

Борисов Є. М., кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики,
Барвінок А.С., аспірант кафедри статистики,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

E. Borysov, candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor
of the department of higher mathematics,
A. Barvinok, post-graduate student
of the Department of Statistics,
SHEE «Kyiv National Economic University
named after Vadym Hetman»

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

ABOUT ONE APPROACH TO SOLVING SOME OPTIMIZATION TASKS

Анотація. Розглянуто та досліджено метод розв'язування оптимізаційних задач без застосування апарату диференціального числення. Задачею оптимізації в математиці називається задача про знаходження екстремума (мінімуму або максимуму) дійсної функції у деякій області. Як правило, розглядаються області, що належать R^n і задані набором рівностей і нерівностей. Основна ідея диференціального числення складається у вивченні функції у малому. Точніше диференціальне числення дає апарат для дослідження функцій, поведінка яких у досить малому околі кожної точки близька до поведінки лінійної функції чи многочлена. Таким апаратом слугують центральні поняття диференціального числення: похідна і диференціал. Практично показано розв'язання екстремальної економічної задачі, що складається з побудови економіко-математичної моделі, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування. Ще раз підкреслено, що виходячи з поставлених економічних завдань, максимальний випуск продукції, максимальний прибуток, мінімальні фінансові вкладення, максимально короткий термін — це є шукані оптимуми (максимуми або мінімуми). У математиці максимум і мінімум мають ще одну назву — екстремум, а задачі пошуку екстремуму називають екстремальними задачами. Слід вказати, що у оптимізаційних накладаються відповідні обмеження, які відображаються матеріальними, трудовими показниками, виробничими ресурсами та ін. Економіко-математичні моделі можуть бути призначені для дослідження як різних функціональних складових економіки (виробничо-технологічної, соціальної, територіальної структури), так і його окремих частин. Розглядаються моделі всієї економіки в цілому та її підсистем. А також приведено приклади підготовки інформації та отримання оптимального плану. При цьому використовується дискримінант квадратного та кубічного рівнянь. Розглянуто функції, які зводяться до квадратних або кубічних рівнянь.

На розглянутих прикладах показано ефективність запропонованого підходу до розв'язання деяких типів задач оптимізації.

Ключові слова: Задачі оптимізації, квадратні та кубічні рівняння, формули Кардано.

Abstract. The method of solving optimization problems without the use of the apparatus of differential calculus is considered and investigated.

The task of optimization in mathematics is called the problem of finding an extremum (the minimum or maximum) of a real function in a certain region. As a rule, the areas belonging to R^n and given by a set of equality and inequalities are considered. The basic idea of a differential calculus consists in studying a function in a small one. More precisely, the differential calculus gives the apparatus for studying functions whose behavior in a fairly small neighborhood of each point is close to the behavior of a linear function or polynomial.

Such a device is the central concepts of differential calculus: derivative and differential.

Practically the solution of an extreme economic problem, consisting of constructing an economic-mathematical model, economic analysis of the results and determining the possibilities of their practical application, is shown.

Once again it is emphasized that based on the set economic objectives, the maximum output, maximum profit, minimal financial investments, the shortest possible time — these are the desired optimum (maximums or minima). In mathematics, the maximum and minimum have one more name — extremum, and extreme search problems are called extreme problems. It should be noted that the optimization imposes appropriate restrictions that are reflected in material, labor inputs, productive resources, etc.

Economic and mathematical models can be designed to study both the various functional components of the economy (production-technological, social, territorial structure), and its individual parts. The models of the whole economy as a whole and its subsystems are considered. And also examples of information preparation and optimal plan are given.

In this case, discriminators of square and cubic equations are used. Functions that are reduced to square or cubic equations are considered.

The examples examined show the effectiveness of the proposed approach to solving some types of optimization tasks.

Keywords: Optimization tasks, square and cubic equations, Cardano formulas.

Вступ. Пошук реальних оптимальних норм чи показників ефективності економічної діяльності є, як правило, складною задачею і відноситься до екстремальних задач, у яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції при визначених обмеженнях. Розв'язування екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, отримання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Досить багато прикладних задач зводяться до знаходження найбільшого чи найменшого значення певної величини, тобто до задач на екстремум [1, 2]. При цьому, як правило, для їх розв'язання використовується апарат диференціального числення. Однак відомо, що задачі на пошук оптимального (екстрема-

льного) значення мають давню історію і розглядалися задовго до появи диференціального числення. Задачі на екстремум цікаві ще і тим, що, як правило, мають зв'язки з природою, фізикою, біологією, економікою тощо.

Мета даної роботи — розглянути та дослідити способи розв'язування задач на екстремум без застосування апарату диференціального числення.

Приведемо перший приклад рішення задач. Треба відгородити два пасовища у формі прямокутників зі спільною стороною, щоб сума їх площ дорівнювала S . Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

Розв'язання. Нехай x — ширина огорожі, а y — її довжина. Тоді площа буде $S = xy$, а периметр $P = 3x + 2y = 3x + \frac{2S}{x}$. Таким

чином, шуканий периметр є функцією від змінної x :

$P(x) = 3x + \frac{2S}{x}$. Пошук мінімуму для такої функції без викорис-

тання похідної є складною і нетиповою задачею для учнів школи. Зупинимось на цьому детальніше і спробуємо дослідити алгоритм розв'язання такого типу задач.

Перетворимо останню рівність, помноживши ліву і праву частини на x , у результаті отримаємо: $xP = 3x^2 + 2S$ або $3x^2 - xP + 2S = 0$. Таким чином, отримали квадратне рівняння, в якому P є функцією від x (або параметром). Тоді запитання в задачі набере такої форми: при якому найменшому P рівняння має розв'язки? Запишемо дискримінант квадратного рівняння $D = P^2 - 24S$. Проаналізувавши останню рівність, приходимо до висновку: з усіх можливих (додатних) P найменше буде $P^2 = 24S$ (при якому рівняння має розв'язки). Іншими словами, параметр P набуває свого найменшого значення, коли дискримінант дорівнює нулю. Зауважимо, що саме в даному випадку квадратне рівняння буде мати єдиний розв'язок, що відповідає логічному змісту задачі: якщо серед всіх периметрів огорожі існує найменший, то він має бути єдиним! Отже, математична формула для пошуку найменшого значення у цій задачі набуває такого вигляду $P^2 - 24S = 0$. Розв'язавши це рівняння відносно P , отримаємо: $P = \sqrt{24S}$.

Для порівняння розв'яжемо дану задачу, використовуючи похідну функції.

Будемо мати: $P'(x) = 3 - \frac{2s}{x^2}$. Тоді $3 - \frac{2s}{x^2} = 0$, звідки $x = \pm \sqrt{\frac{2s}{3}}$.

Тоді найменший периметр буде $P\left(\sqrt{\frac{2s}{3}}\right) = 3\sqrt{\frac{2s}{3}} + \frac{2s}{\sqrt{\frac{2s}{3}}} = \sqrt{6s} + \sqrt{6s} = \sqrt{24s}$.

Таким чином, отримали той самий результат, але перший спосіб дав змогу одразу знайти найменшу довжину огорожі.

У загальному випадку, якщо задача зводиться до пошуку мінімуму або максимуму функції вигляду

$$b(x) = ax + \frac{c}{x}, \quad (1)$$

отримаємо такий вираз для знаходження екстремального значення відповідного параметра (функції):

$$b^2 - 4ac = 0. \quad (2)$$

А вираз для аргументу, при якому функція набуває свого екстремального значення буде

$$x = \frac{b}{2a}. \quad (3)$$

Застосуємо здобутий результат до розв'язування деяких задач на пошук екстремуму.

Аналогічною за змістом є така задача. Ділянка прямокутної форми має площу 225 м^2 . Яку найменшу кількість матеріалу потрібно використати (у метрах), щоб загородити цю ділянку.

Розв'язання: Позначимо шукані числа через x , y тоді :

$x \cdot y = 225$, $b = 2(x + y)$, або $b = 2\left(x + \frac{225}{x}\right)$. Тоді $a = 2$, $c = 450$

і відповідно до формули (2) отримаємо:
 $b = \sqrt{4ac} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 450} = 60 \text{ м}$.

Наступний тип задач є розповсюдженим у математиці. У півколо радіуса R см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть цю площу.

Розв'язання: Позначимо через $2x$, y відповідно довжину і ширину даного прямокутника тоді : $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площа прямокутника буде $S = 2xy$ або $S = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$. Піднесемо ліву і праву частину останньої рівності до квадрату та зведемо подібні. Будемо

мати: $4x^4 - 4R^2x^2 + S^2 = 0$. Отримали бікватратне рівняння. Дискримінант даного квадратного рівняння буде $D = 16R^4 - 16S^2$.

Тоді, прирівнявши останній вираз до нуля і розв'язавши відносно невідомого параметра, отримаємо $S = R^2$. Отже найбільша площа вписаного у півколо прямокутника дорівнює квадрату радіуса кола.

Цікавим прикладом рішення типових задач є така: у півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть цей периметр.

Розв'язання: позначимо через $2x$, y відповідно довжину і ширину даного прямокутника тоді :
 $P = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4x + 2\sqrt{6^2 - x^2}$, або $P - 4x = 2\sqrt{6^2 - x^2}$.
 Піднесемо ліву і праву частину останньої рівності до квадрату та зведемо подібні. Будемо мати: $5x^2 - 2Px + \frac{P^2}{4} - 36 = 0$

Дискримінант даного квадратного рівняння буде $D = 720 - P^2$. Прирівнявши до нуля останній вираз, отримаємо: $P^2 = 720$. Звідси $P = 12\sqrt{5}$ см.

Розглянемо ще один тип задач на екстремум, які зводяться до кубічних рівнянь. При цьому покажемо, що підхід до розв'язання має пряму аналогію з методом розв'язання попередніх задач.

Розглянемо кубічне рівняння, що записане в канонічній формі

$$x^3 + px + q = 0 \quad . \quad (4)$$

Як буде показано нижче, існує ряд задач на екстремум, які зводяться до такого типу рівнянь. При цьому шуканим величинами будуть виступати параметри (або функції) p або q . За аналогією до методу розв'язань попередніх задач, покажемо, що шукані параметри будуть набувати свого екстремального значення у випадку, коли дискримінант кубічного рівняння дорівнюватиме нулю. Скориставшись формулами Кардано, запишемо дискримінант кубічного рівняння $D = -4p^3 - 27q^2$. Тоді вираз для знаходження екстремального значення функції (p або q) набуде вигляду:

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \quad . \quad (5)$$

З формул Кардано відомо, що кубічне рівняння за умови, коли дискримінант дорівнює нулю, має два дійсних корені, один з яких є двократним, а саме:

$$x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}, x_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}. \quad (6)$$

Покажемо, скориставшись засобами диференціального числення, що за умови, коли дискримінант дорівнює нулю, двократний корінь рівняння і буде шуканим значенням аргументу відповідної функції.

Запишемо рівність (4) у формі $p(x) = -x^3 - \frac{q}{x}$. Застосувавши похідну, знайдемо екстремум даної функції $p'(x) = -2x + \frac{q}{x^2}$. Тоді $-2x + \frac{q}{x^2} = 0$ звідси $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Підставивши знайдений корінь у початкову рівність після спрощень отримаємо рівність записану у формі (5) $4q^3 = -27q^2$.

Застосуємо рівності (5) і (6) до розв'язання деяких задач на екстремум, що мають прикладне значення.

Наведемо ще один вид математичних задач.

1. Якими повинні бути розміри басейну, що має об'єм 32 м^3 з квадратним дном і вертикальними стінками, щоб на його облицювання пішло найменше плиток? Знайдіть загальну площу плиток.

Розв'язання. Нехай x – розмір дна басейну, а y – його висота. Тоді об'єм басейну буде $V = x^2y$, а загальна площа дна і бокових стінок $S = x^2 + 4xy$, або $S = x^2 + 4\frac{V}{x}$. Таким чином, шукана площа є

функцією від змінної x . Перетворимо останню рівність, помноживши ліву і праву частини на x , у результаті отримаємо: $xS = x^3 + 4V$ або $x^3 - Sx + 4V = 0$.

Таким чином, отримали кубічне рівняння, в якому S є функцією від x або параметром. Тоді, відповідно до формули (5) маємо $p = -S$, $q = 4V$, $4S^3 - 27(4V)^2 = 0$. Розв'язавши це рівняння відносно S , отримаємо $S = \sqrt[3]{\frac{27(4V)^2}{4}} = 48 \text{ м}^2$. За формулою (6) знайдемо розміри басейну, які в даному випадку будуть 4 м, 4 м, 2 м.

2. Упаковка для соку має форму прямокутного паралелепіпеда об'єму V . При яких розмірах упаковки на її виготовлення піде найменше матеріалу, якщо відомо, що ширина основи вдвічі менша за довжину?

Розв'язання: Нехай x – ширина упаковки, а y – її висота. Тоді довжина буде $2x$, а об'єм $V = 2x^2y$. Загальна площа поверхні упаковки буде $S = 2x^2 + 6xy$, або $S = 2x^2 + 3\frac{V}{x}$.

Перетворимо останню рівність, помноживши ліву і праву частини на x , у результаті отримаємо: $xS = 2x^3 + 3V$ або $x^3 - \frac{S}{2}x + \frac{3V}{2} = 0$. Таким чином, отримали кубічне рівняння, в якому S є функцією x . Тоді відповідно до формули (5) маємо: $p = -\frac{S}{2}, q = \frac{3V}{2}$. Запишемо дискримінант рівняння $4\left(\frac{S}{2}\right)^3 - 27\left(\frac{3V}{2}\right)^2 = 0$.

Розв'язавши це рівняння відносно S , отримаємо $S = 6\sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4}\right)^2}$. А розміри упаковки відповідно до (5) будуть такі: ширина $\sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$, довжина $2\sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$, висота $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3V}{4}}$.

3. Визначити розміри консервної банки циліндричної форми, що має об'єм V , при яких на її виготовлення піде найменша кількість матеріалу.

Розв'язання: Нехай R – радіус банки, а y – її висота. Тоді загальна площа поверхні консервної банки буде $S = 2\pi R^2 + 2\pi Ry$, або $S = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$.

Помноживши ліву і праву частини рівності на R і спростивши, отримаємо кубічне рівняння, що записане у вигляді (4) $R^3 - \frac{S}{2\pi}R + \frac{V}{\pi} = 0$. Тоді в даному випадку будемо мати $p = -\frac{S}{2\pi}, q = \frac{V}{\pi}$. Скориставшись формулою (6) запишемо додатній розв'язок рівняння $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Тоді висота консервної банки буде $y = 2R$. Отже, висота консервної банки повинна дорівнювати її діаметру.

4. На пароплаві витрати на паливо пропорційні кубові його швидкості. При швидкості 10 км/год витрати на паливо становлять 5 грн на годину. Інші витрати, що не залежать від швидкості, становлять 80 грн. При якій швидкості пароплава загальна

сума витрат на кілометр шляху буде найменшою та яка буде при цьому загальна сума витрат?

Розв'язання: Введемо позначення: q – витрати, S – шлях, v – швидкість. Тоді витрати на одиницю шляху позначимо $Q = \frac{q}{S}$.

Відповідно до умови задачі запишемо функцію витрат на одиницю шляху за 1 годину $Q = 5 \cdot 10^{-3} v^2 + \frac{80}{v}$. Помноживши ліву і

праву частини рівності на v і спростивши, отримаємо кубічне рівняння, що записане у вигляді (4) $v^3 - 200Qv + 16000 = 0$. Тоді в даному випадку будемо мати $p = -200Q$, $q = 16000$. Скориставшись

рівністю (6) запишемо додатній розв'язок рівняння $v = \sqrt[3]{\frac{16000}{2}} = 20$. Таким чином, оптимальна швидкість пароплава

буде 20 км/год., а загальні витрати становитимуть 120 грн за годину.

Висновок: Розглянутий у роботі спосіб розв'язування задач на екстремум не тільки дозволяє розширити масив практичних задач, посиливши прикладну спрямованість курсу математики, а й збагатити студентів новими підходами до розв'язування таких задач.

Література

1. Борисов Є. М. Способи розв'язання задач на екстремум / Є.М. Борисов, Н.В. Кугай // Математика в сучасній школі. — 2013. — № 9. — С. 25–28.
2. Манжос Т. В. Оптимізація управління запасами підприємства з урахуванням ризику / Манжос Т. В., Луцишина Ж. В. // Вчені записки. — 2013. — № 15. — С. 183–187.

References

1. Borysov Ye. M. Sposoby rozv'yazannia zadach na ekstremum: Matematyka v suchasnij shkoli // Ye.M. Borysov N.V. Kuhaj — 2013. — № 9. — S. 25–28.
2. Manzhos T. V. Optymizatsiia upravlinnia zapasamy pidpriemstva z urakhuvanniam ryzyku: Vcheni zapysky // Manzhos T. V., Lutsyshyna Zh. V. — 2013. — № 15. — S. 183–187.

Статтю подано до редакції 12.10.2018 р.