

4. Centre for International Research on Economic Tendency Surveys (CIRET). — <http://www.ciret.org>.

5. *European Commission*. Directorate General of Economic and Financial Affairs. — http://ec.europa.eu/economy_finance/db_indicators/surveys/time_series/index_en.htm

6. *Giovannini E.* Understanding Economic Statistics. An OECD Perspective / E.Giovannini. — Paris: OECD, 2008.

7. *Kolodko Grzegorz W.* Truth, Errors, and Lies: Politics and Economics in a Volatile World /Grzegorz W. Kolodko. — New York: Columbia University Press, 2012.

8. *OECD*. Leading indicators and tendency surveys. Business Tendency and Consumer Surveys: International Development Work and Co-ordination. — <http://www.oecd.org/std/clits/businessstendencyandconsumersurveys/internationaldevelopmentworkandco-ordination.htm>

9. *Report of France on the measurement of economic performance and social progress*. Note by the Secretary-General to 42 session of UN Statistical Commission, 22-25 February 2011 — UN Economic and Social Council. — <http://unstats.un.org/unsd/statcom/doc11/2011-35-France-E.pdf>

10. *Stiglitz J. E.* Report by the Commission on the Measurement of Economic Performance and Social Progress / J. E. Stiglitz, A. Sen, J.-P. Fitoussi. — www.stiglitz-sen-fitoussi.fr.

Стаття надійшла до редакції 31.05.2014 р.

УДК: 330.51(075)

Катуніна О. С., докторант,
Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана

ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОЦЕСІВ НАСИЧЕННЯ РИНКУ НА БАЗІ ДИНАМІЧНИХ ФАКТОРНИХ МОДЕЛЕЙ

АНОТАЦІЯ. Розглянуто питання вибору методології та математичного інструментарію моделювання динамічних процесів. Запропоновано використання моделей динамічного факторного аналізу (ДФА) для дослідження процесів насичення ринку продукцією промислових підприємств. Розглянуто алгоритми оцінювання параметрів моделі ДФА та математичну процедуру пошуку екстремуму нелінійної цільової функції. Проаналізовано напрямки та перспективи застосування динамічних факторних моделей.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічний факторний аналіз, прогнозування, насичення ринку, товарна пропозиція.

АННОТАЦИЯ. Рассмотрены вопросы выбора методологии и математического инструментария моделирования динамических процессов. Предложено использование моделей динамического факторного анализа

(ДФА) для исследования процессов насыщения рынка продукцией промышленных предприятий. Рассмотрены алгоритмы оценивания параметров модели ДФА и математическая процедура поиска экстремума нелинейной целевой функции. Проанализированы направления и перспективы использования динамических факторных моделей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамический факторный анализ, прогнозирование, насыщение рынка, товарное предложение.

ABSTRACT. The questions of choice of methodology and mathematical modeling tools of dynamic processes. Proposed the use of dynamic models of factor analysis (DFA) to study the processes of market saturation products industry. The algorithms of parameter estimation of DFA and mathematical procedure extremum search nonlinear objective function. Analyzed trends and prospects for the use of dynamic factor models.

KEY WORDS: dynamic factor analysis, forecasting, market saturation, product offering.

Вступ. У даний час математичне забезпечення як теоретичних досліджень, так і бізнес-аналітики широко трансформується на базі інструментарію нелінійної динаміки, нейронних мереж, нечіткої логіки [1, 2, 5, 6], які дозволяють встановлювати латентні тенденції та закономірності розвитку соціально-економічних систем і процесів та ідентифікувати структурні зміни. Потужним модельно-операційним засобом моніторингу і обґрунтування рішень є інтелектуальний аналіз даних (Data Mining) та хмарне бізнес-моделювання [7, 8]. У них найкраще розроблено процедури аналізу динамічної інформації та прогнозування [3, 4]. Як розвиток традиційних економетричних моделей динаміки [9, 10], новітні інструменти часових досліджень [3, 8] націлюються сьогодні на прогнозування інтелектуальних складових, зокрема, системних характеристик структурованості, насиченості, стійкості, мобільності, інерційності, місткості тощо.

Актуальним об'єктом прогностичних досліджень є ринкові процеси формування пропозиції та попиту на предмети споживання, зокрема, ті, що вироблено промисловими підприємствами України. Адже наукове обґрунтування пріоритетів державної протекціоністської політики щодо вітчизняних товарних ринків є реальним важелем виходу країни з кризи і економічної стабілізації. Крім того, для підприємств затребуваними є обґрунтовані ринкові стратегії, в тому числі моделі асортиментної політики. Останні деталізуються в обсягові і структурні параметри поточного та перспективного асортименту продукції підприємства [1, 2] та мають враховувати не тільки обмеженість ресурсів, а й динаміку товарної пропозиції та споживчого попиту.

Постановка проблеми. У даній роботі пропонуємо підхід до прогнозування динаміки економічних систем, зокрема, процесів

насичення ринку предметів споживання. Даний математичний інструментарій оснований на принципах динамічного факторного аналізу (ДФА) часових рядів, що були викладені угорськими економістами Банкеві Д., Веліцкі І. та Цирманн М. [18]. На відміну від традиційних методів авторегресійного аналізу [9], за ДФА навіть на коротких часових рядах можна ідентифікувати та в подальшому змістовно інтерпретувати „внутрішні” зв’язки в системі показників, що характеризують досліджуваний процес. Метод ДФА було докладно математично розроблено в роботах [11–14] для аналізу як детермінованих, так і стохастичних часових рядів. У подальшому в роботах [15–17] було одержано позитивні результати його практичного застосування для моделювання соціально-економічних систем різних рівнів.

Викладення результатів дослідження.

1. Побудова моделі динамічного факторного аналізу.

Нехай стан деякої динамічної системи характеризується k показниками $y_i = y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), які залежать від параметра t . Значення показників відомі для дискретних значень параметра t_j ($j = 1, 2, \dots, p$), а за одиницю виміру параметра прийнято крок його приросту $\Delta t = t_j + 1 - t_j = 1$, отже:

$$t_1 = T_1, t_2 = T_1 + 1, \dots, T_p = T_1 + p - 1 = T_2.$$

Таким чином, стан системи описується k векторами-стовпчиками y_i вигляду

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} = y_1(t_1) \\ y_{12} = y_1(t_2) \\ \dots \\ y_{1p} = y_1(t_p) \end{bmatrix} \quad y_2 = \begin{bmatrix} y_{21} = y_2(t_1) \\ y_{22} = y_2(t_2) \\ \dots \\ y_{2p} = y_2(t_p) \end{bmatrix} \quad \dots \quad y_k = \begin{bmatrix} y_{k1} = y_k(t_1) \\ y_{k2} = y_k(t_2) \\ \dots \\ y_{kp} = y_k(t_p) \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Параметр t розглядається як часова змінна (у більшості прикладних задач роль параметра дійсно відіграє саме час), а вектори y_i — емпіричні часові ряди.

Задача прогнозування полягає у визначенні стану системи у «майбутньому», тобто продовженню часових рядів за період спостережень на деякий кінцевий відрізок зміни t . Зауважимо, що значення показників отримуються в результаті спостережень, і у зв’язку з цим мають випадковий характер, а вектори y_i можна

розглядати як випадкові. У загальному випадку неможливо отримати кілька значень показника у той же самий момент часу, і ця обставина не дає можливості застосувати методи математичної статистики для оцінки емпіричних функцій розподілу, або зробити обґрунтовані припущення про вигляд функції розподілу для застосування класичної теорії ймовірностей. Також важливо відмітити, що вектори y_i не обов'язково є незалежними. Навпаки, задача встановлення зв'язку між емпіричними часовими рядами є суттєвою складовою частиною розв'язку задачі опису стану і розвитку динамічних стохастичних систем.

Розглянемо також систему функцій $F_m = F_m(y_1, y_2, \dots, y_k)$, $m = 1, 2, \dots, M$, ($M \leq k$), які являють собою деякі вектори. Будемо називати функції F_m динамічними факторами, якщо за їх допомогою можна отримати певні однозначні оцінки заданих часових рядів.

У реалізованій моделі приймається, що динамічні фактори визначаються лінійними функціями. В цьому випадку і оцінки заданих часових рядів, тобто їх визначення через фактори, записуються у вигляді лінійних функцій. Якщо в моделі використовується лише один (перший) фактор, то, випускаючи відповідні індекси, цей фактор можна подати у вигляді

$$F(t) = \sum_{i=1}^k a_i y_i(t), \quad (1.2)$$

де a_i — деякі числові коефіцієнти, що не всі одночасно дорівнюють нулеві. В цьому випадку будемо мати такі оцінки показників:

$$y_{ii}(t) = d_{i0i} + d_i F(t), \quad i=1,2,\dots,k, \quad (1.3)$$

де d_{i0} , d_i — коефіцієнти лінійної регресії.

У загальному випадку при врахуванні M факторів рівняння лінійної регресії (оцінки) показників записуються у вигляді

$$y_{ii}(t) = d_{i0i} + d_{i02} + \dots + d_{i0M} + \sum_{m=1}^M d_{imi} F_m(t), \quad i=1,2,\dots,k. \quad (1.4)$$

Перший фактор обчислюється з вихідних динамічних рядів. Далі з кожного ряду мають бути відкинуті значення, які знайдено з відповідного рівняння регресії (1.3), що виражає цей ряд через даний фактор. Здобуті резидуальні змінні $\{y(t) - y(t)\}$, тобто фактично нові часові ряди, приймаються як вихідні для визначення другого фактора. Після цього будуються вже рівняння ре-

гресії (1.4) з урахуванням двох факторів і обчислюються нові резидуальні ряди. Процес триває доти, доки всі потрібні фактори не будуть визначені.

Зауважимо, що кількість факторів визначається специфікою задачі і залежить від якості оцінки (1.4), але вона не може бути більшою кількості показників. У загальному випадку замість (1.2) будуть мати місце рівності

$$F_m(t) = \sum_{i=1}^k a_{im} y_i^{(m-1)}(t), m=1,2,\dots,M, \quad (1.5)$$

де

$$y_i^{(m)}(t) = \left\{ y_i^{(m-1)}(t) - y_i(t) \right\}, m=1,2,\dots,M-1. \quad (1.6)$$

Основна ідея ДФА полягає в тому, що дослідження динаміки системи часових рядів зводиться до аналізу динаміки введених факторів. Для оцінки динамічних властивостей останніх застосовуються авторегресійні схеми, згідно з якими значення функції визначається декількома (можливо і всіма) значеннями функції у попередні моменти часу. В простішому випадку лінійної авторегресії вважається, що мають місце наступні оцінки факторів

$$F_m(t) = c_{m0} + \sum_{k=1}^L c_{km} F_m(t-k), \quad (1.7)$$

де L — максимальна довжина запізнення; c_{m0} , c_{km} — деякі коефіцієнти; $m = 1, 2, \dots, M$.

Таким чином, побудована модель складається з трьох різних груп рівнянь, що існують одночасно. Першу групу становлять рівняння факторів (1.2). Другу групу становлять динамічні рівняння факторів (1.7), кожне з яких є оцінкою m -го фактора за авторегресійною схемою. Нарешті третю групу становлять рівняння регресії (1.3), (1.4), які виражають вихідні часові ряди через динамічні фактори. При цьому після знаходження першого фактора і побудови з його допомогою оцінки вихідних часових рядів для знаходження наступних факторів використовуються вже резидуальні ряди.

Для одержання прогнозних значень вводиться припущення про динамічну інваріантність досліджуваної системи, тобто вважається, що функціональні зв'язки, які існували у певний відрізок часу з періоду спостережень, будуть зберігатись і у майбут-

ньому. Це означає, що рівняння (1.4), (1.7) можна застосовувати і для значень часу $t > T_2$. Тоді отримавши прогнозні значення факторів за рівнянням (1.7) для відповідних значень t , можна побудувати прогноз розвитку динамічної системи для кожного ряду. При цьому для обчислення прогнозних значень показників у рівняннях (1.4) замість факторів використовуються їх авторегресійні оцінки (1.7)

$$y_{i_i}(t) = d_{i01}i + d_{i02} + \dots + d_{i0M} + \sum_{m=1}^M d_{imi} F_m(t), \quad (1.8)$$

$$i=1,2,\dots,k \quad t = T_2+1, T_2+2,\dots$$

Очевидно, модель буде повністю визначена, якщо константи a_{im} , c_{m0} , c_m , d_{mi} будуть знайдені. Ці коефіцієнти необхідно визначити таким чином, щоб водночас динамічні рівняння давали «добру» оцінку (і прогноз) окремих факторів, а рівняння регресії, що виражають вихідні змінні через ці фактори, також «добре» оцінювали і прогнозували самі вихідні змінні (окремі показники).

Для зручності подальшого викладання введемо деякі означення. Часові ряди задаються у дискретних точках, тобто вираз $y_i(t)$ означає, що задано чисельний вектор $y_i(t) = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}]$, де p — кількість кроків у часі. Визначимо формальну коваріацію α_{ij} векторів $y_i = [y_{is}]$, $y_j = [y_{js}]$, ($s = 1, 2, \dots, p$) формулою:

$$\alpha_{ij} = \left\langle y_i, y_j \right\rangle = \frac{1}{p-1} \sum_{s=1}^p (y_{is} - \bar{y}_i) (y_{js} - \bar{y}_j), \quad (1.9)$$

де через $\bar{y}_i$ позначено емпіричне середнє вектора $[y_{is}]$:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p y_{is}. \quad (1.10)$$

Далі доводиться розглядати скорочені часові ряди, тобто ряди, у яких з p одиниць спостережень відкинута L початкових значень. Для таких рядів визначимо коваріації α_{ij}^L скорочених часових рядів:

$$\alpha_{ij}^L = \left\langle y_i, y_j \right\rangle_L = \frac{1}{p-L-1} \sum_{s=L+1}^p (y_{is} - \bar{y}_i^L) (y_{js} - \bar{y}_j^L), \quad (1.11)$$

а також величини β_{ij}^{L, n_1, n_2}

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{L, n, n_2} &= \left\langle y_i^{(n_1)}, y_j^{(n_2)} \right\rangle_L = \\ &= \frac{1}{p-L-1} \sum_{s=L+1}^p (y_{i, s-n_1} - \bar{y}_i^{L-n_1}) (y_{j, s-n_2} - \bar{y}_j^{L-n_2}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

які можна назвати коваріацією показників, зміщених у часі (верхній індекс L вказує, що вихідний ряд вкорочено з початку спостережень на L одиниць, індекси, n_1, n_2 приймають значення від 0 до L). Неважко побачити, що при $i = j$ наведені формули визначають відповідні дисперсії,

Звичайно при визначенні коефіцієнтів рівнянь регресії тим чи тим чином мінімізують відхилення розрахункових від заданих значень функції. Особливістю моделі, що розглядається, є одночасне визначення трьох незалежних груп коефіцієнтів різних рівнянь. Тому при практичній розробці даної моделі залежно від типу використовуваних рівнянь і математичного формулювання окремих критеріїв можна запропонувати різні способи мінімізації похибок оцінок. У базовій моделі за критерій для визначення шуканих груп коефіцієнтів узято дисперсію відхилень показників і факторів від їх оцінок. Оскільки дисперсії — це невід’ємні величини, то мінімізація функції, яка містить усі можливі похибки, принципово дає змогу водночас визначити всі шукані коефіцієнти. В простішому випадку цю функцію можна отримати простим додаванням усіх можливих відхилень, однак доцільним може бути введення допоміжних невідомих параметрів, варіація яких дає змогу більш гнучкого опису емпіричних даних. Виникаючи при цьому деяка довільність, повністю компенсується новими можливостями керування властивостями моделі.

У запропонованій процедурі моделювання фактори будуються послідовно один за одним, а оцінки часових рядів на кожному кроці уточнюються ітеративно. Для знаходження відповідних невідомих груп коефіцієнтів при побудові чергового m -го фактору треба мінімізувати деяку функцію Φ_m , яку за допомогою введених вище означень можна подати у вигляді

$$\Phi_m = w_{00} \left\langle F_m - F_m, F_m - F_m \right\rangle_L + \sum_{i=1}^k w_{i1} \left\langle y_{i1} - y_i, y_i - y_{i1} \right\rangle, \quad (1.13)$$

де w_i ($i = 0, 1, \dots, k$) — згадуванні вище додаткові параметри, які є вагами.

З урахуванням виразів (1.9)–(1.12) для коваріацій неважко побачити, що функція Φ_m — є нелінійною функцією невідомих коефіцієнтів a_{lm}, c_{lm}, d_{mi} , ($i = 1, 2, \dots, k$; $m = 1, 2, \dots, M$; $l = 1, 2, \dots, L$), причому функцією багатьох змінних. При цьому перший член виразу (1.13) визначає похибку авторегресійної схеми, а другий — сумарну похибку оцінок вихідних рядів. Таким чином, перший член відповідає динамічній, а другий — статичній складовим частинам сумарної похибки. Очевидно, варіюванням вагових значень частин можна регулювати як силу впливу часових тенденцій, так і окремих показників. До рівнянь (1.13) пропонується додати умову

$$\left\langle F_m, F_m \right\rangle = V_m, \quad (1.14)$$

де V_m — нормалізуюча додатня константа. Ця умова фактично узгоджує величини коефіцієнтів a_{lm} з величинами абсолютних значень вихідних (резидуальних) часових рядів. Введення умови (1.14) дозволяє при аналізі довільних емпіричних даних не нормувати їх.

Таким чином, для визначення параметрів моделі (невідомих коефіцієнтів регресій) треба розв'язати m задач на умовний екстремум. Побудова ефективних методів розв'язування цих задач, які можна класифікувати, як деякі задачі нелінійного програмування, є суттєвою складовою частиною практичної реалізації моделі ДФА. Враховуючи досить велику кількість змінних, що підлягають визначенню, можна стверджувати, що більшість традиційних чисельних методів пошуку екстремуму можуть виявитись неефективними. Для побудови ефективних алгоритмів одержимо зручний вигляд цільової функції.

2. Побудова алгоритму оцінювання параметрів моделі ДФА.

2.1. Алгебраїчне перетворення виразу цільової функції.

Розглянемо питання побудови алгоритму оцінювання параметрів моделі ДФА, який, як зазначалося, зводиться до розв'язання задачі нелінійного програмування. Для цього ми пропонуємо нестандартний підхід, який з успіхом може бути використаний у інших випадках пошуку екстремума функції багатьох змінних, і тому являє певний самостійний інтерес. Основна ідея його полягає у використанні аналітичних властивостей цільової функції, яка являє собою неповний поліном четвертого ступеня багатьох змінних, що складається з добутку квадратичних форм окремих

груп змінних. Це дозволяє записати необхідні умови екстремума у явному вигляді, одержавши нелінійну систему алгебраїчних рівнянь. Розв'язок останньої можна побудувати комбінованим методом Ньютона та покращеної ітерації. Принципові положення розробленого підходу полягають у наступному.

У відповідності із побудованою базовою моделлю, як критерій для визначення її параметрів приймається мінімізація дисперсії відхилень вихідних часових рядів і факторів від їх оцінок. Перший фактор визначається з вихідних динамічних рядів. Потім з кожного ряду віднімаються значення, які одержано з відповідного рівняння регресії, що виражає цей ряд через даний фактор. Одержані у такий спосіб резидуальні змінні, приймаються як вихідні для знаходження другого фактора. Після цього записується рівняння регресії з урахуванням двох факторів і будуються нові резидуальні ряди. Процес триває доти, доки всі фактори не будуть визначені послідовно один за одним. Оскільки у розробленій процедурі моделювання фактори обчислюються послідовно, то фактично задача оптимізації розв'язується кожного разу для оцінювання тільки одного фактора.

У цьому випадку на черговому кроці відшукування параметрів моделі необхідно мінімізувати вираз

$$w_{00} \left\langle F - F, F - F \right\rangle_L + \sum_{i=1}^{k_k} w_{ii} \left\langle y_{ii} - y_{ii}, y_{ii} - y_{ii} \right\rangle \rightarrow \min \quad (2.1)$$

при умові:

$$\left\langle F, F \right\rangle = V, \quad (2.2)$$

де k — кількість розглядуваних часових рядів, а індекс m біля факторів не записуємо.

Згідно попередніми означеннями, шуканий фактор є лінійною комбінацією вихідних чи резидуальних часових рядів

$$F(t) = \sum_{i=1}^k a_i y_{ii}(t), \quad t = T_1, T_1+1, \dots, T_2, \quad (2.3)$$

а авторегресійна оцінка цього ж фактора для прийнятої глибини запізнення дається виразом

$$F(t) = c_0 + \sum_{k=1}^L c_k F(t-k). \quad (2.4)$$

На першому кроці, коли враховується один фактор оцінка i -го ряду

$$y_i(t) = d_{0i} + d_{1i}F(t), \quad i=1,2,\dots,k. \quad (2.5)$$

Неважко побачити, що згідно з (2.3)—(2.5) фактор $F(t)$ є функцією k змінних a_i , його авторегресійна оцінка вже додатково залежить від $L + 1$ параметрів c_l , а оцінки часових рядів — від усіх трьох груп невідомих a_i , c_l та d_i . Для отримання аналітичного виразу цільової функції треба обчислити коваріації за формулами (1.9)—(1.12) з урахуванням (2.3)—(2.5). Зауважимо, що при обчисленні коваріацій згідно з формулами (1.9)—(1.12) вільні члени в формулах (2.4), (2.5) скорочуються, і у вираз для цільової функції вони не потрапляють.

Шукані параметри моделі для зручності подальшого викладення перепозначимо наступним чином: $a_i = x_i$, $d_{1i} = y_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, $c_l = z_l$, $l = 1, 2, \dots, L$. Тоді, наприклад, вираз для коваріації фактора матиме вигляд

$$\langle F - F \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} x_i x_j. \quad (2.6)$$

З цього виразу випливає, що коваріації факторів будуть квадратичними формами невідомих коефіцієнтів і лінійними функціями коваріацій α_{ij} вихідних часових рядів. Аналогічні, але складніші вирази будуть мати місце і при обчисленні інших коваріацій, що входять у вираз (2.1).

2.2. Одержання достатніх умов існування екстремуму.

Сформульована вище задача є задачею на умовний екстремум. Як звичайно, застосовуючи метод Лагранжа для зведення задачі до відшукування безумовного екстремуму, після деяких перетворень вираз для цільової функції та умови зв'язку можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_k; y_{01}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{k1}; z_1, z_2, \dots, z_L) = \\ &= w_0 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left\{ \lambda \alpha_{ij} / w_0 + \alpha_{ij}^L - \sum_{n=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) z_n + \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L \beta_{ij}^{L,n,m} z_n z_m \right\} x_i x_j + \\ &+ \sum_{i=1}^k w_i (\alpha_{ij} + V y_i^2 - 2 y_i \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} x_j) - \lambda V \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} x_i x_j - V = 0, \quad (2.8)$$

де λ — множник Лагранжа.

Функція Φ залежить від $2k + L - 1$ невідомих і при врахуванні запізнення являє собою деякий поліном четвертого ступеня багатьох змінних. Для запису достатніх умов існування треба обчислити відповідні частинні похідні $\Phi, x_i, \Phi, y_i, \Phi, z_n$, де нижні індекси після коми тут і надалі означають диференціювання по відповідній змінній.

Використання формули диференціювання квадратичної форми

$$\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} x_i x_j \right)_{,x_i} = \sum_{i=1}^k (1 + \delta_{ij}) b_{ij} x_i,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера—Копеллі, дозволяє записати необхідні умови екстремума функції (2.8) у явному вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_{,x_j} = & w_o \sum_{i=1}^k (1 + \delta_{ij}) \left\{ \lambda \alpha_{ij} / w_o + \alpha_{ij}^L - \sum_{n=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) z_n + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L \beta_{ij}^{L,n,m} z_n z_m \right\} x_i - 2 \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_i = 0, \quad j=1,2,\dots,k; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Phi_{,y_i} = 2w_i V y_i - 2w_i \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} x_j = 0, \quad i=1,2,\dots,k \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{,z_n} = & -w_o \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) x_i x_j + \\ & + w_o \sum_{m=1}^L \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij}^{L,n,m} x_i x_j (1 + \delta_{ij}) z_m = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рівняння (2.9)–(2.10) утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь лінійних по x_i, y_i і нелінійних по z_n , а рівняння (2.11), навпаки, лінійні по z_n і нелінійні по x_i . Змінні y_i входять у розглядувані системи тільки лінійно. Параметр λ входить тільки в рівняння (2.9). Неважко побачити, що рівняння (2.10) дозволяють виключити з розгляду невідомі y_i , і таким чином зменшити порядок системи практично вдвічі. Тоді замінюючи індекс j на s та виключивши y_i , матимемо замість (2.9):

$$w_0 \sum_{i=1}^k (1 + \delta_{ij}) \left\{ \lambda \alpha_{ij} / w_0 + \alpha_{ij}^L - \sum_{n=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) z_n + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L \beta_{ij}^{L,n,m} z_n z_m \right\} x_i - 2 \sum_{i=1}^k w_i \alpha_{ij} \frac{1}{V} \sum_{s=1}^k \alpha_{is} x_s = 0, \quad j=1,2,\dots,k; \quad (2.12)$$

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що має місце тотожність

$$\sum_{i=1}^k w_i \alpha_{ij} \sum_{s=1}^k \alpha_{is} x_s = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^k w_s \alpha_{sj} \alpha_{si} \right) x_i. \quad (2.13)$$

У відповідності з нею рівняння (2.12) запишуться у вигляді:

$$\sum_{i=1}^k \left\{ w_0 (1 + \delta_{ij}) \left[\lambda \alpha_{ij} / w_0 + \alpha_{ij}^L - \sum_{n=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) z_n + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L \beta_{ij}^{L,n,m} z_n z_m \right] - \frac{2}{V} \sum_{s=1}^k w_s \alpha_{sj} \alpha_{si} \right\} x_i = 0 \quad j=1,2,\dots,k \quad (2.14)$$

Отже задачу відшукування стаціонарних точок зведено до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (2.10), (2.11), (2.14). Для її розв'язання скористаємось властивостями побудованої моделі. Змінні z_n — це коефіцієнти рівняння авторегресії, що враховують запізнення. Із вигляду рівняння (2.14) випливає, що вони утворюють деякі поправки до коефіцієнтів при невідомих x_i (вираз у квадратних дужках). Для стаціонарного процесу вони дорівнюють нулеві. Ця обставина підказує наступний шлях побудови розв'язку. На початку розрахунків приймаємо $z_m = 0$. Тоді рівняння (2.11) зникає, а система для відшукування нульових наближень $x_i^{[0]}$ із врахуванням умови нормування (2.8) набуває вигляду:

$$w_0 \sum_{i=1}^k (1 + \delta_{ij}) \left\{ \lambda \alpha_{ij} / w_0 + \alpha_{ij}^L \right\} x_i^{[0]} - 2 \sum_{i=1}^k w_i \alpha_{ij} \frac{1}{V} \sum_{s=1}^k \alpha_{is} x_s^{[0]} = 0, \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} x_i^{[0]} x_j^{[0]} - V = 0. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що у нульовому наближенні, яке не розглядає динаміку процесу, в систему не входить вага динамічної частини цільової функції w_0 .

Система рівнянь (2.15), (2.16) містить $k+1$ невідомі і складається з $k+1$ рівнянь. Позначимо ліві частини рівнянь f_j , а невідомі — через $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_k = x_k, \xi_{k+1} = \lambda$. Тоді можна записати

$$f_j = f_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0, \quad j=1, 2, \dots, n = k+1. \quad (2.17)$$

Систему рівнянь (2.17), (2.14) зручно розв'язувати методом Ньютона. Згідно з цим методом розв'язок системи нелінійних рівнянь знаходиться послідовними наближеннями шляхом розв'язування вже лінійної системи алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$f_j + \sum_{k=1}^n f_{j,\xi_k} (\xi_k^{[p+1]} - \xi_k^{[p]}) = 0, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.18)$$

де верхнім індексом $[p]=0, 1, 2, \dots$ позначено номер наближення. Значення функцій f_j та їх похідних f_{j,ξ_k} відповідно по змінним ξ_k обчислюються в точках $\xi^{[p]}$, які відповідають попередньому наближенню.

Після розв'язання системи (2.17) (з деякою точністю) нульові наближення $z_m^{[0]}$ можна знайти з рівнянь (2.11), які можна розглядати як неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що стає більш наочним, якщо переписати їх у вигляді:

$$\sum_{m=1}^L \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_{ij}^{L,n,m} x_i^{[0]} x_j^{[0]} (1 + \delta_{nm}) z_m = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) x_i^{[0]} x_j^{[0]}. \quad (2.19)$$

Таким чином будується нульове наближення. На наступному і подальших кроках ітераційного процесу відшукування стаціонарних точок замість рівнянь (2.15) використовуємо вже рівняння (2.14), у які підставляємо щойно знайдені значення $z_m^{[p]}$.

У загальному випадку розрахункові формули виглядають таким чином. Функції f_j ($j = 1, 2, \dots, k+1$) — це ліві частини рівнянь (2.14), куди замість z_m підставлено їх чергові наближення $z_m^{[p]}$. Останнє рівняння системи (2.17) — це рівняння (2.16). Похідні f_{j,ξ_k} , $i = 1, 2, \dots, k$ — це просто коефіцієнти при змінних x_i у рівняннях (2.14), тобто

$$f_{j,\xi_i} = w_0 (1 + \delta_{ij}) \left\{ \lambda \alpha_{ij} / w_0 + \alpha_{ij}^L - \sum_{n=1}^L (\beta_{ij}^{L,0,n} + \beta_{ij}^{L,n,0}) z_n^{[q]} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L \beta_{ij}^{L,n,m} z_n^{[q]} z_m^{[q]} - \frac{2}{V} \sum_{s=1}^k w_s \alpha_{sj} \alpha_{si} \right\} = 0, \quad i, j=1, 2, \dots, k \quad (2.20)$$

Похідна від лівої частини рівняння (2.16) по змінній $\xi_{k+1} = \lambda$ дорівнює нулеві, тобто $f_{k+1,\xi_{k+1}} = 0$, а похідні від лівих частин рівнянь f_j , $\xi_{k+1} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), тобто теж по λ , визначається рівністю

$$f_{j, \zeta_{k=1}} = \sum_{i=1}^k (1 + \delta_{ij}) \alpha_{ij} . \quad (2.21)$$

Неважко помітити, що похідні f_j, ξ_i ($i, j = 1, 2, \dots, k$) залежать, причому лінійно, тільки від останньої невідомої $\xi_{k+1} = \lambda$ і не залежать від решти невідомих ξ_k , а похідні — f_j, ξ_{k+1} ($j \neq k+1$) — це взагалі сталі функції.

Отже на кожному кроці чергове наближення невідомих z_m ($m = 1, 2, \dots, L$) знаходиться після знаходження наближеного значення групи невідомих x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) та λ шляхом розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.19). Після цього з'являється можливість уточнити значення x_i і обчислити нові значення z_m . Процес триває до досягнення необхідної точності, а його збіжність вдається прискорити, якщо на черговому кроці знаходження невідомих x_i та λ використовувати, наприклад, середнє арифметичне двох попередніх наближень z_m :

$$z_m^{[p+1]} = (z_m^{[p]} + z_m^{[p-1]}) / 2, p = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Фактично це означає застосування схеми покращеної ітерації на проміжних кроках побудови розв'язання вихідної системи. Зазначимо, що можливо застосування і інших ітеративних схем.

3. Загальна характеристика моделі.

Дамо принципову характеристику побудованої моделі ДФА. У ній перший динамічний фактор моделює динаміку сукупної динаміки всієї системи показників і визначає середній ступінь загальної закономірності її розвитку, виконуючи таким чином суттєву гносеологічну функцію в динамічних факторних моделях. Оскільки наступні фактори будуються на основі резидуальних змінних, то їх врахування показує, наскільки кожний із показників відхиляється у своєму розвитку від загальної тенденції, що є властивістю системи в цілому. За допомогою факторів високого порядку «уловлюється» стохастична складова процесу, яка обов'язково присутня у вихідних емпіричних рядах.

Докорінна відмінність моделі динаміки згідно з методом ДФА від класичних авторегресійних методів [9] полягає в тому, що завдяки «згущенню» достатньої кількості інформації про процес, для моделювання виявляється достатньою невелика кількість спостережень. Досить прийнятний результат можна дістати вже за наявності у часових рядах всього лише 6–7 точок [12, 16]. Важливо також, що оскільки в моделі змінні не поділяються на залежні і незалежні, а вивчається динаміка поведінки всієї системи,

яку виражено в обраних показниках, то задача прогнозування і знаходження значень незалежних змінних зовсім не виникає. У моделі ДФА прогноз розвитку всіх показників досліджуваної системи визначається одночасно.

Однією з характерних особливостей даного підходу є значна керованість моделі з точки зору можливостей настроювання її на якіснішу апроксимацію і прогноз значень будь-якого показника. Логічно це обгрунтовано, оскільки в тому разі, коли всі показники мають однакові пріоритети, що виражаються вагами, всі вони апроксимуються приблизно однаково. У разі, коли необхідно підняти точність апроксимації і прогнозування одного із показників, можна підвищити його пріоритетність, і, як показує практика, за рахунок досить незначного погіршення точності прогнозу за іншими ознаками, суттєво покращити якість прогнозування найважливішого для конкретного дослідження показника.

Після побудови моделі і проведення відповідних розрахунків перед дослідником постає задача оцінки якості побудованого прогнозу. Взагалі розв'язок цієї проблеми неможливий без введення деяких принципових припущень. Дійсно, насамперед треба вважати, що при існуванні системи у майбутньому всі показники, що аналізувалися, будуть зберігати свої впливи на систему в цілому. Крім того, встановлені зв'язки між змінними та тенденції розвитку системи, очевидно, матимуть місце і надалі, можливо, ще деякий певний час. Виходячи з цих припущень, можна запропонувати таку систему кількісної оцінки якості прогнозу.

Весь період дослідження динамічної поведінки системи природно поділяється на дві частини. Першу складає період часу, для якого показники відомі, а другу — прогнозний період, до якого входять такі значення часу, для яких потрібно оцінити кількісні значення показників (деяких або всіх). Оскільки на прогнозному періоді значення показників взагалі невідомі, то для одержання оцінки можна використовувати лише перший.

Найпростіший шлях застосування існуючої інформації полягає у порівнянні розрахункових і фактичних даних на цьому періоді. При цьому не має можливості оцінити якість встановленої динаміки розвитку системи, і принципово ця схема нічим не відрізняється від звичайної оцінки якості екстраполяції.

Вінформативнішим є метод, згідно з яким перший період також розбивається на два: базовий і контрольний. Тут у початкових часових рядах відкидається декілька останніх спостережень, які складатимуть контрольний період, і модель будується із скорочених часових рядів на проміжках часу, які складають вже ба-

зовий період. Після цього прогнозуються значення показників у точках, які містяться у контрольному періоді. Про якість прогнозу судять за збігом розрахункових і фактичних значень показників у цьому періоді. Якщо відповідність є задовільною, виконують вже сам прогноз, використовуючи повні або тіж самі скорочені ряди.

Для порівняння розрахункових і заданих значень змінних можливо використовувати різні величини. Як і раніше, заданий часовий ряд будемо позначати через $y(t)$, а його оцінку — через $\hat{y}(t)$. У кожний момент часу контрольного періоду t_i можна визначити різниці $d_i = \hat{y}(t_i) - y(t_i)$, абсолютні похибки $\Delta_i = |y(t_i) - \hat{y}(t_i)|$, квадратичні відхилення $b_i = (\hat{y}(t_i) - y(t_i))^2$ та середні значення цих величин на контрольному періоді довжиною h :

$$A = \sum_i \frac{d_i}{h}, \quad C = \sum_i \frac{\Delta_i}{h}, \quad B = \sum_i \frac{b_i}{h}. \quad (3.1)$$

Інформацію про якість наближення також дає коефіцієнт нерівності Тейла [6, 11].

Таким чином, для кількісної оцінки якості прогнозу можна використовувати середню похибку (з урахуванням знаку відхилення), середню абсолютну і середньоквадратичну похибку, а також коефіцієнт нерівності Тейла.

Зауважимо, що розв'язок оптимізаційної задачі, що визначає якість моделі, буде залежати від прийнятих значень ваг w_0 , w_i , а також від константи нормування V_m . При їх різних значеннях будемо отримувати різні розв'язки. Формально це означає, що і похибки, які були введені вище, будуть залежати від цих значень. Тобто, можна вважати, що

$$A = A(w_0, w_i), B = B(w_0, w_i), C = C(w_0, w_i), T = T(w_0, w_i). \quad (3.2)$$

Одержати явну залежність цих похибок від ваг, а також від констант нормування V_m практично неможливо. Деяку уяву про ці залежності можуть надати обчислювальні експерименти. Тому для практичної реалізації вибору значень цих параметрів можна запропонувати таку процедуру.

Для конкретної динамічної системи, що розглядається, вибирається певний досліджуваний показник і діапазон зміни ваг. У цьому діапазоні з деяким кроком обчислюються значення функ-

цій (3.3) на контрольному періоді. Далі вибирається відповідний критерій оцінки якості прогнозу, наприклад, середня квадратична похибка оцінки показника в контрольному періоді, і приймаються такі значення параметрів, які дають найменшу похибку. Якщо у вибраному діапазоні зміни ваг мінімальна похибка виявляється незадовільною, діапазон можна змінити і повторити розрахунки. Хоча фактично ця процедура зводиться до простого перебору, на комп'ютерні вона виявляється досить ефективною. При цьому у дослідника з'являється можливість активно втручатися в процес настроювання моделі. Зрозуміло, що існує можливість настроювання моделі і по деяким показникам одночасно, але в цьому випадку якість прогнозу може дещо погіршитись.

4. Особливості побудови чисельного алгоритму.

При побудові чисельного алгоритму реалізації моделі ДФА зручно записати розрахункові формули в матричному вигляді. У загальному випадку доводиться розглядати $M \leq k$ (k — число часових рядів, що розглядаються) факторів. Введемо у розгляд матриці A , розмірність якої $k \times m$, C , розмірність якої $L \times M$ і матрицю D , що має розмірність $(M + 1) \times k$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & \dots & a_{k0} \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{1M} & a_{2M} & \dots & a_{kM} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{L1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{L2} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ c_{1M} & c_{2M} & \dots & c_{LM} \end{bmatrix}$$

$$D^* = \begin{bmatrix} d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0k} \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ d_{M1} & d_{M2} & \dots & d_{Mk} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Будемо також розглядати $k \times k$ матриці Y , Y_r , складені із заданих і резидуальних рядів відповідно (по стовпчикам), $n \times (m + 1)$ матрицю F^* , складену з векторів-факторів, що має вигляд

$$F^* = \begin{bmatrix} 1 & F_{11} & \dots & F_{1M} \\ 1 & F_{21} & \dots & F_{2M} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & F_{n1} & \dots & F_{nM} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

та аналогічну матрицю, складену з авторегресійних оцінок факторів. Тоді для обчислення m -го фактору можна використовувати формулу

$$F_m(t) = Ya_{m-1}, \quad (4.3)$$

де a_m — вектор-стовпчик матриці A . При цьому оцінки заданих і резидуальних часових рядів обчислюються за формулами

$$Y(t) = F^* D, \quad Y^{(m-1)}(t) = H^* D^*, \quad (4.4)$$

де для оцінок резидуальних рядів треба використовувати скорочені матриці H^* і D^* , які отримуються з матриць F^* , D викрисленням останніх рядків і стовпчиків.

У процесі розрахунків матриці заповнюються послідовно із знаходженням чергового фактору і відповідних груп змінних. При відшукуванні екстремуму обчислювальну схему розв'язку відповідної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь після введення до розгляду матриці $G = [f_{j,x_i}]$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) і векторів

$$\xi^{[p]} = [x_1^{[p]}, x_2^{[p]}, \dots, x_k^{[p]}, \lambda^{[p]}], \quad F = [f_1, f_2, \dots, f_k, f_{k+1}]$$

зручно записати у вигляді

$$\xi^{[p+1]} = \xi^{[p]} - G^{-1} F, \quad (4.5)$$

де через G^{-1} позначено обернену матрицю. Значення елементів матриці обчислюються при $\xi^{[1]} = \xi^{[p]}$ для кожного чергового наближення $z_m^{[q]}$.

Викладений щойно алгоритм реалізовано у вигляді програмного комплексу. Спочатку обробляються скорочені ряди в циклі по зовнішнім параметрам моделі. Для визначеного показника обираються такі значення вагів, які забезпечують найкращу якість прогнозу. Таким чином, на цьому кроці скорочені ряди обробляються багато разів. Після цього використовуються вже по-

вні ряди, які обробляються один раз. Результати виводяться у вигляді таблиць і графіків, які будуються як для кожного показника окремо, так і для всієї системи в цілому.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Метод ДФА, як впливає з результатів, наведених у цитованих роботах, досить добре зарекомендував себе на практиці. Викладений підхід до моделювання динамічних процесів на базі методів ДФА був використаний в [11–17] для дослідження розвитку багатьох систем. У роботі [15] показано універсальність різних модифікацій моделей ДФА, які дозволяють одержати високу точність апроксимації та якість прогнозування у різних галузях людської діяльності у випадку обмеженого числа емпіричних даних.

Метод ДФА застосовувався також для дослідження товарної позиції ринку одягу та взуття України, засвідчивши свою ефективність при моделюванні динамічних процесів за короткими часовими рядами [14]. Саме такими є часові ряди показників виробництва і реалізації предметів споживання, оскільки, з огляду на специфіку продукції підприємств легкої промисловості, збільшення довжини цих рядів призводить до втрати інформативності, але обмежується при цьому загальноприйнятою періодичністю спостережень у статистичній звітності Держкомстату. Отже, метод ДФА може бути рекомендованим для включення в бази моделей і аналітичні комплекси інтелектуальних систем прийняття рішень щодо управління процесами формування асортименту продукції промислових підприємств.

Література

1. Современные подходы к моделированию социально-экономических систем: [монография] / В. С. Пономаренко, Т. С. Клебанова, А. И. Черняк, С. А. Рыбальченко и др. Под ред. В. С. Пономаренко, Т. С. Клебановой, Н. А. Кизима. — Харьков : ИД «ИНЖЭК», 2011. — 280 с.
2. *Геєць В. М.* Моделі і методи соціально-економічного прогнозування : підручник / В. М. Геєць, Т. С. Клебанова, О. І. Черняк, В. В. Іванов, Н. А. Дубровіна, А. В. Ставицький. — Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. — 396 с.
3. *Черняк О. І.* Динамічна економетрика : навч. посібник / О. І. Черняк, А. В. Ставицький. — К. : КВІЦ, 2000. — 120 с.
4. Прогнозування соціально-економічних процесів: сучасні підходи та перспективи : монографія / За ред. О. І. Черняка, П. В. Захарченка. — Бердянськ : Видавництво Ткачук, 2011. — 391 с.
5. Сучасні проблеми прогнозування соціально-економічних процесів: концепції, моделі, прикладні аспекти : монографія / За ред. О. І. Черняка, П. В. Захарченка. — Бердянськ : Видавець Ткачук О. В., 2012. — 564 с.

5. Вітлінський В. В., Піскунова О. В. Математичні моделі та методи ринкової економіки. — К. : КНЕУ, 2010. — 531 с.
6. Матвійчук А. В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка: монографія / А. В. Матвійчук. — К. : КНЕУ, 2011. — 439 с.
7. Паклін Н. Б., Орешков В. И. Бизнес-аналитика: от данных к знаниям. — СПб. : Питер, 2010. — 704 с.
8. Интеллектуальный анализ динамики бизнес-систем / Науч. ред. Н. М. Абдикеев, Л. Ф. Петров, Н. П. Тихомиров. — М. : ИНФРА-М, 2010. — 319 с.
9. Песаран М., Слейтер Л. Динамическая регрессия: теория и алгоритмы : пер. с англ. — М. : Финансы и статистика, 1984. — 301 с.
10. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ : пер. с англ. — М. : Мир, 1982. — 488 с.
11. Корецький С. Л., Лерман Л. Б., Роскач О. С. Математичний апарат і методичні підходи до моделювання на ЕОМ процесів формування валютних ринків у сучасних економічних умовах // Машинна обробка інформації. Міжвідомчий науковий збірник. — 1995. — Вип. 57. — С. 102–111.
12. Корецький С. Л., Лерман Л. Б., Роскач О. С. Використання динамічного факторного аналізу в прогнозуванні розвитку стохастичних і детермінованих систем // Машинна обробка інформації. Міжвідомчий науковий збірник. — 1996. — Вип. 59. — С. 92–101.
13. Корецький С. Л., Роскач О. С., Галата М. Л. Про розв'язання однієї задачі нелінійного програмування, що використовується при аналізі часових рядів // Машинна обробка інформації. Міжвідомчий науковий збірник. — 1997. — Вип. 60. — С. 87–96.
14. Роскач (Катуніна) О.С. Прикладные исследования рынка одежды и обуви. Методология. Моделирование спроса, предложения и поведения потребителей / Монографія. Деп. Киев. гос. экон. ун-т. — К., 1996. — Деп. в ГНТБ / 03.10.96 № 15. — Ук. 96. — 222 с.
15. Шамуратов А. Х., Корецький С.Л., Галата М. Л. Прогнозування динаміки економічних систем за допомогою модифікованого методу динамічного факторного аналізу // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. — 2007. — № 2(34). — С.114–119.
16. Кольвах Д. В. Разработка и исследование метода прогнозирования сложных процессов на основе комбинированных рядов // Автореф. дис. канд. техн. наук. 2004. — Владикавказ. Научная библиотека диссертаций и авторефератов <http://tekhnosfera.com/razrabotka-i-issledovanie-metoda-prognozirovaniya-slozhnyh-protsessov-na-osnove-kombinirovannyh-ryadov>
17. Галата М. Л. Прогнозування розвитку окремих галузей економіки із застосуванням нелінійних моделей // Автореф. дис. канд. екон. наук / Нац. академія наук України. Інститут економіки. — К., 2011.
18. Bankovy G., Veliczky J., Ziermann M. Comparative dynamic analysis of the development of some European countries. — Budapest, 1982. — 93 p.

Стаття надійшла до редакції 02.06.2014 р.