

фінансування. Аналогічна ситуація з витратами на медицину та духовний і фізичний розвиток. Вплив цих видатків можна повністю оцінити лише у середньо- та довгостроковій перспективі.

Також варто провести аналіз того, наскільки точними та адекватними є дані щодо інвестицій в Україну, оскільки використані дані мають суттєві недоліки у методології підрахунку протягом останніх років. Таким чином, для використання отриманих результатів у визначенні подальшої бюджетної політики необхідно провести аналогічні дослідження з новими даними.

Література

1. Україна у цифрах 2007: Стат. зб. / За ред. О.Г. Осауленка. — Держкомстат України, 2008. — С. 144
2. *Малютін О.К.* Концепція поліпшення інвестиційного клімату в Україні / *Фінанси України*. — №11(156). — 2008. — С. 64—74.
3. *Фінансово-економічне прогнозування і планування* / І.Я. Чугунов, Т.Г. Затонацька, А.В. Ставицький. — К.: НДФІ, 2007. — 312 с.
4. Стратегічні виклики ХХІ століття суспільству та економіці України: У 3 т. — Т. 3: Конкурентоспроможність української економіки/ За ред. акад. НАН України В.М. Гейця, акад. НАН України В.П. Семиноженка, чл. кор. НАН України Б.Є Кваснюка. — К.: Фенікс, 2007. — 556 с.
5. *Черняк О.І., Ставицький А.В.* Динамічна економетрика. — К., 2000. — 120 с.

Стаття надійшла до редакції 24.11.08 р.

УДК 330.4:519.86

С. В. Устенко, д-р екон. наук,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ОБГРУНТУВАННЯ МАГІСТРАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ НАУКОМІСТКИХ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМ

АНОТАЦІЯ. Проводиться теоретичне обґрунтування наявності магістральних властивостей функціонування та розвитку наукомістких виробничих систем. Систематизовано попередні результати моделювання та доведено існування магістралі для динамічної моделі, яка може бути використана в різних наукомістких галузях України.

SUMMARY. Theoretical Grounding of existence of main line characteristics of functioning and development of science intensive industrial systems has been conducted. Previous results of modeling have been systematized and the existence of main line for dynamical model which can be used in different science intensive industries of Ukraine has been proved.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. НВС — наукомістка виробнича система, ВФ — виробнича функція.

В літературі, присвяченій моделюванню виробничих та економічних процесів підприємств, розглядаються малосекторні нелінійні динамічні моделі економічної системи та лінійні динамічні багатогалузеві моделі [1—5], де структура економіки відображена галузями (секторами). Малосекторні моделі застосовуються для довгострокових тенденцій і факторів росту економіки. Це, як правило, замкнуті моделі: весь випуск продукції або споживається, або інвестується. Кожен сектор виробляє один агрегований продукт. Невелике число секторів дозволяє аналітично представити розвиток економіки в різних галузях виробництва при нелінійних залежностях випусків секторів від ресурсів при різних значеннях екзогенних параметрів і тим самим одержати загальну картину економічного розвитку. При цьому розглядається динаміка економічних процесів за допомогою диференціальних рівнянь. До числа базової моделі відносять модель Солоу і її модифікації [3]: модель з урахуванням запізнення при вводі основних засобів, модель оптимального економічного росту. У цих моделях на макrorівні економічна система розглядається як єдине ціле, що виробляє один агрегований продукт, який може споживатися чи інвестуватися.

Зазначені моделі після завершення перехідного процесу набувають стаціонарного стану, що характеризується сталістю питомих показників (фондоозброєністю, продуктивністю праці тощо). З економічної точки зору стаціонарний стан тут варто розуміти, як стан «усіченого» розширеного відтворення, коли інвестиції витрачаються на заміну вибулих засобів праці і частково на таке розширення основних виробничих засобів, яке забезпечує збереження фондоозброєності на постійному рівні. Повномасштабне розширене відтворення мало місце, якби вибулі засоби замінювалися новими більш високого технологічного рівня. Але дані моделі для подібної ситуації не підходять. Якщо економічна система складається з багатьох галузей, то доводиться відмовлятися від нелінійності через складнощі, які виникають при цьому. Разом з тим дослідження навіть лінійних динамічних багатогалузевих моделей (динамічні узагальнені моделі Леонтьєва: модель міжга-

лузевого балансу і модель Неймана) також досить складні [1]. Тут основні труднощі полягають у розмірності оптимізаційних задач, які виникають, що перешкоджає безпосередньому застосуванню відомих обчислювальних процедур рішення задач лінійного програмування.

Розглянуті вище моделі орієнтовані на галузеву специфіку виробництва і на випуск агрегованої продукції. Тут сектор розглядається як умовний об'єкт моделювання. Він не прив'язаний до структури окремих підприємств чи хоча б до структури великих промислових і виробничих підприємств, заводів. Тільки в цілому на функціональному рівні сектор відбиває специфіку виробництва. При цьому не відображається структура наукомісткого підприємства як джерела впровадження у виробництво нових технологій, специфіка технології виробництва продукції, менеджменту, ресурсного потенціалу і маркетингу підприємств.

Також не слід забувати про проблему призначення цільового функціоналу, вибір якого в кінцевому рахунку припускає вибір оптимальної траєкторії і розвиток (динаміку) об'єкту, який моделюється. Саме у зв'язку з зазначеними складнощами інтерес дослідників спрямовується на використання якісних методів досягнення оптимальних траєкторій. До їхнього числа можна віднести магістральну теорію та методи дослідження оптимальних траєкторій [1], методи досягнення стаціонарних точок, які засновані на принципах Лагранжа і максимумі Понтрягіна та теорії оптимального керування [6—8].

Розроблені також концепції та досліджуються моделі виробничих систем, що ґрунтуються на синергетичній парадигмі [9—11]. Згідно з цими концепціями та моделями економічні системи розглядаються як складні, принципово нелінійні динамічні системи, що знаходяться у нерівноважному стані та поведінка яких є чутливою до початкових умов, у яких відбуваються процеси самоорганізації, наявні емерджентні ефекти, наслідком яких є реалізація кооперативної, когерентної поведінки. В рамках цих концепцій розроблено методологію та запропоновано низку потужних методів та моделей прогнозування та управління економічними об'єктами в умовах невизначеності та ризику, зокрема, мультифрактальний, ентропійний та вейвлет аналіз, алгоритми реконструкції атракторів, які активно розробляються вітчизняними науковими школами професорів Лисенка Ю. Г., Сергєєвої Л. Н., Соловйова В. В., Шарапова О. Д.

Розглядаються також екзогенні та ендогенні моделі [1], які враховують структурні технологічні зміни, що відображають на-

уково-технічний прогрес. Виробнича структура економічної системи піддана у часі змінам, обумовленим різноманітними причинами, які прийнято називати науково-технічним прогресом. Як правило, цей прогрес приводить до зміни виробничої функції у часі. Якщо ці зміни є зовнішніми стосовно моделі, то вони є екзогенними. Однак у більшості випадків технологічні зміни на підприємствах вводяться на якийсь заданий довгий період, наприклад при виготовленні принципово нового виду продукції і тоді технічний прогрес багато в чому буде визначатись усередині самої економічної системи. Результатом (у майбутньому) цих технологічних змін буде задана технологічна структура, заданий портфель замовлень, задані маркетингові дослідження і т. д., тобто зовнішні фактори стають внутрішніми проблемами самої економічної системи. У даному випадку ці зміни на певному часі стають ендогенними і враховуються усередині моделі, що залежать від учасників самої економічної системи. Тоді економічну систему на певному часі розвитку можна вважати не відкритою, а замкнутою. Одним із шляхів розв'язання даної проблеми є розробка так званих багатомодульних наукомістких виробничих систем, які в основі самої моделі використовують агреговані виробничі функції, що враховують структуру, специфіку і технологію розробки нової продукції. Тобто даний спосіб вимагає побудови моделі, яка описує процес функціонування підприємства у його взаємодії із зовнішнім середовищем з урахуванням його розвитку. Дана модель функціонування наукомісткої виробничої системи (НВС), була розглянута в роботі [12], яка дозволяє розв'язати задачу розподілу інвестицій, трудових ресурсів, первинних та вторинних ресурсів між функціональними модулями (підприємствами) інтеграційної виробничої системи з метою прийняття управлінських рішень.

У статті, яка є продовженням роботи [13], проводиться теоретичне обґрунтування наявності магістральних властивостей функціонування та розвитку наукомістких НВС.

Для цього необхідно систематизувати попередні результати моделювання та сформулювати теоретичні положення та припущення відносно якісного дослідження оптимальних траєкторій динамічної моделі оптимального економічного розвитку НВС:

1. Чисельне моделювання показало [13] існування єдиної оптимальної стаціонарної траєкторії, яка не залежить ні від початкових, ні кінцевих даних, а тільки від структури НВС. Як раніше було визначено [12, 13], НВС складається з окремих функціональних модулів, до яких входять науковий, виробничий, ресурс-

ний, ремонтний, сервісний, маркетинговий та ін. Тобто структура НВС — це багатомодульна технологічна структура виробничої системи, яка націлена на проектування, розробку і супровід конкурентоспроможної продукції. Кожний модуль визначається конкретним типом виробничої функції (ВФ), а вся система — агрегованою ВФ, яка враховує структуру, специфіку і технологію розробки та ремонтно-сервісного обслуговування нової продукції. Але незалежно від типу ВФ параметрами, які впливають на характер траєкторії розвитку системи, є безпосередньо параметри (вагові коефіцієнти) окремих ВФ кожного модулю виробничої системи, виробнича програма випуску наукомісткої продукції $y_1(t)$, програма ремонтно-сервісного обслуговування $y_0(t)$, період розвитку системи T , ендегенні параметри моделі (коефіцієнти амортизації і т. ін.).

2. У результаті чисельного моделювання отримано структуру оптимальних траєкторій розвитку системи НВС. Найважливішою властивістю оптимальних траєкторій є їхній магістральний характер при великих значеннях горизонту планування системи T .

Існування оптимальної стаціонарної траєкторії

Розглядається задача [13]

$$c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) = \int_0^T (1 - v(t)) \Pi(k(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{k}_i = \alpha_i(t) \Pi(k(t)) - \mu_i k_i(t),$$

$$f_0(k(t)) \geq y_0, \quad k(0) = x, \quad k(T) = y, \quad v(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(t) \leq 1, \quad \alpha_i(t) \geq 0,$$

де c — питоме споживання, α — вектор долей інвестицій, $\Pi(k) = p_1 f(k) - B$ — прибуток, B — витрати, p_1 — ціна одиниці наукомісткої продукції, μ_i — коефіцієнти амортизації модулів, k — вектор фондоозброєності, $f(k)$ — агрегована ВФ для ресурсного, наукового та виробничого модулів, $f_0(k)$ — агрегована ВФ для ресурсного та ремонтно-сервісного модулів, y_0 — мінімально-необхідний рівень ремонтно-сервісного обслуговування. Вважається, що коли $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1$, то увесь прибуток іде на інвестиції і

чистого прибутку немає, тобто $c(t) = (1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i) \Pi(k) = 0$. При

$\sum_{i=1}^4 \alpha_i < 1$, $c(t) > 0$ чистий прибуток є і виробництво рентабельне.

Інтеграл виразу (1) зручно представити у вигляді

$$\begin{aligned} c(x, y, k(t), \alpha(t), T) &= \int_0^T \Pi(k(t)) dt - \int_0^T v(t) \Pi(k(t)) dt = \\ &= \left(\begin{aligned} \alpha_i(t) \Pi(k(t)) &= \dot{k}_i(t) + \mu_i k_i(t) \\ v(t) \Pi(k(t)) &= \sum_{i=1}^4 \dot{k}_i(t) + \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t) \end{aligned} \right) = \\ &= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i), \end{aligned}$$

тоді

$$c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) = \int_0^T \Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t) dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i). \quad (2)$$

Позначимо

$$\Omega = \sup_{\substack{k \geq 0 \\ f_0(k) \geq y_0}} [\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i]. \quad (3)$$

Тоді $\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i \leq \Omega \quad \forall k \geq 0$.

Тому

$$\begin{aligned} c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) &= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt - \\ &- \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) \leq \int_0^T \Omega dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) = \\ &= \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i). \end{aligned}$$

Отже, маємо нерівність

$$c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot)) \leq \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i). \quad (4)$$

Метою задачі керування є максимізація функції c . З нерівності (4) випливає, що, коли існує таке керування $\alpha(t)$, при якому виконується в (4) рівність, то це керування і буде оптимальним. Існування такого керування випливає з наступної теореми.

Теорема 1. Існує єдина точка k^* така, що $\Omega = \Pi(k^*) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i^*$.

Доведення теореми 1. Розглянемо задачу (3), де $\Pi(k) = Ak_1^{a_1} k_2^{a_2} k_3^{a_3} - B$, $f_0(k) = Ak_1^{a_1^0} k_4^{a_4^0}$, $a_1 + a_2 + a_3 < 1$. Ця задача є задачею на умовний екстремум.

Складемо функцію Лагранжа

$$L(k, \lambda) = \Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i + \lambda(f_0(k) - y_0),$$

λ — множник Лагранжа. Для знаходження екстремуму обчислюємо похідні функції L по k і λ та прирівнюємо їх до нуля. Маємо рівності

$$\frac{\partial L}{\partial k_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial k_i} - \mu_i + \lambda \frac{\partial f_0}{\partial k_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(f_0(k) - y_0) = 0. \quad (6)$$

З рівняння (6) випливає, що можливі два випадки: а) $\lambda = 0$ або б) $f_0(k) - y_0 = 0$. Розглянемо кожний з них окремо.

Випадок а) $\lambda = 0$. Тоді рівняння (5) при $i = 4$ має вигляд $\frac{\partial \Pi}{\partial k_4} - \mu_4 = 0$, але $\frac{\partial \Pi}{\partial k_4} = 0$ (основний прибуток НВС отримується за рахунок виготовлення наукомісткої продукції і не залежить від ремонтно-сервісного модулю) і рівняння розв'язків не має. Отже $\lambda \neq 0$ і тому $f_0(k) - y_0 = 0$, тобто екстремум існує тільки у випадку б) $f_0(k) - y_0 = 0$.

Тоді задача, яка розглядається, еквівалентна задачі знаходження

$$\Omega = \sup_{\substack{k \geq 0 \\ f_0(k) = y_0}} [\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i].$$

Враховуючи вигляд функції $f_0(k) = Ak_1^{a_1^0} k_4^{a_4^0}$, маємо рівність

$$Ak_1^{a_1^0} k_4^{a_4^0} = y_0. \text{ Звідки знаходимо } k_4 = \frac{b_0}{k_1^{\gamma}}, \text{ де } b_0 = \left(\frac{y_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{a_4^0}}, \gamma = \frac{a_1^0}{a_4^0}.$$

Тому вираз $\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i = Ak_1^{a_1} k_2^{a_2} k_3^{a_3} - B - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i$ можна записати у вигляді

$$\varphi(k_1, k_2, k_3) = Ak_1^{a_1} k_2^{a_2} k_3^{a_3} - B - \mu_1 k_1 - \mu_2 k_2 - \mu_3 k_3 - \frac{\mu_4 b_0}{k_1^\gamma}. \quad (7)$$

Знайдемо супремум функції $\varphi(k_1, k_2, k_3)$ по змінних k_2 і k_3 . Маємо

$$\begin{aligned} \sup_{k_2, k_3 \geq 0} \varphi(k_1, k_2, k_3) &= \sup_{k_2, k_3 \geq 0} (Ak_1^{a_1} k_2^{a_2} k_3^{a_3} - B - \mu_1 k_1 - \mu_2 k_2 - \mu_3 k_3 - \frac{\mu_4 b_0}{k_1^\gamma}) = \\ &= \sup_{k_2, k_3 \geq 0} (Ak_1^{a_1} k_2^{a_2} k_3^{a_3} - \mu_2 k_2 - \mu_3 k_3) - B - \mu_1 k_1 - \frac{\mu_4 b_0}{k_1^\gamma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тому для знаходження $\sup_{k_2, k_3 \geq 0} \varphi(k_1, k_2, k_3)$ досить знайти супремум функції $\varphi_0(k_2, k_3) = \sup_{k_2, k_3 \geq 0} (A_1 k_2^{a_2} k_3^{a_3} - \mu_2 k_2 - \mu_3 k_3)$, де $A_1 = Ak_1^{a_1}$.

Знаходимо похідні функції φ_0 по k_2 і k_3 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial k_2} = a_2 A_1 k_2^{a_2-1} k_3^{a_3} - \mu_2 = 0, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial k_3} = a_3 A_1 k_2^{a_2} k_3^{a_3-1} - \mu_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 A_1 k_2^{a_2} k_3^{a_3} = \mu_2 k_2, \\ a_3 A_1 k_2^{a_2} k_3^{a_3} = \mu_3 k_3. \end{cases} \quad (9)$$

Нехай $x = A_1 k_2^{a_2} k_3^{a_3}$, тоді система (9) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} a_2 x = \mu_2 k_2, \\ a_3 x = \mu_3 k_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{a_2}{\mu_2} x, \\ k_3 = \frac{a_3}{\mu_3} x. \end{cases}$$

Підставимо значення k_2 і k_3 в перше рівняння системи (9):

$$\begin{aligned} a_2 A_1 \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{a_2-1} x^{a_2-1} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{a_3} x^{a_3} &= \mu_2, \\ A_1 \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{a_2} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{a_3} &= x^{1-\rho}, \rho = a_2 + a_3, \end{aligned} \quad (10)$$

звідки $x = A_1^{1-\rho} \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{\frac{a_2}{1-\rho}} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{\frac{a_3}{1-\rho}}$.

Отже, точка $k_2^* = \frac{a_2}{\mu_2} x$, $k_3^* = \frac{a_3}{\mu_3} x$ є стаціонарною точкою функції $\varphi_0(k_2, k_3)$, оскільки $\frac{\partial \varphi_0}{\partial k_2} = 0$ і $\frac{\partial \varphi_0}{\partial k_3} = 0$.

Доведемо, що ця точка (k_2^*, k_3^*) є точкою максимуму функції $\varphi_0(k_2, k_3)$. Для цього обчислимо матрицю других похідних цієї функції (матрицю Гессе) і доведемо, що вона від'ємно визначена [2]. Маємо

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_2^2} = a_2(a_2 - 1) A_1 k_2^{a_2-2} k_3^{a_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_2 \partial k_3} = a_2 a_3 A_1 k_2^{a_2-1} k_3^{a_3-1},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_3^2} = a_3(a_3 - 1) A_1 k_2^{a_2} k_3^{a_3-2}.$$

Матриця Гессе має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_2^2} & \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_2 \partial k_3} \\ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_2 \partial k_3} & \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial k_3^2} \end{pmatrix},$$

де $g_{11} = a_2(a_2 - 1) A_1 k_2^{a_2-2} k_3^{a_3} < 0$, оскільки $a_2 < 1$. Мінор другого порядку $|G| = A_1^2 k_2^{2a_2-2} k_3^{2a_3-2} (a_2 a_3 (a_2 - 1)(a_3 - 1) - a_2^2 a_3^2) = A_2 a_2 a_3 (1 - \rho) > 0$, тому що $\rho < 1$, а $A_2 = A_1^2 k_2^{2a_2-2} k_3^{2a_3-2}$. Отже, гессіан від'ємно визначений, і тому точка (k_2^*, k_3^*) є точкою максимуму функції $\varphi_0(k_2, k_3)$.

Таким чином, максимум функції $\varphi_0(k_2, k_3)$ досягається в точці $k_2^* = \frac{a_2}{\mu_2} x$, $k_3^* = \frac{a_3}{\mu_3} x$ і, враховуючи перетворення (10), дорівнює

$$\begin{aligned}
\varphi_0(k_2^*, k_3^*) &= A_1 \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{a_2} x^{a_2} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{a_3} x^{a_3} - a_2 x - a_3 x = \\
&= A_1^{\frac{1}{1-\rho}} (1-\rho) \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{\frac{a_2}{1-\rho}} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{\frac{a_3}{1-\rho}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Підставивши $A_1 = Ak_1^{a_1}$ в (11), отримуємо

$$\varphi_0(k_2^*, k_3^*) = k_1^{\frac{a_1}{1-\rho}} A^{\frac{1}{1-\rho}} (1-\rho) \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{\frac{a_2}{1-\rho}} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{\frac{a_3}{1-\rho}} = P k_1^{\frac{a_1}{1-\rho}},$$

де $P = A^{\frac{1}{1-\rho}} (1-\rho) \left(\frac{a_2}{\mu_2}\right)^{\frac{a_2}{1-\rho}} \left(\frac{a_3}{\mu_3}\right)^{\frac{a_3}{1-\rho}}$.

Тому супремум (8) дорівнює

$$\sup_{k_2, k_3 \geq 0} \varphi(k_1, k_2, k_3) = P k_1^{\frac{a_1}{1-\rho}} - \mu_1 k_1 - B - \frac{\mu_4 b_0}{k_1^\gamma} = \varphi_1(k_1). \tag{12}$$

Дослідимо на екстремум функцію $\varphi_1(k_1)$ (рис.1). Доведемо, що $\theta = \frac{a_1}{1-\rho} < 1$. Маємо $a_1 + a_2 + a_3 < 1 \Rightarrow a_1 < 1 - (a_2 + a_3)$, $a_1 < (1-\rho) \Rightarrow \theta < 1$.

Похідна функції $\varphi_1(k_1)$ (12) має вигляд $\varphi_1'(k_1) = \frac{\theta P}{k_1^{1-\theta}} - \mu_1 + \frac{\gamma \mu_4 b_0}{k_1^{\gamma+1}}$, оскільки $1-\rho=0$, $\gamma+1>0$, то функція $\varphi_1'(k_1)$ є монотонно спадною, як сума спадних функцій $\frac{\theta P}{k_1^{1-\theta}}$ та $\frac{\gamma \mu_4 b_0}{k_1^{\gamma+1}}$. Крім того,

$$\lim_{k_1 \rightarrow +0} \varphi_1'(k_1) = \lim_{k_1 \rightarrow +0} \left(\frac{\theta P}{k_1^{1-\theta}} - \mu_1 + \frac{\gamma \mu_4 b_0}{k_1^{\gamma+1}} \right) = +\infty \quad \lim_{k_1 \rightarrow +\infty} \varphi_1'(k_1) = \lim_{k_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{\theta P}{k_1^{1-\theta}} - \mu_1 + \frac{\gamma \mu_4 b_0}{k_1^{\gamma+1}} \right) = -\mu_1 < 0.$$

Отже, $\lim_{k_1 \rightarrow +0} \varphi_1'(k_1) > 0$, $\lim_{k_1 \rightarrow +\infty} \varphi_1'(k_1) < 0$, тому з монотонності та неперервності функції $\varphi_1'(k_1)$ з теореми Коші випливає існування єдиної точки k_1^* , в якій $\varphi_1'(k_1^*) = 0$, причому при $k_1 < k_1^*$ буде $\varphi_1'(k) > 0$, а при $k_1 > k_1^*$ — $\varphi_1'(k) < 0$. Тому точка k_1^* є єдиним максимумом функції $\varphi_1(k_1)$.

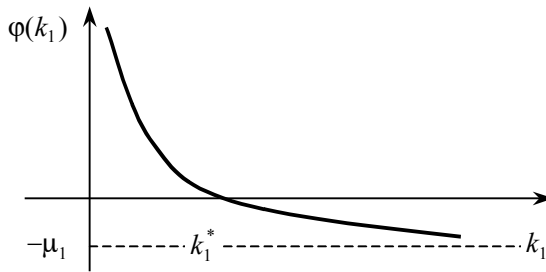


Рис. 1. Властивості функції $\varphi_1(k_1)$

Максимум функції $\varphi(k)$ (7) досягається в точці (k_1^*, k_2^*, k_3^*) , де $k_2^* = \frac{a_2}{\mu_2} x$, $k_3^* = \frac{a_3}{\mu_3} x$, $x = A^{\frac{1}{1-\rho}} (k_1^*)^{\frac{a_1}{1-\rho}} (\frac{a_2}{\mu_2})^{\frac{a_2}{1-\rho}} (\frac{a_3}{\mu_3})^{\frac{a_3}{1-\rho}}$, а розв'язком початкової задачі є оптимальна точка $k^* = (k_1^*, k_2^*, k_3^*, k_4^*)$, де $k_4^* = \frac{b_0}{(k_1^*)^\gamma}$, що і потрібно було довести.

Відповідні керування обчислюються за формулами

$$\alpha_i^* = \frac{\mu_i k_i^*}{\Pi(k^*)},$$

тоді траєкторія $k(t) = k^*$ є стаціонарною траєкторією відповідної динамічної системи з керуванням $\alpha(t) = \alpha^*$, на якій система може знаходитись як завгодно довго. При цьому розподіл інвестицій і споживання є оптимальним з точки зору максимізації споживання.

Магістральні властивості оптимальних траєкторій НВС

У теоремах про магістралі для різних моделей і динамічних систем доводиться існування магістралі [1]. При наявності магістралі оптимальні траєкторії треба шукати серед тих, які зберігають приблизно постійними пропорції в інтенсивності використання різних виробничих процесів. Тоді оптимальною траєкторією, в нашому випадку, слід вважати таку, яка забезпечує максимум функції мети задачі, тобто коли динамічна система НВС отримує максимальний параметр споживання (11).

Аналіз результатів чисельного моделювання показав [13], що структуру оптимальної траєкторії при великих T можна розбити на три умовних частини: початкову — коли потрібно за мінімальний час вийти на магістраль k^* (при цьому вкладаються, як правило, найбільші інвестиції, а споживання — мінімальне); стаціонарну (магістраль) — ефективна робота НВС за рахунок використання стратегії оптимального перерозподілу ресурсів (інвестиції та споживання помірні); кінцеву — вихід на кінцеву точку розвитку k_1 (також вкладаються великі інвестиції, а споживання — мінімальне).

Сформулюємо і доведемо відповідне твердження про існування магістралі для НВС. Для цього спочатку необхідно сформулювати припущення, яке формалізує поняття «велике значення T ».

Припущення 1. Точки x, y та T (рис. 2) такі, що

а) $\exists \alpha^1(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)) : k(0) = x$,

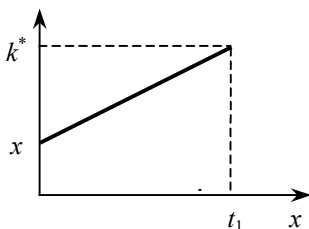


Рис. 2, а) $k(t_1) = k^*$

Точка k^* досяжна з точки x за час t_1 .

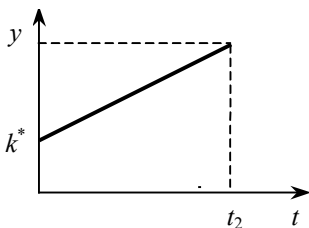


Рис. 2, б)

б) $\exists \alpha^2(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)) : k(0) = k^*, k(t_2) = y$.

Точка y досяжна з точки k^* за час t_2 .

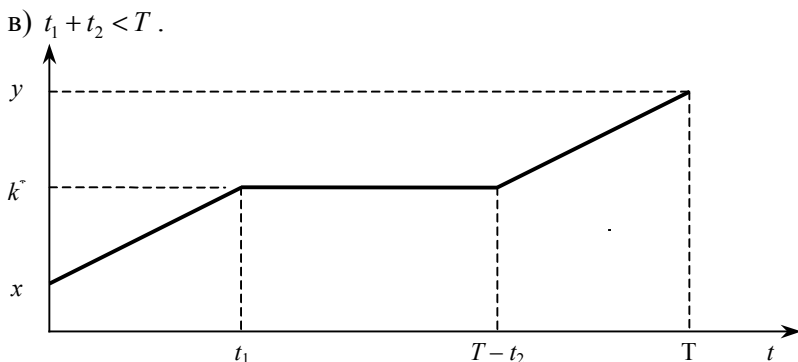


Рис. 2, в) Графічна інтерпретація Припущення 1

Нехай

$$K(x, y, T) = \sup_{\alpha} c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T),$$

$$\Omega = \sup_k [\Pi(k) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i] = \Pi(k^*) - \sum_{i=1}^4 \mu_i^* k_i^*, \quad \alpha_i^* = \frac{\mu_i k_i^*}{\Pi(k^*)}.$$

Магістральні властивості оптимальних траєкторій впливають з наступної теореми.

Теорема 2. Нехай справедливе Припущення 1, тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(x, y, T)}{\Omega T} = 1. \quad (13)$$

Оскільки значення ΩT є значенням функціоналу $c(\cdot)$ на магістралі, то рівність (13) означає, що будь-яка оптимальна траєкторія при великих значеннях T як завгодно близька до стаціонарної траєкторії k^* , тобто магістралі.

Доведення теореми 2.

Нехай $t_1 = t_{\min}^1$ і $t_2 = t_{\min}^2$ — мінімальні значення часу, $\alpha^1(t)$ — керування, яке відповідає t_1 , а $\alpha^2(t)$ — t_2 . Розглянемо керування вигляду

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^1(t) \quad \forall \quad t \in [0, t_{\min}^1], \\ \alpha^* \quad \forall \quad t \in [t_{\min}^1, T - t_{\min}^2], \\ \alpha^2(t) \quad \forall \quad t \in [T - t_{\min}^2, T], \end{cases} \quad (14)$$

де $\alpha_i^* = \frac{\mu_i k_i^*}{\Pi(k^*)}$.

Керування $\alpha(t)$ є допустимим, тому що $k(0) = x$, $k(T) = y$. Нехай $\alpha^0(t)$ — оптимальне керування в задачі (1), тоді $K(x, y, T) = c(x, y, k(t), \alpha^0(t), T)$.

З нерівності (4) випливає, що $K(x, y, T) \leq \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)$. З іншого боку, маємо $K(x, y, T) \geq c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T)$. Використовуючи вираз (2), величину $c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T)$ запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} c(x, y, k(\cdot), \alpha(\cdot), T) &= \int_0^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) = \\ &= \int_0^{t_{\min}^1} [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt + \int_{t_{\min}^1}^{T-t_{\min}^2} [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt + \\ &+ \int_{T-t_{\min}^2}^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt - \\ &- \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) = c_1 + \Omega(T - t_{\min}^1 - t_{\min}^2) + c_2 - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i), \end{aligned}$$

де $c_1 = \int_0^{t_{\min}^1} [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt$, $c_2 = \int_{T-t_{\min}^2}^T [\Pi(k(t)) - \sum_{i=1}^4 \mu_i k_i(t)] dt$.

Отже, маємо нерівності

$$c_1 + \Omega(T - t_{\min}^1 - t_{\min}^2) + c_2 - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i) \leq K(x, y, T) \leq \Omega T - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i).$$

Поділивши останню нерівність на ΩT , отримаємо:

$$\frac{c_1 + c_2 - \sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)}{\Omega T} - \frac{t_{\min}^1 + t_{\min}^2}{T} + 1 \leq \frac{K(x, y, T)}{\Omega T} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 (y_i - x_i)}{\Omega T}.$$

Переходячи до границі при $T \rightarrow \infty$, отримуємо:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(x, y, T)}{\Omega T} = 1,$$

що і потрібно було довести.

Розглянемо на декількох прикладах задачу оптимального керування інвестиціями НВС (1), що розробляє наукомістку продукцію.

У склад НВС входять модулі [12]: ресурсний (Р-модуль), науково-виробничий (НВ-модуль), виробничий (В — виробничий) і ремонтно-сервісний (РС-модуль), відповідно в подальшому це будуть i -ті модулі ($i = 0, 1, 2, 3$).

Для чисельного моделювання оптимальних траєкторій фондоозброєності НВС проводимо дискретизацію задачі (1). Для цього інтервал $[0, T]$ розбиваємо на N рівних частин і вважаємо

управління на кожному інтервалі (кроці) $h = \frac{T}{N}$ сталим,

$u^n = (\alpha_0^n, \alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n)$, $n = 0, \dots, N-1$. Тоді динамічну систему $\dot{k}_i = \alpha_i(t)\Pi(k(t)) - \mu_i k_i(t)$ можна замінити за методом Ейлера різницеvim наближенням $k^{n+1} = k^n + h(u^n \Pi(k^n) - M k^n)$, а цільову функцію (1) за методом трапецій сумою

$$c(k_0, k^*, u) = h \sum_{n=0}^{N-1} (1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i^n) \frac{\Pi(k^n) + \Pi(k^{n+1})}{2}.$$

За допомогою програмного пакету Mathcad проводилась максимізація функції (1) по керуванню $u^n = u^0, u^1, \dots, u^{N-1}$, за умов $k(0) = k_0$, $k(T) = k_1$ та фазовому обмеженні $f_0(k^n) \geq y_0$.

Приклад 1. Нехай виробничі функції НВС i — x модулів задаються функціями

$$F(k) := A \prod_{i=0}^3 (k_i)^{a_i}, \quad a := \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = 2,$$

$$F0(k) := A0 \cdot (k_0)^{a_0} \cdot (k_3)^{a_3}, \quad a_0 := 0,2, \quad a_3 := 0,4, \quad A_0 = 2, \quad y_0 := 2$$

з початковими значеннями фондоозброєності $k_0 = (5, 4, 1, 1)$, інтервалом $T := 100$ (наприклад, місяців) та кількістю точок моделювання $N := 10$ динамічної системи $\dot{k}_i = \alpha_i(t)\Pi(k(t)) - \mu_i k_i(t)$.

Значення фондоозброєності i -х модулів будемо вважати умовно-відносними. Задамо також кінцеву точку розвитку системи — $k_1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$.

Результат моделювання динамічної системи $\dot{k}_i = \alpha_i(t)\Pi(k(t)) - \mu_i k_i(t)$ (рис. 1) характерний для наукомісткого виробництва, коли проводиться проектування нової наукомісткої продукції в замкненому ланцюгу виробничої системи «Розробка — Виробництво — Обслуговування», при оптимальних значеннях

$$\alpha^* = \alpha_i = (0,102; 0,202; 0,298; 0,003),$$

$$k^* = k k_i = (11,894; 21,472; 15,849; 0,303).$$

$$n := 0.. N - 1$$

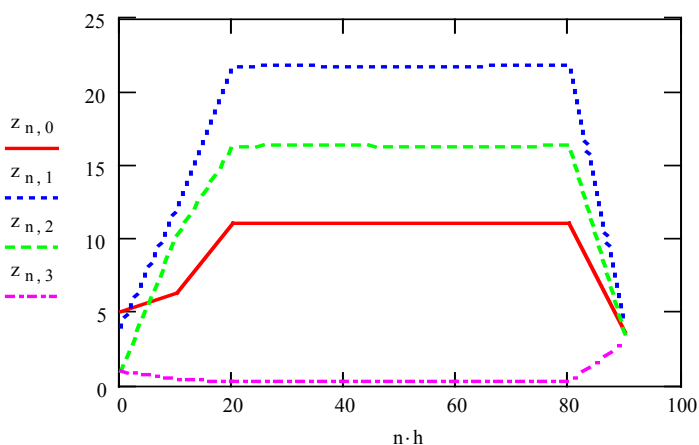


Рис. 1. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності $Z_{n,i} = k_i$ динамічної системи при значеннях $T = 100$, $N = 10$, $k_0 = (5,4,1,1)$ та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку $k1 = k_i(T) = (3,660; 4,363; 3,272; 2,957)$

Приклад 2. Змінено початкові та кінцеві значення фондоозброєності системи, відповідно $k_0 = (1, 5, 4, 1)$ та $k1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$. Тобто, вважаємо, що НВ-модуль закінчив проектування, а В-модуль тільки розпочинає серійне виготовлення наукомісткої продукції. Для цього потрібно суттєво збільшити фондоозброєність виробничого модулю та розпочати роботу ремонтно-сервісного модулю. Враховуючи те, що виробничі функції залишились без зміни, система виходить на ту ж саму магістраль, що і в **прикладі 1**:

$$\alpha^* = \alpha_i = (0,102; 0,202; 0,298; 0,003),$$

$$k^* = kk_i = (11,894; 21,472; 15,849; 0,303),$$

але кінцева траєкторія виходить на іншу, більш потужну, задану точку розвитку системи, де $k_1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$ (рис. 2).

$$n := 0.. N - 1$$

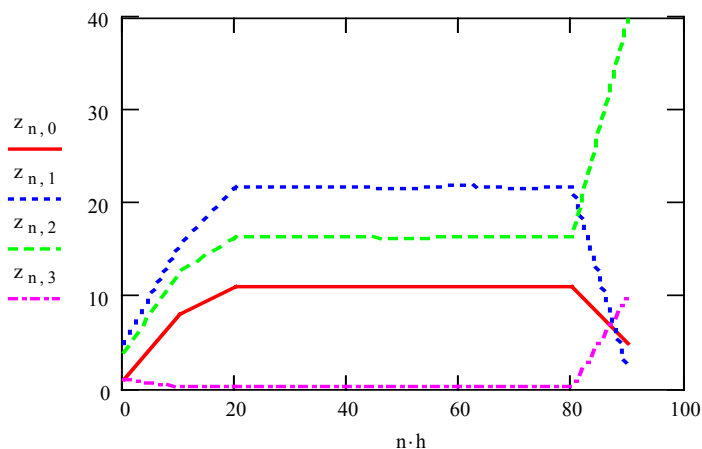


Рис. 2. Результат моделювання траєкторій фондоозброєності $Z_{n,i} = k_i$ динамічної системи при значеннях $T = 100, N = 10$, $k_0 = (1,5,4,1)$ та заданої кінцевої точки траєкторії розвитку $k_1 = k_i(T) = (5, 2, 40, 10)$

З економічної точки зору динамічна система НВС у початковій та кінцевій зонах керування нарощує виробничий потенціал, а в магістральній — зберігає оптимальний розподіл інвестицій та споживання в багатомодульній структурі НВС. При цьому на магістралі фондоозброєність має постійний рівень k^* при оптимальних інвестиціях α^* .

Література

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 198 с.
2. Интрилизатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. — М.: Айрис-пресс, 2002. — 576 с.
3. Колмаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.

4. *Марюта А. Н.* Математические модели экономики / А. Н. Марюта, С. В. Екимов. — Днепропетровск: Наука и образование, 2005. — 212 с.
5. Моделювання економічної динаміки: Навч. посіб. для студ. екон. вищ. навч. закл. / Лавінський Г. В., Пшенишнюк О. С., Устенко С.В., Шарапов О. Д. — К.: АТИКА, 2006. — 276 с.
6. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
7. *Тихомиров В. М.* Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления / Тихомиров В. М. — М.: Моск. ун-т, 1982. — 107 с.
8. *Тихомиров В. М., Иоффе А. Д.* Теория экстремальных задач / В. М. Тихомиров, А. Д. Иоффе. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
9. Економічна кібернетика: [підручн.] / За заг. ред. Ю. Г. Лисенко; У 2-х т. — Донецьк: Юго-Восток, Лтд, 2005. — Т. 1. — 508 с.
10. *Сергеева Л.Н.* Нелинейная экономика: модели и методы / Науч. ред. Ю.Г. Лысенко. Запорожский государственный университет. — Запорожье: Полиграф, 2002. — 217 с.
11. *Сергеева Л.Н.* Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса). Запорожский государственный университет. — Запорожье: Полиграф, 2002. — 227 с.
12. *Устенко С. В.* Багатомодульна модель функціонування наукомісткого підприємства / С. В. Устенко // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — 2007. — Вип. 76. — С. 62—81.
13. *Устенко С.В.* Розвиток наукомістких підприємств України: методи і моделі / С. В. Устенко // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — 2008. — Вип. 77. — С. 25—38.

Стаття надійшла до редакції 25.11.08 р.

УДК 330.46; 519.86

О. М. Мезенцев, аспірант кафедри інформаційного менеджменту, ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

КОЛЕКТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ СВІТОВОГО ВАЛЮТНОГО РИНКУ

АНОТАЦІЯ. Методами еконофізики досліджено колективні властивості валютного ринку. Встановлено, що мають місце процеси самоорганізації ринку, які зростають завдяки посиленню глобалізаційних тенденцій. Порівняння результатів розрахунків методом випадкових матриць та шляхом побудови мінімального остівного дерева свідчить про стійкі кластерні структури, сформовані в результаті синергетичних механізмів.