

2. *Kenneth D. L.* Forecasting new adoptions: A comparative evaluation of three techniques of parameter estimation. [Text] / D. L. Kenneth, R. P. Dinesh, M. L. Sheila // *Advances in Business and Management Forecasting*. — 2009. — v.6. — P. 81–91.

3. *Srinivasan V.* Nonlinear least squares estimation of new product diffusion models [Text] / V. Srinivasan, C. H. Mason // *Marketing Science*. — 1986. — v.5(2). — Pp. 169–178.

4. *Lenk P. J.* New models from old: forecasting product adoption by Hierarchical Bayes procedure [Text] / P. J. Lenk, A. Rao // *Marketing Science*. — 1990. — v.9(1). — Pp. 42–53.

5. *Robinson B.* Dynamic Price Models for New Product Planning [Text] / B. Robinson, C. Lakhani // *Management Science*. — 1975. — v.10. — Pp. 1113–1122.

6. *Horsky D.* Advertising and the diffusion of new products [Text] / D. Horsky, L. S. Simon // *Marketing Science*. — 1983. — v.2. — Pp. 1–18.

7. *Kalish S.* A New Product Adoption Model with Pricing, Advertising, and Uncertainty [Text] / S. Kalish // *Management Science*. — 1985. — v.31. — Pp. 1569–1585.

8. *Bass F. M., Jain D., Krishnan T.* (1994). Why the Bass model fits without decision variables [Text] / F. M. Bass, D. Jain, T. Krishnan // *Marketing Science*. — 1994. — v.13. — Pp. 204–223.

9. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, 4-е изд. — М. : Наука, 1983. — 393 с.

10. <http://www.wolfram.com/mathematica/> [Електронний ресурс]

Стаття надійшла до редакції 15.06.2014 р.

УДК 519.866:330.115

Бойчук М. В., к.ф.-м.н., доцент,

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича

Семчук А. Р., к.ф.-м.н., доцент,

Чернівецький національний торговельно-економічний інститут

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ ІЗ НЕЛІНІЙНИМ КРИТЕРІЄМ, ЗАПІЗНЕННЯМ І ВІНЕРІВСЬКИМ І ПУАССОНІВСЬКИМ ПРОЦЕСАМИ

АНОТАЦІЯ. Запропоновано стохастичну модель однопродуктової макроекономіки зростання із інвестиційним запізненням і вінерівським і пуассонівським процесами, проведено її дослідження та на модельному прикладі проведено числове моделювання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стохастична модель, вінерівський і пуассонівський процеси, магістральне керування, праве керування, стохастична та се-

редня магістраль, стохастична та середня права траєкторія, правий момент перемикання керування.

АННОТАЦИЯ. Предложенная стохастическая модель однопродуктовой макроэкономики роста с инвестиционным запаздыванием и винеровским и пуассоновским процессами, проведено ее исследование и на модельном примере проведено численное моделирование.

ABSTRACT. A stochastic model of a single-component macroeconomy of growth with nonlinear criterion, delay, Wiener and Poisson processes was proposed and analyzed and an example was used to carry out numerical modeling.

Постановка проблеми. Актуальним є як у теоретичному, так і практичному плані дослідження стохастичних моделей однопродуктової макроекономіки зростання із інвестиційним запізненням, вінерівським і пуассонівським процесами і нелінійним критерієм мети.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] проведено дослідження стохастичної моделі однопродуктової макроекономіки зростання без інвестиційного запізнення при лінійному за невинерівським споживанням критерієм мети, а в [2] — стохастичної моделі однопродуктової макроекономіки зростання з вінерівським процесом, з інвестиційним запізненням і лінійним за невинерівським споживанням критерієм мети без урахування таких основних показників як виробниче споживання та валова продукція — немає повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання [3]. Для дослідження стохастичних моделей використовувались стохастичні достатні умови оптимальності.

Постановка завдання. Провести дослідження стохастичної моделі однопродуктової макроекономіки зростання із нелінійним критерієм мети, інвестиційним запізненням і вінерівським і пуассонівським процесами при однорідній степеня $v \in (0; 2)$ макровиробничій функції.

Виклад основного матеріалу. Спершу сформулюємо припущення для побудови детермінованої повного циклу моделі однопродуктової макроекономіки зростання із інвестиційним запізненням, а потім на її основі формалізуємо стохастичну модель.

Детермінована модель. Сформулюємо припущення для побудови детермінованої моделі.

1. Валова продукція X у момент часу $t - \tau$ (t — часова змінна, τ — інвестиційне запізнення) є сумою кінцевої продукції $Y(t - \tau)$ і виробничого споживання $W(t - \tau)$

$$X(t - \tau) = Y(t - \tau) + W(t - \tau), \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

Нехай виробниче споживання $W(t - \tau)$ прямо пропорційне валовій продукції $X(t - \tau)$ з коефіцієнтом $a = \text{const} > 0$, $a \in (0; 1)$

$$W(t - \tau) = aX(t - \tau), \quad t \in [t_0, T].$$

Тоді кінцевий випуск рівний

$$Y(t - \tau) = (1 - a)X(t - \tau), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

2. Кінцевий випуск продукції $Y(t - \tau)$ складається з валових інвестицій $I(t - \tau)$, невиробничого споживання $C(t - \tau)$, урядових затрат $U_r(t - \tau)$, оподаткування $O_p(t - \tau)$, витрат, виділених на боротьбу із забрудненням навколишнього середовища $Z(t - \tau)$ і витрат на сальдо (експорт мінус імпорт) $S_a(t - \tau)$

$$Y(t - \tau) = I(t - \tau) + C(t - \tau) + U_r(t - \tau) + O_p(t - \tau) + Z(t - \tau) + S_a(t - \tau), \\ t \in [t_0, T].$$

Нехай сумарні величини урядових затрат U_r , оподаткування O_p , витрат на боротьбу із забрудненням Z і витрат на сальдо S_a складають частину $w = \text{const} > 0$, $w \in (0; 1)$ від кінцевого випуску Y

$$U_r(t - \tau) + O_p(t - \tau) + Z(t - \tau) + S_a(t - \tau) = wY(t - \tau), \quad t \in [t_0, T].$$

Тоді сумарні валові інвестиції $I(t - \tau)$ та невиробниче споживання $C(t - \tau)$ дорівнюють

$$I(t - \tau) + C(t - \tau) = (1 - w)Y(t - \tau), \quad t \in [t_0, T].$$

Припустимо, що невиробниче споживання $C(t - \tau)$ є частиною від $(1 - w)Y(t - \tau)$ з коефіцієнтом $s \in [0; 1]$

$$C(t - \tau) = s(t - \tau)(1 - w)Y(t - \tau) = (1 - w)(1 - a)s(t - \tau)X(t - \tau), \\ t \in [t_0, T], \quad (3)$$

де s — норма споживання.

Тоді валові інвестиції $I(t - \tau)$ дорівнюють

$$I(t - \tau) = (1 - w)(1 - s(t - \tau))Y(t - \tau) = (1 - w)(1 - a)(1 - s(t - \tau))X(t - \tau), \\ t \in [t_0, T]. \quad (4)$$

3. На валову продукцію $X(t - \tau)$ накладається обмеження [3]

$$0 \leq X(t - \tau) \leq F(K(t - \tau), L(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

Виробнича функція $F(K, L)$, $K \geq 0$, $L \geq 0$ залежить від розмірів капіталу K і робочої сили L і має такі властивості [3]: двічі непе-

первно-диференційовна, монотонно зростаюча, увігнута по кожній змінній при $K > 0, L > 0$ та однорідна степеня $\nu \in (0;2)$ [3]:

$$F(K, L) = L^\nu F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^\nu f(k),$$

де $k = K/L$ — фондомісткість, $f(k \geq 0)$ — питома виробнича функція з властивостями: двічі неперервно-диференційовна, монотонно зростаюча та вгнута при $k \geq 0$ [3].

Слід зауважити, що питома виробнича функція f може бути неперервною, кусково-лінійною, монотонно зростаючою та вгнутою.

4. Робоча сила $L(t - \tau)$ підпорядкована експоненціальному закону $L(t - \tau) = L_0 e^{n(t - \tau - t_0)}$ з відомими початковим станом робочої сили $L_0 = \text{const} > 0$ та темпом зростання $n = \text{const}$, $t \in [t_0, T]$.

5. Амортизаційні відрахування $A(t)$ прямо пропорційні капіталу $K(t)$

$$A(t) = \mu K(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

де $\mu \in (0;1)$ — норма амортизації.

6. Сумарні чистий прибуток $J(t) = \dot{K}(t)$ ($\dot{K}(t) \equiv dK(t)/dt$) та амортизаційні відрахування $A(t)$ складають валові інвестиції $I(t - \tau)$ [3]:

$$\dot{K}(t) + \mu K(t) = I(t - \tau), \quad t \in [t_0, T]. \quad (7)$$

Введемо питомі показники: $x = X/L$, $k = K/L$.

З використанням рівності

$$\dot{k} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\bullet} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L} \frac{K}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

співвідношення (1)–(7) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) + (\mu + n)k(t) &= [1 - s(t - \tau)](1 - a)(1 - w)x(t - \tau)e^{-n\tau}, \\ 0 \leq s(t - \tau) &\leq 1, \quad 0 \leq x(t - \tau) \leq L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0-\tau)} f(k(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (8)$$

Співвідношення (8) описують детерміновану модель однопродуктової макроекономіки зростання із інвестиційним запізненням у питомих показниках.

Стохастична модель. Нехай на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ з потоком σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\} \subset \sigma$ та з множиною

елементарних подій Ω і з мірою (ймовірностями) P задано випадковий процес $\{k(t) \equiv k(t, \omega), \omega \in \Omega\}$, який описується стохастичним диференціальним рівнянням у формі Іто вигляду [4]

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) + (\mu + n)k(t) &= (1 - a)(1 - w)[1 - s(t - \tau)] \times \\ &\times x(t - \tau, k(t - \tau))e^{-n\tau} + \alpha(t)\dot{\xi}(t) + \beta(t)\dot{\eta}(t), \\ 0 \leq x(t - \tau, k(t - \tau)) &\leq L_0^{v-1} e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)} f(k(t - \tau)), \\ 0 \leq s(t - \tau) &\leq 1, \quad t \in [t_0, T], \\ k(\Theta) &= \varphi(\Theta), \quad \varphi \in \mathcal{F}_\Theta, \quad \Theta \in [t_0 - \tau, t_0], \quad k(T) \geq k_T, \quad (9) \end{aligned}$$

де $\{\xi(t) \equiv \xi(t, \omega), \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}$ — $\mathcal{F}_t$ — вимірний стандартний вінерівський процес на $[t_0, T]$, φ — кусково-неперервна функція на $[t_0 - \tau, t_0]$ і характеризує передісторію руху системи, α і β — кусково-неперервні на $[t_0, T]$; $\{\eta(t) \equiv \eta(t, \omega), \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}$ — $\mathcal{F}_t$ — вимірний пуассонівський процес із математичним сподіванням $M\eta(t) = \lambda(t - t_0)$, $\lambda \equiv \text{const}$; $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

До моделі (9) випишемо критерій мети

$$\begin{aligned} M_{t, \psi} \int_t^T U(L_0(1 - a)(1 - w)s(t - \tau)e^{n(t-t_0-\tau)} \times \\ \times x(t - \tau, \psi))e^{-\delta(t-t_0)} dt \rightarrow \max_{s, x}, \quad (10) \end{aligned}$$

де $M_{t, \psi}$ — умовне математичне сподівання, яке обчислюється при умові, що траєкторія $k(y - \tau)$ збігається з деякою кусково-неперервною функцією $\psi(y)$ при $y \leq t$, тобто $k(t - \tau) \equiv \psi(t)$, $x(t - \tau) \equiv x(t - \tau, k(t - \tau))$, $t \in [t_0, T]$; $U(C \geq 0) \geq 0$ — функція корисностей із властивостями: двічі неперервно-диференційована, монотонно зростаюча, вгнута та $U(0) = 0$ [3].

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб із множини допустимих керувань системи (9) вибрати керування за нормою споживання s і за валовою продукцією x , які б надавали скалярному функціоналу (10) максимального значення.

Дослідження математичної моделі. За стохастичними достатніми умовами оптимальності [5] треба розв'язати рівняння Беллмана ($\psi(t) \equiv k(t - \tau)$)

$$\inf_{s,x} R(t,k,s,\psi,V) \equiv \inf_{s,x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} V + [-(\mu+n)k + (1-a)(1-w)(1-s)xe^{-n\tau}] \times \right. \\ \times \frac{\partial}{\partial k} V + 0.5\alpha^2(t) \frac{\partial^2}{\partial k^2} V + \lambda[V(t,k+\beta,\psi) - V(t,k,\psi)] - \\ \left. - e^{-\delta(t-t_0)} U(L_0(1-a)(1-w)sxe^{n(t-t_0-\tau)}) \right\} = 0, \\ V(T,k_T,\psi(T)) = 0, \quad \forall \psi(T) \geq 0. \quad (11)$$

При пошуку найменшого значення (11) по s можливі випадки:

I) якщо $\partial R/\partial s < 0$, то $s = 1$, оскільки функція R — монотонно спадна за s і найменшого значення на $[0; 1]$ приймає при $s = 1$;

II) якщо $\partial R/\partial s > 0$, то $s = 0$, функція R — монотонно зростаюча та найменшого значення приймає при $s = 0$;

III) якщо $\partial R/\partial s = 0$, то s довільне з $[0; 1]$ та виконується необхідна умова оптимальності:

$$\partial V/\partial k + L_0 e^{(n-\delta)(t-t_0)} U'(L_0(1-a)(1-w)sxe^{n(t-t_0-\tau)}) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (12)$$

Конкретизуємо ці випадки.

Випадок I. У цьому випадку $s = 1$ — відсутнє накопичення капіталу. Для визначення магістрального керування s_M і відповідної магістралі k_M маємо два рівняння, одне із яких є рівнянням руху капіталу системи (9), а друге — $s = 1$, а невідомих дві s і k . Ступінь вільності дорівнює $(2 - 2 = 0)$ нулеві. Тому магістральним керуванням є $s_M(t - \tau) = 1$, $t \in [t_0, T]$. Тоді з (11) маємо задачу оптимізації за змінною x

$$\inf_x \{-U(C)\}, C(t - \tau) = L_0(1-a)(1-w)xe^{n(t-t_0-\tau)}, \\ 0 \leq x(t - \tau) \leq L_0^{v-1} e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)} f(k(t - \tau)),$$

розв'язком якої при монотонно зростаючій функції $U(C \geq 0)$ є магістральне керування за валовою продукцією

$$x_{\text{маг}}(t - \tau) = L_0^{v-1} e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)} f(k(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T]. \quad (13)$$

Випадок II. Тут $s = 0$ — споживання відсутнє.

Використовуючи рівність $U(0) = 0$ і необхідну умову оптимальності (12) при $s = 0$ (нерівність $\partial V/\partial k < 0$), для частинної похідної $\partial R/\partial x$ при $s = 0$ одержимо нерівність

$$\partial R/\partial x = (1-a)(1-w)e^{-n\tau} \partial V/\partial k < 0,$$

яка дозволяє стверджувати, що функція R — монотонно спадна і найменшого значення приймає при $x = x_{\text{маг}}$ за формулою (13).

Випадок III. Для цього випадку $\partial R/\partial s = 0$, S довільне з $[0; 1]$ і виконується рівність (12). За змінною x виділимо задачу оптимізації

$$(1-s)(1-a)(1-w)e^{-n\tau} \frac{\partial V}{\partial k} x - e^{-\sigma(t-t_0)} U(C) \rightarrow \inf_{0 \leq x \leq L_0^{v-1} e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)} f(\psi)}.$$

Із використанням рівності (12) похідна $\partial R/\partial x$ є від'ємною, відповідно R — монотонно спадна по x і найменшого значення R отримує при $x = x_{\text{маг}}$ за формулою (13). Підставимо (13) у рівняння Беллмана (11) і (12).

Система (9) має одне рівняння руху капіталу, а невідомих — дві s і k . Ступінь вільності дорівнює $(2 - 1 = 1)$ одиниці, який будемо заповнювати однією з двох оптимізаційних величин $\tilde{s}$ і $\tilde{k}$. Це оправдано тим, що оптимізаційні величини $\tilde{s}$ і $\tilde{k}$ є рівноправними та середніми інтегральними. Тому можливих є два підвипадки.

Спершу визначимо ці оптимізаційні величини. Для цього невідому функцію V будемо шукати у вигляді

$$V(t, k, \psi) = L_0 e^{(n-\delta)(t-t_0)} l k(t) - L_0 l e^{(n-\delta)(T-t_0)} k_T, \quad t \in [t_0, T], \quad (14)$$

де довільна стала $l < 0$ оскільки $\partial V/\partial k < 0$. Вибір сталої l буде наведено нижче.

Підставимо (14) у рівняння (11) і (12). Отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення оптимізаційних величин $\tilde{s}$ і $\tilde{k}$:

$$\begin{aligned} l + U'(L_0^v(1-a)(1-w)s(t-\tau)e^{vn(t-t_0-\tau)} f(k(t-\tau))) &= 0, \\ l[-(\mu + \delta)k(t) + (1-a)(1-w)(1-s(t-\tau))L_0^{v-1}e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau} \times \\ f(k(t-\tau))] + \lambda l\beta - L_0^{-1}e^{-n(t-t_0)}U(L_0^v(1-a)(1-w) \times \\ \times s(t-\tau)e^{vn(t-t_0-\tau)} f(k(t-\tau))) &= 0, \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Оскільки $l < 0$, $U(C \geq 0) \geq 0$, $U'(C > 0) > 0$, $U''(C > 0) < 0$ і $f(k \geq 0) \geq 0$, $f'(k > 0) > 0$, $f''(k > 0) < 0$, то система рівнянь (15) має неперервно-диференційовний розв'язок $\tilde{s}(t-\tau)$ і $\tilde{k}(t)$, $t \in [t_0, T]$, який можна знайти сумісним використанням методу

кроків [6] та одного з чисельних методів розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь [7]. Вибором сталої l можна домогтися того, щоб $s \in [0;1]$.

Розглянемо підвипадки.

Підвипадок III-1. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{s}$. Тоді магістральне керування за нормою споживання $s_{\text{маг}}(t - \tau) = \tilde{s}(t - \tau)$, $t \in [t_0, T]$.

Підвипадок III-2. Ступінь вільності заповнимо оптимізаційною величиною $\tilde{k}$. Тоді за $\tilde{k}$ із рівняння руху капіталу системи (9) і виконанні рівностей для стандартного вінерівського ξ і пуассонівського η процесів [4]:

$$M\dot{\xi}(t) = (M\xi(t))^{\bullet} = 0, \quad M\dot{\eta}(t) = (M\eta(t))^{\bullet} = \lambda, \quad t \in [t_0, T] \quad (16)$$

визначаємо керування за нормою споживання

$$s^*(t - \tau) = 1 - [\tilde{k}(t) + (\mu + n)\tilde{k}(t) - \lambda\beta(t)] \times \\ \times (1 - a)^{-1} (1 - w)^{-1} L_0^{1-\nu} e^{(1-\nu)n(t-t_0-\tau)} f^{-1}(\tilde{k}(t - \tau)),$$

$t \in [t_0, T]$. Тоді магістральне керування за нормою споживання обчислюється за формулою:

$$s_{\text{маг}}(t - \tau) = \{0 \text{ при } s^* \leq 0, 1 \text{ при } s^* \geq 1, s^*(t - \tau) \text{ при } s^* \in (0;1)\}, \\ t \in [t_0, T].$$

За визначеними магістральними керуваннями за нормою споживання $s_{\text{маг}}$ і за валовою продукцією $x_{\text{маг}}$ системи (9) знаходимо відповідну стохастичну магістраль $k_{\text{маг}}(t)$, $t \in [t_0, T]$. А середня — при $\alpha(t) = 0$, $\dot{\eta}(t) = \lambda$, $t \in [t_0, T]$, що впливає з рівності (16) і початковій умові $k(\Theta) = M\phi_0(\Theta)$, $\Theta \in [t_0 - \tau, t_0]$. Але $f(k \geq 0) \geq 0$, $f'(k > 0) > 0$, $f''(k > 0) < 0$, α і β — кусково-неперервні, $s_{\text{маг}}$ — кусково-неперервна на $[t_0, T]$, а ϕ_0 — кусково-неперервна на $[t_0 - \tau, t_0]$. Тому система (9) має єдиний кусково-диференційовний розв'язок $k_{\text{маг}}$ у сенсі стохастичної еквівалентності [8,9], який можна визначити одним із чисельних методів [9,10].

Таким чином, задача керування (9)-(10) без обмеження на кінцевий стан системи має чотири магістральних процеси $\{s_{\text{маг}}(t - \tau), x_{\text{маг}}(t - \tau), k_{\text{маг}}(t), t \in [t_0, T]\}$. Це означає, що система (9) — (10) має чотири економічних режими для вибору пріори-

тетного процесу на магістральному періоді серед процесів споживання та накопичення капіталу.

При виконанні нерівності для кінцевого стану середньої магістралі $Mk_{\text{маг}}(T) \geq k_T$ магістральні керування за нормою споживання $s_{\text{маг}}$ і за валовою продукцією $x_{\text{маг}}$ та відповідна стохастична і середня магістраль за капіталом $k_{\text{маг}}$ є оптимальними, тобто складають оптимальний процес. У випадку виконання нерівності $Mk_{\text{маг}}(T) < k_T$ необхідно проводити побудову правого керування за нормою споживання $s_{\text{ПР}}$, відповідної правої траєкторії за капіталом $k_{\text{ПР}}$ і правого моменту перемикавання керування $\zeta_{\text{ПР}}$.

Праве керування за нормою споживання. Для вибраного економічного режиму середня права траєкторія повинна монотонно зростати, а для цього необхідне виконання нерівності

$$-(\mu + n)k(t) + (1 - a)(1 - w)L_0^{v-1}e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau} \times \\ \times f(k(t-\tau))(1-s(t-\tau)) + \lambda\beta(t) > 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (17)$$

Із нерівності (17), обмежень на керування за нормою споживання і стан системи сформуємо задачу нелінійного програмування для визначення кусково-неперервного правого керування за нормою споживання $s_{\text{ПР}}$

$$\max(-y(t)), \quad -(\mu + n)k(t) + (1 - a)(1 - w)L_0^{v-1}e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau} \times \\ \times f(k(t-\tau))(1-s(t-\tau)) + \lambda\beta(t) \geq \varepsilon, \quad 0 \leq s(t-\tau), \quad (18) \\ y \geq 0, \quad s(t-\tau) + y(t) = 1, \quad Mk_{\text{маг}}(t) \leq k(t) \leq k_T, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

де $\varepsilon > 0$ — задане досить мале число. Слід зауважити, що задачу (18) методом кроків [6] можна звести до задачі лінійного програмування на кожному кроці та розв'язати, яку можна одним із чисельних методів [11]. Крім того, при розв'язуванні задачі (18) можна визначити правий момент перемикавання $\zeta_{\text{ПР}}$, але з можливою великою похибкою.

Праві траєкторія та правий момент перемикавання керування. Середня права траєкторія за капіталом $k_{\text{ПР}}^{(c)}$ і правий момент перемикавання керування $\zeta_{\text{ПР}}$ визначаються з такої задачі за правим керуванням $s_{\text{ПР}}$

$$\dot{k}(t) = -(\mu + n)k(t) + (1 - a)(1 - w)L_0^{v-1}e^{(v-1)n(t-t_0-\tau)-n\tau} \times \\ \times f(k(t-\tau))[1 - s_{\text{ПР}}(t-\tau)] + \lambda\beta(t), \quad t \in [\zeta_{\text{ПР}}, T],$$

$$k(\Theta) = k_T, \quad \Theta \in [T, T + \tau],$$

$$k(\zeta_{\text{ПР}}) \in D_{\varepsilon_0} = \{k \in \mathbb{R}$$

$$|Mk_{\text{маг}}(t) - \varepsilon_0 \leq k(t) \leq Mk_{\text{маг}}(t) + \varepsilon_0, \quad t \in [t_0, T]\},$$

де $\varepsilon_0 > 0$ — досить мале задане число. Причому, стохастична початкова задача має єдиний неперервно-диференційовний розв'язок $k_{\text{ПР}}(t)$, $t \in [\zeta_{\text{ПР}}, T]$ у сенсі стохастичної еквівалентності [8, 9], оскільки виробнича функція $f(k \geq 0)$ — двічі неперервно-диференційовна, монотонно зростаюча та вгнута, α і β — кусково-неперервні, $s_{\text{ПР}}$ — кусково-неперервна на $[t_0, T]$ і розв'язок $k_{\text{ПР}}$ можна знайти одним із чисельних методів [9,10]. Таким чином, визначено магістральний процес $\{s_{\text{ПР}}(t - \tau), x_{\text{ПР}}(t - \tau) = x_{\text{маг}}(t - \tau), k_{\text{ПР}}(t), t \in [\zeta_{\text{ПР}}, T]\}$.

Оптимальний процес. Згідно з результатами [5] стохастичний і середній оптимальний процес $\{s_{\text{ОП}}(t - \tau), x_{\text{ОП}}(t - \tau), k_{\text{ОП}}(t), t \in [t_0, T]\}$ є „склеюю” у момент перемикання керування $\zeta_{\text{ПР}}$ стохастичних і середніх магістрального $\{s_{\text{маг}}(t - \tau), x_{\text{маг}}(t - \tau), k_{\text{маг}}(t), t \in [t_0, \zeta_{\text{ПР}}]\}$ і правого $\{s_{\text{ПР}}(t - \tau), x_{\text{ПР}}(t - \tau), k_{\text{ПР}}(t), t \in [\zeta_{\text{ПР}}, T]\}$ процесів. Крім того, оптимальна траєкторія за капіталом $k_{\text{ОП}}$ та оптимальне керування за валовою продукцією $x_{\text{ОП}}$ є кусково-диференційованими функціями, а оптимальне керування за нормою споживання $s_{\text{ОП}}$ — кусково-неперервною функцією на $[t_0, T]$.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу.

1. Вибрати необхідний економічний режим (серед режимів I–III).
2. Перевірити, чи всі режими перебрані. Якщо так, то вихід із алгоритму, інакше перейти на наступний режим і на блок 3.
3. Знайти магістральне керування за нормою споживання $s_{\text{маг}}$.
4. Обчислити стохастичну та середню магістраль за капіталом $k_{\text{маг}}$.
5. Перевірити виконання нерівності для середнього кінцевого стану магістралі $Mk_{\text{маг}}(T) \geq k_T$. Якщо так, то магістральний процес є оптимальним. Вихід із алгоритму. При ні (виконання нерівності $Mk_{\text{маг}}(T) < k_T$) — перехід на блок 6.
6. Перевірити існування правого керування за нормою споживання $s_{\text{ПР}}$ як розв'язку задачі нелінійного програмування (18). При не існуванні правого керування $s_{\text{ПР}}$ — перехід на посліую-

чий економічний режим і на блок 2. Якщо існує праве керування $s_{\Pi P}$, то знайти його та перейти на блок 7.

7. За правим керуванням $s_{\Pi P}$ провести розрахунок правого моменту перемикавання керування $\zeta_{\Pi P}$ і відповідної стохастичної та середньої правої траєкторії $k_{\Pi P}$.

8. Обчислити стохастичний і середній оптимальний процес. Вихід із алгоритму.

Моделний приклад. Числове моделювання проведено при таких даних: $f(k) = 2k^{0.6}$, $v = 1.1$, $\mu = 0.04$, $\delta = 0.08$, $n = 0.06$, $L_0 = 3$, $\tau = 1$, $t_0 = 0$, $T = 20$, $a = 0.30$, $w = 0.20$, $\varphi(\Theta) = 200$, $\Theta \in [-1, 0]$, $k_T = 750$, $\alpha(t) = 5$, $\beta(t) = 0$, $t \in [0, 20]$, $U(C) = 3C^{0.5}$.

Вибрано режим III-1. У результаті розрахунку одержали деякі числові значення середньої оптимальної траєкторії за капіталом $k_{OP}^{(c)}$ та оптимального керування за нормою споживання s_{OP} , які наведені в табл. 1.

Таблиця 1

ЧИСЛОВІ ЗНАЧЕННЯ СЕРЕДЬНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

t	0	2	4	6	8
$k_{OP}^{(c)}(t)$	200	295,312	374,583	436,735	476,549
$s_{OP}(t - \tau)$	0,298	0,292	0,286	0,280	0,274

Продовження табл. 1

t	10	12	14	16	18	20
$k_{OP}^{(c)}(t)$	511,867	542,618	568,723	615,397	695,673	750
$s_{OP}(t - \tau)$	0,269	0,262	0,257	0,184	0,095	—

Правий момент перемикавання керування $\zeta_{\Pi P} = 14.213$.

Економічне тлумачення отриманих результатів таке. Економічна система рухається до моменту перемикавання $\zeta_{\Pi P} = 14.213$ по магістралі, а далі аж до кінця горизонту планування $T = 20$ — по правій траєкторії. На відрізку часу $[14.213; 20]$ велика частина інвестицій (у середньому 86 %) припадає на накопичення капіталу, а на споживання — мала (у середньому 14 %).

Висновки.

1. Праве і магістральне керування та правий момент переми-
кання керування носять детермінований характер, а магістраль і
права траєкторія — стохастичний.

2. Стохастична модель макроекономіки зростання з неліній-
ним критерієм мети (9) і (10) має чотири економічні режими для
вибору пріоритетного процесу на магістральному періоді серед
процесів споживання та накопичення капіталу.

Література

1. Бойчук М. В. Стохастическое моделирование полного цикла од-
нопродуктовой макроэкономики роста / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук // *Кибернетика и системный анализ*. — 2013. — № 2. — С. 156–163.

2. Бойчук В. М. Стохастичне моделювання агрегованої однопродук-
тової макроекономіки зростання із запізненням / М. В. Бойчук, А. Р.
Семчук // „Theory and practice in the physical, mathematical and technical
sciences” Materials digest of the XXIV International Scientific and Practical
Conference and the I stage of Research Analytics Championship in the
physical, mathematical and technical sciences. (London, May 3 — may 13,
2012). — London : IASHE, 2012. — P. 27–30.

3. Бойчук М. В. Моделювання та оптимізація повного циклу одно-
продуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фак-
тора / М. В. Бойчук, А. Р. Семчук. — Чернівці : Місто, 2012. — 208 с.

4. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів / А. В. Скоро-
ход — К. : Либідь, 1990. — 169 с.

5. Андреева Е. А. Управление системами с последствием / Е. А. Анд-
реева, В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 336 с.

6. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні
рівняння / Під ред. В. І. Фодчука. — К. : Ін-т матем. НАН України. —
1996. — 210 с.

7. Ясинський В. К. Основи обчислювальних методів / В. К. Ясинсь-
кий. — Чернівці : Золоті литаври, 2005.- 396 с.

8. Гихман И. И. Управляемые случайные процессы / И. И. Гихман,
А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1977. — 344 с.

9. Юрченко І. В. Методи стохастичного моделювання систем /
І. В. Юрченко, Л. І. Ясинська, В. К. Ясинський. — Чернівці : Прут,
2002. — 416 с.

10. Никитин Н. Н. Методы цифрового моделирования стохастичес-
ких дифференциальных уравнений и оценка их погрешности / Н. Н. Ни-
китин, В. Д. Разевич // *Журнал вычислительной математики и матема-
тической физики*. — 1978. — Т. 18. — № 1. — С. 106–117.

11. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и
задачах / И. Л. Акулич. — М. : Высшая школа, 1986. — 319 с.

Стаття надійшла до редакції 20.06.2014 р.