

11. *Ширяева Л.В.* Методы и модели управления воспроизводством парков оборудования. Вероятностный подход. Монография / Л.В. Ширяева. — Одесса: Астропринт, 2008. — 256 с.

12. *Воевудский Е.Н.* Стохастические модели в проектировании и управлении деятельностью портов / Е.Н. Воевудский, М.Я. Постан. — М.: Транспорт, 1987. — 318 с.

13. *Постан М.Я.* Экономико-математические модели смешанных перевозок / М.Я. Постан. — Одесса: Астропринт, 2006. — 376 с.

14. *Магамадов А.Р.* Оптимизация оперативного планирования работы порта / А.Р. Магамадов. — М.: Транспорт, 1979. — 184 с.

15. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами / Ю.И. Рыжиков. — СПб.: Питер, 2001. — 384 с.

16. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

17. *Имекайте Д.* Техничко-економический анализ транспортной системы порта / Д. Имекайте.: Пер. с англ. — М.: Транспорт, 1985. — 206 с.

18. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. Краткий курс / Ю.А. Розанов. — М.: Наука, 1972. — 367 с.

19. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, перераб. и доп. / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. — М.: КомКнига, 2005. — 355 с.

Стаття надійшла до редакції 18.10.2012 р.

**УДК 519.847**

*Л.В. Івашенко,*  
*Л.Г. Тарасова,* доцент,  
канд. фіз.-мат. наук,  
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

### **ДЕЯКІ ПИТАННЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ У КЕШ-МЕНЕДЖМЕНТІ БАНКОМАТНОЇ МЕРЕЖІ**

**АНОТАЦІЯ.** У статті розроблено математичну модель управління залишком готівкових коштів у банкоматі з використанням теорії управління запасами

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** банкомат, модель керування запасами Уілсона, багато продуктова статична детермінована модель, буферний запас

**АННОТАЦИЯ:** В статье разработана математическая модель управления остатками наличных денежных средств в банкомате с использованием теории управления запасами.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** банкомат, модель управления запасами Уилсона, многопродуктовая статическая детерминированная модель, буферный запас

**ANNOTATION:** The ATM cash management mathematic model, that used statements of the inventory theory is developed in this article.

**KEY WORDS:** ATM, Wilson's inventory management model, multiproduct static determinated model, buffer stock.

**Постановка проблеми.** В сучасних умовах банкомати є унікальним каналом взаємодії між фінансовою установою та її клієнтами та основним каналом отримання готівкових коштів для держателів платіжних карток. Відсутність коштів і несвоєчасне підкріплення кас банкоматів готівкою є серйозною проблемою для банків. Простій банкомата внаслідок відсутності коштів призводить до втрат прибутку (комісія за отримання готівки) і виникнення іміджевих ризиків. З іншого боку, до невиправданих витрат призводить зберігання у касах банкоматів надлишкових сум готівки. Таким чином, існує потреба у розробці обґрунтованого, формалізованого підходу до управління потоками готівкових грошових коштів, які завантажуються у каси банкоматів для забезпечення прибуткової роботи і задоволення вимог клієнтів, а також планування в умовах впливу факторів ринкового середовища.

**Аналіз останніх джерел і публікацій.** Проблематика дослідження у контексті визначення оптимального управління готівковими грошовими потоками, які спрямовуються у банкоматну мережу висвітлювалася у публікаціях С.А. Немешаєв, В.В. Климова, Н. Васіна, Д.В. Пастухова, В.Д. Іушиної, Р. Сімутіса та ін.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Для багатьох клієнтів доступність банкоматів є одним із вирішальних критеріїв при виборі банку для обслуговування. Так, дослідження, проведене у Великобританії у 2007 році, засвідчило, що для 38 % респондентів мотивом для відкриття рахунку у іншому банку є розгалуженість і доступність його банкоматної мережі [1]. Нещодавнє дослідження, проведене Dieringer Research Group на замовлення Cardtronics, засвідчило, що у США для 74 % респондентів наявність зручно розташованих банкоматів є важливим при виборі банку для відкриття рахунку [2]. Очевидно, що не лише наявність банкоматів, а і наявність у них готівки є фактором, який впливає на лояльність клієнтів до банку, оскільки клієнт, який має дебетову, кредитну або іншу платіжну картку, хоче бути упевненим у можливості скористатися своїми гро-

шима у будь-який час. Клієнт, який постійно відчуває незручності при отриманні готівки з великою ймовірністю змінить свій обслуговуючий банк.

Сьогодні у практиці комерційних банків використовуються наступні підходи до вирішення питання забезпечення оптимального завантаження готівкою своїх банкоматів:

- інтуїтивний підхід;
- шляхом використання програмних рішень для cash-management;
- шляхом використання певної внутрішньої методики (яка базується на практиці діяльності банку).

Використання інтуїтивного підходу на практиці дає прийнятні результати, проте такий підхід є досить трудоемким і пов'язаний з кадровими ризиками. Використання програмних продуктів, які пропонуються банкам для оптимізації процесів управління підкріпленням банкоматів готівковими коштами, пов'язане зі значними матеріальними витратами, у той час як їх ефективність доведена лише для крупних банкоматних мереж (від 100 банкоматів) [3, с. 27]. У той же час, власні банкоматні мережі 75 % українських банків значно скромніші і налічують не більше 50 одиниць.

Застосування певної методики, випробуваної на практиці часто є формалізацією інтуїтивного підходу і не враховує невизначеності процесу використання банкомату як пристрою масового обслуговування [4].

У той же час сучасна наука здатна запропонувати ефективну і науково обґрунтовану методику, яку банк може реалізувати на практиці і застосовувати у процесі організації забезпечення банкоматів готівкою.

Для успішного вирішення задачі управління потоками готівкових коштів, які спрямовуються у банкоматну мережу для виплати держателям платіжних карток, необхідно відповісти на наступні питання: Де (буде потрібна готівка)? Коли? Скільки? При цьому необхідно враховувати, що знерухомлення великих сум готівки на тривалий час з метою уникнення надмірно частих операцій з інкасації є апіорі економічно не вигідним, так само як і щоденні інкасації, особливо віддалених від головного офісу банку точок обслуговування [5, с. 181].

Для забезпечення видачі готівки клієнтам до каси банкомата завантажується певний обсяг готівки. Протягом деякого періоду часу залишок готівки у банкоматі, по мірі надходження вимог (клієнтів) до банкомата і їх виконання, зменшується. Для забезпечення виконання вимог клієнтів і надалі та підтримання певно-

го рівня обслуговування, банк періодично здійснює поповнення (підкріплення) каси банкомата готівкою — відбувається процес інкасації. Рішення про необхідність інкасації приймається відповідальною особою банку за настання однієї з наступних умов:

— готівка у банкоматі закінчилася або її залишок зменшився до деякого критичного рівня;

— з моменту попередньої інкасації пройшов певний, визначений внутрішнім і документами банку проміжок часу — тобто інкасація може здійснюватися навіть якщо критичний залишок коштів ще не досягнутий.

У процесі інкасації здійснюються наступні операції:

1) касети із залишком коштів повністю вивантажуються з банкомата;

2) до банкомата завантажуються касети з новим «запасом» коштів;

3) вивантажений залишок коштів направляється до каси банку, перераховується і оприбутковується.

Особливо звернемо увагу на те, що, на відміну від поповнення інших товарно-матеріальних запасів, поповнення банкомата готівкою здійснюється виключно шляхом повної заміни наявних у ньому касет з залишками готівкових коштів на нові касети з новим запасом коштів, що обумовлено технічними особливостями банкомата (його улаштуванням), а також вимогами чинної нормативної бази Національного банку України [6].

Графічно процес зменшення залишку коштів і наступної за ним інкасації можна зобразити наступним чином (рис. 1).

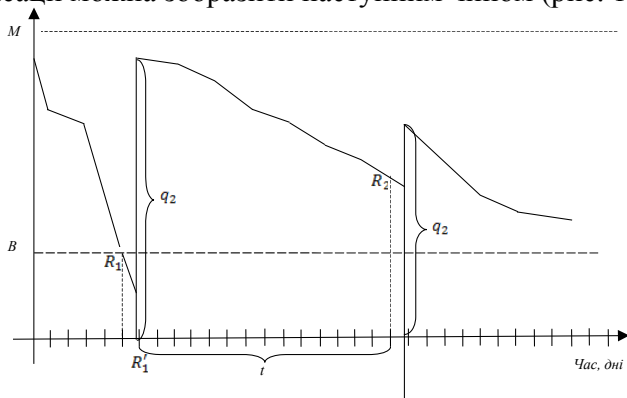


Рис. 1. Графік зміни залишків готівкових коштів у банкоматі  
 $M$  — ліміт (максимальний) каси банкомата;  
 $B$  — критичний залишок коштів, при досягненні якого здійснюється інкасація;

$R_1, R_2$  — точки замовлення;

$t$  — критичний час — певна кількість днів роботи банкомата, протягом якої не здійснювалась інкасація. При досягненні цього параметра інкасація може (повинна — залежно від регламенту банку) здійснюватися не залежно від залишку коштів у касетах банкомата;

$q_1, q_2$  — сума підкріплення каси банкомата (розмір партії);

$R'_1, R'_2$  — моменти інкасації.

Розглядаючи готівкові кошти, які знаходяться у касі банкомата, як «запас», для дослідження процесів управління потоками готівкових коштів у банкоматній мережі комерційного банку можна застосувати модель однопродуктову статичну детерміновану модель управління запасами (модель Уілсона) [7].

Тоді обсяг суми підкріплення готівкою, з урахуванням вищепописаних особливостей функціонування банкомата, визначатиметься за формулою:

$$y = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} + B,$$

де  $\beta$  — інтенсивність видачі клієнтам готівкових коштів через банкомат за одиницю часу,  $K$  — витрати на створення запасу готівкових коштів (не залежать від розміру партії),  $h$  — витрати на зберігання одиниці грошових коштів у касі банкомата за одиницю часу,  $B$  — буферний запас.

Застосування даної моделі вимагає розрахунку обсягів оптимальної суми підкріплення готівкою для кожного окремого банкомата. Проте, більшість українських банків мають власні банкомати (131 із 144 банків-членів платіжних систем), при цьому банкоматні мережі 128 з них складаються більше ніж з одного банкомата [8]. Відомо, що інтенсивність видачі готівкових коштів (попиту на готівку) є різною у різних банкоматах [с. 56, 9], залишки готівкових коштів у різних банкоматах можна вважати різними продуктами. Тоді, для визначення ключових параметрів функціонування банкоматної мережі (суми підкріплення банкоматів готівкою, суми витрат управління залишками готівкових коштів у банкоматах, тощо) пропонується застосувати модель пропонується застосувати багато продуктову статичну детерміновану модель теорії управління запасами.

*Економічна постановка задачі.* Банкоматна мережа деякого комерційного банку складається з  $m$  одиниць банкоматів. Необхідно знайти такі оптимальні суми підкріплення кас банкоматів

готівкою, за яких загальні витрати управління залишками готівкових коштів у банкоматах будуть мінімальними.

*Математична постановка задачі.* Для побудови математичної моделі використаємо наступні позначення:  $y_i$  — обсяг суми підкріплення готівкою каси  $i$ -того банкомата (розмір партії),  $\tau_i$  — цикл використання залишків готівки в  $i$ -тому банкоматі (час, протягом якого готівка видається клієнтам),  $\beta_i$  — інтенсивність видачі готівки клієнтам у  $i$ -тому банкоматі за одиницю часу,  $K_i$  — витрати на підкріплення готівкою  $i$ -того банкомата (не залежать від суми підкріплення банкомата готівкою),  $h_i$  — витрати на зберігання одиниці залишків готівкових коштів у  $i$ -тому банкоматі за одиницю часу (відсотки на капітал, вартість страхування готівки тощо).

Позначимо загальні витрати управління залишками готівкових коштів у  $i$ -тому банкоматі за одиницю часу  $L_i(y_i)$ . У даній моделі витрати управління залишками готівкових коштів у  $i$ -тому банкоматі за одиницю часу складаються з витрат на інкасацію та втраченого прибутку у результаті знерухомилення готівки у касі банкомата. Математично це можна записати наступним чином:

$$L_i(y_i) = \frac{K_i \beta_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}.$$

Оскільки мова йде про банкомату мережу в цілому, загальні витрати управління усіма запасами мережі складатимуть:

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^m L_i(y_i) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{K_i \beta_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2} \right) \rightarrow \min.$$

У результаті отримуємо оптимізаційну математичну модель на безумовний екстремум. Використовуючи класичний метод оптимізації, одержимо наступний розв'язок для моделі:

$$\begin{aligned} \frac{dL_i(y_i)}{dy_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{dL_i(y_i)}{dy_i} &= -\frac{K_i \beta_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2}. \end{aligned}$$

З рівняння

$$\frac{K_i \beta_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} = 0$$

маємо

$$\frac{K_i \beta_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2},$$

звідки

$$y_i = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i}}.$$

Враховуючи особливості функціонування банкомата:

$$y_i = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i}} + B_i,$$

де  $B_i$  — буферний запас  $i$ -того для банкомата.

Якщо банкоматна мережа банку налічує досить велику кількість банкоматів, застосування такої моделі може здатися трудомістким. Для оптимізації вищенаведеного методу в умовах розгалуженої банкоматної мережі, пропонується розглядати не кожен окремий банкомат, а групи банкоматів (кластери), які характеризуються подібністю, наприклад, інтенсивністю попиту на готівку. При цьому описаний вище метод пропонується розробляти і застосовувати для кожного окремого кластера.

Банкоматна мережа перебуває під впливом багатьох факторів. Це викликає коливання величини параметрів системи, які у результаті стають випадковими величинами. Як відомо, в моделях управління запасами найбільш значущим параметром є величина попиту. Розглянемо попит на готівку у банкоматній мережі (інтенсивність видачі готівкових коштів) як стаціонарну випадкову величину  $v$  з математичним сподіванням  $\nu$  і скінченною дисперсією. Щоб уникнути (мінімізувати ймовірність виникнення) дефіциту готівки у банкоматній мережі при випадкових коливаннях попиту, банку необхідно завантажувати у кожен банкомат суму готівки, яка включає у себе деякий буферний запас ( $B$ ). Для забезпечення безперебійної роботи банкомата ймовірність того, що за період часу між двома інкасаціями попит перевищить

$(y + B)$  — коефіцієнт ризику  $(r)$  — повинна бути максимально наближеною до нуля. На практиці, як правило, вимагається,  $r$  дорівнював 0,1; 0,05 або 0,01.

Тоді

$$r = P(v \geq y + B) = \int_{y+B}^{\infty} f(v) dv,$$

де  $f(v)$  — щільність розподілу випадкової величини попиту.

Оскільки, як зазначалося вище, дослідження показують, що розподіл попиту на готівку у різних банкоматах відрізняється, для коректного визначення обсягу буферного запасу застосовується наступний метод [с. 146, 10]:

1) висувається гіпотеза про закон розподілу випадкової величини попиту;

2) гіпотеза перевіряється за критерієм Пірсона;

3) залежно від закону розподілу, яким характеризується попит на готівку у банкоматі, визначається обсяг буферного запасу.

Якщо попит на готівку у банкоматі характеризується нормальним законом розподілу, тоді задача визначення оптимального страхового запасу формулюватиметься наступним чином: за заданим значенням коефіцієнта ризику  $r$  знайти таке значення  $u_r$ , для якого виконується наступна умова:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_r}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = p,$$

де  $u = \frac{v - \bar{v}}{\sigma}$ ,  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2 f_i}{\sum_{i=1}^N f_i}}$ ,  $f_i$  — частота, з якою спостерігається величина попиту  $v_i$ ,  $N$  — кількість спостережень.

Значення  $u_r$  знаходиться за таблицями нормального розподілу. Оскільки ризик існуватиме, то  $v = \bar{v} + B$ . Враховуючи, що

$u_r = \frac{v - \bar{v}}{\sigma}$ , страховий запас повинен бути як мінімум  $v - \bar{v} = B$ , отже  $B = u_r \sigma$ .

Так як для розподілу Пуассона функція щільності ймовірності має вигляд

$$f(v) = \frac{\bar{v}^v}{v!} e^{-\bar{v}},$$

величина страхового запасу буде знаходитися за формулою:

$$B = u_r \sqrt{v}.$$

Для експоненціального (показникового) розподілу з функцією щільності ймовірності

$$f(v) = \frac{1}{v} e^{-\frac{\bar{v}}{v}},$$

страховий запас

$$B = -\bar{v}(\ln r + 1) = -\bar{v} \left( \frac{\ln r}{\lg e} + 1 \right).$$

**Висновки з проведеного дослідження.** У статті запропоновано науково-обґрунтовану методику із застосуванням математичного моделювання, яка дозволяє фінансовим установам з банкоматними мережами які налічують до 100 одиниць банкоматів визначати необхідні для забезпечення надійної роботи мережі параметри, такі як сума оптимального підкріплення кас банкоматів готівкою та обсяги буферних запасів. Запропонована методика не вимагає здійснення банком додаткових витрат на придбання та імплементацію спеціалізованого програмного забезпечення, всі розрахунки здійснюються з використанням систем комп'ютерної алгебри (програмних продуктів для символьних обчислень) та спеціалізованих засобів прогнозування, інтегрованих у середовище стандартного застосування для роботи з електронними таблицями.

### **Література**

1. *Wright, T.* Software is key to managing the currency supply chain. [Електронний ресурс] Режим доступу: [www.transoftinc.com](http://www.transoftinc.com).
2. *D. Dove* Tied to Cash: The Future of ATMs [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://www.bai.org/bankingstrategies/distribution-channels/atm/tied-to-cash-the-future-of-atms>.
3. *Абдукадиров Т.* SmartVista Cash Management: управление наличными денежными средствами в банкоматной сети. — Журнал ПЛАС №5(169). — 2011. — С. 27.

4. *Енська О.О.* Імітаційне моделювання ефективного обслуговування банкоматів та їх оптимального розміщення. [Електронний ресурс] Режим доступу: <http://dspace.uabs.edu.ua/handle/123456789/3820>.

5. *Іващенко Л.В.* Моделювання процесу підкріплення банкоматів готівковими коштомат // Збірник наукових праць «Моделювання та інформаційні системи в економіці». — К., 2011. — №85. — С. 181.

6. Інструкція про ведення касових операцій банками України: Затверджено постановою Національного банку України від 01.06.2011. №174 [Електронний ресурс] Режим доступу: <http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/z0790-11>.

7. Система оценки эффективности инкассаций Б.А. Щукин, В.В. Климов, В.М. Бакланов, И.В. Беклемишев, Б.А. Щукин. — Материалы 13 международной телекоммуникационной конференции молодых ученых и студентов «Молодежь и наука». [Електронний ресурс] Режим доступу:

[http://www.mephi.ru/molod/molod\\_2009/docs.php?SECTION\\_ID=1305](http://www.mephi.ru/molod/molod_2009/docs.php?SECTION_ID=1305)

8. Національний банк України (офіційний ресурс) Режим доступу: [http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat\\_id=79219](http://www.bank.gov.ua/control/uk/publish/category?cat_id=79219).

9. *Васин Н.С.* Теоретико-вероятностный анализ и прогнозирование сроков подкрепления банкоматов наличностью // Финансы и кредит. — 2005. — №27. — С. 55—57.

10. Экономико-математические методы и модели под ред. Кузнецова А.В. — Минск: БГЭУ, 2000. — С. 146.

Стаття надійшла до редакції 11.12.2012 р.

**УДК 330.115+519.89**

**К. Семашко**, аспірант, асистент,  
кафедра економіко-математичного моделювання,  
ДВНЗ «Київський національний економічний  
університет імені Вадима Гетьмана»

## **АДАПТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБСЯГІВ ТІНЬОВОЇ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ**

**АНОТАЦІЯ.** Розглянуто кілька математичних моделей, які описують взаємозв'язок легальної та тіньової економіки України. За допомогою якісного і кількісного аналізу динамічних моделей побудовано інтегральні криві та фазові портрети, що дають змогу дослідити можливі варіанти розвитку подій.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** тіньова економіка (ТЕ), легальна економіка (ЛЕ), адаптація динамічних процесів, математична модель (ММ).