сурс]. — ЮНЕСКО, Комюніке Париж, 5—8 липня 2009 року — Режим доступу: http://zakon.rada.gov.ua/cgi-bin/laws/main..

3. Использование информационных и коммуникационных технологий в общем среднем образовании [Електронний ресурс] — Режим доступу: http://www.ido.rudn.ru/nfpk/ikt/ikt5.html.

4. *Торопцов В. С., Григорович Д. Б.* Управление качеством образовательного процесса в сети ОДО с использованием результатов компьютерного тестирования ./ В. С. Торопцов, Д. Б. Григорович // Качество дистанционного образования. Концепции, проблемы, решения (EDQ-2006): Материалы VIII Международной научно-практической конференции. — М.: МГИУ, 2006. — 388 с. — С. 320—324.

5. *Валуйский В.* E-Learning платформы поддержки дистанционного обучения (анализ и сравнительная оценка) [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://udec.ntu-kpi.kiev.ua/udec.nsf/platforms_ru?OpenPage

Стаття надійшла до редакції 19.11.2011 р.

УДК 330.43:336.01

Т. М. Заболоцький, канд. екон. наук,
старший науковий співробітник наукової лабораторії,
доцент кафедри математики і статистики,
Львівський інститут банківської справи Університету
банківської справи Національного банку України (м. Київ)

РОЗПОДІЛ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРТФЕЛЮ АКЦІЙ З НАЙМЕНШИМ РІВНЕМ VaR

АНОТАЦІЯ. У роботі розглянуто проблему статистичного аналізу характеристик портфелю акцій із найменшим рівнем VaR. За умови, що дохідності акцій є незалежними та нормально розподіленими, знайдено умовні та безумовні розподіли характеристик портфелю: дохідності, дисперсії та VaR. Крім того, показано, що математичне сподівання оцінки дисперсії портфелю не існує.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Міра ризику, дисперсія, Value-at-Risk, портфель акції з найменшим рівнем Value-at-Risk, дохідність акції.

АННОТАЦИЯ. В работе рассмотрено проблему статистического анализа характеристик портфеля акций с наименьшим уровнем VaR. При условии, что доходности акций независимы и нормально распределены, найдено условные и безусловные распределения характеристик портфеля: доходности, дисперсии и VaR. Кроме этого показано, что математическое ожидание оценки дисперсии портфеля не существует.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Мера риска, дисперсия, Value-at-Risk, портфель акций с наименьшим уровнем Value-at-Risk, доходность акции.

ABSTRACT. The problem of statistical analysis of the minimum VaR asset portfolio characteristics is considered. Under assumption that asset returns are independent and normally distributed it is obtained the conditional and unconditional distributions of the portfolio characteristics: returns, variance and VaR. Moreover, it is shown that the mathematical expectation of the estimator of the variance do not exist.

KEYWORDS. Risk measure, variance, Value-at-Risk, minimum VaR asset portfolio, asset returns.

1. Вступ

Під час планування діяльності будь-якої фінансової установи, одним з основних завдань є оцінка фінансового ризику, особливо оцінка ризиків фінансових інструментів, таких як, наприклад, акції. Відомо, що ціни акцій постійно змінюються, тому для визначення ризику важливим є передбачення майбутньої ціни. Дана задача не може бути розв'язана в загальному випадку. Лише використовуючи певні припущення щодо поведінки ціни акції можна наближено оцінити її значення в майбутньому. Причому, проблема передбачення стає важчою при наближенні припущень до реальних умов, а її результати втрачають свою точність. Відзначимо, що точкові оцінки є абсолютно не точними, тобто, ймовірність того, що майбутня ціна акції співпаде з побудованою оцінкою, дорівнює нулю. Крім того, процес оцінки ризику кожної акції зокрема займає багато часу, тому частіше оперують портфелями акцій.

Теорія портфелів була заснована Гаррі Марковіцем у 1952 році [1]. У даній роботі розглядається питання побудови оптимального портфеля акцій за умови, що дохідності акцій не є автокорельованими (є незалежними в часі) та поводяться як нормально розподілені випадкові величини. Оптимальність портфеля розглядається використовуючи два критерії: мінімізація ризику портфеля та максимізація дохідності. За міру ризику портфеля Марковіцем вибрано було дисперсію. Мінімізуючи ризик портфеля при сталому рівні дохідності отримано портфель з найменшою дисперсією. Крім цього, показано, що два використані критерії оптимальності є взаємодоповнюючими. Також, змінюючи рівень дохідності портфеля, було побудовано множину оптимальних портфелів, яка називається ефективною множиною. У роботі [2] показано, що приймаючи за міру ризику дисперсію, ефективна множина є параболою, а приймаючи за міру ризику стандартне відхилення — гіперболою.

Зазначимо, що дисперсія не є єдиною мірою ризику. Так, наприклад, у роботах [3, 4] побудовано оптимальний портфель, приймаючи за міру ризику відношення Шарпа, тобто, відношення дохідності портфеля до його дисперсії. Очевидно, що чим більшого значення набуває дана міра, тим кращим є портфель. Оптимальний портфель у цьому випадку будують на основі максимізації відношення Шарпа. Неважко показати, що отриманий оптимальний портфель також належить ефективній множині. Недоліком даної міри ризику є те, що для вибіркової оцінки ваг оптимального портфелю, побудованого на основі цієї міри, не існує математичного сподівання [5]. Більше того, в роботі [6] показано, що для даного портфеля взагалі неможливо побудувати незміщену оцінку.

Ваги всіх вищенаведених портфелів залежать від параметрів дохідності акцій, тобто від математичного сподівання та дисперсії. Дані характеристики є невідомими на практиці, а, отже, невідомими є і ваги оптимальних портфелів. Тому для проведення розрахунків необхідно певним чином оцінити ці параметри. Одним з найрозповсюдженіших методів є історичний метод. Тобто, оцінки параметрів будуються на основі історичних даних. Очевидно, що оцінки характеристик акцій є випадковими величинами, тому випадковими величинами будуть також і оцінки ваг портфелю. Зважаючи на це, робимо висновок, що для аналізу портфелю важливими є його характеристики, тобто математичне сподівання та дисперсія.

В останні десятиріччя використання дисперсії як міри ризику зазнало істотної критики, оскільки існує кілька важливих недоліків. По-перше, вона враховує двосторонній ризик, тобто зростання імовірності отримання високих прибутків збільшує ризик втрат. По-друге, не надає достатньої інформації про ризик портфелю, а у випадку, коли розподіл портфелю є несиметричним, то дана міра взагалі не надає ніякої інформації. Зважаючи на недоліки дисперсії, широкого застосування для оцінки ризику портфелю акцій набуло *Value-at-Risk* (*VaR*). Дана міра ризику є рекомендованою для оцінки ризиків Базельським комітетом. Перевагою *VaR* над дисперсією є той факт, що *VaR* бере до уваги лише додатні значення функції втрат (негативні значення функції дохідності), тому імовірність високих прибутків не впливає на ризик втрат. Крім того *VaR* надає більше інформації про ризик ніж дисперсія. Так, наприклад, якщо з 95 % рівнем довіри *VaR* становить 100 одиниць, це означає, що з імовірність 0,95 наші втрати не перевищать 100 одиниць. Постало питання, чи можна використати *VaR* для побудови портфелю з найменшим рівнем ризику. Відповідь на дане запитання отримано в роботі [7]. В цій роботі автори припускаючи, що дохідності акцій не є автокорельованими та поводяться як нормально розподілені випадкові величини, обчислили ваги портфелю з найменшим рівнем *VaR* при сталому рівні дохідності. Виявляється, що так отриманий оптимальний портфель теж належить ефективній множині, і так само як і портфель з найменшою дисперсією Марковіца, залежить від невідомих параметрів дохідності акцій. Детальне порівняння цих портфелів на реальних даних зроблено у роботі [8]. Зазначимо також, що як і у випадку портфеля з найменшою варіацією, для практичного застосування необхідно спочатку оцінити ваги портфелю з найменшим рівнем *VaR*. Тобто, інвестор змушений оперувати в своїх розрахунках не сталими вагами портфелю, а вагами, які є випадковими величинами. Отже, для проведення аналізу портфелю, необхідно вивчити властивості його характеристик (дохідності, дисперсії, *VaR*). Очевидно, що і характеристики портфелю є випадковими величинами, тому розподіл характеристик є важливим для статистичного аналізу. У випадку портфелю з найменшою варіацією, припускаючи, що дохідності акцій є незалежними та нормально розподіленими випадковими величинами, розподіл оцінок характеристик знайдено в роботі [9]. Метою даної роботи є встановлення розподілу оцінок характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем *VaR*.

2. Стохастичне представлення оцінок характеристик

Для статистичного аналізу портфелів акцій зручніше використовувати дохідність акцій, а не ціну. Оскільки, припустивши, що ціна акції поводиться як нормально розподілена випадкова величина, ми одночасно припускаємо, що хоч і з невеликою, проте з додатною імовірністю, ціна акції може бути від'ємною, що є помилкою. Тому, позначивши через P_t ціну акції в момент часу t, дохідність визначаємо з формули:

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

На відміну від ціни акції, дохідність може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Нехай ми формуємо портфель з k акцій. Позначимо через $\boldsymbol{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ k-вимірний вектор дохідностей. Частку i-ого цінного паперу в портфелі позначимо через w_i, а портфель — вектор часток $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_k)'$. Припустимо, що вектор $\boldsymbol{X}_t$ є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Тоді дохідність портфелю з вектором ваг $\mathbf{w}$

обчислюємо з наступної формули $X_{wt}=\sum_{i=1}^{t} \mathrm{X}_{it}\, w_i = \mathbf{X}_\mathbf{t}'\mathbf{w}$, математичне сподівання дохідності портфелю або очікувану дохідність — R_w=E(X_{wt})=$\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, а дисперсію V_w= D(X_{wt})=$\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Часто за ризик портфелю приймають його дисперсію. Не викликає запитань той факт, що чим меншою є дисперсія портфелю, тим краще. Тому Марковіцем було розглянуто наступну оптимізаційну задачу для побудови оптимального портфелю

$$\begin{cases} V_w \to \min \\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1 \end{cases}. \tag{1}$$

Розв'язавши задачу (1), отримаємо портфель з найменшою дисперсією з вагами

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{i}$ — k -вимірний вектор, елементами якого є одиниці, та характеристиками:

$$R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}},\ V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}. \tag{3}$$

Проте, виявляється, дисперсія не є найкращим вибором міри ризику для оптимізації портфелю. Дана міра не достатньо інформативна та, крім цього, приймає до уваги двосторонній ризик, тобто, збільшення імовірності високих доходів збільшує загальний ризик портфелю. Практичніше використовувати міри ризику, які приймають до уваги лише додатні значення функції втрат чи еквівалентно, від'ємні значення функції дохідності. Однією з таких мір є *Value-at-Risk* (*VaR*). Ця міра описує ризик на основі певної квантилі розподілу функції дохідності. Незважаючи на всі свої недоліки, вона є простою для практичного застосування, більш інформативною ніж дисперсія та, крім цього, є рекомендованою Базельським комітетом для оцінки фінансових ризиків. Оскільки в основі даної міри лежить квантиль розподілу, то, очевидно, що вона залежить від певного числа α, що характеризує саму квантиль. Дане число задають наперед і, як правило, використовують наступні значення $\{0{,}01,\ 0{,}05,\ 0.1\}$. У роботі [7] розглянуто наступну оптимізаційну задачу:

$$
\begin{cases} VaR_{\alpha}(w) \to \min \\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \end{cases} \qquad (4)
$$

Розв'язком задачі (4) є ваги оптимального портфелю з найменшим рівнем *VaR*, які задаються рівністю:

$$
\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_{\alpha}^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \qquad (5)
$$

де $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$, $s = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, та $z_{\alpha} = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ є α-квантилю стандартного нормального розподілу. Характеристики даного портфелю мають наступний вигляд:

$$
R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_{\alpha}^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}}, \qquad (6)
$$

$$
V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_{\alpha}^2}{z_{\alpha}^2 - s} V_{GMV}, \qquad (7)
$$

$$
M_{VaR} = \sqrt{z_{\alpha}^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \qquad (8)
$$

де M_{VaR} є *VaR* портфелю $\mathbf{w}_{\text{VaR}}$ при рівні α.

Зауважимо, що розв'язки задачі (4) залежать від невідомих на практиці параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Отже, необхідно ці параметри певним чином оцінити. Існує кілька методів оцінки параметрів розподілу, проте одним з найвідоміших є історичний метод, який використовується в даній роботі. Нехай нам задано значення дохідностей $\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \ldots, \boldsymbol{X_n}$. На основі цих значень будуємо вибіркові оцінки

$$
\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \qquad (9)
$$

Підставляючи оцінки (9) у вирази (5) — (8) отримаємо вибіркові оцінки ваг портфелів та їх характеристик, які позначимо $\hat{\mathbf{w}}_{VaR}$, $\hat{R}_{VaR}$, $\hat{V}_{VaR}$, $\hat{M}_{VaR}$. Враховуючи, що вибіркові оцінки (9) є випадковими величинами, то випадковими величинами є і оцінки характеристик портфелю. Тому, для повного статистичного аналізу характеристик портфелю необхідно знайти закон розподілу оцінок. Зауважимо, що оцінки характеристик портфелю з найменшим рівнем *VaR* (6) — (8) залежать від оцінок характеристик портфелю з найменшою дисперсією, розподіли характеристик якого знайдено в роботі [10]:

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi^2_{n-k},$$

$$\hat{R}_{GMV} \mid \hat{s} = s^* \sim N(R_{GMV}, \frac{1+\frac{n}{n-1}s^*}{n} V_{GMV}),$$

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}\hat{s} \sim F_{k-1,n-k+1;ns},$$

де через $F_{k\text{-}1,n\text{-}k+1;ns}$ позначено нецентральний розподіл Фішера з k-1 та n-k+1 ступенями свободи та нецентральним параметром ns. Причому випадкова величина $\hat{V}_{GMV}$ незалежна від $\hat{R}_{GMV}$ та $\hat{s}$.

Використовуючи попередні результати можемо знайти стохастичне представлення оцінок характеристик за умови, що оцінка параметра s є відома. Для цього введемо спочатку наступні позначення: $\hat{R}^*_{VaR} = (\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} = s^*)$, $\hat{V}^*_{VaR} = (\hat{V}_{VaR} \mid \hat{s} = s^*)$, $\hat{M}^*_{VaR} = (\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} = s^*)$.

Теорема 1. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n>k$. Тоді:

а) $\hat{R}^*_{VaR} = R_{GMV} + \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}\,\xi_1 + \frac{s^*}{\sqrt{z^2_\alpha - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}\sqrt{\xi_2}$,

б) $\hat{V}^*_{VaR} \overset{d}{=} \frac{z^2_\alpha}{z^2_\alpha - s^*}\frac{V_{GMV}}{n-1}\xi_2$,

в) $\hat{M}^*_{VaR} \overset{d}{=} R_{GMV} + \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}\,\xi_1 + \sqrt{(z^2_\alpha - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}}\sqrt{\xi_2}$,

де символ $\overset{d}{=}$ означає рівність за розподілом, а випадкові величини $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ є незалежними.

Теорема 1 має одне важливе застосування. При використанні методу Монте—Карло для аналізу характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем *VaR* не потрібно генерувати матрицю даних розміру $k \times n$, а достатньо згенерувати лише дві випадкові незалежні величини, що мають добре вивчені закони розподілу.

3. Розподіл імовірностей оцінок характеристик

За допомогою теореми 1 можна обчислити густини випадкових величин $\hat{R}^*_{VaR}$, $\hat{V}^*_{VaR}$, $\hat{M}^*_{VaR}$. Ці величини є лінійною комбінацією незалежних випадкових величин ξ_1 та ξ_2, густини яких є відомими. Введемо для зручності наступні позначення:

$$a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad b(s^*) = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*}\frac{V_{GMV}}{n-1}, \quad c(s^*) = \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}},$$

$$\widetilde{s}^* = \frac{1 + n/(n-1)s^*}{n}V_{GMV}$$

та

$$M(x; m, a, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|}\int_0^\infty t^{m-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)\left(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2}\right)^2\right\}dt. \quad (10)$$

Тепер, використовуючи результати теореми 1 та теореми про згортку отримаємо:

Теорема 2. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n>k$. Тоді:

а) $$f_{\hat{R}^*_{VaR}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}}a(s^*)^{n-k}\Gamma((n-k)/2)}\exp\left\{-\frac{(x - R_{GMV})^2}{2(a(s^*)^2 + \widetilde{s}^*)}\right\}M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\widetilde{s}^*}, a(s^*)),$$

б) $$f_{\hat{V}^*_{VaR}}(x) = \frac{1}{(2b(s^*))^{\frac{n-k}{2}}\Gamma((n-k)/2)}x^{\frac{n-k-2}{2}}\exp\left\{-\frac{x}{2b(s^*)}\right\},$$

в) $$f_{\hat{M}^*_{VaR}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}}c(s^*)^{n-k}\Gamma((n-k)/2)}\exp\left\{-\frac{(x + R_{GMV})^2}{2(c(s^*)^2 + \widetilde{s}^*)}\right\}M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\widetilde{s}^*}, c(s^*)).$$

Для доведення Теореми 2 використаємо наступну лему.

Лема 1. Нехай випадкові величини ς_1 і ς_2 є незалежні та $\varsigma_1 \sim N(0,1)$, $\varsigma_2 \sim \chi_m^2$. Тоді для довільних дійсних чисел *a, b_1* та довільного додатного дійсного числа b_2, густина випадкової величини $\varsigma = a + b_1\varsigma_1 + b_2\sqrt{\varsigma_2}$ має вигляд

$$f_{\varsigma}(x)=\frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}}b_2^m\Gamma(m/2)}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2(b_1^2+b_2^2)}\right\}M(x;m,a,b_1,b_2),$$

де функція $M(x;m,a,b_1,b_2)$ задається рівністю (10).

Доведення. Очевидно, що випадкова величина $\tilde{\varsigma}_1=a+b_1\varsigma_1$ є нормально розподілена з параметрами a та b_1^2. Позначимо її густину через $f_{\tilde{\varsigma}_1}(x)$. Густину випадкової величини $b_2\sqrt{\varsigma_2}$ позначимо $f_{b_2\sqrt{\varsigma_2}}(x)$. Оскільки, $\varsigma_2\sim\chi_m^2$, то

$$f_{b_2\sqrt{\varsigma_2}}(x)=f_{\varsigma_2}(x^2/b_2^2)\frac{2x}{b_2^2}=\frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}}b_2^m\Gamma(m/2)}x^{m-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2b_2^2}\right\}.$$

Приймаючи до уваги той факт, що $\tilde{\varsigma}_1$ та $\sqrt{\varsigma_2}$ є незалежними випадковими величинами, густину випадкової величини ς обчислюємо як згортку густин $f_{\tilde{\varsigma}_1}(x)$ та $f_{b_2\sqrt{\varsigma_2}}(x)$, тобто

$$f_{\varsigma}(x)=\int_0^{\infty}f_{\tilde{\varsigma}_1}(x-t)f_{b_2\sqrt{\varsigma_2}}(t)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|}\exp\left\{-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2\right\}\frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}}b_2^m\Gamma(m/2)}t^{m-1}\exp\left\{-\frac{t^2}{2b_2^2}\right\}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|2^{\frac{m-2}{2}}b_2^m\Gamma(m/2)}\exp\left\{-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2-\frac{t^2}{2b_2^2}\right\}t^{m-1}dt.$$

Степінь експоненти в останньому інтегралі можемо записати як

$$-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2-\frac{t^2}{2b_2^2}=-\frac{1}{2b_1^2}\left(t^2+(x-a)^2-2t(x-a)\right)-\frac{t^2}{2b_2^2}=$$

$$=-\frac{1}{2b_1^2}\left(t^2+(x-a)^2-2t(x-a)-\frac{b_1^2t^2}{b_2^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}\right)\left(t-(x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2+b_1^2}\right)^2-\frac{(x-a)^2}{2(b_1^2+b_2^2)}.$$

Підставляючи степінь експоненти у вираз для $f_{\varsigma}(x)$, отримаємо твердження леми.

Доведення теореми 2.

а) Випливає з леми 1 при $a = R_{GMV}$, $b_1 = \sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}$, $b_2 = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}$ і m=n-k.

б) Випливає з леми 1 при $a = -R_{GMV}$, $b_1 = -\sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}$, $b_2 = \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*) \frac{V_{GMV}}{n-1}}$ і m=n-k.

в) Для обчислення густини випадкової величини $\hat{V}^*_{VaR}$ використаємо той факт, що $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$, та наступну рівність:

$$f_{\hat{V}^*_{VaR}}(x) = \frac{1}{b(\widetilde{s}^*)} f_{\xi_2}(x / b(\widetilde{s}^*)) = \frac{1}{2b(\widetilde{s}^*)^{(n-k)/2} \Gamma((n-k)/2)} x^{\frac{n-k-2}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2b(\widetilde{s}^*)}\right\}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі 2 знайдено розподіли характеристик портфелю лише у випадку виконання умови $\hat{s} = s^*$, тобто при досить істотних обмеженнях. Цікавіше було б розглянути безумовний розподіл оцінок характеристик. На жаль, безумовний розподіл у даному випадку не може бути знайдений, оскільки оцінки ваг портфелю (5) коректні тоді і лише тоді, коли виконується наступна нерівність:

$$\hat{s} < z_\alpha^2. \tag{11}$$

Тобто, враховуючи важливість умови (11), цікавим є розподіл оцінок характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем *VaR* за умови виконання (11).

Теорема 3. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n>k$. Тоді:

а) $f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^*\right) f_{\hat{R}^*_{VaR}}(x \mid s^*) ds^*$,

б) $f_{\hat{V}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^*\right) f_{\hat{V}^*_{VaR}}(x \mid s^*) ds^*$,

в) $f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2)\int\limits_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) f_{\hat{M}^*_{VaR}}(x \mid s^*)ds^*$,

де $K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1,n-k+1;ns}(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}x)}$, $F_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ та $f_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з d_1 і d_2 ступенями свободи та нецентральним параметром λ.

Доведення теореми 3 випливає з наступної леми та факту, що $\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}\hat{s} \sim F_{k-1,n-k+1;ns}$.

Лема 2. Нехай *X* та *Y* є абсолютно неперервні випадкові величини з густинами $f_X(\cdot)$ та $f_Y(\cdot)$ відповідно. Тоді:

$$f_{X|Y\le y}(x \mid y) = \frac{1}{F_Y(y)}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(x \mid t) f_Y(t)dt,$$

де $F_Y(\cdot)$ є функцією розподілу випадкової величини *Y*.

Доведення. Нехай $F_{X|Y\le y}(x \mid y)$ є функцією розподілу випадкової величини *X* за умови $Y \le y$. Тоді

$$F_{X|Y\le y}(x \mid y) = \frac{P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\})}{P(\{Y \le y\})} = \frac{1}{F_Y(y)}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(s,t)dsdt,$$

де $f(s,t)$ є густиною двовимірної випадкової величини *(X, Y)*. Використовуючи рівність $f(s,t) = f_{X|Y=t}(s \mid t) f_Y(t)$ отримаємо

$$F_{X|Y\le y}(x \mid y) = \frac{1}{F_Y(y)}\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(s \mid t) f_Y(t)dt\right)ds.$$

З означення густини випливає, що:

$$f_{X|Y\le y}(x \mid y) = \frac{\partial F_{X|Y\le y}(x \mid y)}{\partial x} = \frac{1}{F_Y(y)}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(x \mid t) f_Y(t)dt.$$

Лему доведено.

З теореми 3 отримуємо наступну рівність

$$M(g(\hat{R}_{VaR}) \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = K(z_\alpha^2)\int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)E(g(\hat{R}_{VaR}^*) \mid s^*)ds^* \quad (12)$$

для довільної функції $g(\cdot)$, такої, що відповідний інтеграл існує. Аналогічні рівності виконуються для $\hat{V}_{VaR}$ та $\hat{M}_{VaR}$.

Теорема 3 та формула (12) мають важливе застосування. Для ілюстрації цього позначимо

$$Q_1(x) = K(x)\int_0^x \frac{s^*}{\sqrt{x-s^*}} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*,$$

$$Q_2(x) = K(x)\int_0^x s^* f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*,$$

$$Q_3(x) = K(x)\int_0^x \sqrt{x-s^*}\, f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*.$$

Підставляючи в формулу (12) $g(x) = x$ та $g(x) = x^2$, отримаємо:

Теорема 4. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n>k$. Тоді:

а) $M(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = R_{GMV} + \sqrt{\dfrac{2V_{GMV}}{n-1}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}Q_1(z_\alpha^2)$,

б) $D(\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \infty$,

в) $M(\hat{V}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \infty$,

г) $M(\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = -R_{GMV} + \sqrt{\dfrac{2V_{GMV}}{n-1}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}Q_3(z_\alpha^2)$,

д) $D(\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) =$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}Q_2(z_\alpha^2)\right)V_{GMV} + \frac{n-k}{n-1}V_{GMV}\left(z_\alpha^2 - Q_2(z_\alpha^2)\right) - \frac{2V_{GMV}}{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)^2}\left(Q_3(z_\alpha^2)\right)^2.$$

Доведення. Доведення даної теореми випливає з (12), теореми 1 та з того, що $M(\xi_1)=0$, $M(\xi_1^2)=D(\xi_1)=1$, $M(\sqrt{\xi_2})=\sqrt{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}$ та $M(\xi_2)=n-k$.

Зауважимо, що математичне сподівання оцінки дисперсії портфелю акцій з найменшим рівнем *VaR* не існує. Більше того, для оцінки *VaR* математичне сподівання існує, а, отже, поведінка даної міри ризику є кращою ніж поведінка дисперсії, що є її перевагою. Також, варто звернути увагу на те, що дисперсія дохідності портфелю не існує, отже, можливі значення дохідності є сильно розсіяні по числовій осі, тобто, розподіл дохідності портфелю має так звані важкі хвости. Отже, навіть припустивши, що дохідності акцій є нормально розподіленими, ми отримали, що сукупна дохідність портфелю з найменшим рівнем *VaR* такою властивістю не володіє на відміну від дохідності портфелю з найменшою варіацією.

4. Висновки

Дана робота присв'ячена статистичному аналізу характеристик оцінок портфелю акцій з найменшим рівнем *VaR*. Вибір *VaR* як міри ризику для побудови портфелю зумовлено тим, що дисперсія не є оптимальним вибором міри. Вона має два істотних недоліки. По-перше, дисперсія приймає до уваги двосторонній ризик, а по-друге, не надає достатньої інформації про ризик портфелю. *VaR* не володіє цими недоліками. Ця міра є більш інформативної і ризик вимірює беручи до уваги лише від'ємні значення дохідності. Проте, *VaR* була використана для побудови портфелю відносно недавно [7]. Тому дотепер не було вивчено статистичних властивостей оцінок характеристик портфелю отриманого на основі цієї міри.

У роботі припускається, що дохідності акцій є нормально розподіленими випадковими величинами незалежними в часі. Хоча до даного припущення досить скептично ставляться в останні роки, проте в роботі [11] автори показали, що залежності дохідностей акцій на поведінку оптимальних портфелів не є значним. Крім того, в [12] показано, що важкі хвости є менш важливими, якщо портфель є добре диверсифікований. Використовуючи попереднє припущення, в роботі знайдено стохастичне зображення оцінок дохідності, дисперсії та *VaR* портфелю акцій з найменшим рівнем *VaR*. Даний результат спрощує використання методу

Монте—Карло для аналізу портфелю, та, крім цього, дозволяє знайти густини розподілів характеристик портфелю за умови, що оцінка параметру *s* є відома. Звичайно, дана умова є дуже строгою. Більш інформативним, очевидно, є безумовний розподіл величини. Проте в даному випадку говорити про безумовний розподіл характеристик портфелю не можна, оскільки оцінка портфелю є коректна лише у випадку виконання умови (11). Тому в роботі також знайдено умовні густини розподілів характеристик портфелю за виконання умови (11). Як наслідок з цього результату отримано, що математичне сподівання оцінки дисперсії портфелю не існує. Крім того, математичне сподівання оцінки *VaR* портфелю існує. Даний факт є ще однією перевагою *VaR* над дисперсією. Також у роботі показано, що дисперсія дохідності портфелю не існує, отже, навіть припускаючи нормальність дохідностей акцій з яких складається портфель, дохідність портфелю буде мати важкі хвости, тобто її значення є сильніше розсіяні по числовій прямій ніж значення нормально розподіленої випадкової величини.

Література

1. *Markowitz H.* Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — №7. — P. 77—91.

2. *Merton R. C.* An analytical derivation of the efficient frontier // Journal of Financial and Quantitative Analysis. — 1972. — №7. — P. 1851—1872.

3. *Sharpe William F.* Mutual fund performance // Journal of Business. — 1966. — p. 119-138.

4. *Sharpe William F.* The Sharpe Ratio // Journal of Portfolio Management. — 1994. — P. 49—58.

5. *Okhrin Y., Schmid W.* Distributional properties of optimal portfolio weights // Journal of Econometrics. — 2006. — №134. — P. 235—256.

6. *Schmid W., Zabolotskyy T.* On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio // ASTA — Advances in Statistical Analysis. — 2008. — №92. — P. 29—34.

7. *Alexander G. J., Baptista M. A.* Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis // Journal of Economic Dynamics & Control. — 2002. — №26. — P. 1159—1193.

8. *Заболоцький Т.М.* Порівняння мір ризику портфеля акцій // Вісник Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ). — 2010. №2 (8). — С. 229—235.

9. *Bodnar T., Schmid W.* A test for the weights of the global minimum variance portfolio in an elliptical model // Metrica. — 2008. — №67. — P. 127—143.

10. *Bodnar T., Schmid W*. Econometrical analysis of the sample efficient frontier.// The European Journal of Finance. — 2009. — №15. — P. 317—335.

11. *Tu J., Zhou G.* Data-generating process uncertainty: What difference does it make in portfolio decisions? // Journal of Financial Economics. — 2004. — №72. — P. 385—421.

12. *Duffie D., Pan J.* An overview of Value-at-Risk // Journal of Derivatives. — 1997. — P. 7—49.

Стаття надійшла до редакції 10.10.2011 р.

УДК 004:33

Л.В. Іващенко, аспірант кафедри вищої математики
при факультеті маркетингу,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПІДКРІПЛЕННЯ БАНКОМАТІВ ГОТІВКОВИМИ КОШТАМИ

АНОТАЦІЯ. У статті розглянуто математичну модель банкоматної мережі банку на прикладі окремого банкомата та запропоновано спосіб вирішення практичної задачі з розрахунку оптимальної суми для підкріплення готівковими коштами каси банкомата.
Запропонований метод дозволяє як оцінити ризик виникнення дефіциту, так і визначити оптимальне значення параметра при заданому граничному значенні ризику виникнення дефіциту. Отримані результати можуть використовуватися для прийняття рішень при створенні касових планів комерційного банку з метою оптимізації політики управління ресурсами.

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается математическая модель банкоматной сети банка на примере отельного банкомата и предложено способ решения практической задачи по расчету оптимальной суммы для подкрепления наличными средствами кассы банкомата.
Предложенный метод позволяет, как оценить риск возникновения дефицита, так и определить оптимальное значение параметра при заданном граничном значении риска возникновения дефицита. Полученные результаты могут использоваться для принятия решений при создании кассовых планов коммерческого банка с целью оптимизации политики управления ресурсами.

ANNOTATION. In this article author describes a model of ATM's network by the example of single ATM and proposes a way for solving practical task of calculating an optimal amount of cash for load.
This method allows to estimate a risk of cash shortage, as far as determine an optimal parameter's meaning for established value of shortage. The outputs can be used for decision-making in cash-management for resource management's optimization.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: система масового обслуговування, ймовірність (ризик) утворення дефіциту, функція розподілу випадкової величини, неповна гамма-функція (функція Пріма)