

PHYSICS AND MATHEMATICS

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ІЗ РОЗМІЩЕННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН

Kiselyova O.M.

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
доктор фізико-математичних наук, професор*

Притоманова О.М.

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
кандидат економічних наук, доцент*

AN ALGORITHM FOR SOLVING FUZZY OPTIMAL PARTITIONING OF SET PROBLEM WITH LOCATION OF CENTERS OF THE SUBSETS

Kiseleva E.

*Oles Honchar Dnipro National University,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor*

Prytomanova O.

*Oles Honchar Dnipro National University,
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor*

Анотація

Розроблено алгоритм розв'язання нечіткої неперервної задачі оптимального розбиття множин з n -вимірного евклідового простору E_n із розміщенням центрів підмножин, яка є задачею нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними. Алгоритм базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин та теорії нечітких множин. Нечітка задача оптимального розбиття чіткої множини на її нечіткі підмножини формалізується за рахунок введення до цільового функціоналу задачі функцій належності нечітких підмножин.

Abstract

An algorithm for solving fuzzy continuous optimal partitioning of set problem from n -dimensional Euclidean space E_n into a subset with centers of the subset's location, which can be defined as infinity-dimensional mathematics programming problem with Boolean variables is developed. The algorithm is based on the synthesis of optimal partitioning of set theory and fuzzy set theory. The fuzzy optimal partitioning of clear set for its fuzzy subsets is formalized by including the membership functions of a fuzzy subsets to the target function of the problem.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин, теорія нечітких множин, функція належності.

Keywords: optimal partitioning of set, fuzzy set theory, membership function.

Вступ

Методи та алгоритми розв'язання задач оптимального розбиття множин із n -вимірного евклідового простору E_n , які є задачами неklasичного нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними, розробляються у рамках теорії оптимального розбиття множин (ОРМ), структура, становлення та розвиток якої на теперішній час найбільш повно представлено у роботах [1, 2].

Теорія ОРМ знаходить все більш широке застосування для розв'язання різних як практичних, так і теоретичних задач. Так, до теоретичних задач відносяться такі, як задачі розпізнавання образів, кластеризації, класифікації, задачі глобальної оптимізації, задачі пошуку оптимальних квадратурних формул, задачі побудови діаграм Дирихле-Воронного і багато інших [2, 3]. Щодо практичних задач, то серед них - задачі планування різних сфер обслуговування, нескінченновимірні транспортні задачі, задачі медичної діагностики, задачі розміщення важливих пунктів на території (пунктів виробництва,

шкіл, станцій мобільного зв'язку, тощо), задачі проектування мереж та ін. [4-7].

В теорії неперервних задач ОРМ до теперішнього часу сформувався ряд напрямів, обумовлених як різними типами математичних постановок задач розбиття, так і різними сферами її застосувань. Переважна більшість задач цієї теорії досліджувалась в умовах визначеності. Проте ж в реальному житті часто наявні невизначеності: в початкових даних, в умовах і цілях. Тому природним представляється узагальнення моделей розбиття в умовах визначеності на випадок моделей в умовах невизначеності, а саме, нечітких задач оптимального розбиття. Постановка нечітких задач оптимального розбиття множин та деякі підходи до їх розв'язання були започатковані у роботі [3] та продовжені у роботах [8-11].

У даній роботі розглядається нечітка неперервна лінійна задача оптимального розбиття чітких множин з n -вимірного евклідового простору E_n на нечіткі підмножини із розташуванням їх центрів. Пропонується алгоритм розв'язання поставленої

задачі, який базується на синтезі методів теорії оптимального розбиття множин [2, 3] та теорії нечітких множин [12, 13].

Постановка задачі

Перед математичним формулюванням нечіткої задачі оптимального розбиття чіткої множини з n -вимірною евклідовою простору E_n на нечіткі підмножини із розташуванням їх центрів наведемо необхідні у подальшому означення [3].

Означення 1. Чітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω - обмежена, вимірною за Лебегом, опуклою множиною, наведемо систему його чітких підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, для яких виконуються три умови:

- 1) $\Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = 1, \dots, N$;
- 2) $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$;
- 3) $mes(\Omega_i \cap \Omega_k) = 0, \quad \forall i \neq k; i, k = 1, \dots, N$, де $mes(\cdot)$ - міра Лебега.

Означення 2. Нечітким розбиттям чіткої множини $\Omega \subset E_n$, де Ω - обмежена, вимірною за Лебегом, опуклою множиною, наведемо систему нечітких підмножин $\mathfrak{R}(\Omega) = \{\Omega_i, i = 1, \dots, N\}$, для яких виконуються три умови:

1) $\Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i = 1, \dots, N$, де $\Omega = (\Omega, \mu_\Omega(x))$, $\mu_\Omega(x) = 1, \quad x \in \Omega$, тобто це чітка множина Ω , що розглядається як окремий випадок нечіткої множини;

$$2) \sum_{i=1}^N \mu_{\Omega_i}(x) = \mu_\Omega(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega;$$

$$3) h_C < 1, \quad C = \Omega_i \cap \Omega_k, \quad \forall i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad \text{де } h_C = \sup_{x \in \Omega} (\mu_C(x)) - \text{висота нечіткої}$$

множини C ; $\mu_C(x)$ функція належності: $\mu_C: \Omega \rightarrow [0, 1]$.

В даному означенні умови 1) – 3) є нечітким аналогом відповідних умов для означення 1 чіткого розбиття множини. Відзначимо, що умова 2) в термінах нескінченновимірної транспортної задачі може розумітися як вимога того, щоб всі потреби кожного споживача були повністю і без надлишків задоволені за рахунок одного або декількох виробників в нечіткому варіанті задачі, на відміну від одного виробника – в чіткому варіанті.

Зауваження. В означеннях 1 та 2 символом « Ω » позначена чітка множина, символом « Ω » позначена нечітка множина з функцією належності $\mu_\Omega(x)$. Символами « Ω_i » позначені чіткі підмножини, символами « Ω_i » позначені нечіткі підмножини з функціями належності $\mu_{\Omega_i}(x)$. Надалі для спрощення запису позначатимемо $\mu_{\Omega_i}(x) \equiv \mu_i(x)$.

Позначимо через $\mathfrak{R}_\Omega^N$ клас всіх можливих нечітких розбиттів чіткої множини Ω на N нечітких підмножин: $\mathfrak{R}_\Omega^N = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N): \sum_{i=1}^N \mu_i(x) = \mu_\Omega(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega\}$.

Введемо на множині можливих нечітких розбиттів $\mathfrak{R}_\Omega^N$ цільовий функціонал $(F = \mathfrak{R}_\Omega^N \rightarrow \mathbb{R}^1)$ у виді

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \tau) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx, \quad (1)$$

де функції $c(x, \tau_i)$ - задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x для будь-якого фіксованого $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх $i = 1, \dots, N$; $\rho(x)$ - задана обмежена, вимірною на Ω , невід'ємна функція; $a_1, \dots, a_N$ - задані невід'ємні числа.

Також відзначимо, що в (1), по-перше, $\Omega_i, i=1, \dots, N$, - нечіткі підмножини множини Ω із заданими або такими, що підлягають визначенню, типовими представниками (центрів) τ_i , причому кожний центр τ_i належить Ω ; по-друге, міра множини граничних точок $\Omega_i, i=1, \dots, N$, не обов'язково дорівнює нулю.

Тоді під *нечіткою неперервною задачею оптимального розбиття* чіткої множини Ω з n -вимірною евклідовою простору E_n на нечіткі підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ із розміщенням центрів цих підмножин будемо розуміти наступну задачу.

Задача А. Знайти таке розбиття чіткої множини Ω на N нечітких підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ та координати центрів цих підмножин, які задовольняють умовам

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \sup_{x \in \Omega} \mu_{\Omega_i \cap \Omega_j}(x) < 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

та в деякому сенсі «мінімізують» цільовий функціонал (1).

Тут під «мінімізацією» можна розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому розумінні найкраще нечітке значення цільового функціонала.

Як відомо, кожна нечітка множина Ω_i (як сукупність точок X з Ω) визначається своєю функцією належності $\mu_i(x)$, тобто $\mu_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$, при цьому значення $\mu_i(x) = 1$ для $x \in \Omega$ означає, що елемент X з Ω цілком певно належить нечіткій множині Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 1$ для точок ядра Ω_i^+ нечіткої множини Ω_i , а значення $\mu_i(x) = 0$ означає, що елемент X цілком певно не належить до нечіткої множини Ω_i , що співпадає із значенням характеристичної функції $\lambda_{\Omega_i^+}(x) = 0$ для точок ядра Ω_i^+ нечіткої множини Ω_i . Якщо $0 < \mu_i(x) < 1$, то це означає, що елемент X належить до нечіткої множини Ω_i із ступенем належності $\mu_i(x)$.

Це означає, що для того, щоб мати змогу ідентифікувати нечітке розбиття $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ множини Ω , треба знайти вектор-функцію належностей виду:

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)), \quad x \in \Omega.$$

Переформулюємо задачу А в термінах функцій належності у наступному виді.

Задача В (нечітке розбиття множини Ω із розміщенням центрів підмножин).

Знайти пару $(\mu_*(x), \tau_*) \in \Gamma \times \Omega^N$, $x \in \Omega$, таку що:

$$I(\mu(x), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\mu_i(x))^m (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\mu(x), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \quad (2)$$

де

$$\Gamma = \{ \mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_i(x), \dots, \mu_N(x)): \sum_{i=1}^N \mu_i(x) = 1, x \in \Omega, \}$$

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1, x \in \Omega, i = 1, \dots, N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

У формулі (2) m – параметр, який називається *експоненціальною вагою* [14]. Далі в роботі приймаємо $m = 2$.

Відмітимо, якщо необхідно виключити появу порожніх підмножин у шуканому нечіткому розбитті, то до обмежень задачі В слід додати умову:

$$\int_{\Omega} \mu_i(x) dx > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Далі опишемо метод розв'язання задачі В.

Метод розв'язання задачі В

Перепишемо задачу (2) у виді

$$I(\mu_*(x), \tau_*) = \min_{(\mu(x), \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} I(\mu(\cdot), \tau) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\min_{\mu(x) \in \Gamma} \left[\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\mu_i(x))^2 (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \right] \right), \quad (3)$$

$$\Gamma_1 = \{\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_i(x), \dots, \mu_N(x))\}:$$

$$\mu(x) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \mu_i(x) = 1, \text{ м.в. (майже всюди) для } x \in \Omega\},$$

$$\Gamma = \{\mu(x): 0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, i = 1, \dots, N,$$

$$\text{де } \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Введемо функціонал Лагранжа для задачі B наступним чином

$$h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(x)) = I(\mu(\cdot), \tau) + \int_{\Omega} \psi_0(x) \left(\sum_{i=1}^N \mu_i(x) - 1 \right) dx,$$

$$\mu(\cdot) \in \Gamma, \tau \in \Omega^N, \psi_0(x) \in L_{\Omega}^2 \quad (4)$$

де $\psi_0(x)$ - дійсна функція, яка визначена на Ω зі значеннями у гільбертовому просторі L_{Ω}^2 .

Уведемо поняття сідлової точки на множині $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times L_{\Omega}^2$, яка, очевидно, для задачі (2) існує, та запишемо

$$h(\{\mu_*(\cdot), \tau_*, \psi_0^*(\cdot)\}) = \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} \max_{\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) = \max_{\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2} \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot))$$

Перейдемо до розв'язку задачі

$$h(\{\mu_*(\cdot), \tau_*, \psi_0^*(\cdot)\}) = \max_{\psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2} \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)).$$

Позначимо

$$G(\psi_0(\cdot)) = \min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)), \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2.$$

Від задачі відшукування $\min_{(\mu, \tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot))$ можна перейти до наступної задачі

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\mu(\cdot) \in \Gamma} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) \text{ при } \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2. \quad (5)$$

Підставляємо замість $h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot))$ його вираз з (4), проводимо відповідні перетворення та отримуємо внутрішню задачу з (5) у виді:

$$\min_{\substack{0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \\ i=1, \dots, N}} h(\{\mu(\cdot), \tau\}, \psi_0(\cdot)) = - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{\substack{0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \\ i=1, \dots, N}} (\psi_0(x) + (c(x, \tau_i) + a_i) \mu_i(x) \rho(x)) dx. \quad (6)$$

Розглянемо наступну задачу.

Задача C .

$$h(\{\mu(\cdot), \tau_{fix}, \psi_{0fix}(\cdot)\}) \rightarrow \min_{\mu(x) \in \Gamma_2},$$

де $\Gamma_2 = \{\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_i(x), \dots, \mu_N(x)): \mu_i(x): E_n \rightarrow E_1, i = 1, \dots, N\};$

$\tau_{fix} \in \Omega^N$ - фіксоване; $\psi_{0fix}(\cdot) \in L_{\Omega}^2$ - фіксоване.

Задача C є задачею безумовної оптимізації відносно $\mu(x)$. Необхідна умова оптимальності для задачі C сформулюється у наступній теоремі [15].

Теорема 1. Нехай $\mu^0(x) \in \Gamma_2$ - розв'язок задачі C . Тоді

$$\text{grad}_h^\mu(\mu^0(x)) \equiv 0. \quad (7)$$

Очевидно, якщо задача C має розв'язок і він єдиний, то умова (6) є і достатньою. Функціонал $h(\{\mu(\cdot), \tau_{\text{fix}}\}, \psi_{0 \text{ fix}})$ опуклий відносно $\mu(x) \in \Gamma_2$, що забезпечує виконання умов існування і єдиності розв'язку $\mu^0(x) \in \Gamma_2$. Таким чином, з (5) витікає наступний вираз для $\mu^0(x)$ у явному виді:

$$\mu_i^0(x) = -\frac{\psi_0(x)}{\rho(x)(c(x, \tau_i) + a_i)}, \quad i=1, \dots, N, \quad x \in \Omega.$$

У якості $\mu_{*i}(x)$ приймаємо $\mu_i^0(x)$, якщо $\mu_i^0(x) \in [0; 1]$. У випадку, коли $\mu_i^0(x) \notin [0; 1]$ повернемося до задачі (6).

Має місце наступна теорема згідно [15, 16].

Теорема 2. Сідлова точка $(\{\mu_*(\cdot), \tau_*\}, \psi_0^*(\cdot))$ функціонала (4) на множині $\{\Gamma \times \Omega^N\} \times L_\Omega^2$ визначається для $i=1, \dots, N$ та майже всіх $x \in \Omega$ у виді:

$$\mu_{*i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x) + \psi_0^*(x) > 0, \\ 1, & \text{якщо } (c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x) + \psi_0^*(x) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in \Omega: (c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x) + \psi_0^*(x) < 0\} &= 0, \\ \psi_0^*(x) &= -\min_{i=1, \dots, N} [(c(x, \tau_{*i}) + a_i)\rho(x)], \end{aligned} \quad (9)$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ обирається оптимальний розв'язок наступної задачі:

$$G_1(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} (c(x, \tau_i) + a_i)\rho(x) dx \rightarrow \min_{\tau \in \Omega^N}. \quad (10)$$

Відзначимо, що задача (10) є скінченновимірною задачею оптимізації по τ , у той час, як внутрішня задача з (5) є нескінченновимірною по $\mu(\cdot)$.

Сформулюємо алгоритм розв'язання задачі B .

Алгоритм розв'язання задачі B

Наведемо алгоритм розв'язання задачі B , який базується на формулах (8)-(10) та одному з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів (r -алгоритм Н.З. Шора [17]).

Сутність методів узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору ґрунтується на побудові в процесі послідовних наближень лінійних операторів, що змінюють метрику простору, і виборі напрямку спуску, що відповідає антиградієнту в просторі з новою метрикою.

В ітераційній формулі r -алгоритму [17], яка має вид

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^\tau [B_{k+1}^\tau]^\tau g_{G_1}(\tau^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

B_{k+1}^τ – оператор, що відображає перетворений простір в основний простір E_n (причому $B_0^\tau = I$ – одинична матриця); h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму функції G_1 за напрямком $B_{k+1}^\tau B_{k+1}^\tau g_{G_1}(\tau^{[k]})$; $g_{G_1}(\tau^{[k]})$ – узагальнений градієнт функції $G_1(\tau)$ в точці $\tau^{[k]}$.

Застосуємо тут r -алгоритм у H -формі [17] (H_k – симетрична матриця, така, що $H_k = B_k B_k^T$), для якої ітераційна формула (11) набуває вигляду

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k \frac{H_{k+1} g_{G_1}(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_{k+1} g_{G_1}(\tau^{[k]}), g_{G_1}(\tau^{[k]}))}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha_k^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}; \quad \Delta_k = g_{G_1}(\tau^{[k]}) - g_{G_1}(\tau^{[k-1]}).$$

Коефіцієнт розтягу простору α_k приймається рівним 3. Для крокового множника h_k застосовується адаптивний спосіб регулювання, який описано в [17].

Визначимо i -у компоненту вектора узагальненого градієнта $g_{G_1}^\tau(\tau) = (g_{G_1}^{\tau_1}(\tau), \dots, g_{G_1}^{\tau_i}(\tau), \dots, g_{G_1}^{\tau_N}(\tau))$ функції $G_1(\tau)$ в точці $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$ таким чином:

$$g_{G_1}^{\tau_i}(\tau) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(x, \tau_i) \mu_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ - i -а компонента N -вимірного вектора узагальненого градієнта функції $C(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$. У випадку, коли $C(x, \tau_i)$ - евклідова метрика (

$C(x, \tau_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2}$), вираз (11) набуває виду

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \frac{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)}) \rho(x) \mu_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2}} dx \\ \dots \dots \dots \int_{\Omega} \frac{(x^{(n)} - \tau_i^{(n)}) \rho(x) \mu_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^{(n)} - \tau_i^{(n)})^2}} dx \end{pmatrix}.$$

Алгоритм

Область Ω укладаємо в n -вимірний паралелепіпед Π , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\tau = \tau^{[0]}$. Обчислюємо значення $\psi_0^{[0]}(x)$ у вузлах сітки за формулою (9) при $\tau = \tau^{[0]}$, обчислюємо значення $\mu_i^{[0]}(x)$, $i = 1, \dots, N$, у вузлах сітки за формулою (8) при $\tau = \tau^{[0]}$, обчислюємо значення градієнта $g_{G_1}(\tau^{[0]})$ за формулою (12) при $\mu(x) = \mu^{[0]}(x)$, $\tau = \tau^{[0]}$. Обираємо початковий пробний крок r -алгоритму $h_0 > 0$ та обчислюємо

$$\tau^{[1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[0]} - h_0 \frac{H_1 g_{G_1}(\tau^{[0]})}{\sqrt{(H_1 g_{G_1}(\tau^{[0]}), g_{G_1}(\tau^{[0]})}} \right),$$

P_{Π} – оператор проектування на Π .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k ($k = 1, 2, \dots$) кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{[k]}$, $\psi_0^{[k]}(x)$, $\mu_i^{[k]}(x)$, $g_{G_1}(\tau^{[k]})$, $i = 1, \dots, N$, у вузлах сітки.

Опишемо $[k+1]$ -й крок.

1. Проводимо $[k+1]$ -й крок r -алгоритму в H -формі [17] для мінімізації по τ , ітераційна формула якого має вид

$$\tau^{[k+1]} = P_{\Pi} \left(\tau^{[k]} - h_k \frac{H_1 g_{G_1}(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_1 g_{G_1}(\tau^{[k]}), g_{G_1}(\tau^{[k]})}} \right).$$

2. Обчислюємо значення $\psi_0^{[k+1]}(x)$ у вузлах сітки по формулі (9) при $\tau = \tau^{[k+1]}$.

3. Обчислюємо значення $\mu_i^{[k+1]}(x)$, $i = 1, \dots, N$, у вузлах сітки по формулі (8) при $\tau = \tau^{[k+1]}$.

4. Обчислюємо значення градієнта $g_{G_1}(\tau^{[k+1]})$ за формулою (12) при $\mu(x) = \mu^{[k+1]}(x)$,

$$\tau = \tau^{[k+1]}.$$

5. Якщо умова

$$\|\tau^{[k]} - \tau^{[k+1]}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (13)$$

не виконується, переходимо до $[k+2]$ -го кроку алгоритму, у протилежному випадку – до п. 6.

6. Приймаємо $\tau_* = \tau^{[l]}$, $\psi_0^*(x) = \psi_0^{[l]}(x)$, $\mu_{*i}(x) = \mu_i^{[l]}(x)$, де l – номер ітерації, на якій виконалась умова (13).

7. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_1(\tau_*)$ по формулі (10) при $\tau = \tau_*$ та для контролю правильності розрахунків по формулі (3).

Алгоритм описаний.

Проілюструємо роботу алгоритму на тестових прикладах.

Розроблений алгоритм може бути застосований до частинного випадку нечіткої задачі оптимального розбиття чіткої множини на її нечіткі підмножини при заданих координатах центрів підмножин. Продемонструємо його роботу на тестових задачах нечіткого розбиття одиничного квадрату з E_2 з евклідовою метрикою та сіткою 250 на 250. На рисунках, наведених нижче, позначено: «○○○» –

центр підмножини, сірим кольором – нечітка границя підмножини.

Для інтерпретації отриманих результатів та графічної ілюстрації введено наступне поняття. *Ступінь недовіри* – це мінімальне значення функції належності деякої нечіткої множини, при якому дана точка може бути з певністю віднесена до даної нечіткої множини (при якому ми вважаємо, що дана точка належить до даної множини). Цей показник можна також інтерпретувати як мінімальний ступінь достовірності факту «дана точка x належить до даної підмножини», достатній для його прийняття. Ступінь недовіри – це наші вимоги щодо чіткості розбиття. Чим більше він буде, тим більш нечітким буде розбиття, тим ширшими будуть області нечіткої межі. Очевидно, що $CH=0$ дає нам чітке розбиття, а $CH=1$ – максимально нечітке розбиття, при якому до певної підмножини будуть віднесені лише її центр та точки ядра, якщо такі з'являться.

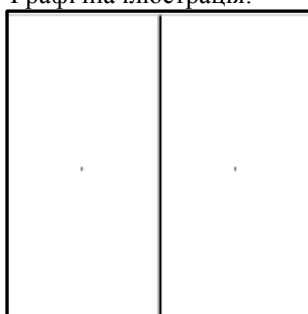
Приклад 1. Розбиття множини на дві нечіткі підмножини

Таблиця 1

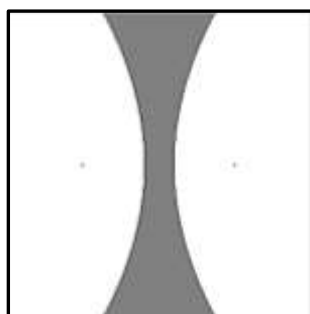
Початкові дані для розбиття на дві підмножини

№ підмножини	Початкові центри		a_i	Точність
	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$		
1	0,25	0,5	0	0,001
2	0,75	0,5	0	

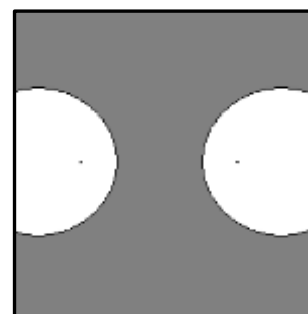
Графічна ілюстрація:



а) $CH=0$



б) $CH=0,55$



в) $CH=0,65$

Рисунок 1. Нечітке розбиття на дві підмножини

Як видно з рис. 1 а)-в) при підвищенні ступеня недовіри рамки нечіткої межі розширюються, форма чітких областей наближається до кола. Це можна пояснити, що чим ближче вузол до центра, тим з більшою достовірністю його можна віднести до даної підмножини. Цей висновок підтверджується

тим методом, що знайдені значення функцій належності зростають при наближенні до центра підмножини. Множина рівновіддалених від центра підмножини точок – коло, що ми і бачимо на графічній ілюстрації нечіткого розбиття.

Приклад 2. Розбиття множини на сім нечітких підмножин

Початкові дані для розбиття на сім підмножини

№ підмножини	Початкові центри		a_i	Точність
	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$		
1	0,2	0,7	0	0,001
2	0,5	0,8	0	
3	0,8	0,7	0	
4	0,8	0,3	0	
5	0,5	0,2	0	
6	0,2	0,3	0	
7	0,5	0,5	0	

Графічна ілюстрація:

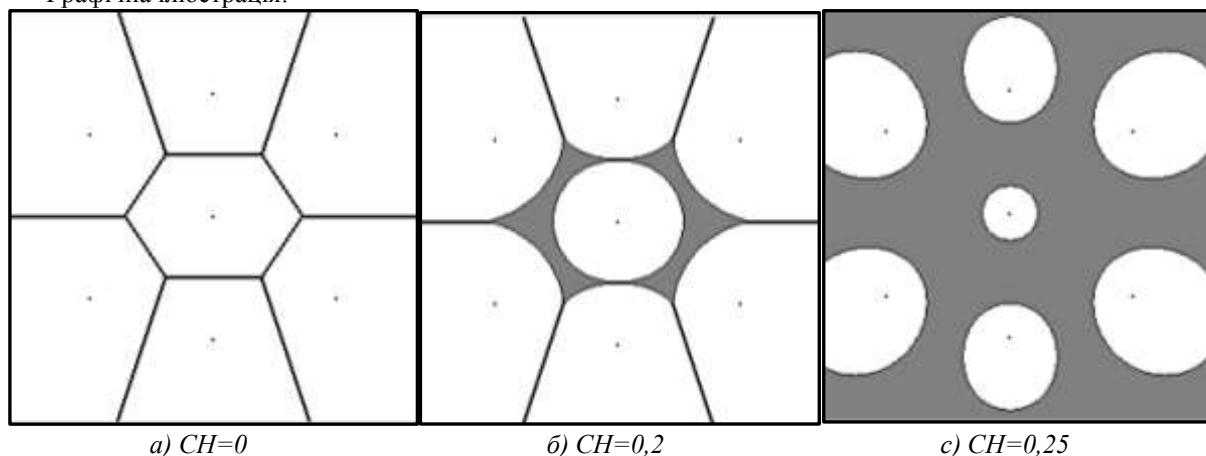


Рисунок 2. Нечітке розбиття на сім підмножин

Розбиття на сім підмножин знову ж таки повторює результати чіткого розбиття при нульовому ступені недовіри CH . Оскільки всі a_i рівні між собою, то границями між областями підмножин слугують прямі. При підвищенні ступені недовіри CH області підмножин починають «округлятися», деформуючись відповідно впливу сусідів.

Висновки

За результатами числових експериментів для тестових задач можна виділити наступні відмінності між задачами чіткого та нечіткого розбиття чіткої множини:

1. Для ідентифікації чіткої підмножини використовують поняття характеристичної функції, яка набуває дискретних значень 0 або 1. Для ідентифікації нечіткої підмножини використовуються функції належності, які є неперервними і приймають значення з відрізка $[0;1]$.

2. Цільовий функціонал, який будується відносно шуканих функцій належності, є нелінійним відносно аргументу, що значно ускладнює побудову умов оптимальності і оптимального розв'язку задачі.

3. Нечітка задача має додаткову підзадачу віднесення (ідентифікації) точок множини відносно підмножин після того, як отримано оптимальне нечітке рішення поставленої задачі. Ця процедура виділяє області підмножин (точки цих областей напевне віднесені до даної підмножини) і область нечіткої межі.

Список літератури

1. Elena M. Kiseleva The Emergence and Formation of the Theory of Optimal Set Partitioning for Sets of the n-Dimensional Euclidean Space. Theory and Application, Journal of Automation and Information Sciences. 2018. Volume 50. Issue 9. pp. 1-24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.10.
2. Кіселева О.М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: монографія. Д.: Ліра, 2018. 532 с.
3. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
4. Kiseleva E.M., Stepanchuk T.F. Search for the global minimum of the nondifferentiable function by the method of optimal set partitioning // Journal of Automation and Information Sciences, 2002, Issue 2, pp. 45-60.
5. Kiseleva E.M., Stepanchuk T.F. On the choice of optimal coefficient and optimal nodes of the quadrature formulae for functional classes given by quasimetrics // Journal of Automation and Information Sciences, 2002, Issue 3, pp. 138-153.
6. Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V. Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory // Cybernetics and systems analysis, 2009. Issue 45(3), pp. 421-437.
7. Blyuss O., Zaikin A., Kiseleva E.M., Prytomanova O.M. Development of PancRISK, a urine

biomarker-based risk score for stratified screening of pancreatic cancer patients // British Journal of Cancer, 2019. - Vol. 122. - p.p. 692–696. <https://doi.org/10.1038/s41416-019-0694-0>

8. Киселева Е.М., Жильцова А.А. Непрерывная задача оптимального нечеткого разбиения множеств без ограничений с заданным положением центров подмножеств // Питання прикладної математики та математичного моделювання. Д.: ДНУ. – 2005. – С. 121-136.

9. Kiseleva E.M., Lebedj O.Yu. Classification of Fuzzy Problems of Optimal Sets Partition and Some Approaches to Their Solution // Journal of Automation and Information Sciences, 2009. – Vol. 41(1). – p.p. 15-26.

10. Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 48, 2016, Issue 9, pp. 1-22. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.

11. Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel Algorithm for Solving a

Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Volume 50. Issue 3. PP. 1-20. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.

12. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning // *Information Sciences*, 1975. - 8(3), pp.199-249.

13. Zimmerman H.-J. Fuzzy Sets Theory – and Its Applications. 4th ed. - Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. - 514 p.

14. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.:ил.

15. Трухаев Р.И., Хоменюк В.В. Теория неклассических вариационных задач – Л.: ЛГУ, 1971. – 168 с.

16. Киселева Е.М. Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения. Д.: ДНУ, 1982. – 108 с.

17. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наукова думка, 1979. – 200 с.

ТОЛЩИНА ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НЕКОТОРЫХ ТУГОПЛАВКИХ МЕТАЛЛОВ

Юров В.М.

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, доцент

Жанаберганов Т.

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, доцент

Гученко С.А.

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, докторант PhD

THICKNESS OF THE SURFACE LAYER OF SOME REFRIGERANT METALS

Yurov V.

Karaganda State University named after EA. Buketov, associate professor

Zhanabergenov T.

Karaganda State University named after EA. Buketov, associate professor

Guchenko S.

Karaganda State University named after EA. Buketov, PhD student

Аннотация

В статье впервые рассматривается поверхностный слой атомарно-гладких металлов. Сам слой состоит из двух частей: слой d(I) представляет собой наноструктуру, которая определяется одним фундаментальным параметром – атомным объемом металла. Слой d(II), равный примерно 10 d(I), определяет размерную зависимость физических свойств материала. При $h = d$ в поверхностном слое происходит структурный фазовый переход, связанный с процессами реконструкции и релаксации поверхности.

Abstract

The article first considers the surface layer of atomically smooth metals. The layer itself consists of two parts: the d(I) layer is a nanostructure, which is determined by one fundamental parameter - the atomic volume of the metal. The d(II) layer, equal to about 10 d(I), determines the size dependence of the physical properties of the material. At $h = d$, a structural phase transition occurs in the surface layer, which is associated with the processes of reconstruction and surface relaxation.

Ключевые слова: поверхностный слой, наноструктура, нитриды.

Keywords: surface layer, nanostructure, nitrides.

Постановка проблемы

В представленной статье впервые рассматривается поверхностный слой атомарно-гладких тугоплавких металлов. По современным представлениям поверхностный слой твердого тела представляет собой ультратонкую пленку, которая

находится в термодинамическом равновесии с основным объемом материала [1]. Ее толщину можно измерить методом скользящих рентгеновских лучей [2]. Так, для чистого золота она оказалась равной 1,2 нм. Однако, подобные исследования довольно трудоемки и их развитие находится в