

Додаткові джерела

5. Богатин Ю. В., Швандер В. А. Экономическое управление бизнесом: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 391 с.
6. Тарасюк Г. М. Бізнес-план: розробка, обґрунтування та аналіз. — К.: Каравела, 2008. — 280 с.
7. ЗАКОН УКРАЇНИ «Про банки і банківську діяльність».
8. Просветов Г. И. Бизнес-планирование: Задачи и решения. — М.: РДЛ, 2005. — 208 с.
9. Клоков И. Бизнес-план на компьютере: быстро и просто. — СПб.: Питер, 2007. — 176 с.
10. Общая теория кредитов и ее приложения к оценке бизнеса: Учебное пособие / Под ред. академика РАЕН А.Г. Перевозчикова и академика МПА С. А. Смирнова. — 2005. — 300 с.
11. Словари и энциклопедии на Академике: http://dic.academic.ru/dic.nsf/econ_dict/18967.
12. Вікіпедія: <http://ru.wikipedia.org/wiki/KievPrime>.

Стаття надійшла до редакції 20.06.2011 р.

УДК 519.21

С. І. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
КНУ ім. Тараса Шевченка,
О. І. Стадник, канд. фіз.-мат. наук, доц. КНУКиМ,
О. І. Бабинюк, асистент кафедри
вищої математики ФІСіТ,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ЗАДАЧА ВЫБОРУ НАЙКРАЩОГО ОБ'ЄКТА З ПОСЛІДОВНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ДОВЖИНИ

АНОТАЦІЯ. Розглянуто задачу оптимального вибору з послідовності випадкової довжини, яку було зведено до задачі оптимальної зупинки марківського процесу. Результат є узагальненням задачі вибору з послідовності фіксованої довжини, що є класичною задачею теорії ймовірностей, відомою, як «задача секретарки». Доведено, що достатньою умовою того, що структура множини моментів зупинки процесу перегляду така сама, як і для фіксованої довжини послідовності (тобто всі елементи, починаючи з деякого), є старіння розподілу довжини послідовності.

ANNOTATION. In this paper the problem of optimal choice from the random length sequence is considered, reduced to the problem of the Markov process optimal stop moment. The result is the generalization of the optimal choice from a fixed length sequence problem, also widely known as the «secretary problem». It was proved that the sufficient condition for the

structure of multiple stop moments of the watching through process to be the same as for the fixed length sequence (i.e. all elements starting from some), is an ageing of the sequence length distribution.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Марківські процеси, дискретний розподіл, момент оптимальної зупинки, стохастичні нерівності

Вступ

В [1] було розглянуто задачу вибору найкращого об'єкта, сформульовану таким чином. Нехай дехто у випадковому порядку знайомиться з n об'єктами і хоче вибрати серед них найкращий. При цьому після ознайомлення з черговим об'єктом потрібно або зупинити на ньому свій вибір, або відкинути його; повертатися до раніше переглянутих об'єктів не можна. Об'єкти є впорядкованими певним чином за якістю, тобто якості будь-яких двох об'єктів можна порівняти між собою. «Ознайомлення у випадковому порядку» означає, що спочатку всі $n!$ перестановок, які задають порядок перегляду об'єктів, рівноймовірні.

Об'єкт, найкращий серед усіх n надалі будемо називати *найкращим*, а об'єкт, кращий серед k переглянутих — *максимальним*. Очевидно, що в ході перегляду слід аналізувати доцільність зупинки вибору на деякому об'єкті, тільки якщо він є максимальним. При цьому виявляється, що перший об'єкт є максимальним та індекси максимальних об'єктів утворюють ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями

$$p(k, j) = \frac{k}{j(j-1)}, j > k.$$
 Більш того, незалежно від того, чи був k -й елемент максимальним чи ні, ймовірність того, що серед елементів з індексами $k+1, \dots, n$ мінімальний індекс максимального елемента

буде j , дорівнює $\frac{k}{j(j-1)}, j > k$ і з ймовірністю $\frac{k}{n}$ у послідовності $k+1, \dots, n$ не зустрінеться жодного максимального елемента.

Доведено, що для того, щоб вибрати найкращий об'єкт з n , потрібно дотримуватися такої стратегії: спочатку пропустити всі елементи з індексами $1, \dots, k^* - 1$ і потім зупинити свій вибір на першому максимальному елементі, індекс якого не менший k^* , де k^* визначається з подвійної нерівності

$$\frac{1}{k^*} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq 1 < \frac{1}{k^*-1} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

Виявляється, що при $n \rightarrow \infty$ $\frac{k}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$, а ймовірність вибору найкращого об'єкта при дотриманні описаної стратегії прямує до $1/e$.

При цьому в [1] було зазначено: припущення, що кількість об'єктів, які переглядаються, — це фіксована і відома заздалегідь величина, є штучним.

Припустимо, що кількість об'єктів є випадковою величиною, має заданий дискретний розподіл $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ та при відомій кількості елементів — усі перестановки $(a_1, \dots, a_n)$ є рівномірними. При цьому інформація про те, чи є деякий елемент останнім у послідовності, стає відомою тільки після того, як було прийнято рішення — зупинитися на ньому чи пропустити його та продовжити перегляд.

Оптимальну стратегію зупинки перегляду будемо шукати серед таких: зупинитись на першому максимальному елементі, індекс якого належить множині G (вид цієї множини з'ясовується у ході розв'язку задачі).

Надалі факт вибору найкращого елемента будемо називати успіхом.

Позначимо $\pi(k | \dots)$ умовну ймовірність успіху за умови, що елемент k , який проглядається, виявився максимальним і ще при деяких умовах, наприклад:

$\pi(k | k \in G)$ — ймовірність успіху за умови зупинки на k -му елементі;

$\pi(k | k \notin G, i \in G, i > k)$ — ймовірність зупинки за умови зупинки на наступному після k -го елементі.

Нехай послідовність $\{a_1, \dots, a_n\}$ має випадкову довжину, при цьому довжина послідовності задається цілочисельним розподілом $\{p_i\}_{i \geq 0}$ зі скінченим середнім значенням $\sum_{i=0}^{\infty} i p_i < \infty$.

Для множини індексів G визначимо функцію $f(G)$, яка дорівнює ймовірності успіху за умови зупинки на першому максимальному елементі, що належить множині G . Множину елементів Γ , для якої досягається максимум $f(G)$, тобто $\Gamma = \arg(\max(f(G)))$ назовемо опорною множиною.

Нехай був переглянутий k -й елемент, тоді кількість ще не переглянутих елементів має розподіл

$$\{p_i^k\}, \text{ де } p_i^k = \frac{p_{i-k}}{1 - \sum_{j=0}^k p_j}.$$

Нагадаємо, що дискретний розподіл називається старіючим, якщо

$$(\forall k) \left(\left\{ p_i^k \right\} \leq^{st} \left\{ p_i^{k+1} \right\} \right), \text{ тобто } (\forall j, k) \left(\sum_{i=0}^j p_i^{k+1} \geq \sum_{i=0}^j p_i^k \right).$$

Подальші міркування мають таку структуру:

1) Доводиться, що достатньою умовою того, що опорна множина має вигляд $\Gamma = \{k \mid k \geq k_*\}$ (всі елементи, починаючи з деякого), є старіння розподілу $\{p_i\}$.

2) Наводиться контрприклад, який показує, що в загальному випадку опорна множина не обов'язково має вигляд з п. 1.

3) Розглядаються частинні випадки старіючого дискретного розподілу. Для цих випадків знаходиться порогове значення k_* та досліджується його асимптотична гранична поведінка.

Нехай k -й елемент є максимальним. Назвемо індекс k псевдо-опорним, якщо $\pi(k \mid k \in G) \geq \pi(k \mid k \notin G, i \in G, i > k)$, тобто ймовірність успіху за умови зупинки на даному елементі не менша, ніж ймовірність успіху за умови зупинки на наступному максимальному елементі. Отже, для всіх псевдо-опорних елементів має виконуватись нерівність

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k}{k+i} p_i^k \geq \sum_{i=1}^{\infty} p_i^k \left(\sum_{j=1}^i p(k, k+j) \frac{k+j}{k+i} \right),$$

де $p(k, k+j) = \frac{k}{(k+j)(k+j-1)}$ — ймовірність того, що в послідовності $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$ найближчий максимальний елемент матиме індекс $k+j$. Звідси, умова належності елемента псевдо-опорній множині має вигляд:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i^k \frac{k}{k+i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k+j-1} \right) \geq 0. \quad (**)$$

Позначимо $\varphi(k, i) = \frac{k}{k+i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k+j-1} \right)$, а множину псевдо-опорних елементів позначимо через Γ' .

Лема 1. Якщо $\{p_i\}$ — старіючий розподіл, то множина псевдо-опорних елементів має вигляд $\Gamma' = \{k \mid k \geq k'\}$ (всі елементи, починаючи з деякого).

Доведення. Нехай $k \in \Gamma'$. Покажемо, що $k+1 \in \Gamma'$. Помітимо, що $\varphi(k, i)$ монотонно зростає по k та спадає по i , отже

$$k \in \Gamma' \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k \varphi(k, i) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k \varphi(k+1, i) \geq 0.$$

Оскільки $\{p_i\}$ — старіючий розподіл, то $\left(\{p_i^k\} \leq^{st} \{p_i^{k+1}\}\right)$.

Скористаємось відомою стохастичною нерівністю $\xi_1 \leq^{st} \xi_2$, — монотонно неспадна функція, $(M(\varphi(\xi_1)) \geq M(\varphi(\xi_2)))$, звідси

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i^{k+1} \varphi(k+1, i) \geq \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k \varphi(k, i) \geq 0, \text{ отже } k+1 \in \Gamma'.$$

Лема 2. Існує таке k , що всі $j \in \Gamma$ для $j \geq k$.

Доведення. Оскільки $\frac{k}{k+i}$ монотонно спадає по i , а $\{p_i^k\}$ — старіючий розподіл, то справедлива нерівність

$$\pi(k | k \in \Gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k \frac{k}{k+i} \geq \sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{k}{k+i}.$$

Оскільки при $k \rightarrow \infty$ $\sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{k}{k+i} \rightarrow 1$, то й $\pi(k | k \in G) \rightarrow 1$.

З іншого боку, $\pi(k | k \notin G)$ не перевищує ймовірності того, що в послідовності $k+1, k+2, \dots$ зустрінеться принаймні один максимальний елемент (до її обриву), отже

$$\pi(k | k \notin G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_i^k \left(1 - \frac{k}{k+i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^k \left(1 - \frac{k}{k+i}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{i}{k+i}.$$

Оскільки при $k \rightarrow \infty$ $\sum_{i=0}^{\infty} p_i \frac{i}{k+i} \rightarrow 0$, то й $\pi(k | k \notin G) \rightarrow 0$.

Лема 3. Якщо $\{p_i\}$ — старіючий розподіл, то $\Gamma = \Gamma'$ (множини опорних та псевдо-опорних елементів співпадають).

Доведення. З означення Γ, Γ' випливає, що $\Gamma \subset \Gamma'$. Дійсно, $k \in \Gamma \Rightarrow \pi(k | k \in G) \geq \max_{G}(\pi(k | k \notin G)) \geq \pi(k | k \notin G, i \in G, \forall i > k) \Rightarrow k \in \Gamma'$.

Нехай $\Gamma \neq \Gamma'$. Виберемо $k = \max(i | i \notin \Gamma)$ (в силу леми 2 таке k існує). Отже, $k \notin \Gamma$ і враховуючи структуру множин Γ, Γ' згідно лем 1, 2 та те, що $\Gamma \subset \Gamma'$ маємо, що $k \in \Gamma'$. Оскільки $k \in \Gamma'$, то

$$\pi(k | k \in G) \geq \pi(k | k \notin G, i \in G, \forall i > k) = \max_G (\pi(k | k \notin G)) \Rightarrow k \in \Gamma.$$

З отриманого протиріччя випливає, що $\Gamma = \Gamma'$.

Отже, у випадку старіючого розподілу кількості елементів, опорну множину слід шукати у вигляді $\Gamma = \{k | k \geq k_*\}$ (всі елементи, починаючи з деякого).

Контрприклад.

Нехай $n = \begin{cases} 100, \text{ з ймовірністю } 0,999 \\ 1000, \text{ з ймовірністю } 0,001 \end{cases}$

тоді $\Gamma = \{37, \dots, 100\} \cup \{368, \dots, 1000\}$.

Додаток

Знаходження оптимального моменту зупинки для випадку рівномірного та геометричного розподілів

1. Рівномірний розподіл. Нехай кількість елементів має рівномірний дискретний розподіл $p_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n}$. Тоді після перегляду k елементів залишкова кількість елементів має рівномірний дискретний розподіл $0, 1, \dots, n - k$ з імовірністю $\frac{1}{n - k + 1}$. Знайдемо таке k , починаючи з якого всі елементи належатимуть опорній множині, тобто $k \in \Gamma, k - 1 \notin \Gamma$, тоді нерівність (**) повинна виконуватись для k та не виконуватись для $k - 1$, тобто виконуються нерівності:

$$\frac{1}{n - k + 1} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{k}{k + i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k + j - 1} \right) \geq 0,$$

$$\frac{1}{n - k + 2} \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{k - 1}{k - 1 + i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k + j - 2} \right) < 0.$$

Нехай $n \rightarrow \infty$. Позначимо $\frac{k}{n} = \alpha$. Тоді при переході до границі в нерівностях матимемо рівність $\int_1^{1/\alpha} \frac{1 - \ln(t)}{t} dt = 0$, звідси $\alpha = \exp(-2)$, $k \sim e^{-2} n$.

При цьому ймовірність успіху прямує до $\frac{2e^{-2}}{1 - e^{-2}} \approx 0,313$.

2. Геометричний розподіл. Нехай $p_i = (1-q)q^{i-1}, i \geq 1$, тоді $p_i^k = (1-q)q^i, i \geq 0$. Тоді (**) набуває вигляду:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1-q)q^i \frac{k}{k+i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k+j-1} \right) \geq 0 \quad (***).$$

Зафіксуємо k , тоді співвідношення (***) виконується при $q \rightarrow 0$ та не виконується при $q \rightarrow 1$.

Оскільки геометричний розподіл стохастично зростає з ростом параметра q , то якщо $k \in \Gamma$ для деякого значення q_0 , то $k \in \Gamma$ і для всіх значень $q < q_0$. Тобто для кожного k існує порогове значення $q_0(k)$, таке, що (**) виконується при $q \leq q_0$ і не виконується при $q > q_0$.

Дослідимо асимптотичну поведінку порогового значення k при $q \rightarrow 1$.

Розв'яжемо рівняння $\sum_{i=0}^{\infty} (1-q)q^i \frac{k}{k+i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k+j-1} \right) = 0$ відносно параметра q .

Будемо шукати $q(k)$ у вигляді $q(k) = 1 - \frac{\alpha}{k}$, тоді

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (1-q)q^i \frac{k}{k+i} \left(1 - \sum_{j=1}^i \frac{1}{k+j-1} \right) &\sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k} q^i \frac{k}{k+i} \left(1 + \ln \left(\frac{k}{k+i} \right) \right) \sim, \\ &\sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right)^{\frac{i}{k}} \frac{1}{1+i/k} \left(1 + \ln \left(\frac{1}{1+i/k} \right) \right) \sim \\ &\sim \alpha \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) \frac{1}{1+t} (1 - \ln(1+t)) dt = g(\alpha) \end{aligned}$$

Цей вираз монотонно спадає по α та має єдиний корінь $\alpha_0 \approx 0,1691$,

$$\text{тобто } q(k) \sim 1 - 0,169 \frac{1}{k} \Rightarrow k_0 \sim 0,169 \frac{1}{1-q}.$$

Ймовірність успіху при дотриманні такої стратегії пошуку прямує до величини $p \sim \alpha_0 \int_0^{\infty} \exp(-\alpha_0 t) \frac{1}{1+t} dt \approx 0,273$.

Висновок. Отже доведено, що достатньою умовою того, що структура множини моментів зупинки процесу перегляду така сама,

як і для фіксованої довжини послідовності (тобто всі елементи, починаючи з деякого), є старіння розподілу довжини послідовності.

Література

1. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. — М.: Наука, 1967. — С. 91—102.
2. Гусейн-Заде С. М. Задача выбора и оптимальное правило останова последовательности независимых испытаний, ТВП, 11:3, — 1966. — С. 534—537.
3. Гусейн-Заде С. М. Разборчивая невеста, Серия: «Библиотека «Математическое просвещение»». — М.: МЦНМО, 2003. — 24 с.

Стаття надійшла до редакції 22.06.2011 р.

УДК 004:33

І. В. Мараховська аспірантка,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

СУЧАСНІ КОМЕРЦІЙНІ РІШЕННЯ З ПОДАТКОВОГО АДМІНІСТРУВАННЯ ДЛЯ ДЕРЖАВНИХ ПОДАТКОВИХ СЛУЖБ

АНОТАЦІЯ. Статтю присвячено огляду сучасних комерційних програмних продуктів з питань комплексного податкового адміністрування. Проведено аналіз рішень глобальних виробників програмного забезпечення, розглянуті основні функціональні можливості. Виявлено переваги й недоліки комерційних рішень на ринку інтегрованих податкових систем та у порівнянні з системами на вимогу. В результаті аналізу обрано рішення, яке може бути впроваджене в податковій службі України.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Комерційний програмний продукт, податкова сфера, податкова декларація, аудит, інформаційна система, податкове адміністрування.

АННОТАЦИЯ. Статья посвящена обзору современных коммерческих программных продуктов по вопросам комплексного налогового администрирования. В статье выполнен анализ решений глобальных производителей программного обеспечения, рассмотрены основные функции. Выявлены преимущества и недостатки коммерческих решений на рынке интегрированных налоговых систем и по сравнению с системами по требованию. В результате анализа было выбрано решение, которое может быть внедрено в налоговой службе Украины.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Коммерческий программный продукт, налоговая сфера, налоговая декларация, аудит, информационная система, налоговое администрирование.