки. — 2015. — № 5. — С. 1123-1128.
194. Рузавин Г. Самоорганизация и организация экономики и поиск новой парадигмы экономической науки // Вопросы экономики. — 1993. — № 11. — С. 8-18.
195. Рымкевич В. В. Экономическая теория рисков: монография / В. В. Рымкевич. — Мн.: БГЭУ, 2001. — 208 с.
196. Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций. — М.: Сов. радио, 1977. — 304 с.
197. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2005. — 320 с.



198. Сигорский В. П. Проблемная адаптация систем автоматизированного проектирования / Автоматизация проектирования в электронике. — К.: «Техника», 1982. — Вып. 26. — С. 3-14.
199. Сигорский В. П. Проблемная адаптация численного анализа электронных схем. 3. Организация адаптивного процесса (адаптор) / В. П. Сигорский, Ю. В. Коляда, Н. М. Колодницкий // Изв. вузов СССР Радиоэлектроника. — 1988. — Т. 31. — № 6. — С. 11-18.
200. Симо К. Изучение динамических систем с использованием компьютера // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2 — С. 243-254.
201. Симо К. Изучение динамических систем с использованием компьютера / К. Симо // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2. — С. 243-254.
202. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы / В. И. Шаповалов, В. Ф. Каблов, В. А. Башмаков, В. Е. Авакумов // Синергетика и проблемы теории управления / Под ред. А. А. Колесникова — М.: Физматлит, 2004. — С. 454-464.
203. Смит Дж. Модели в экологии. — М.: Мир, 1976. — 179 с.
204. Срагович В. Г. Управление и адаптация. — М.: Знание, 1985. — 48 с.
205. Сугаков В. Й. Основы синергетики. — К.: Обереги, 2001. — 287 с.
206. Табак Д. Оптимальное управление и математическое программирование / Д. Табак, Б. Куо. — М.: Наука, 1975. — 280 с.
207. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.
208. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. — 1952. — Т. 31. — № 3. — С. 575-583.
209. Тонда А. Нелинейные колебания механических систем. — М.: Мир, 1973. — 334 с.
210. Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.
211. Тувакова Н. В. Ретроспективний аналіз інноваційних моделей економічного зростання // «Фінансовий простір», 2011. — №3. — С.49-53.
212. Филиппова І. Г. Україна: моделі економічного зростання / В. Г. Сумцов, І. Г. Филиппова // Формування ринкової економіки: збірник наукових праць. — Спец. випуск: у 3 т. — Т. 3. — К.: КНЕУ, 2010. — С. 336–346.

213. Фрактальна модифікація рівняння Харрода — Домара та динаміка економічного ризику [Текст]: перш. нац. наук.-метод. конф., КНЕУ, 30 вересня — 1 жовтня 2016 р.: тези доповідей / [Ю. В. Коляда, В. А. Бондар]. — КНЕУ. — 2016 — С. 182-185
214. Фрисман Е. Я. Эволюционные последствия конкуренции / Е. Я. Фрисман, В. И. Двойченков // Моделирование биологических сообществ. — Владивосток: ДВНЦАН СССР, 1975. — С. 117-126.
215. Хайтун С. Д. Социальная эволюция, энтропия и рынок // Общественные науки и современность. — 2000. — № 6. — С. 94-109.
216. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройств. — М.: Мир, 1985. — 365 с.
217. Хансен Э. Экономические циклы и национальный доход. — М.: Экономика, 1997. — В 2-х т. — 746 с.
218. Харрод Д. Теория экономической динамики. — М.: Экономика, 1997.
219. Харрод Р. Ф. К теории экономической динамики. — М.: Гелиос АРВ, 1999. — 160 с.
220. Хачатрян С. Р. Прикладные методы математического моделирования экономических систем: Научно-метод. пособие. — М.: Изд-во «Экзамен», 2002. — 192 с.
221. Хотянов Э. Н. Адаптация в системах обработки экономической информации / Э. Н. Хотянов, М. Г. Побуковский. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 102 с.
222. Христиановский В. В. Динамическая модель поведения субъектов на рынке продукции / В. В. Христиановский, В. П. Щербина // Новое в экономической кибернетике: Сб. науч. ст. / Под ред. Ю. Г. Лысенко; Донецкий нац. ун-т // Моделирование нелинейной динамики экономических систем. — Донецк: ДонГУ, 2005. — № 1 — С. 70-78.
223. Царьков В. А. О Динамике Ферхюльста и динамике роста капитала в экономике // Экономика и математические методы. — 2008. — Т. 44. — № 3 — С. 92-97.
224. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968. — 400 с.
225. Чернавский Д. С. О проблемах физической экономики / Д. С. Чернавский, Н. И. Старков, А. В. Щербаков // Успехи физических наук. — 2002. — Т. 172. — № 9 — С. 1045-1066.
226. Черненко О. Л. Дослідження взаємозв'язку між інвестиціями в основний капітал і валовою доданою вартістю в економіці України [Текст]

/ О. Л. Черненко // Актуальні проблеми економіки. — 2013. — № 9. — С. 75-81. — Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape\\_2013\\_9\\_12](http://nbuv.gov.ua/UJRN/ape_2013_9_12)

227. Чернов В. П. Математическое и компьютерное моделирование экономической динамики. — СПб.: Наука, 2001. — 224 с.

228. Чистилин Д. К. Самоорганизация мировой экономики. — М.: Экономика, 2004. — 240 с.

229. Что такое математическая биофизика. (Кинетические модели в биофизике) / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. — М.: Просвещение, 1971. — 135 с.

230. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. — М.: Физматлит, 2000. — 294 с.

231. Шевченко И. Г. Порядок и хаос рынка акционерного капитала России. / И. Г. Шевченко // — М.: ООО Журнал «Управление персоналом», 2003. — 216 с.

232. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. — 2-е изд., испр. — М.: Дело, 2002. — 440 с.

233. Шурғалина И. Н. Реформирование российской экономики. Опыт анализа в свете теории катастроф. — М.: «Российская политическая энциклопедия», 1997. — 221 с.

234. Экономико-математический энциклопедический словарь / Гл. ред. В.И. Данилов-Данильянц. — М.: Большая российская энциклопедия: Издат. ДОМ «ИНФРА-М», 2003. — 688 с.

235. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс / Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 243с.

236. Яковец Ю. В. Циклы. Кризисы. Прогнозы. — М.: Наука, 1999. — 448 с.

237. Янковский И. Генезис математических моделей банка // Банковский весник. — Минск, 2008. — С. 27-30.

238. Яновский Л. П. Контролирование хаоса в моделях экономического роста // Экономика и математические методы. — 2002. — Т. 38. — № 1. — с. 16-23.

## Додаток А

Таблиця А.1

Статистичні дані та результати моделювання ВВП та міри загрози його зростання для Канади, Італії, Японії та Польщі за 2000 – 2013 рр.

| Рік           | Стат. ВВП | Класична модель | Фрактальне рівняння, $k > 0$ | Фрактальне рівняння, $k < 0$ | $r(t)$ , % |
|---------------|-----------|-----------------|------------------------------|------------------------------|------------|
| 1             | 2         | 3               | 4                            | 5                            | 6          |
| <i>Канада</i> |           |                 |                              |                              |            |
| 2000          | 1,000     | 1,000           | 1,000                        | 1,000                        | 0,000      |
| 2001          | 0,992     | 1,080           | 1,082                        | 1,078                        | 8,884      |
| 2002          | 1,019     | 1,167           | 1,177                        | 1,156                        | 14,447     |
| 2003          | 1,202     | 1,261           | 1,285                        | 1,234                        | 4,834      |
| 2004          | 1,378     | 1,362           | 1,411                        | 1,313                        | 1,109      |
| 2005          | 1,575     | 1,471           | 1,559                        | 1,392                        | 6,298      |
| 2006          | 1,774     | 1,590           | 1,735                        | 1,472                        | 9,617      |
| 2007          | 1,973     | 1,717           | 1,945                        | 1,552                        | 11,373     |
| 2008          | 2,088     | 1,855           | 2,200                        | 1,633                        | 8,207      |
| 2009          | 1,855     | 2,004           | 2,516                        | 1,714                        | 14,002     |
| 2010          | 2,184     | 2,165           | 2,914                        | 1,795                        | 7,810      |
| 2011          | 2,407     | 2,339           | 3,427                        | 1,877                        | 5,083      |
| 2012          | 2,464     | 2,527           | 4,108                        | 1,959                        | 5,776      |
| 2013          | 2,560     | 2,730           | 5,044                        | 2,041                        | 9,592      |
| <i>Італія</i> |           |                 |                              |                              |            |
| 2000          | 1,000     | 1,000           | 1,000                        | 1,000                        | 0,000      |
| 2001          | 1,018     | 1,068           | 1,070                        | 1,064                        | 9,609      |
| 2002          | 1,109     | 1,141           | 1,149                        | 1,124                        | 4,928      |
| 2003          | 1,375     | 1,219           | 1,239                        | 1,181                        | 23,936     |
| 2004          | 1,575     | 1,302           | 1,343                        | 1,236                        | 36,297     |
| 2005          | 1,623     | 1,390           | 1,462                        | 1,288                        | 30,504     |
| 2006          | 1,701     | 1,485           | 1,602                        | 1,338                        | 27,178     |
| 2007          | 1,930     | 1,586           | 1,768                        | 1,387                        | 36,519     |
| 2008          | 2,094     | 1,694           | 1,966                        | 1,433                        | 37,644     |
| 2009          | 1,914     | 1,810           | 2,208                        | 1,479                        | 7,384      |
| 2010          | 1,861     | 1,933           | 2,507                        | 1,522                        | 16,503     |
| 2011          | 1,994     | 2,065           | 2,887                        | 1,565                        | 23,334     |
| 2012          | 1,815     | 2,205           | 3,382                        | 1,607                        | 74,790     |
| 2013          | 1,866     | 2,355           | 4,050                        | 1,647                        | 105,328    |

Продовження табл. А.1

| 1             | 2     | 3     | 4     | 5     | 6        |
|---------------|-------|-------|-------|-------|----------|
| <i>Японія</i> |       |       |       |       |          |
| 2005          | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0        |
| 2006          | 0,956 | 1,028 | 1,029 | 1,000 | 36,6442  |
| 2007          | 0,960 | 1,056 | 1,063 | 1,000 | 44,82507 |
| 2008          | 1,070 | 1,086 | 1,101 | 1,000 | 10,6643  |
| 2009          | 1,103 | 1,116 | 1,147 | 1,000 | 16,23434 |
| 2010          | 1,197 | 1,147 | 1,202 | 1,000 | 47,99524 |
| 2011          | 1,283 | 1,179 | 1,270 | 1,000 | 69,32703 |
| 2012          | 1,312 | 1,212 | 1,360 | 1,000 | 60,29106 |
| 2013          | 1,097 | 1,246 | 1,485 | 1,000 | 79,31527 |
| <i>Польща</i> |       |       |       |       |          |
| 2000          | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0        |
| 2001          | 1,111 | 1,103 | 1,105 | 1,097 | 1,804816 |
| 2002          | 1,158 | 1,216 | 1,225 | 1,194 | 8,886945 |
| 2003          | 1,269 | 1,341 | 1,363 | 1,289 | 9,028109 |
| 2004          | 1,480 | 1,480 | 1,523 | 1,384 | 3,483423 |
| 2005          | 1,778 | 1,632 | 1,710 | 1,478 | 20,66865 |
| 2006          | 2,006 | 1,800 | 1,928 | 1,572 | 25,50598 |
| 2007          | 2,503 | 1,985 | 2,186 | 1,665 | 46,15097 |
| 2008          | 3,099 | 2,189 | 2,492 | 1,757 | 62,89766 |
| 2009          | 2,550 | 2,414 | 2,859 | 1,849 | 15,3459  |
| 2010          | 2,784 | 2,663 | 3,303 | 1,940 | 11,65026 |
| 2011          | 3,064 | 2,937 | 3,844 | 2,031 | 5,518129 |
| 2012          | 2,901 | 3,239 | 4,512 | 2,121 | 19,11885 |
| 2013          | 3,070 | 3,572 | 5,346 | 2,211 | 30,74759 |

Джерело: розрахунки авторів на основі [5]

## Додаток Б

Таблиця Б.1

Статистичні дані та результати моделювання і прогнозу ВВП та міри загрози його зростання для Канади, Італії, Японії та Польщі за 2000 – 2017 рр.

| Рік           | Фактична<br>капітало-<br>забезпече-<br>ність | Модель<br>Солоу, $k(t)$ | Нижня<br>межа | Верхня<br>межа | $r(t)$ , % |
|---------------|----------------------------------------------|-------------------------|---------------|----------------|------------|
| 1             | 2                                            | 3                       | 4             | 5              | 6          |
| <i>Канада</i> |                                              |                         |               |                |            |
| 2000          | 7,937                                        | 8,712                   | 8,370         | 9,067          | 36,769     |
| 2001          | 7,743                                        | 9,527                   | 8,795         | 10,321         | 27,713     |
| 2002          | 7,373                                        | 10,384                  | 9,210         | 11,708         | 15,427     |
| 2003          | 7,427                                        | 11,283                  | 9,614         | 13,240         | 7,426      |
| 2004          | 7,970                                        | 12,223                  | 10,007        | 14,929         | 5,699      |
| 2005          | 8,486                                        | 13,206                  | 10,388        | 16,788         | 3,253      |
| 2006          | 11,064                                       | 14,231                  | 10,755        | 18,829         | 20,867     |
| 2007          | 17,422                                       | 15,298                  | 11,109        | 21,068         | 38,229     |
| 2008          | 24,190                                       | 16,409                  | 11,448        | 23,519         | 24,851     |
| 2009          | 19,101                                       | 17,562                  | 11,772        | 26,200         | 42,934     |
| 2010          | 24,408                                       | 18,759                  | 12,082        | 29,127         | 32,944     |
| 2011          | 29,540                                       | 19,999                  | 12,375        | 32,320         | 27,101     |
| 2012          | 31,887                                       | 21,282                  | 12,653        | 35,798         | 27,315     |
| 2013          | 40,252                                       | 22,609                  | 12,915        | 39,581         | 20,140     |
| 2014          |                                              | 23,980                  | 13,160        | 43,694         | 30,969     |
| 2015          |                                              | 25,394                  | 13,390        | 48,159         | 29,208     |
| 2016          |                                              | 26,852                  | 13,603        | 53,002         | 27,317     |
| 2017          |                                              | 28,353                  | 13,801        | 58,250         | 25,294     |
| <i>Італія</i> |                                              |                         |               |                |            |
| 2000          | 25,944                                       | 28,296                  | 25,096        | 31,904         | 19,700     |
| 2001          | 26,065                                       | 28,884                  | 24,861        | 33,559         | 24,134     |
| 2002          | 26,537                                       | 29,473                  | 24,618        | 35,285         | 25,733     |
| 2003          | 25,114                                       | 30,061                  | 24,367        | 37,086         | 44,696     |
| 2004          | 25,132                                       | 30,650                  | 24,110        | 38,964         | 50,968     |
| 2005          | 25,949                                       | 31,239                  | 23,847        | 40,922         | 49,602     |
| 2006          | 27,569                                       | 31,828                  | 23,579        | 42,964         | 41,364     |
| 2007          | 43,452                                       | 32,418                  | 23,306        | 45,092         | 42,589     |
| 2008          | 44,341                                       | 33,007                  | 23,028        | 47,310         | 41,371     |
| 2009          | 43,306                                       | 33,597                  | 22,747        | 49,621         | 32,890     |

Продовження табл. Б.1

| 1             | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2010          | 44,826 | 34,186 | 22,462 | 52,030 | 33,818 |
| 2011          | 44,724 | 34,776 | 22,174 | 54,540 | 28,472 |
| 2012          | 38,281 | 35,366 | 21,884 | 57,154 | 6,469  |
| 2013          | 37,584 | 35,956 | 21,592 | 59,878 | 16,763 |
| 2014          |        | 36,546 | 21,297 | 62,714 | 29,876 |
| 2015          |        | 37,137 | 21,002 | 65,668 | 33,379 |
| <i>Японія</i> |        |        |        |        |        |
| 2006          | 34,288 | 35,088 | 34,085 | 36,120 | 4,752  |
| 2007          | 34,250 | 35,892 | 33,869 | 38,035 | 9,941  |
| 2008          | 38,097 | 36,700 | 33,643 | 40,036 | 6,604  |
| 2009          | 39,544 | 37,513 | 33,405 | 42,127 | 8,993  |
| 2010          | 43,185 | 38,330 | 33,157 | 44,311 | 20,612 |
| 2011          | 46,423 | 39,151 | 32,899 | 46,592 | 28,767 |
| 2012          | 46,835 | 39,977 | 32,632 | 48,974 | 25,758 |
| 2013          | 38,633 | 40,806 | 32,357 | 51,461 | 16,956 |
| 2014          |        | 41,639 | 32,074 | 54,057 | 6,851  |
| 2015          |        | 42,476 | 31,783 | 56,766 | 8,469  |
| 2016          |        | 43,316 | 31,486 | 59,593 | 10,263 |
| <i>Польща</i> |        |        |        |        |        |
| 2008          | 8,405  | 7,812  | 7,491  | 8,147  | 13,933 |
| 2009          | 7,873  | 8,225  | 7,562  | 8,946  | 9,672  |
| 2010          | 9,784  | 8,643  | 7,619  | 9,803  | 21,921 |
| 2011          | 8,331  | 9,065  | 7,663  | 10,723 | 20,700 |
| 2012          | 8,269  | 9,492  | 7,694  | 11,710 | 34,651 |
| 2013          | 9,064  | 9,923  | 7,713  | 12,768 | 25,965 |
| 2014          |        | 10,359 | 7,721  | 13,900 | 8,706  |
| 2015          |        | 10,800 | 7,718  | 15,113 | 11,396 |
| 2016          |        | 11,244 | 7,705  | 16,409 | 14,459 |

Джерело: власні розрахунки на основі [5]

*Наукове видання*

**КОЛЯДА Юрій Васильович**

# **АДАПТИВНА ПАРАДИГМА МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ**

**Монографія**

*Видання друге, перероблене і доповнене*

Редактор *В. Македон*  
Художник обкладинки *О. Покорницька*  
Коректор *В. Македон*  
Верстка *С. Лозова, Т. Мальчевська*

Підп. до друку 05.09.19. Формат 60×84/16. Папір офсет. № 1.  
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсетний. Ум.-друк. арк. 20,91.  
Обл.-вид. арк. 23,81. Наклад 300 пр. Зам. 19-5555.

Державний вищий навчальний заклад  
«Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»  
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)

Тел./факс (044) 537-61-41; тел. (044) 537-61-44  
E-mail: [publish@kneu.kiev.ua](mailto:publish@kneu.kiev.ua)