

Коляда Ю.В. (Koliada Yu.V.), к.ф.-м.н., доц.,
Рожок Т.О. (Rozhok T.O.), аспірант, кафедра економіко-математичного моделювання, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ Й АНАЛІЗ РОЗВИТКУ ФІРМИ НА ПІДГРУНТІ ДИНАМІЧНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ТРИВИМІРНОЇ МОДЕЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

COMPUTER SIMULATION AND ANALYSIS OF THE FIRM DEVELOPMENT ON THE BASIS OF THE DYNAMIC NON-LINEAR THREE-DIMENSIONAL MODEL AND OPTIMIZATION METHODS

АНОТАЦІЯ. У статті розглянуто динамічну нелінійну модель, що описує розвиток фірми в ринкових умовах у координатах "персонал – власний капітал – позиковий капітал". Запропоновано двохетапний алгоритм оптимізації параметрів моделі в контексті відтворення динаміки функціонування реальної фірми. Надано економічну інтерпретацію результатам проведеного кількісного і якісного аналізу отриманої комп'ютерної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: економіко-математичне моделювання, економічна динаміка, система диференціальних рівнянь, фірма, методи оптимізації, кількісний аналіз, якісний аналіз.

АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрена динамическая нелинейная модель, описывающая развитие фирмы в рыночных условиях в координатах "персонал – собственный капитал – заемный капитал". Предложен двухэтапный алгоритм оптимизации параметров модели в контексте воссоздания динамики функционирования реальной фирмы. Предоставлена экономическая интерпретация результатов проведенного количественного и качественного анализа полученной компьютерной модели.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: экономико-математическое моделирование, экономическая динамика, система дифференциальных уравнений, фирма, методы оптимизации, количественный анализ, качественный анализ.

ABSTRACT. A dynamic nonlinear model describing the development of a firm in the market economy conditions in the coordinate system "staff – amount of equity – amount of debt capital" is reviewed. The two-stage algorithm for finding the optimal values of the model's parameters is suggested. The economic interpretation of the results of the quantitative and qualitative analysis conducted on the basis of the obtained computational model is presented.

KEYWORDS: economic and mathematical modeling, economic dynamics, differential equations system, firm, optimization methods, quantitative analysis, qualitative analysis.

Постановка проблеми. Прийняття правильних управлінських рішень є першорядною умовою успішного розвитку будь-якої економічної системи. Особливо чутливою до керуючих дій є система на стадії трансформації. На перехідному етапі розвитку економічного суб'єкта вкрай важливим є формування таких умов господарювання, що в перспективі сприяють його переходу у фазу стабільного економічного зростання з високою стійкістю до негативних впливів зовнішнього середовища. З метою визначення коректних керівних впливів, здатних спрямувати розвиток економічної системи у необхідне русло, виникає потреба у детальному вивченні якісних станів функціонування суб'єктів господарювання та необхідних і достатніх умов переходу від одного стану до іншого.

Зазначене обумовлює нагальну потребу у створенні динамічних економіко-математичних моделей, на підґрунті яких можна з достатньою точністю описувати розвиток мікроекономічного суб'єкта, а також визначати перспективні режими його функціонування. З огляду на нелінійну природу будь-якої економічної системи безмежний потенціал для подібних досліджень становлять математичні моделі нелінійної економічної динаміки на базі систем диференціальних рівнянь. Моделі цього класу здатні відтворювати складну синергетичну природу соціальних систем при відносно простій математичній структурі, надаючи величезні можливості для проведення на їх підґрунті якісного та кількісного аналізу об'єкта дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останнім часом все більше науковців-економістів звертаються до досконалішого математичного інструментарію дослідження економічних систем – нелінійних динамічних моделей, – ніж лінійні регресійні моделі. Наприклад, у праці [1] розглядається динамічна модель цінової конкуренції фірм на ринку недосконалої конкуренції, у якій динаміка ціноутворення описується за допомогою різницевих рівнянь. У статті [2] розглядається задача максимізації прибутку монополістичної фірми на підґрунті трьох різних динамічних моделей, побудованих з використанням функції Кобба-Дугласа.

Аналіз діяльності мікроекономічних суб'єктів на підґрунті динамічних моделей є предметом дослідження і зарубіжних учених. Зокрема, у статті [3] пропонується динамічна модель для опису поведінки фірми в контексті вибору структури капіталу (співвідношення між власними і позиковими фінансовими засобами) залежно від її характеристик. У праці [4] досліджується кількісний вплив заходів з мінімізації мікроекономічного систем-

ного ризику на підґрунті динамічної моделі діяльності банків, що функціонують за рахунок як власних, так і позикових коштів. Таким чином, простежується значна увага сучасних дослідників до вирішення проблеми формування ефективної на тривалому часовому горизонті структури капіталу мікроекономічних агентів, що підкреслює актуальність цього питання.

Виокремлення невирішених раніше частин загальної проблеми. Зі збільшенням розмаїття математичних моделей нелінійної економічної динаміки, що дають змогу прогнозувати стан фірми у різних координатах і вирішувати різноманітні задачі оперативного та стратегічного характеру, залишається актуальною проблема визначення оптимальних значень параметрів динамічної моделі, які забезпечують найточніше відтворення показників еволюції досліджуваного об'єкта незалежно від обраної системи координат і математичного інструментарію опису моделі. Зазначена проблема є особливо нагальною при застосуванні моделей на базі систем диференціальних рівнянь.

Досі поширеним підходом до оптимізації параметрів є ручний підбір їх значень, що значно звужує сферу прикладного застосування моделей нелінійної економічної динаміки у порівнянні з лінійними економетричними моделями, для оптимізації яких уже давно практикуються ефективні з точки зору точності і трудових затрат методи, що легко піддаються автоматизації. З урахуванням зазначеного доцільними є розроблення і тестування підходів до математично обґрунтованого пошуку оптимальних значень параметрів моделей економічної динаміки на базі систем диференціальних рівнянь, що дають змогу ефективно скористатися обчислювальними потужностями сучасних технічних засобів.

Не відтіняючи, але доповнюючи важливість зазначеної проблеми, варто наголосити на актуальності проведення ґрунтовного якісного аналізу динамічних економіко-математичних моделей, зокрема, з використанням сучасних програмних засобів. Дослідження можливих якісних станів функціонування економічної системи та умов переходу від одного стану до іншого надає цілісніше уявлення про об'єкт дослідження, ніж у результаті проведення лише його кількісного аналізу. Таким чином, суттєвою науковою проблемою сучасності є розширення практики проведення якісного аналізу динамічних моделей з економічною інтерпретацією отриманих результатів.

Постановка завдання. Науково-дослідницьке завдання полягає у формалізації математичного інструментарію оптимізації параметрів динамічної моделі еволюції фірми в координатах «обсяг

власного капіталу – обсяг позикового капіталу – чисельність персоналу», а також його програмній реалізації. Передбачається застосування описаного інструментарію на прикладі формування комп'ютерної моделі реального суб'єкта господарювання, відтворення динаміки показників його функціонування та побудова середньострокового прогнозу. Окрім того, завдання включає проведення ґрунтовного якісного і кількісного аналізу отриманої комп'ютерної моделі фірми та надання економічної інтерпретації результатам обчислювального експерименту.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглядається така модель функціонування фірми в ринкових умовах [5, с. 1124]:

$$\begin{cases} \dot{z} = -c_1 \cdot z + c_2 \cdot y + (c_2 \cdot c_3) / c_4 \cdot x \cdot y \\ \dot{y} = c_3 \cdot y - c_4 \cdot z + x - c_3 \cdot z \cdot x \\ \dot{x} = -c_5 \cdot x + c_6 \cdot y \end{cases}, \quad (1)$$

де z – чисельність персоналу; y – обсяг власного капіталу; x – обсяг позикового капіталу; $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}$ – похідні відповідних змінних по незалежній змінній часу t ; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 > 0$ – параметри моделі, що характеризують різні умови господарювання фірми.

З метою моделювання розвитку конкретної фірми на підґрунті системи (1) потребується використання таких значень параметрів $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ і початкових значень змінних x_0, y_0, z_0 , за яких розрахункова динаміка змінних максимально наближається доємпіричної. Для їх знаходження застосовується певний алгоритм оптимізації. Задача оптимізації ускладнена такими факторами, як нелінійна природа рівнянь у системі (1), їх розв'язання через числове інтегрування, а також велика кількість параметрів системи, що колосально знижує ефективність традиційних методів. Одним із можливих варіантів вирішення цієї проблеми є адаптивне використання модифікованих традиційних методів, що дає змогу зменшити вплив вищезазначених факторів на ефективність оптимізаційного процесу.

Розглянемо алгоритм оптимізації параметрів моделі (1), який можна умовно поділити на два етапи. Перший етап полягає у застосуванні методу повного перебору всіх комбінацій значень параметрів, де кожному з параметрів присвоюється штучно обме-

жена множина можливих значень (2). Хоча даний метод надає грубу оцінку і є неефективним з точки зору обчислювального навантаження, він легко реалізовується і дає змогу скористатися апіорним знанням щодо моделі (ступінь її структурної стійкості, доцільний діапазон значень параметрів):

$$C^{(j)} = \{c_{\min}^{(j)}, c_{\min}^{(j)} + h^{(j)}, \dots, c_{\min}^{(j)} + (i-1) \cdot h^{(j)}, \dots, c_{\max}^{(j)}\}, \quad (2)$$

де $C^{(j)}$ – множина всіх можливих значень j -того параметра, впорядкована за зростанням, причому $\forall c_i^{(j)}, C_i^{(j)}, \in [C_{\min}^{(j)}, C_{\max}^{(j)}]$; $C_{\min}^{(j)}, C_{\max}^{(j)}$ – відповідно мінімальне та максимальне обмежувальні значення j -того параметра; $h^{(j)}$ – крок перебору j -того параметра; $i = \overline{1, n^{(j)}}$; $n^{(j)} = \left\lceil \frac{c_{\max}^{(j)} - c_{\min}^{(j)}}{h^{(j)}} \right\rceil + 1$ – кількість елементів у множині $C^{(j)}$; $j = \overline{1, n}$; p – кількість параметрів, що підлягають оптимізації.

Серед усіх можливих комбінацій значень параметрів із їх множин (2) обирається комбінація, для якої похибка (3) має бути мінімальною:

$$E = \sum_{i=1}^v \sum_{t=1}^T (Y_t^{(i)} - \tilde{Y}_t^{(i)})^2, \quad (3)$$

де E – величина похибки; $Y_t^{(j)}, \tilde{Y}_t^{(j)}$, – відповідно розрахункове і цільове (статистичне) значення i -тої змінної t -того рівня часового ряду; $v=3$ – кількість змінних моделі, T – кількість рядів спостереження.

Другий етап оптимізації передбачає застосування методу найменших квадратів (МНК) для уточнення оптимальних значень параметрів, за яких відхилення обчисленої динаміки від спостережуваної мінімізується. Враховуючи нелінійний характер динаміки змінних у системі (1), для досягнення найменшої похибки може потребуватися циклічне застосування МНК до проміжних результатів оптимізації. Окрім того, з метою уникнення хаотичних явищ у разі наближення обчислювальної матриці до однієї з точок її виродження доцільно скористатися модифікацією МНК (4), відомою як алгоритм Левенберга–Марквардта [6, с. 39]:

$$\Delta \theta = J^T (J \cdot J^T + \lambda^2 I)^{-1} e, \quad (4)$$

де $\Delta\theta$ – вектор-стовпчик розмірності $p \times 1$, що являє собою необхідну зміну параметрів системи з метою наближення до цільової

динаміки; $J = \{J_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial e_i}{\partial \theta_j} \right\}$ – матриця Якобі розмірності $m \times p$, що

характеризує величину зміни помилки e_i при нескінченно малій зміні значення параметра θ_j ; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, p}$; $\lambda \geq 0$ – константа демпфування (параметр регуляризації), значення якої обирається емпірично і має бути якомога меншим, але достатньо великим, щоб подолати виродженість матриці $J \cdot J^T$; e – вектор-стовпчик розмірності $m \times 1$, що являє собою помилку по кожному із критеріїв оптимізації; m – кількість критеріїв оптимізації; p – кількість параметрів системи, що підлягають оптимізації.

Квадратична збіжність даного варіанту МНК була доведена у [7].

Множина параметрів системи (1), що підлягають оптимізації за допомогою МНК, позначається таким чином:

$$\theta_{k-1} = \{c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6\}, \quad (5)$$

де θ_{k-1} – вектор-стовпчик параметрів моделі, що використовується для обчислень на k -ій ітерації МНК; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – значення відповідних параметрів моделі (1).

Значення скалярних компонентів вектору θ_0 , встановлюються згідно результатів першого етапу оптимізації – отриманих методом повного перебору значень параметрів, для яких похибка (3) виявилася найменшою. Починаючи з $k > 1$, для обчислень на k -тій ітерації МНК використовується вектор θ_{k-1} , отриманий після $(k-1)$ -тої ітерації за формулою:

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\theta_k, \quad (6)$$

де $\Delta\theta_k$ – результат k -тої ітерації МНК, обчислений за формулою (4).

З метою зменшення обсягу обчислень при визначенні похибки e , що здійснюється за формулою (4), а також врахування методом найсуттєвіших властивостей динаміки системи виокремлено

ключові точки, в яких слід мінімізувати похибку. Замість агрегованого критерію на кшталт (3) для МНК було використано множину критеріїв, що являють собою квадрати відхилень у кожній з ключових точок системи:

$$e_i = (X_i - \tilde{X}_i)^2, \quad (7)$$

де e_i – i -тий елемент вектора помилок, $i = \overline{1, m}$; m – кількість ключових точок; X_i – розрахункове значення змінної моделі в i -тій ключовій точці, $\tilde{X}_i$ – цільове (статистичне) значення змінної в i -тій ключовій точці.

Оскільки аналітичне обчислення похідних помилки $e_{\text{моделі}}$ (1) по кожному з її налаштовуваних параметрів θ_j є занадто складною математичною задачею, для знаходження елементів матриці Якобі $\{J_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial e_i}{\partial \theta_j} \right\}$ використовується числовий метод обчислення частинних похідних. У такому випадку значення елементів матриці Якобі обчислюються за формулою:

$$\{J_{ij}\} = \frac{e_i(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + h, \theta_{j+1}, \dots, \theta_p) - e_i(\theta_1, \dots, \theta_p)}{h}, \quad (8)$$

де $\{J_{ij}\}$ – елемент матриці J , що знаходиться в i -тому рядку j -го стовпчика; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, p}$; $e_i(\dots)$ – величина похибки в i -тій ключовій точці при заданих значеннях параметрів моделі (1); θ_j – значення параметра моделі (1), що оптимізується; h – крок обчислення похідної, величина якого має обиратися якомога меншою, але такою, щоб похибка комп'ютерного обчислення залишалася на прийнятному рівні; m – кількість ключових точок динаміки системи (1); $p = 6$ – кількість параметрів моделі (1), що підлягають оптимізації.

Як об'єкт комп'ютерного моделювання обрано фірму OraSure Technologies, Inc. (штаб-квартира у США, м. Бетлехем), яка займається випуском медичного обладнання [8]. У табл. 1 наведено статистичні дані за трьома показниками економічної діяльності OraSure Technologies. Обрання показників обумовлене семантичним значенням змінних економіко-математичної моделі (1).

Таблиця 1

**ПОКАЗНИКИ ДІЯЛЬНОСТІ ФІРМИ
“ORASURE TECHNOLOGIES, INC.” ЗА 1996–2016 РР.**

Період	Власний капітал	Позиковий капітал	Кількість працюючих
рік	тис. дол. США	тис. дол. США	чол.
1996	31676	8566	113
1997	17873	8105	130
1998	10701	10082	85
1999	18592	11659	83
2000	26172	11564	210
2001	26541	10744	221
2002	26019	9718	187
2003	73509	12642	171
2004	75577	12487	194
2005	118919	11828	233
2006	129504	27061	233
2007	140055	27298	282
2008	108325	23593	287
2009	103807	23184	280
2010	102843	19677	231
2011	100250	27612	308
2012	170315	21124	313
2013	161146	23099	293
2014	158701	30932	320
2015	159436	29885	326
2016	185850	22085	325

Джерело: [9]

Наведені статистичні дані потребують приведення до прийнятної для математичного моделювання форми, що узгоджується з якісними властивостями моделі (1), суттєвими в контексті її застосування. Згідно з результатами дослідження [5, с. 1126], до таких властивостей можна віднести: безрозмірність величин; відсутність трендової компоненти в динаміці змінних x та y ; опосередковане вираження досягнутого рівня показників обсягу позикового та власного капіталу через амплітуду коливань відповідно змінної x та y . Відповідний алгоритм оброблення статистичних даних відображений у формулах (9)–(19).

$$s_t^j = \frac{g_t^j}{m_t^j \cdot \text{rng} \left| g^{x+y} \right|}, \quad (9)$$

де s_t^j – значення безрозмірного часового ряду j -того показника за t -тий період; $j = \{ x, y \}$ – обсяги відповідно позикового та влас-

ного капіталу; g_t^j – значення безтрендового часового ряду j -того показника за t -тий період; m_t^j – значення масштабного часового ряду j -ого показника за t -тий період; $rng|g^{x+y}|$ – варіаційний розмах безтрендового обсягу пасивів.

$$s_t^z = \frac{d_t^z}{m_t^z \cdot rng d^z}, \quad (10)$$

де s_t^z – значення безрозмірного часового ряду чисельності персоналу за t -тий період; d_t^z – статистичне значення чисельності персоналу за t -тий період; m_t^z – значення масштабного часового ряду чисельності персоналу за t -тий період; $rng d^z$ – варіаційний розмах вихідної чисельності персоналу.

$$m_t^j = \frac{|d_t^j - f_t^j|}{f_t^j}, \quad (11)$$

де m_t^j – значення масштабного часового ряду j -ого показника за t -тий період; d_t^j – вихідне значення j -того показника за t -тий період; f_t^j – значення трендового часового ряду j -ого показника за t -тий період, $j = \{x, y\}$.

$$m_t^z = \frac{d_t^z}{\min d^z}, \quad (12)$$

де m_t^z – значення масштабного часового ряду чисельності персоналу за t -тий період; d_t^z – вихідне значення чисельності персоналу за t -тий період; $\min d^z$ – мінімальне значення вихідної чисельності персоналу.

$$\min|g^{x+y}| = \min_{t=1,n}|g_t^x + g_t^y|, \quad (13)$$

де $\min|g^{x+y}|$ – мінімальне абсолютне значення безтрендового обсягу пасивів; g_t^j – значення безтрендового часового ряду j -того показника за t -тий період; n – кількість розглядуваних часових періодів.

$$\max|g^{x+y}| = \max_{t=1,n}|g_t^x + g_t^y|, \quad (14)$$

де $\max|g^{x+y}|$ – максимальне абсолютне значення безтрендового обсягу пасивів; g_t^j – значення безтрендового часового ряду j -того показника за t -тий період; n – кількість розглядуваних часових періодів.

$$rng|g^{x+y}| = \max|g^{x+y}| - \min|g^{x+y}|, \quad (15)$$

де $rng|g^{x+y}|$ – абсолютний варіаційний розмах безтрендового обсягу пасивів.

$$g_t^j = d_t^j - f_t^j, \quad (16)$$

де g_t^j – значення безтрендового часового ряду j -того показника в t -тому періоді; $j = \{x, y\}$; d_t^j – значення вихідного часового ряду j -того показника в t -тому періоді; f_t^j – значення трендового часового ряду j -того показника в t -тому періоді.

$$\min d^z = \min_{t=1,n} d_t^z, \quad (17)$$

де $\min d^z$ – мінімальне значення вихідної чисельності персоналу; d_t^z – вихідне значення чисельності персоналу за t -тий період; n – кількість розглядуваних часових періодів.

$$\max d^z = \max_{t=1,n} d_t^z, \quad (18)$$

де $\max d^z$ – максимальне значення вихідної чисельності персоналу; d_t^z – вихідне значення чисельності персоналу за t -тий період; n – кількість розглядуваних часових періодів.

$$rng d^z = \max d^z - \min d^z, \quad (19)$$

де $rng d^z$ – варіаційний розмах вихідної чисельності персоналу.

На основі вихідних статистичних даних отримано безрозмірні часові ряди, значення рівнів яких обчислені: для обсягу власного капіталу та обсягу позикового капіталу – за формулою (9), для чисельності персоналу – за формулою (10). Отримані часові ряди подано у табл. 2, їх динаміку зображено на рис. 1.

Для числового інтегрування моделі (1) використано метод Бундіша-Штера, що придатний для застосування до жорстких систем диференціальних рівнянь завдяки високій робастності. Для початкової умови обрано перші рівні безрозмірних часових рядів відповідних показників: $x_0 = s_1^x = 0.161$, $y_0 = s_1^y = 0.117$, $z_0 = s_1^z = 0.633$. Інтервал інтегрування $t \in [0; 20]$ відповідає реальному періоду 1996–2016 рр. Комп'ютерна реалізація розглянутих математичних методів і моделей виконана у середовищі Matchad 14. Результатом застосування методу повного перебору до моделі (1) з метою мінімізації похибки (3) відносно реальних даних у безрозмірному виді є такі значення параметрів моделі: $c_1 = 0.01$, $c_2 = 0.16$, $c_3 = 0.78$, $c_4 = 0.24$, $c_5 = 1.00$, $c_6 = 0.94$.

Таблиця 2

**БЕЗРОЗМІРНІ НОРМАЛІЗОВАНІ ПОКАЗНИКИ ДІЯЛЬНОСТІ
«ORASURE TECHNOLOGIES, INC.» ЗА 1996–2016 РР.**

Період	Безрозмірний обсяг власного капіталу	Безрозмірний обсяг позикового капіталу	Безрозмірна чисельність персоналу
рік	–	–	–
1996	0.117	0.161	0.633
1997	0.306	-0.185	0.838
1998	-0.494	0.208	0.358
1999	-0.682	0.231	0.342
2000	-0.871	-0.254	2.187
2001	-1.059	-0.278	2.422
2002	-1.247	-0.301	1.734
2003	1.436	-0.324	1.450
2004	1.624	-0.347	1.866
2005	1.812	-0.371	2.692
2006	2.001	0.394	2.692
2007	2.189	0.417	3.943
2008	-2.378	0.440	4.084
2009	-2.566	0.464	3.887
2010	-2.754	-0.487	2.646
2011	-2.943	0.510	4.703
2012	3.131	-0.533	4.857
2013	3.319	-0.557	4.256
2014	-3.508	0.580	5.077
2015	-3.696	0.603	5.269
2016	3.884	-0.626	5.237

Джерело: розрахунки авторів на основі[9]

З метою уточнення оптимальних значень параметрів моделі (1) проведено одну ітерацію модифікованого МНК, формалізованого у формулах (4)–(8). Обчислення були виконані з використанням таких значень параметрів оптимізаційного алгоритму: $\lambda = 0.01$ – константа демпфування; $h = 0.05$ – крок обчислення частинних похідних. Як ключові точки для критерію оптимізації (7) обрано всі точки локального екстремуму кожного з трьох безрозмірних часових рядів, наведених у табл. 2, а також їх початкові та кінцеві рівні. У результаті було отримано такі значення параметрів: $c_1 = 0.006$, $c_2 = 0.149$, $c_3 = 0.790$, $c_4 = 0.240$, $c_5 = 1.012$, $c_6 = 0.938$. Підстановкою наведених значень у систему (1) отримано комп'ютерну модель (20), що описує розвиток фірми OraSure Technologies у системі координат «позиковий капітал – власний капітал – чисельність персоналу»:

$$\begin{cases} \dot{z} = -0.006 \cdot z + 0.149 \cdot y + 0.493 \cdot x \cdot y \\ \dot{y} = 0.79 \cdot (y - z \cdot x) - 0.24 \cdot z + x \\ \dot{x} = 0.938 \cdot y - 1.012 \cdot x \end{cases} \quad (20)$$

Числовим інтегруванням системи диференціальних рівнянь (20) на часовому проміжку $t \in [0; 23]$ отримано апроксимацію реальної динаміки ключових показників діяльності фірми OraSure Technologies за 1996–2016 рр., а також її прогнозовану динаміку на 2017–2019 рр., графічне зображення яких наведено на рис. 1. Для порівняльного аналізу на рис. 1 також зображено динаміку безрозмірних часових рядів, наведених у табл. 2. Окрім того, на рис. 2 наведено фазові портрети системи (20), на основі яких можна виконати ґрунтовніший якісний аналіз моделі.

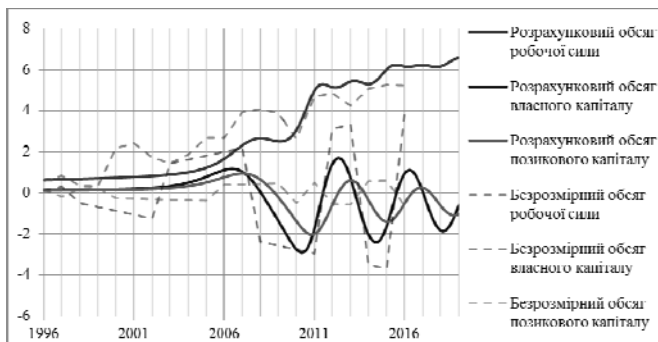


Рис. 1. Динаміка розрахункових і безрозмірних реальних показників розвитку OraSure Technologies за 1996–2019 рр.

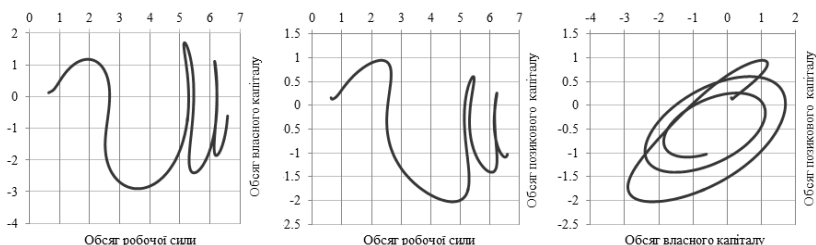


Рис. 2. Фазові портрети системи (20) на проміжку $t \in [0; 23]$

Як видно з рис. 1, модель (20) певною мірою відтворює реальну динаміку, але з певними застереженнями. По-перше, обчислені дані за 1996–2007 рр., що відповідає періоду становлення фірми, відображають плавний і повільний вихід економічного агента на належний йому рівень розвитку, тоді як реальні дані вказують на нестабільний і нерівномірний характер функціонування. По-друге, коливання обсягу позикового капіталу зміщені по фазі відносно коливань обсягу власного капіталу. По-третє, обчислена динаміка власного та позикового капіталу виражена у коливаннях зі спадною амплітудою, проте безрозмірні значення на основі реальних даних за 2014–2016 рр. свідчать, навпаки, про зростаючий характер коливань. Вказані відхилення обумовлені насамперед недосконалістю використаного підходу до оптимізації параметрів моделі (1). Втім, отримана комп'ютерна модель (20) відображає значний потенціал для дослідження на її підґрунті об'єкта моделювання, що і показано нижче.

У контексті проведення якісного аналізу у програмному середовищі Maple 15 було визначено особливі точки O_1 , O_2 , O_3 динамічної системи (1):

$$\begin{cases} O_1 = (0; 0; 0) \\ O_2 = \left(\frac{\omega - c_2 c_4 c_5}{c_2 c_3 c_5}, \frac{\omega - c_2 c_4 c_5}{c_2 c_3 c_6}, \frac{c_1 c_3 c_5 + c_1 c_6 - \omega}{c_1 c_3 c_6} \right) \\ O_3 = \left(\frac{-\omega - c_2 c_4 c_5}{c_2 c_3 c_5}, \frac{-\omega - c_2 c_4 c_5}{c_2 c_3 c_6}, \frac{c_1 c_3 c_5 + c_1 c_6 + \omega}{c_1 c_3 c_6} \right) \end{cases}, \quad (21)$$

де $\omega = \sqrt{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5^2 + c_1 c_2 c_4 c_5 c_6}$.

Підстановкою оптимальних значень параметрів у вираз (21) отримано стаціонарні точки системи (20):

$$\begin{cases} O_1 = (0; 0; 0) \\ O_2 = (-0.1407437634; -0.1518472159; -2.023896843). \\ O_3 = (-0.4668511732; -0.5036816496; 6.713324928) \end{cases} \quad (22)$$

Наведені особливі точки є важливою характеристикою системи (20), оскільки вони ділять координатний простір на частини, у кожній з яких траєкторії системи підпорядковуються певним чітко визначеним закономірностям розвитку, тобто мають певний тип динаміки. Для уточнення типу динаміки, який формується під впливом стаціонарних точок системи, визначається тип кожної з них. Алгоритм дослідження стаціонарних точок описаний, зокрема, у [10, с. 184–186]. Відповідно до згаданого алгоритму, для системи (20) потрібно визначити характеристичні числа матриці Якобі, обчисленої для кожної з особливих точок (22). Узагальнено матриця Якобі системи (20) записується у такому виді:

$$J = \begin{pmatrix} -1.012 & 0.938 & 0 \\ -0.79z + 1 & 0.79 & -0.79x - 0.24 \\ 0.49y & 0.49x + 0.149 & -0.006 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Характеристичне рівняння матриці (23), обчисленої в точці O_1 , має три дійсні корені (24). Згідно класифікації [10, с. 187], наведені характеристичні значення відповідають типу особливої точки «сідло другого порядку».

$$\begin{vmatrix} -1.012 - \lambda & 0.938 & 0 \\ 1 & 0.79 - \lambda & -0.24 \\ 0 & 0.149 & -0.006 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^{(1)} = 0.01518495442 \\ \lambda_2^{(1)} = 1.186642967 \\ \lambda_3^{(1)} = -1.429827922 \end{cases}. \quad (24)$$

У другій особливій точці O_2 матриця Якобі має три дійсних характеристичних значення (25), з яких одне додатне і два від'ємні, що відповідає типу «сідло першого порядку».

$$\begin{cases} \lambda_1^{(2)} = 1.688567310 \\ \lambda_2^{(2)} = -0.005577283884. \\ \lambda_3^{(2)} = -1.910990026 \end{cases} \quad (25)$$

Нарешті, у третій точці O_3 характеристичні значення (26) матриці Якобі відображені одним дійсним від'ємним числом і двома комплексними спряженими числами з від'ємними дійсними частинами, що визначає дану рівноважну точку як «стійкий вузло-фокус». В околі впливу названої особливої точки траєкторія розвитку тривимірної системи має ознаки «стійкого фокусу» у двох з координатних вимірів та ознаки «стійкого вузлу» – у третьому вимірі:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(3)} = -0.1048017877 + 1.798338659i \\ \lambda_2^{(3)} = -0.01839642467 \\ \lambda_3^{(3)} = -0.1048017877 - 1.798338659i \end{cases} \quad (26)$$

Для наочнішого представлення розглянутих особливих точок, а також їх впливу на динаміку системи (20) на рис. 3 наведено графік поля напрямків, що відображає напрям траєкторій системи у кожній точці координатного простору. З цього графіка видно, що у будь-якій точці, достатньо віддаленій від особливих точок за кожною з координат, траєкторія набуває одного й того ж виду: спіраль, що розкручується у вимірах y та z , повільно наближаючись до нуля у вимірі x . Згідно [10, с. 187], подібна динаміка формується під впливом рівноважної точки типу «сідло першого порядку», що відповідає особливій точці O_2 у розглядуваній системі.

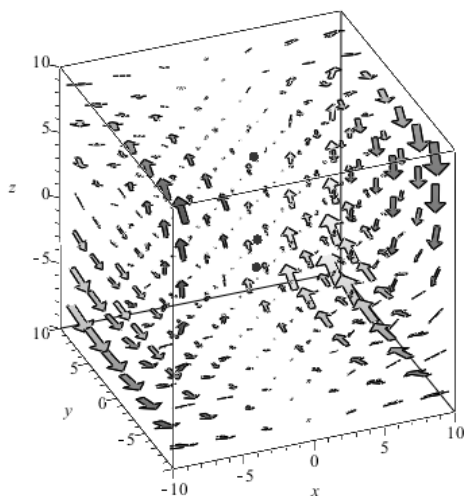


Рис. 3. Графік поля напрямків системи (20) у тривимірному просторі. Червоні точки відповідають особливим точкам системи

Таким чином, точка O_2 визначає глобальну динаміку системи (20), що спостерігається у будь-якій частині координатного простору, за винятком околу інших двох особливих точок. З економічної точки зору, названий тип динаміки означає накопичення власного капіталу (y) та збільшення персоналу (z) підприємства за рахунок активного споживання наявних кредитних засобів (x). Згідно [5, с. 124], згадана поведінка системи (1) співвідноситься з початковою стадією функціонування фірми, коли суб'єкт господарювання активно розширює обсяги виробництва і збуту, намагаючись зайняти якомога вигідніше місце на ринку.

З огляду на сказане, логічно припустити, що траєкторії, які описують функціонування економічно зрілої фірми, беруть свій початок саме в околі інших особливих точок – O_1 і O_3 . Проаналізувавши інтегральні криві і фазові портрети системи (20), зображені на рис. відповідно 1 і 2, можна помітити, що змодельована траєкторія розвитку OraSure Technologies на часовому проміжку $t \in [0, 13]$ переходить під безпосередній вплив рівноважної точки O_3 , набуваючи типу динаміки «стійкий вузло-фокус» і маючи вид спіралі, що закручується у вимірах x та y навколо координат

нат $\begin{cases} x = -0.467 \\ y = -0.504 \end{cases}$ і водночас прямує до $z = 6.713$. На жаль, сімейство

цих траєкторій не відображено на рис. 3 через великий масштаб графіку. Утім, цілком очевидно, що в системі (20) динаміка економічно зрілої фірми визначається саме особливою точкою O_3 , причому система може спочатку знаходитися під впливом іншої стаціонарної точки і характеризуватися іншим типом динаміки, але надалі зазнати біфуркації і перейти до «зрілого» режиму функціонування. Ці міркування співпадають з висновками кількісного аналізу системи (1) у [5, с. 1124].

Згадана стадія «економічної зрілості» фірми, що описується третьою особливою точкою, не передбачає однозначно успішного функціонування економічного суб'єкта. Навпаки, ця стадія може виражатися як у поступовому економічному зростанні, так і спаді. У випадку з особливою точкою типу «стійкий вузло-фокус» спостерігається затухання коливань обсягів власного і позикового капіталу та фіксація чисельності персоналу, що згідно економічної інтерпретації моделі (1) означає саме економічний спад (фінансовий крах). Для формування ж динаміки економічного зростання ця особлива точка має бути нестійкою. Як уже

було наголошено, система (20) не зовсім точно відтворює реальну (безрозмірну) динаміку фірми OraSure Technologies, і однією з відмінностей змодельованої динаміки є саме затухаючі, а не зростаючі коливання змінних x та y .

Отже, результати комп'ютерного моделювання розвитку фірми OraSure Technologies вказують на перспективу економічного занепаду. Але враховуючи неточність використаного алгоритму оптимізації параметрів моделі (1) та відповідні наслідки отриманої похибки моделювання, доцільно стверджувати, що реальна динаміка розвитку розглядуваного економічного суб'єкта відповідає типу, який описує поступове економічне зростання – збільшення обсягу власного капіталу та чисельності персоналу.

Висновки. Використання розглянутого двох етапного алгоритму оптимізації забезпечує автоматизований пошук параметрів динамічної моделі розвитку фірми в координатах «власний капітал – позиковий капітал – персонал» у контексті відтворення цільової динаміки. Маючи суттєві з точки зору трудомісткості переваги над ручним налаштуванням параметрів моделі, цей підхід має і ряд недоліків, зокрема, великий обсяг обчислень при неабсолютній точності результатів, а також неврахування якісного стану реального об'єкта, що зумовлює потребу у подальшому вдосконаленні математично-програмного інструментарію оптимізації динамічних нелінійних моделей.

Список літератури

1. Орлова Е. В. Управление хаотической динамикой цен в модели ценовой конкуренции // *Автоматика и телемеханика*. – М.: НАУКА, 2017. – №1. – С. 19–34.
2. Аганин Ю. И. Оптимальное управление в динамических моделях монополии // *Вестник ГУУ*. – 2016. – №3. – С. 190–194.
3. Lazzati, N., Menichini, A. A. A Dynamic Model of the Firm // *Structural Explanations of Key Empirical Findings // Financial Review*. 2015. – Vol. 50. – N.3 – P. 341–361.
4. Gianni De Nicolò, Andrea Gamba, Marcella Lucchetta. Microprudential Regulation in a Dynamic Model of Banking // *The Review of Financial Studies*. – 2014. – Vol. 27. – No. 7. – P. 2097–2138.
5. Рожок Т. О. Моделювання динаміки функціонування фірми в умовах ринкової економіки // *Глобальні та національні проблеми економіки*, 2015. – № 5. – С. 1123–1128.
6. Buss, Samuel R., and Kim, Jin-Su. Selectively Damped Least Squares for Inverse Kinematics // *In Journal of Graphics Tools*. – 2015. – Vol. 10. – No. 3. – P. 37–49.

7. Витлинский В. В., Коляда Ю. В. Адаптация и регуляризация как способы снижения риска в моделировании нелинейных экономических процессов // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: тр. междунар. науч. школы МАБР, (Санкт-Петербург, 22–25 июня 2004 г.). Санкт-Петербург: ГОУВПО «СПбГУАП», 2004. – С. 265–267.

8. OraSure Technologies, Inc. URL: <http://www.orasure.com/> (Last accessed: 27.06.2017)

9. U. S. Securities and Exchange Commission. URL: <http://www.sec.gov/> (Last accessed: 27.06.2017)

10. Коляда Ю. В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки: монографія. – К.: КНЕУ, 2011. – 297 с.

References

1. Orlova E. V. Upravlenye khaotycheskoj dynamikoj tsen v modeli tsenovoij konkurentsyy // Avtomatyka y telemekhanyka. – Moskva: NAUKA, 2017. – №1. – S. 19–34.

2. Ahanyan Yu. Y. Optymal'noe upravlenye v dynamycheskykh modeliakh monopoly // Vestnyk HUU. – 2016. – №3. – S. 190–194.

3. Lazzati, N., Menichini, A. A. A Dynamic Model of the Firm // Structural Explanations of Key Empirical Findings. Financial Review. 2015. – Vol. 50. – N.3 – P. 341–361.

4. Gianni De Nicolò, Andrea Gamba, Marcella Lucchetta. Microprudential Regulation in a Dynamic Model of Banking // The Review of Financial Studies. – 2014. – Vol. 27. – No. 7. – P. 2097–2138.

5. Rozhok T. O. Modeliuvannia dynamiky funktsionuvannia firmy v umovakh rynkovoij ekonomiky. Hlobal'ni ta natsional'ni problemy ekonomiky, 2015. – № 5. – S. 1123–1128.

6. Buss, Samuel R., and Kim, Jin-Su. Selectively Damped Least Squares for Inverse Kinematics // In Journal of Graphics Tools. – 2015. – Vol. 10. – No. 3. – P. 37–49.

7. Vytlynskyj V. V., Koliada Yu. V. Adaptatsiya y rehulyaryzatsiya kak sposoby snyzheniya ryska v modelyrovanny nelynejnykh ekonomycheskykh protsessov // Modelyrovanye y analiz bezopasnosti y ryska v slozhnykh systemakh: tr. mezhhdunar. nauch. shkoly MABR, (Sankt-Peterburh, 22–25 yiunia 2004 h.). Sankt-Peterburh: HOUVPO "SPbHUAP", 2004. – S. 265–267

8. OraSure Technologies, Inc. URL: <http://www.orasure.com/> (Last accessed: 27.06.2017)

9. U. S. Securities and Exchange Commission. URL: <http://www.sec.gov/> (Last accessed: 27.06.2017)

10. Koliada Yu. V. Adaptivna paradyhma modeliuvannia ekonomichnoi dynamiky: monohrafiia. – K.: KNEU, 2011. – 297 s.