

Напрямок подальшого дослідження може бути побудова цільових функцій та їх максимізація за інших законів розподілу попиту, а саме — нормального, логнормального, експоненційного. Крім того, в деяких випадках зручніше будувати функцію витрат та її мінімізувати. Цей підхід широко описаний у літературі (наприклад, див. [10]). Тому практичний інтерес представляє задача пошуку оптимального розміру замовлення за такого підходу, але якщо цільова функція буде побудована з урахуванням ризику.

Література

1. Markowitz H. Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments.[Text] / H. Markowitz — Yale University Press, New Haven, USA, 1959. — 375 p.
2. Chen F. Mean-variance analysis of basic inventory models.[Text] /F. Chen and A. Federgruen, Working Paper, Columbia Business School, New York, USA, 2000.
3. Choi T. Channel coordination in supply chains with agents having mean-variance objectives. [Text] / T. Choi, D. Li, H. Yan, and C. Chiu // Omega. — 2008. — V. 36, pp. 565—576.
4. Eeckhoudt L. The risk averse (and prudent) newsboy. [Text] / L. Eeckhoudt, C. Gollier, and H. Schlesinger // Management Science. — 1995. — V.4, pp. 786—794.
5. Lau H. The newsboy problem under alternative optimization objectives. [Text] / H. Lau // Journal of the Operational Research Society. — 1980. — V. 31, pp. 525—535.
6. Wang C. The loss-averse newsvendor problem. [Text] / C. Wang, S. Webster // Omega. — 2009. — V. 93, pp. 105.
7. Wu J. A Note on Mean-variance Analysis of the Newsvendor Model. [Online resource] / J. Wu, J. Li, S. Wang and T.C.E Cheng // <http://ebookbrowse.com/a-note-on-mean-variance-analysis-of-the-newsvendor-model-final-pdf-d92441516>
8. Gallego G. The distribution free newsboy problem: review and extensions. [Text] / G. Gallego, I. Moon // Journal of Operational Research Society. — 1993. — V. 44. — pp. 825—834.
9. <http://www.wolfram.com/mathematica/> [Електронний ресурс].
10. Taha H. A. Operations Research — An Introduction (7th ed). [Text] / H.A. Taha. — Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2003.

Стаття надійшла до редакції 15 травня 2013 р.

УДК 519.8

Блудова Т. В., д.е.н.,
професор кафедри вищої математики,
Мельник О. О., к.ф.-м.н.,
старший викладач кафедри вищої математики,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИБУТКУ ВИРОБНИЦТВА В КОМПЛЕКСНОЗНАЧНІЙ ЕКОНОМІЦІ

У статті розглянуто апарат виробничих функцій, які використовуються в математичній економіці та економетриці, що дає можливість розглянути умови досягнення оптимального прибутку виробництва із застосуванням комплекснозначних функцій.

В статье рассматривается аппарат производственных функций, которые используются в математической экономике и эконометрии, что предоставляет возможность рассматривать условия достижения оптимальной прибыли производства с использованием комплекснозначных функций.

The apparatus of the production functions, which are used in the mathematical economy and econometric, that gives the possibility to consider the condition for achievement of optimal production income with application of the complex variable function is consider in the paper.

Ключові слова: комплексні числа, виробничі функції комплексної змінної.

Ключевые слова: комплексные числа, производственные функции комплексной переменной.

Key words: complex numbers, production functions of complex variable.

Постановка проблеми. Сьогодні складно уявити собі ряд наук без застосування комплексних чисел. Теорія електротехніки, електромеханіки, радіотехніки, літакобудування та інших наук неможлива без застосування моделей у вигляді комплексних чисел. Наприклад, в електротехніці, при моделюванні змінного струму, до дійсної частини комплексної змінної відносять активну складову, а до уявної — пасивну. Змінний струм виникає внаслідок електромагнітного поля, що перетворюється в змінний електричний струм, напруження, потужність та енергію. Передача електроенергії по деяким ланцюгам зустрічає активний і реактивний опір.

Вищезазначена інформація розкриває смисловий зміст дійсної та уявної частин комплексної змінної, причому віднесення активної складової електроенергетичних показників до дійсної частини комплексної змінної, як і віднесення реактивної складової до її уявної частини є умовним. Їх можна поміняти місцями, а саме — активну потужність віднести до уявної частини, а реактивну — до дійсної. Отже, поняття «активна частина» та «пасивна частина» є деяким правилом попередньої домовленості.

Варто зазначити, що процес і результати обчислення не зміняться, якщо, наприклад, активний струм віднести до уявної частини, а не до дійсної, як це прийнято в електротехніці в теперішній час, а, в свою чергу, його реактивну складову — до дійсної частини, на протилежному уявній. Тобто буде мати місце лише зміна математичних моделей цього процесу. Є деякі вчені, які вважають, що реактивна частина електромагнітної потужності, наприклад, за своїми фізичними властивостями, в точності відповідає уявній частині комплексної змінної.

Варто зазначити, що застосування комплексних чисел в економіці ще недостатньо вивчено.

Зауважимо, що практично усі економічні показники представляють собою деякі узагальнені або агрегатні величини, які можуть бути легко представлені у вигляді суми двох доданків, які можна назвати «активною частиною» та «пасивною частиною». В основі такого представлення лежать класифікації, прийняті в економіці.

Наприклад, трудові ресурси будь-якого підприємства можна, відповідно, зіставити з приведеними ознаками класифікації, тобто розділити на активну частину (промислово-виробничий персонал) та пасивну частину (непромисловий персонал).

Наприклад, валовий внутрішній продукт будь-якої країни можна представити у вигляді двох складових — споживання (активна частина) та накопичення (пасивна частина).

А оскільки активна і пасивна частини деякого показника або фактора надають різний вплив на інші економічні показники, то їх загальний вплив логічно представити у вигляді комплексної змінної, дійсну частину якої ми будемо представляти як активну складову, а пасивну — віднесемо до уявної частини комплексної змінної.

Для того, щоб використовувати апарат теорії функцій комплексної змінної в економіці, об'єднавши два економічних показники в одну комплексну змінну, повинні виконуватися наступні умови:

1) показники мають бути двома характеристиками одного і того ж процесу або явища і відображати різні сторони цього явища;

2) показники повинні мати однакову розмірність або бути безрозмірними, причому кожен з показників слід привести до відносних безрозмірних величин способом, який виявиться найкращим для обраної форми моделі.

При формуванні комплексної змінної з двох дійсних змінних, вона надалі розглядається як самостійна єдина змінна, яка несе в собі інформацію про дві її складові величини і відображає функціональний вплив кожної з цих складових на де-

який результат. Ці змінні можуть знаходитися в тісній функціональній залежності одна з одною, а можуть бути і зовсім незалежними, але головна умова — вони повинні нести в собі інформацію про деякий спільний для них процес.

Зауважимо, що такі характеристики комплексного числа як його модуль і аргумент, мають сенс тільки тоді, коли складові комплексного числа відображають загальний зміст.

Наприклад, товар є носієм двох складових: споживчих властивостей, об'єктивно властивих товару, і ціни — грошової оцінки споживчих властивостей товару конкретним споживачем.

Сьогодні комплекснозначна економіка являє собою досить розвинений математичний інструмент, який спирається, в тому числі, і на економетрику комплексних змінних. Оцінки цих моделей дозволяють використовувати їх в реальній економічній практиці. Але ці оцінки є точковими, а теоретичне та методичне обґрунтування інтервальних оцінок комплекснозначних моделей поки не відомі, що звужує межі застосування комплекснозначної економіки в реальній практиці. У зв'язку з цим задача побудови інтервальних оцінок комплекснозначних моделей економіки представляється актуальною.

Аналіз основних джерел. На сьогоднішній день результати з комплекснозначної економіки опубліковані в працях Светуцького С. Г., Светуцького І. С., Савінова Г. В., Корецької Т. В., Сиротіна Є. В. та інших вчених. Підкреслимо, що вирішені першочергові завдання по формуванню основ комплекснозначної економетрії, а саме:

- 1) обґрунтування можливості використання комплексних чисел в економіці і способу об'єднання економічних показників у комплексну змінну;
- 2) розробка методу найменших квадратів стосовно задач оцінювання значень коефіцієнтів лінійних комплекснозначних функцій, а також основних нелінійних функцій;
- 3) розвиток апарату теорії виробничих функцій із застосуванням комплексних змінних. Показано, що в ряді випадків комплекснозначні моделі набагато точніше описують реальні процеси;
- 4) вирішення основних завдань регресійно-кореляційного аналізу комплекснозначної економетрики;
- 5) побудова класифікації виробничої функції комплексної змінної типу Кобба—Дугласа, аналіз коефіцієнтів якої дозволяє зробити висновок про ефективність виробництва, а також знаходження таких коефіцієнтів моделі, при яких похибка апроксимації даної функції є мінімальною;
- 6) дослідження динаміки акцій фондових бірж з використанням індексу комплексної змінної.

В області економіко-математичних методів існує безліч різних моделей, що дозволяють проаналізувати та оптимізувати роботу підприємств. Одним з таких методів є теорія виробничих функцій. У даний час вона йде по шляху вдосконалення і модифікації вже існуючих моделей, причому імплементація нових напрямків має незначні масштаби.

Одночасно з цим, апарат виробничих функцій недооцінений і, більшою мірою, використовується в математичній економіці та економетриці лише в якості моделі, що дає певну інформацію для подальших досліджень. Розробка нових моделей, що істотно відрізняються від наявних і привносять щось нове в теорію виробничих функцій, є актуальною проблемою.

Постановка задачі. Розглянемо степеневу функцію вигляду:

$$W = f(z) = a(K + iL)^b. \quad (1)$$

Функцію (1) запишемо в алгебраїчній формі:

$$W = f(z) = G + iC. \quad (2)$$

Задано довільні аргументи функції (1): K — витрати капіталу, L — витрати праці, причому $K \geq 0, L \geq 0$.

Залежні функціональні величини G і C у математичній моделі будемо інтерпретувати, відповідно, як валовий прибуток і загальні витрати виробництва (ці величини в сумі є прибутком виробництва).

Представимо функції (1) і (2) в показниковій формі:

$$f(z) = ar^b e^{ib\varphi}; \quad (3)$$

$$w = \rho e^{i\theta}, \quad (4)$$

де

$$\begin{cases} r = \sqrt{K^2 + L^2}, & \arg w = \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{L}{K}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \rho = \sqrt{G^2 + C^2}, & \arg w = \theta = \operatorname{Arctg} \frac{C}{G}. \end{cases} \quad (5)$$

Аргумент $\operatorname{Arctg} \frac{C}{G}$ — це багатозначна функція, геометрично зображується багатолистою рімановою поверхнею, її однолисту функцію отримуємо за допомогою розрізу в площині W по осі $\operatorname{Re} G < 0$ і проколом в точці $w = 0$. Тоді θ змінюється в межах $-\pi \leq \theta \leq \pi$, тобто на верхньому розрізі $\theta = \pi$, а на нижньому розрізі $\theta = -\pi$.

Значення $-\pi \leq \arg w = \theta \leq \pi$ називається головним значенням багатозначної функції $\theta = \operatorname{Arctg} \frac{C}{G}$ і позначається $\operatorname{arctg} \frac{C}{G}$.

Отже, дістаємо взаємно однозначну відповідність: для кожної точки $(K, L) \in Z$ відповідає лише одна точка $(G, C) \in W$.

Виклад основного матеріалу. Знайдемо допустимі області функцій (1) і (2). Якщо в площині Z кут $\varphi = 0$ або $\varphi = \frac{\pi}{2}$ то відповідно $L = 0$ або $K = 0$, т. б. отримуємо процес виробництва без витрат на працю або капіталу. Очевидно, що в реаліях ці випадки не мають місця, тому $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Зауважимо, що область $0 \leq \theta \leq \pi$ знаходиться не тільки в першому, а і в другому квадранті, в якому координата $G < 0$. Це означає, що виробництво має не прибуток, а збиток в сумі $C - |G|$.

Виробництво буде працювати без очікування на валовий прибуток при умові, що $|G| < C$. Якщо $|G| = C$, то виробництво перестав існувати. Отже, виробництво працює при умові $|G| < C$, коли аргумент $\arg \theta < \frac{3\pi}{4}$.

Прирівнюючи (3) і (4) у показниковому вигляді, отримуємо рівність:

$$\rho e^{i\theta} = ar^b e^{ib\varphi}, \quad (6)$$

звідки маємо:

$$\rho = ar^b, \quad a > 0, \quad \theta = b\varphi, \quad b > 0, \quad (7)$$

причому показник степеня задовольняє умові:

$$0 < b\varphi < \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 0 < b < \frac{3\pi}{4\varphi}.$$

Таким чином, при допустимих областях, маємо:

$$\left(\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \subset \arg z, \quad \left(\theta \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)\right) \subset \arg w. \quad (8)$$

Моделювання за допомогою комплексної функції (1) зводиться до того, щоб при певних заданих значеннях аргументів $(K, L) \in Z$ отримати очікувані оптимальні значення функціональних залежних величин $(G, C) \in W$ і максимальне значення прибутку виробництва $Q = G + C$.

З рівняння (6) випливає, що зі зростанням r та φ на площині Z зростання прибутку виробництва $Q = G + C$ відбувається за рахунок випереджаючого зростання витрат C над валовим прибутком G . Якщо у площині Z аргумент φ зменшується, а радіус r зростає, то результат виробництва $Q = G + C$ зростає за рахунок валового прибутку G .

Прирівнюючи функції (1) і (2): $G + iC = a(K + iL)^b$, отримуємо систему рівнянь відносно коефіцієнтів a і b :

$$\begin{cases} \arg(G + iC) = b \arg(K + iL), \\ \sqrt{G^2 + C^2} = a(\sqrt{K^2 + L^2})^b. \end{cases} \quad (9)$$

З першого рівняння системи (9) знаходимо:

$$0 < \frac{\arg(G + iC)}{\arg(K + iL)} < \frac{3\pi}{4 \arg(K + iL)}. \quad (10)$$

З другого рівняння системи (9) маємо:

$$\ln \sqrt{G^2 + C^2} = \ln a + b \ln \sqrt{K^2 + L^2},$$

або

$$\ln a = \ln \sqrt{G^2 + C^2} - b \ln \sqrt{K^2 + L^2},$$

звідки

$$a = e^{\ln \sqrt{G^2 + C^2} - b \ln \sqrt{K^2 + L^2}}. \quad (11)$$

Якщо функцію (1) розглянемо в тригонометричній формі:

$$\begin{aligned} G + iC &= a(\sqrt{K^2 + L^2})^b (\cos(b\varphi) + i \sin(b\varphi)), \\ \varphi &= \arg(K + iL), \end{aligned}$$

то, прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержимо:

$$\begin{aligned} G &= a(\sqrt{K^2 + L^2})^b \cos(b\varphi), \\ G &= a(\sqrt{K^2 + L^2})^b \sin(b\varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

де коефіцієнти знаходяться за формулами (10), (11).

З формули (10) випливає, що коефіцієнт b можна розглядати як одну з характеристик економічної моделі, він характеризує відношення показників виробництва: рентабельності по собівартості $\frac{G}{C}$ і фонду забезпечення праці $\frac{K}{L}$.

Для однолистої степеневої функції в алгебраїчній формі

$$G + iC = \sqrt{G^2 + C^2} e^{i \arg(G + iC)} = a(K + iL)^b \quad (13)$$

у її взаємнооднозначній допустимій області існує обернена функція:

$$K + iL = f^{-1}(G + iC). \quad (14)$$

Таким чином, дістаємо обернену виробничу функцію:

$$K + iL = \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a} \right)^{\frac{1}{b}} e^{i \frac{\arg(G+iC)}{b}}, \quad (15)$$

або в тригонометричній формі:

$$K + iL = \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \left(\cos \frac{\arg(G+iC)}{b} + i \sin \frac{\arg(G+iC)}{b} \right). \quad (16)$$

З рівності (16) маємо:

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \cos \frac{\arg(G+iC)}{b} > 0 \Rightarrow \cos \frac{\arg(G+iC)}{b} > 0, \\ L &= \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a} \right)^{\frac{1}{b}} \sin \frac{\arg(G+iC)}{b} > 0 \Rightarrow \sin \frac{\arg(G+iC)}{b} > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

звідси

$$0 < \frac{\arg(G+iC)}{b} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \arg(G+iC) < b \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

Отже, для очікуваних значень об'єктів K і L плануємо об'єкти G і C такими, що при збереженні виробництва задовольняють умову (18) для отримання оптимального прибутку виробництва.

Потрібно зауважити, що всі складові комплексних змінних витрат виробництва і валового прибутку повинні бути приведені до одних і тих же одиниць виміру. Для цього можна скористатися різними формулами нормалізації змінних, що приведе до їх безрозмірності [4].

Розглянемо випадок, коли функція (1) після статистичної обробки інформації представляється у вигляді:

$$z = G + iC = (K + iL)^4, \quad K \in [-2, 2], \quad L \in [-2, 2] \quad (19)$$

Зауважимо, що знак мінус виражає ту ситуацію для витрат виробництва, коли витрати перевищують можливі інвестиції і потребують залучення допоміжних інвестицій, наприклад кредитування [5]. У той же час знак мінус для витрат трудових ресурсів означає нестачу їх на виробництві і ситуацію необхідності залучення вільних робітників з інших фірм на умовах аутстафінгу [6].

Висновки. У даний час економіка тісно переплетена з іншими науками, в тому числі і природничими. Це явище обумовлено, з одного боку, інтенсивним розвитком самої економічної науки, з іншого, частково, розширенням використання розділів математичної дисципліни для опису економічних процесів, і, як наслідок, активізації міждисциплінарного мислення — гуманітарного і природничонаукового [7—10]. Міждисциплінарний підхід викликав сплеск цікавих наукових робіт у галузі економічних досліджень. У результаті стали інтенсивно втрачати свою першість класичні економічні доктрини та зароджуватися нові напрямки.

Трансформація розвитку економічних наук віддзеркалює непростий сценарій розвитку природничих наук. Синтез наук утворює щось нове, відмінне від методології, що становить основу природознавства. Це пов'язано з фактором синергетичного впливу людини на цей процес. Тому пропонується якісно інший підхід із прикладанням теорії функцій комплексної змінної до дослідження процесу економічного розвитку та його застосування в створенні нового механізму управління інноваційними процесами.

Література

1. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биограф. слов. справ. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Рад. школа, 1987. — 656 с.
2. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел. — М.: Просвещение, 1975. — 158 с.
3. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные. — М.: Мир, 1966. — 196 с.
4. Блудова Т. В., Мартиненко В. С. Теорія функцій комплексного змінного. — К.: Прогрес, 2000. — 472 с.
5. <http://www.wolfram.com/mathematica/>
6. <http://www.wolframalpha.com/>
7. Светульников И. С. Использование комплексных переменных в теории производственных функций / Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов. — 2007. — № 4. — С. 127—129.
8. Светульников С. Г., Светульников И. С. Производственные функции комплексных переменных: Экономико-математическое моделирование производственной динамики. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 136 с.
9. Корецкая Т. В. Краткосрочное прогнозирование комплексных переменных с использованием метода Брауна / Вестник ОГУ. — 2008. — № 11. — С. 121—126.
10. Савинов Г. В., Светульников С. Г. Комплексные переменные в экономическом анализе и моделировании / Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов. — 2006. — № 4. — С. 21—35.

Стаття надійшла до редакції 18 квітня 2013 р.

УДК 330:51 (0758)+519.86

*Коляда Ю. В., докторант кафедри
економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»*

ПІЗНАННЯ МЕХАНІЗМУ ЕКОНОМІЧНОЇ АДАПТАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДИФІКАЦІЙ МОДЕЛІ «ЖЕРТВА-ХИЖАК»

В якості економіко-математичних моделей динаміки виступають модифікації моделі «жертва-хижак», на підґрунті яких вивчається різноманітність закономірностей механізму економіки, котрому органічно властиве пристосування до систематично змінюваних умов функціонування.

As an economic and mathematical models of dynamics serve modifications of the model «predator-victim», on the grounds of which the diversity patterns of the mechanism of economics with organically inherent adaptation to systematically changing conditions of functioning are studied.

Ключові слова: математична модель, нелінійна економічна динаміка, адаптація, фазові портрети.

Keywords: Mathematical model, nonlinear economic dynamics, adaptation, phase portraits.

Вступ. У контексті розвитку української економіки з'явилися проблеми дієвого і оперативного аналізу сутності потенційних шляхів (їх причин і наслідків) трансформації (еволюційної чи революційної) суспільства. Єдиноможливим засобом успішного розв'язання зазначених проблем на сьогодні виступає математичне моделювання нелінійної економічної динаміки, яке відоме як потужний інструмент досліджень у техніці, фізиці та інших природничих науках.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Можливості започаткованої Р. Харродом [1, 2] теорії економічної динаміки, що базується на лінійній парадигмі, остато-