Леонід Долінський

Доцент кафедри економіко-математичних методів Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана. Кандидат економічних наук

Андрій Галкін

Здобувач кафедри економіко-математичних методів Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

Дослідження

Імовірнісні моделі оцінки ризику неплатежу та визначення вартості облігацій

Ця робота є логічним продовженням попередньої статті авторів [1], у якій розглянуто підхід до коригування вартості облігацій з урахуванням ступеня кредитного ризику на основі Пуасонівського потоку подій. Статтю присвячено імовірнісним моделям оцінки ступеня ризику дефолту за купонними та дисконтними облігаціями на основі експоненційного закону розподілу імовірностей.

Нагадаємо, що однією з основних кількісних характеристик оцінки ступеня ризику дефолту є імовірність неплатежу або, навпаки, — ймовірність його відсутності. Тому вартість облігації з урахуванням ризику можна записати так:

$$V^* = V \times P, \quad (1)$$

де P — імовірність відсутності дефолту впродовж усього строку дії облігації;

V — внутрішня вартість облігації.

Нагадаємо формули визначення внутрішньої вартості облігацій [2]:

♦ для *купонних* облігацій:

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}, \quad (2)$$

де C — розмір купонної виплати;

r — ставка дисконтування, приведена до розміру періоду здійснення виплат (місячна, квартальна, піврічна, річна);

N — номінал облігації;

n — кількість купонних виплат;

♦ для *дисконтних* облігацій, відповідно до введених раніше позначень:

$$V = \frac{N}{(1+r)^n}. \quad (3)$$

Вираз (2) можна привести до іншого вигляду з використанням перетворень, наведених у роботі [1]:

$$V = \frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times (1+r)^{-n} \quad (4)$$

або за невисокої ставки дисконтування:

$$V = \frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times e^{-rn}. \quad (5)$$

Аналогічно до виразу (5) можна перетворити вираз (3):

$$V = N \times e^{-rn}. \quad (6)$$

Оцінка вартості облігації з урахуванням ризику неплатежу грунтується на тому, що виникнення дефолту (неплатежу) за облігацією є випадковою подією.

Як зазначалось у нашій попередній роботі [1], основним показником, який характеризує можливість емітента вчасно та в повному обсязі погасити виплати за облігацією, є показник *чистого операційного доходу* (ЧОД). Враховуючи, що чистий операційний дохід — це дохід підприємства після забезпечення його життєдіяльності (відтворення), можна сказати, що величина ЧОД — це максимальна сума коштів, яку може виділити емітент на погашення виплат за облігацією.

Зробимо припущення, яке, на нашу думку, відповідає дійсності: *сума коштів, що спрямовується на погашення виплат за облігацією, є випадковою і не може перевищувати чистий операційний дохід підприємства-емітента.*

Зазначимо: спроможність емітента погасити певну виплату визначається не лише наявною в нього для оплати сумою коштів, а й обсягом такої виплати. Адже остання виплата за купонною облігацією, як правило, передбачає погашення номіналу цінного папера і суттєво відрізняється від обсягів попередніх виплат.

Таким чином, виникає *задача кількісної оцінки ступеня ризику дефолту за облігацією: визначити ймовірність погашення виплати S за умови, що чистий операційний дохід емітента за певний період часу T дорівнює CF.*

Побудова моделей кількісної оцінки ступеня ризику неплатежу базується на двох основних гіпотезах:

♦ *гіпотезі про забезпечення життєздатності підприємства:* грошові кошти, отримані підприємством-емітентом, передусім спрямовуються на поновлення діяльності підприємства;

♦ *гіпотезі про добросовісність емітента:* залишок коштів після забезпечення життєздатності підприємства спрямовується на погашення виплат за облігацією.

Отже, *ймовірність погашення виплати за облігацією — це ймовірність появи у емітента певного обсягу коштів X, який він може виділити зі свого чистого операційного доходу на погашення виплати, — не меншого, ніж сума такої виплати S* $(X \geq S)$.

Відзначимо деякі властивості залежності ймовірності оплати від обсягу виплати S та наявної у емітента суми коштів X:

- функція залежності ймовірності оплати від суми виплати та наявної у емітента суми коштів задана на додатній півосі OX, оскільки $S \geq 0$, $X \geq 0$;
- при $S \to 0$ імовірність оплати $P(X \geq S) \to 1$;
- при $S \to \infty$ функція $P(X \geq S) \to 0$;
- при $X \to 0$ імовірність оплати $P(X \geq S) \to 0$;
- при $X \to \infty$ функція $P(X \geq S) \to 1$.

Зважаючи, що експоненційний закон розподілу ймовірностей відповідає переліченим вище властивостям, а також на те, що в теорії масового обслуговування, у математичній теорії надійності відмови часто описують експоненційним законом розподілу, ми апріорно приймаємо, що ймовірність неплатежу за облігацією розподілена за експоненційним законом.

Тоді ймовірність погашення виплати за облігацією на основі експоненційного закону розподілу ймовірності [3] можна визначити так:

$$P(X \geq S) = P(S \leq X < +\infty) = \int_S^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda S}, \quad (7)$$

де S — обсяг виплати за облігацією;

— всі виплати з першої до передостанньої для купонної облігації дорівнюють величині купона: $S = C$;

— якщо виплата є останньою, це передбачає погашення купона та номіналу облігації: $S = C + N$;

λ — параметр інтенсивності:

$$\lambda = \frac{1}{(k \times CF)}, \qquad k \in (0;1] \quad (8)$$

де CF — прогнозна оцінка чистого операційного доходу підприємства-емітента за майбутній період здійснення виплати за облігацією;

k — коефіцієнт, що визначається експертним шляхом на основі аналізу фінансово-господарської діяльності підприємства-емітента.

Розглянемо вираз (8) та обґрунтуємо вибір параметра λ. В експоненційному законі розподілу параметр інтенсивності λ визначається як величина, обернена значенню математичного сподівання випадкової величини [3].

Випадковою величиною є сума коштів, яку зможе виділити зі свого чистого операційного доходу емітент для погашення виплат за облігацією. Значення цієї випадкової величини коливаються у межах: $X \in (0; CF]$.

Тоді математичне сподівання щодо суми коштів, яка може бути виділена на погашення виплат за облігацією, можна представити так:

$$M(X) = k \times CF, \text{ де } 0 < k \leq 1. \quad (9)$$

Отже, ймовірність погашення кожної виплати за облігацією визначається за допомогою співвідношення суми виплати та сподіваного обсягу коштів, що може бути виділений на оплату:

$$P(X \geq S) = e^{-\frac{S}{k \times CF}}. \quad (10)$$

Зауважимо, що для розрахунку значень імовірностей оплати необхідно визначити обсяги чистого операційного доходу емітента за кожен із майбутніх періодів здійснення виплат за облігацією. Тому постає відповідна задача прогнозування значень чистого операційного доходу емітента. Таке прогнозування має здійснюватися на основі методів прогнозування часових рядів [4] з використанням даних щодо обсягів ЧОД за попередні періоди діяльності емітента. Прогнозування значень ЧОД — не складне завдання в сучасних умовах з огляду на наявність численних спеціалізованих програмних продуктів. Прогнозування ЧОД надає значні переваги щодо визначення параметра інтенсивності λ порівняно з необхідністю здійснювати ретроспективний аналіз платоспроможності емітента при моделюванні на основі Пуасонівського потоку подій [1].

Значення параметра λ буде різним з урахуванням того, що прогнозований обсяг чистого операційного доходу в кожному із періодів здійснення виплат за облігацією буде різним, і частина коштів, яку можна виділити на оплату, також може бути різною. Крім того, остання виплата за купонною облігацією, як правило, перевищує попередні. Таким чином, експоненційний закон розподілу в кожному періоді матиме різні параметри:

$$P(X \geq S) = e^{-\lambda_j S_j} = e^{-\frac{1}{k_j CF_j} S_j}, \quad j = 1,2,...n, \quad (11)$$

де j — номер періоду здійснення виплат за облігацією.

Отже, ми отримаємо множину законів розподілу, що описують імовірність оплати в кожному періоді.

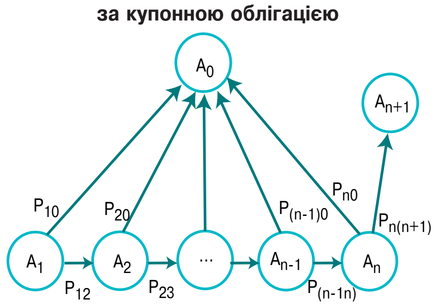
Досі йшлося лише про купонні облігації. Розглянемо оцінку ступеня ризику для дисконтних облігацій. Нагадаємо, що підхід на основі Пуасонівського потоку подій [1] не давав змоги проаналізувати ступінь ризику для некупонних облігацій у зв'язку з відсутністю потоку виплат.

Нагадаємо, що єдиною виплатою за дисконтною облігацією є погашення її номіналу (N) в кінці строку дії облігації. Тоді ймовірність відсутності дефолту за такою облігацією відповідно до раніше введених позначень можна записати так:

$$P(X \geq S) = e^{-\frac{N}{k_n \times CF_n}}. \quad (12)$$

Перейдемо до визначення вартості купонних облігацій з урахуванням ризику неплатежу. Для цього спочатку опишемо процес здійснення виплат за таким цінним папером графічно (див. графік). Нехай випущено облігацію, що передбачає n купонних виплат. Остання виплата є сумою купона та номіналу облігації. На основі виразу (11) розраховано ймовірності погашення кожної j виплати та перехід до $(j+1)$ виплати: $P_{j(j+1)}$.

Графічне відображення виплат за купонною облігацією



Введемо умовні позначення відповідно до графіка:

$A_1 \ldots A_{n-1}$ — здійснення купонних виплат;

A_n — здійснення останньої виплати, що передбачає погашення купона та номіналу облігації;

A_0 — стан дефолту за облігацією;

A_{n+1} — стан повного погашення виплат за борговим зобов'язанням;

$P_{j(j+1)}$ — погашення j виплати і перехід до $(j+1)$ виплати;

$P_{n(n+1)}$ — погашення останньої виплати і перехід до стану повного виконання зобов'язань за облігацією;

P_{j0} — ймовірність непогашення j виплати і перехід до стану дефолту:

$$P_{j0} = 1 - P_{j(j+1)}. \quad (13)$$

На основі описаної моделі можна обчислити деякі важливі характеристики для оцінки надійності облігації, які дадуть інвестору змогу проаналізувати доцільність вкладення коштів у певне боргове зобов'язання:

- ймовірність переходу до стану настання певної виплати P_w визначається як добуток імовірностей потрапляння до станів виплат, що передують w виплаті:

$$P_w = \prod_{j=1}^{j=w-1} P_{j(j+1)}, \text{ де } w=2,3,\ldots,n. \quad (14)$$

Така оцінка цікава для інвестора зі спекулятивної точки зору. За допомогою цього показника він може проаналізувати, в який момент краще перепродати облігацію. Якщо, скажімо, із проведеного аналізу випливає, що ймовірність настання w платежу, тобто ймовірність того, що всі виплати, які передують w виплаті будуть погашені, є недостатньою для даного інвестора, то йому є сенс спробувати перепродати облігацію після отримання $(w$-1) купонної виплати;

- загальна ймовірність відсутності дефолту протягом усього строку дії купонної облігації — P. Ця характеристика обчислюється як добуток ймовірностей погашення кожної виплати на кожному етапі, оскільки події оплати є незалежними:

$$P = \prod_{j=1}^{n} P_{j(j+1)}, \quad (15)$$

де n — кількість виплат.

Або з урахуванням виразу (11):

$$P = \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j S_j} = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{1}{k_j \times CF_j}} = e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{k_j GF_j}}. \quad (16)$$

Зважаючи, що всі виплати за купонною облігацією передбачають погашення купона (C), а остання виплата передбачає також погашення номіналу (N), можна надати виразу (16) такого вигляду:

$$P = e^{-\left(C \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j CF_j} + \frac{N}{k_n CF_n}\right)}. \quad (17)$$

Отриманий вираз (17) для визначення загальної ймовірності відсутності дефолту за облігацією є важливим при проведенні аналізу надійності облігації, а також може бути використаний для коригування внутрішньої вартості облігації з урахуванням кредитного ризику.

Перейдемо безпосередньо до визначення вартості облігацій з урахуванням ризику неплатежу.

Для купонних облігацій коригування внутрішньої вартості цінного папера можна провести на основі виразу:

$$V^* = \left(\frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times \frac{1}{(1+r)^n}\right) \times e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{k_j CF_j}} \quad (18)$$

або з урахуванням виразу (17):

$$V^* = \left(\frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times \frac{1}{(1+r)^n}\right) \times e^{-\left(C \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j CF_j} + \frac{N}{k_n CF_n}\right)}. \quad (19)$$

За невисокої ставки дисконтування r можна використовувати рівняння:

$$V^* = \left[\frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times e^{-rn}\right) \times e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{k_j CF_j}} = \frac{C}{r} \times e^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{k_j CF_j}} + \left[N - \frac{C}{r}\right] \times e^{-\left(rn + \sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{k_j CF_j}\right)}. \quad (20)$$

або з урахуванням виразу (17):

$$V^* = \left[\frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times e^{-rn}\right] \times e^{-\left(C \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j CF_j} + \frac{N}{k_n CF_n}\right)} = \frac{C}{r} \times e^{-\left(C \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j CF_j} + \frac{N}{k_n CF_n}\right)} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times e^{-\left(rn + \left(C \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j CF_j} + \frac{N}{k_n CF_n}\right)\right)}. \quad (21)$$

Оцінку вартості дисконтних облігацій з урахуванням ступеня кредитного ризику можна проводити на основі виразу:

$$V^* = \frac{N}{(1+r)^n} \times e^{-\frac{N}{k_n CF_n}}, \quad (22)$$

або за невисокої ставки дисконтування [1]:

$$V = N \times e^{-rn} e^{-\frac{N}{K_n CF_n}} = N \times e^{-\left(rn + \frac{N}{K_n CF_n}\right)}. \quad (23)$$

Наведемо числовий приклад оцінки вартості купонної облігації з урахуванням кредитного ризику. Нехай випущено купонну облігацію номіналом *N = 1 100 грн.* строком на 6 місяців зі щомісячними купонними виплатами *C = 10 грн.* Річна ставка дисконтування дорівнює 12%, місячна ставка *r = 1%.* За допомогою пакета STATiSTiCA на основі даних щодо ЧОД емітента за попередні роки отримано прогнозні обсяги ЧОД на кожен із 6 місяців здійснення виплат за облігацією:

Номер виплати	1	2	3	4	5	6
Обсяг ЧОД емітента (тис. грн.)	25.2	24.7	26.2	25.3	24.8	32.1

Проаналізувавши фінансово-господарську діяльність емітента, характер і обсяги платежів, які він здійснює із чистого операційного доходу, експерт встановив, що значення коефіцієнта k для визначення сподіваного обсягу коштів, який можна спрямувати на погашення виплат за облігацією, дорівнює 0.5 для всіх періодів здійснення виплат $(k_j = k = 0.5)$.

Обчислимо вартість описаної облігації з урахуванням ризику неплатежу на основі (21):

$$V^* = \left[\frac{C}{r} + \left(N - \frac{C}{r}\right) \times e^{-rn}\right] \times e^{-z},$$

де $z = \left(C \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j CF_j} + \frac{N}{k_n CF_n}\right);$

при рівних k=0,5:

$$z = \frac{1}{0.5}\left(C \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{CF_j} + \frac{N}{CF_n}\right) + 2\left(C \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{CF_j} + \frac{N}{CF_n}\right);$$

$$z = 2 \times \left(10\left[\frac{1}{25200} + \frac{1}{24700} + \frac{1}{26200} + \frac{1}{25300} + \frac{1}{24800} + \frac{1}{32100} + \right] + \frac{1100}{3210}\right) \approx 0.0732;$$

$$V^* = \left[\frac{10}{0.01} + \left(1100 - \frac{10}{0.01}\right) \times e^{-0.01 \times 6}\right] \times e^{-0.0732} = 1094.18 + 0.9294 \approx 1016.93 \text{ (грн.)}.$$

Вартість описаної облігації без урахування ступеня кредитного ризику дорівнює 1 094.18 грн. Оскільки ймовірність відсутності дефолту $P \approx 0.93$, вартість наведеної облігації з урахуванням ризику неплатежу становить 1 016.93 грн.

Різниця між розрахованими вартостями становить 77.25 грн. Ця сума є сподіваним обсягом збитків за облігацією і є оцінкою ступеня ризику в грошовому виразі.

Отже, отримані рівняння (10), (21)—(23) дають змогу скоригувати вартість облігації з урахуванням кредитного ризику з використанням експоненційного закону розподілу ймовірностей з допомогою співвідношення розміру виплат за облігацією та наявних у емітента коштів для погашення таких виплат.

ВИСНОВКИ

Запропонований імовірнісний підхід з використанням експоненційного закону розподілу дає змогу оцінити вартість дисконтних і купонних облігацій з урахуванням ступеня кредитного ризику. Розроблені моделі мають практичну цінність для експертів, що займаються оцінкою боргових цінних паперів і безпосередніх інвесторів.

Описаний підхід дає змогу визначити ймовірність дефолту за облігацією в момент емісії, а також у будь-який момент часу, що пов'язаний із виплатою купонів.

Побудовані ймовірнісні моделі надають важливу для інвестора інформацію стосовно надійності боргового цінного паперу, його прийнятної вартості та можливого моменту перепродажу, що є важливими показниками при прийнятті рішень стосовно доцільності інвестування у певну облігацію.

Розроблений підхід дає змогу подолати один із основних недоліків використання Пуасонівського потоку при оцінці вартості облігацій [1] — необхідність проведення надзвичайно глибокого ретроспективного аналізу, що неможливо за сучасних українських реалій. □

Література

1. Долінський Л., Галкін А. Оцінка вартості облігацій з урахуванням ризику неплатежу // Вісник НБУ. — 2007 р. — № 7. — С. 46—49.

2. Долінський Л.Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів: Навч. посіб. — К.: Майстер-клас, 2005. — 192 с.

3. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. — СПб.: Наука, 2001. — 295 с.

4. Равікович Є.І., Присенко Г.В. Макроекономічне прогнозування: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2002. — 172 с.