Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2011, №3(106)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАРКОВСЬКИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю. В. Шушарін

Резюме. Знайдені необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язків системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, які залежать від скінченого Марковського випадкового процесу. Для виводу умов стійкості використані квадратичні функції Ляпунова.

1. Розглядається система лінійних диференціальних рівнянь

$$dX(t) = A(\zeta(t))X(t)dt + A(\zeta(t))X(t)dw(t), \quad x(t) \in R^m, \tag{1}$$

де $\zeta(t)$ — скінченнозначний Марковський процес, що приймає значення $\zeta_k,\ k = 1, ..., n$, з ймовірностями

$$P_k(t) = P[\zeta(t) = \zeta_k], \quad k = 1, ..., n.$$

Припустимо, що ймовірності $P_k(t), k = 1, ..., n$, задовольняють системі лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} P_k(t), \quad k = 1, ..., n, \tag{2}$$

де сталі коефіцієнти $a_{ks},\ k, s = 1, ..., n$, задовольняють відомим умовам [1]

$$a_{ks} \geq 0, \quad k \neq s, \quad k, s = 1, ..., n, \quad a_{kk} \leq 0, \quad k = 1, ..., n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ks} = 0, \quad s = 1, ..., n. \tag{3}$$

У системі рівнянь (1) $w(t)$ — стандартний вінерівський випадковий процес, який задовольняє, зокрема, умовам

$$\langle w(t) \rangle \equiv 0,\ w(0) = 0,\ \langle w^2(t) \rangle = t,\ t > 0,\ \langle (dw(t))^2 \rangle = dt. \tag{4}$$

Символ $\langle \cdot \rangle$ означає операцію математичного сподівання.

Нульовий розв'язок $X(t) \equiv 0$ системи рівнянь (1) буде асимптотично стійким в середньому квадратичному, якщо для довільного розв'язку $X(t)$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{t \to +\infty} \langle \|X(t)\|^2 \rangle = 0. \tag{5}$$

Для цього необхідно і достатньо, щоб кореляційна матриця

$$D(t) = \langle X(t) X^*(t) \rangle$$

прямувала до нульової матриці при $t \to +\infty$.

Очевидно, що для асимптотично стійкої в середньому квадратичному системи рівнянь (1) для будь-якого розв'язку $X(t)$ системи достатньо збіжності невласного інтегралу

$$I = \int_0^\infty \langle \|X(t)\|^2 \rangle dt. \tag{6}$$

Символом $\|X(t)\|$ позначається евклідова норма вектора X, тобто $\|X(t)\|^2 = X^* X$. Тут і далі $(^*)$ означає транспонування вектора або матриці.

Якщо B — симетрична матриця $B = B^*$ додатньо визначеної квадратичної форми

$$w(X) = X^* B X > 0, \quad X \neq 0,$$

то запишемо це символічною нерівністю $B > 0$.

2. Введемо додатньо визначену квадратичну форму

$$w(x, \zeta(t)) = X^* B(\zeta(t)) X, \quad B(\zeta(t)) > 0, \tag{7}$$

яка задовольняє умовам

$$\lambda_1 \|X\|^2 \le w(X, \zeta_k) \le \lambda_2 \|X\|^2, \quad \lambda_2 \ge \lambda_1 > 0, \quad k = 1, .., n.$$

Введемо функцію Ляпунова для системи лінійних диференціальних рівнянь (1) за формулою

$$v(t, X, \zeta) = \int_t^{+\infty} \langle w(X(y), \zeta(y)) | X(t) = X, \zeta(t) = \zeta \rangle dy. \tag{8}$$

Символ $\langle \cdot | \cdot \rangle$ означає умовне математичне сподівання. При обчисленні інтеграла (8) беруться лише ті розв'язки $X(t)$ системи рівнянь (1), які при фіксованому значенні t перетворюються в фіксований вектор X і при цьому $\zeta(t) = \zeta$, де ζ — фіксоване значення.

Для асимптотично стійкого в середньому квадратичному розв'язку $X(t)$ системи рівнянь (1) невласний інтеграл в формулі (8) збігається. Для спрощення запису введемо частинні значення функції Ляпунова (8)

$$v_s(t, X) = \int_t^{+\infty} \langle w(X(y), \zeta(y)) | X(t) = X, \zeta(t) = \zeta_s \rangle dy, \quad s = 1, ..., n. \tag{9}$$

Знаючи функції $v_s(t, X)$ можна знайти значення функції $v(t, X, \zeta)$ з (8). Нехай $f(t, X, \zeta)$ — щільність розподілу випадкових величин X, ζ. Оскільки ζ — дискретна випадкова величина, що приймає значення ζ_k, $k = 1, ..., n$, то можна записати

$$f(t, X, \zeta) = \sum_{s=1}^{n} f_s(t, X) \delta(\zeta - \zeta_s), \tag{10}$$

де $\delta(t)$ — узагальнена функція Дірака. Відомо, що функція Дірака $\delta(t)$ задовольняє умовам

$$\delta(t) \equiv 0, \quad t \neq 0; \quad \delta(0) = +\infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Для неперервної функції $\varphi(t)$ маємо рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0)dt = \varphi(t_0).$$

Функції $f_s(t,X)$, $s = 1,...,n$, називаються частинними щільностями розподілу. Якщо позначимо через E_m простір змінних $(x_1,...,x_m) = X^*$, то

$$\int\limits_{E_m}\!\!...\!\int f_s(t,X)dX = p_s(t), \quad dX \equiv dx_1...dx_m.$$

Значення функціоналу

$$v(t) = \int\limits_{t}^{+\infty} \langle w(X(y),\zeta(y))\rangle \, dy$$

можна знайти за формулою

$$v(t) = \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{E_m}\!\!...\!\int v_s(t,X)f_s(t,X)dX. \tag{11}$$

Для системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь (1) буде справедлива така теорема.

Теорема 1. [1] *Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь (1) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб збігались невласні інтеграли $v_s(t,X)$ (9).*

Для систем нестаціонарних диференціальних рівнянь вигляду

$$dX(t) = A(t,\zeta(t))X(t)dt + H(t,\zeta(t))X(t)dw(t) \tag{12}$$

введемо нове поняття стійкості розв'язку.

Означення 1. Нульовий розв'язок системи (12) називається L_2-стійким, якщо для будь-якого частинного розв'язку $X(t)$ системи (12) збігається невласний інтеграл

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \left\langle \|X(t)\|^2 \right\rangle dt < \infty. \tag{13}$$

Для дослідження L_2-стійкості можна ввести функції Ляпунова $v_s(t,X)$, $s = 1,...,n$, за формулами (9). Справедлива така теорема.

Теорема 2. [1] *Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (12) був* L_2*-стійким необхідна і достатня збіжність невласних інтегралів (9), які визначають частинні значення* $v_s(t, X)$, $s = 1, ..., n$, *функції Ляпунова* $v(t, X, \zeta)$ *(8).*

Введення L_2-стійкості дозволяє уникнути труднощів, пов'язаних з доведенням співвідношення (5), оскільки із збіжності інтегралів (9) не випливає виконання співвідношення (5) для нестаціонарної системи рівнянь (12).

3. Для того, щоб краще зрозуміти наступні результати, розглянемо спочатку асимптотичну стійкість в середньому квадратичному розв'язків системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь [3]

$$dX(t) = AX(t)dt + HX(t)dw(t). \tag{14}$$

Введемо функцію Ляпунова

$$v(t, X) = \int_t^{+\infty} \langle w(X(y)) | X(t) = X \rangle \, dy, \tag{15}$$

де $w(X)$ — додатньо визначена квадратична форма

$$w(X) = X^* BX, \quad B > 0.$$

Оскільки $v(t, X)$ — квадратична форма від X, то можна показати, що

$$\int_t^{+\infty} \langle w(X(y)) | X(t) = X \rangle \, dy = X^* C(t) X, \ \ C > 0. \tag{16}$$

Також можна показати, що $C(t) = C = \mathrm{const}$, де матриця C — розв'язок матричного рівняння

$$B + CA + A^* C + H^* CH = 0. \tag{17}$$

Одержаний результат можна сформулювати так.

Теорема 3. [3] *Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь (14) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб матричне рівняння (17) для матриці* C *мало единий, додатньо визначений розв'язок* $C > 0$.

4. Розглянемо тепер асимптотичну стійкість в середньому квадратичному системи стохастичних диференціальних рівнянь (1).

Покладемо

$$\begin{aligned} v_s(t, x) = \int_t^{+\infty} \langle w(X(y), \zeta(y)) | X(t) = X, \, \zeta(t) = \zeta_s \rangle \, dy = \\ = X^*(t) C_s(t) X(t), \quad s = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{18}$$

Оскільки система рівнянь (1) не залежить явно від часу t, то матриці $C_s(t)$, $s = 1, ..., n$, не залежать явно від t, тобто $C_s(t) = C_s = \mathrm{const}$, $s = 1, ..., n$.

Надамо аргументу t приріст $\Delta t = h > 0$. Маємо рівності

$$v_s(t,X) = \int\limits_t^{t+h} \langle w(X(y),\zeta(y))|X(t)=X,\zeta(t)=\zeta_s\rangle\, dy +$$

$$+\int\limits_{t+h}^{+\infty} \langle w(X(y),\zeta(y))|X(t+h){=}X{+}A(\zeta_s)Xdt{+}H(\zeta_s)Xdw(t),\zeta(t+h){=}\zeta_s\rangle\, dy \equiv$$

$$\equiv X^* C_s(t) X, \quad s=1,...,n.$$

Щоб скоротити записи введемо позначення

$$A_s = A(\zeta_s), \quad B_s = B(\zeta_s), \quad C_s = C(\zeta_s), \quad H_s = H(\zeta_s), \quad s=1,...,n. \tag{19}$$

Одержимо систему рівнянь

$$v_s(t,X) = hw(X,\zeta_s) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} v_k(t+h, X + A_s X dt + H_s X dw(t), \zeta(t+h)), \quad s=1,...,n. \tag{20}$$

Для скінченного Марковського ланцюга виконуються рівності

$$P\{\zeta(t+h)=\zeta_k\} = hP\{\zeta(t)=\zeta_s\}a_{ks} + O(h^2), \quad k \neq s,$$

$$P\{\zeta(t+h)=\zeta_s\} = P\{\zeta(t)=\zeta_s\} + hP\{\zeta(t)=\zeta_s\}a_{ss} + O(h^2), \quad k = s.$$

Рівності (20) можна записати у вигляді

$$v_s(t,X) = hw(X,\zeta_s) + \langle v_s(t+h, X + A_s X h + H_s X dw(t))\rangle +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} h a_{ks} v_k(t+h, X) + O(h^2). \tag{21}$$

Використаємо позначення

$$v_s(t,X) = X^* C_s X, \quad w(X,\zeta_s) = X^* B_s X, \quad s=1,...,n,$$

і рівності

$$C_s(t+h) \equiv C_s = \text{const}, \quad s=1,...,n.$$

Як і в попередньому пункті будуть справедливі рівності

$$\langle v_s(t+h, X + A_s X h + H_s X dw(t))\rangle =$$

$$= \langle (X^* + X^* A_s^* h + X^* H_s^* dw(t)) C_s (X + A_s X h + H_s X dw(t))\rangle =$$

$$= X^* C_s X + X^* A_s C_s X h + X^* C_s A_s X h + X^* H_s^* C_s H_s X + o(h).$$

При цьому рівності (21) матимуть вигляд

$$v_s(t,X) = hw(X,\zeta_s) + X^* C_s X + hX_s^* C_s A_s X + hX^* A_s^* C_s X +$$

$$+X^* H_s^* C_s H_s X + h\sum_{k=1}^{n} a_{ks} X^* C_k X + o(h).$$

При $h \to 0$ приходимо до системи матричних рівнянь для симетричних матриць $C_s,\ s = 1, ..., n$,

$$C_s A_s + A_s^* C_s + \sum_{k=1}^{n} a_{ks} C_k + H_s^* C_s H_s + B_s = 0, \quad s = 1, ..., n. \tag{22}$$

Остаточно приходимо до такої основної теореми.

Теорема 4. *Для того, щоб система лінійних стохастичних диференціальних рівнянь (1) з коефіцієнтами, які залежать від скінченнозначного Марковського ланцюга, мала асимптотично стійкий нульовий розв'язок необхідно і достатньо, щоб система матричних рівнянь (22) при* $B_s > 0,\ s = 1, ..., n$, *мала єдиний розв'язок* $C_s > 0,\ s = 1, ..., n$.

Ця теорема узагальнює деякі результати роботи [3] на випадок випадкових коефіцієнтів, які залежать від скінченнозначного Марковського процесу.

Зауваження. Якщо коефіцієнти системи рівнянь (1) не залежать від вінерівського процесу $w(t)$, то одержимо вже відомий результат.

Теорема 5. [2] *Нехай коефіцієнти системи лінійних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))X(t) \tag{23}$$

залежать від скінченнозначного Марковського ланцюга $\zeta(t)$, *який приймає значення* ζ_k *з ймовірністю*

$$P_k(t) = P\{\zeta(t) = \zeta_k\}, \quad k = 1, ..., n,$$

яка задовольняє системі рівнянь (2).

Нульовий розв'язок системи рівнянь (23) асимптотично стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли система матричних рівнянь

$$B_s + C_s A_s + A_s^* C_s + \sum_{k=1}^{n} a_{ks} C_s = 0, \quad s = 1, ..., n, \tag{24}$$

при $B_s > 0,\ s = 1, ..., n$, *має розв'язок* $C_s > 0,\ s = 1, ..., n$.

Приклад. Дослідимо стійкість в середньому квадратичному розв'язків системи диференціальних рівнянь (23), де $\zeta(t)$ — випадковий Марковський процес, який приймає два значення ζ_1 та ζ_2 з ймовірностями

$$P_k(t) = P\{\zeta(t) = \zeta_k\}, \quad k = 1, 2,$$

що задовольняють системі рівнянь

$$\frac{dP_1}{dt} = -\lambda P_1 + \nu P_2,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \lambda P_1 + \nu P_2, \ \ \lambda > 0, \ \ \nu > 0.$$

Умови стійкості зведуться до виконання матричних нерівностей для матриць $C_1 > 0$ та $C_2 > 0$

$$C_1A_1 + A_1^*C_1 - \lambda C_1 + \lambda C_2 > 0,$$
$$C_2A_2 + A_2^*C_2 - \nu C_2 + \nu C_1 > 0.$$

5. Розглянемо стійкість розв'язку більш загальної ніж (1) системи рівнянь

$$dX(t) = A(\zeta(t))X(t)dt + \sum_{j=1}^{l} H_j(\zeta(t))X(t)dw_j(t), \tag{25}$$

де $w_j(t)$ — незалежні вінерівські стандартні випадкові процеси, $\zeta(t)$ — Марковський скінченнозначний випадковий процес, що приймає значення ζ_k, $k = 1, ..., n$.

Введемо позначення

$$H_{jk} = H_j(\zeta_k), \quad j = 1, ..., l, \quad k = 1, ..., n,$$

та прийдемо до теореми.

Теорема 6. *Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь (25) був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб система матричних рівнянь для симетричних матриць* C_s

$$C_sA_s + A_s^*C_s + \sum_{k=1}^{n} a_{ks}C_k + \sum_{j=1}^{l} H_{js}^*C_sH_{js} + B_s = 0, \quad s = 1, ..., n,$$

при $B_s > 0,\ s = 1, ..., n,$ *мала єдиний розв'язок* $C_s > 0,\ s = 1, ..., n.$

Література

1. Тихонов В. Н. Марковские процессы. /В. Н. Тихонов, М. А. Миронов. — М.: Наука, 1980. — 436 с.
2. Валеев К. Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. / К. Г. Валеев, О. Л. Карелова, В. Н. Горелов. — М.: Изд. РУДН, 1996. — 258 с.
3. Кореневский Д. Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах. / Д. Г. Кореневский. — Киев: Академпериодика, 2008. — 128 с.

Кафедра вищої математики, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, просп. Перемоги 54/1, м. Київ, 03068, Україна.

Надійшла 06.12.2011