

О.А. Сердюк, ст. викл. кафедри прикладної математики,
Черкаський національний університет
ім. Богдана Хмельницького

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ХВИЛЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ КРИТИЧНИХ ЯВИЩ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ

АНОТАЦІЯ. Описано методику побудови моделі затухаючих коливань для моделювання та прогнозування критичних явищ у складних фінансово-економічних системах. Наводяться результати застосування моделі до дослідження крахів на фондовому та валютному ринках. На основі розрахованих параметрів проведено оцінку кризи 2008—2009 рр.

АННОТАЦИЯ. Описана методика построения модели затухающих колебаний для моделирования и прогнозирования критических явлений в сложных финансово-экономических системах. Поданы результаты применения модели для исследования крахов на фондовом и валютном рынках. На основе рассчитанных параметров проведена оценка кризиса 2008—2009 гг.

ANNOTATION. The method of damped oscillation model construction for design and prognostication of the critical phenomena in the complex economic systems is described. The results of application of model for crashes research at fund and currency markets are given. On the basis of the expected parameters the estimation of 2008-2009 years crisis is conducted.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. складні системи, моделювання складних систем, критичні явища, передвісники критичних явищ.

Вступ

У динаміці розвитку чи функціонування складних систем (у загальному випадку нас цікавить лише структура системи, а не її природа), тобто систем з великою кількістю частин, що взаємодіють між собою, внаслідок властивості самоорганізації власної структури часто зустрічаються особливі точки, в яких траєкторія розвитку системи може неочікувано змінювати свій напрямок. Такі точки, що суттєво впливають на динаміку системи, називають критичними. Поява критичних точок, зокрема, може зумовлюватись змінами внутрішньої структури системи та міжкомпонентної взаємодії частин системи.

Останнім часом концепція складних систем інтенсивно використовується в економіці при дослідженні різноманітних еконо-

мічних об'єктів. Для таких систем у випадку, коли поява критичних точок зумовлюється ендегенними впливами, відповідні події називають крахами, а при екзогенних впливах — шоками. Великий інтерес викликають крахи, що є результатом перебування системи в кризовому стані. Оскільки кризовий стан системи зумовлений її внутрішніми змінами, то, враховуючи властивість самоорганізації складних систем, існує можливість досліджувати кризові явища та прогнозувати моменти крахів.

Для дослідження критичних явищ в економічних системах нарівні з загальновідомими статистичними та економетричними методами використовуються також методи, запозичені з інших напрямків. Для них часто в якості вхідних даних використовують часові ряди, що містять результати еволюції систем. Одним з методів, що використовується для аналізу складних економічних систем, є вейвлет-аналіз.

В роботі описано модель розвитку критичних явищ Д. Сорнета на основі аналізу логоперіодичних коливань часового ряду та запропоновану альтернативну модель на основі теорії коливань.

Модель, запропонована Д. Сорнетом

Особливістю розвитку криз у складних економічних системах є наявність логоперіодичних коливань, що була проаналізована Д. Сорнетом [1]. На основі аналізу передкризової поведінки Д. Сорнет у своїй роботі описує функцію, залежну від кількох параметрів (до 8), що апроксимує часовий ряд на досліджуваному інтервалі і дозволяє провести короткочасову екстраполяцію для прогнозування критичного явища. Розглянемо модель, побудовану Д. Сорнетом, детальніше.

Д. Сорнет розглядає два види моделей, що представляють нам дві протилежні точки зору на ризик, пов'язаний з потенційними крахами: моделі, що керуються ризиком; моделі, що керуються ціною. Розглянемо другий вид моделей детальніше.

Модель, що керується ціною

Виходячи з того, що світ і фондовий ринок — нелінійні системи, засновані на більш складній залежності, ніж проста пропорційність між причинами і наслідками, Сорнет фокусує увагу на класі моделей з додатним зворотнім зв'язком. У даному випадку це означає, що при відсутності контролю, ціна «злітає» вгору без обмежень.

Кризові явища взагалі Д. Сорнет розглядає як деякі «бульбашки», що постійно надуваються, і в момент краху лопаються.

Найпростіший варіант моделі, що керується ціною, складається з ціни бульбашки $B(t)$, що є інверсним степенем випадкових блукань $W(t)$. Починаючи з $B(0) = W(0) = 0$, на початку часу, коли випадкові блукання наближаються до деякої величини W_c , яка дорівнює 1, $B(t)$ збільшується, і навпаки. Даний процес у випадковій області розповсюджує такі сингулярності скінченного часу, що монотонно зростаючий процес з кульмінацією у критичний час t_c замінюється випадковими блуканнями, що коливаються вгору-вниз перед тим, як вони, в кінці-кінців, досягнуть критичного рівня. Даний нелінійний додатний роздутий процес з оберненим зв'язком $B(t)$, таким чином, може бути названий «сингулярними оберненими випадковими блуканнями». За відсутності краху процес $B(t)$ може існувати аж до кінцевого часу: з ймовірністю 1 (тобто з визначеністю) відомо з теорії випадкових блукань, що $W(t)$, у кінці-кінців, досягне будь-якого рівня, а саме величини $W_c = 1$.

Дана модель володіє цікавим і далекосяжним наслідком з точки зору повторення і організації крахів у часі. Дійсно, кожного разу, коли випадкові блукання наближаються до обраної постійної величини W_c , ціна бульбашки злітає вгору, і, відповідно до умови відсутності арбітражу разом з раціональними очікуваннями, це означає, що ринок переходить у нестійкий стан з крахом, що наближається. Модель випадкових блукань забезпечує дуже точним передбаченням часу очікування між успішними наближеннями до критичного значення W_c , тобто між успішними бульбашками. Розподіл даних строків очікування вважається дуже широким степеневим розподілом, настільки широким, що середній час очікування є математично нескінченним. На практиці ж це веде до двох взаємопов'язаних явищ: групування (бульбашки мають тенденцію слідувати за бульбашками у короткі проміжки часу) і довгострокової пам'яті (строки очікування між бульбашками стають дуже довгими, як тільки бульбашка здувалась достатньо довгий час).

Формулювання «бульбашкової» моделі «сингулярних інверсних випадкових блукань», що керується ціною, здатне переконливо відтворити певні властивості і вигляд справжніх цінових траєкторій, з їх випадковістю, бульбашками і крахами.

Обґрунтованість використання логоперіодичних структур у моделі

Процес поступового збільшення/зменшення бульбашок з періодом, що постійно зменшується з часом, відповідає логоперіодичним коливанням значень передкризової ділянки часового ряду.

Слід підкреслити практичні наслідки логоперіодичних структур. Для задач прогнозування важливіша та частина даних, яка містить осциляції, ніж та, котра описується простою степеневою залежністю, що може бути виродженою, особливо за наявності шуму, тому осциляційна компонента даних і більш надійна. Також властивість логоперіодичності (вона дозволяє вичленили слабкий сигнал на фоні високого шуму) забезпечує надійнішу відповідність даним. Логоперіодичність дуже важлива з емпіричної точки зору при аналізі фінансової інформації, оскільки подібні осциляції набагато краще видно в реальних даних, ніж просту степеневу залежність. Відповідність моделі може фокусуватися на осциляціях, що містять інформацію про критичну дату t_c . Якщо в даних присутня логоперіодичність, вона може бути використана для передбачення критичного часу t_c просто шляхом екстраполяції прискорення частоти. Оскільки ймовірність краху є найвищою поблизу критичного часу — можна досить просто спрогнозувати точку краху. Проте для раціональних трейдерів такий прогноз неефективний, адже вони знають коефіцієнт ризику краху у кожній точці шляху (включаючи t_c), і вони вже відобразили цю інформацію у цінах через умову раціональних очікувань.

Побудова моделі Д. Сорнетом

Прискорення, яке передуює краху, має точку перегину і найкраще відображується за допомогою степеневих функцій, які є ознаками критичної ситуації на ринку.

Монотонна крива відноситься до наступної параметризації за степеневим законом:

$$F_{pow}(t) = A_1 + B_1(t_c - t)^m, \quad (1)$$

де t_c — час, коли апроксимація степеневим законом демонструє (теоретично) відхилення, яке вказує на неминучий крах. Щоб оцінити і порівняти цю відповідність, обраховується варіація (рівна значенню квадратів помилок між теорією і реальними даними) або її квадратні корені (середньоквадратичне значення). Співвідношення двох варіацій, що відповідають двом різним гіпотезам, приймається за уточнену статистику. Відношення варіа-

ції гіпотези постійного зростання до гіпотези степеневому закону рівне, за Д. Сорнетом, $\text{var}_{\text{exp}} / \text{var}_{\text{pow}} \approx 1,1$, що говорить лише про незначне покращення апроксимації даних степеневим законом для опису прискорення і при цьому кількість вільних змінних залишається сталою — 2.

Особливістю цього прискорення є наявність систематичних відхилень коливального типу. Осцилююча неперервна лінія отримана шляхом підбору даних у наступному математичному виразі:

$$F_p(t) = A_2 + B_2(t_c - t)^{m_2} [1 + C \cos(\omega \log((t_c - t)/T))]. \quad (2)$$

Ця рівність являє собою простий приклад логоперіодичної корекції до чистого степеневому закону для досліджуваної змінної, що демонструє сингулярність у час, коли обвал найбільш ймовірний, а саме t_c . У даному випадку логоперіодичність бере свій початок з функції косинуса логарифму відстані $t_c - t$ до критичного часу t_c . Саме завдяки логоперіодичності еволюція фінансових індексів стає поблизу критичної точки (дискретним) масштабним інваріантом. Логоперіодична корекція для масштабування припускає існування ієрархії характеристичних часових інтервалів $t_c - t$, що задані виразом:

$$t_n = t_c - (t_n - t_0)g^{-n}, \quad (3)$$

де g є найкращим дискретним масштабним коефіцієнтом (ще позначається λ). Дане значення $\lambda \approx 1,5 - 1,7$ майже однакове для всіх досліджуваних часових рядів. Універсальним є співвідношення $\frac{t_c - t_{n+1}}{t_c - t_n} = \lambda$.

Повернемося до виразу (2) і розглянемо детальніше параметри, що в ньому використовуються. Змінні A_2 , B_2 , m_2 (експонента), C , T знаходяться шляхом підбору, як вже вказувалося вище, ω — логоперіодична кутова частота, t_c — критичний час.

Тож основним припущенням теорії, що описує вищевказану модель (рівняння (2)), є кооперативна поведінка серед трейдерів, що наслідують одне одного. Відмінністю ж від інших є думка, що основну причину краху треба шукати за кілька років до його здійснення у поступовому прискоренні росту ринкових цін, що відображує накопичення кооперативності ринку, які збільшуються.

Д. Сорнет ефект наслідування серед трейдерів називає основною з причин виникнення спекулятивних бульбашок, при лопан-

ні яких і виникають крахи. Крах, за Сорнетом, має екзогенну природу, а ендогенні потрясіння є лише ініціюючими факторами.

Узагальнений результат даної теорії, як вже вказувалося, — наявність логоперіодичних структур, що супроводжують еволюцію системи у часі.

Опис моделі затухаючих коливань

Однак, розрахунок параметрів такої функції, як (2) є досить громіздким і містить велику кількість припущень, що не досить зручно для моделювання з використанням комп'ютерної техніки, тому необхідно шукати інші підходи до моделювання таких часових рядів.

Дослідження коефіцієнтів вейвлет-перетворення, виконаного на передкризовому інтервалі часових рядів для відомих економічних криз, виявляють особливу поведінку їх енергій перед кризою (рис. 1) [2]. У всіх випадках досліджуваних економічних криз спостерігались наростаючі періодичні коливання, тому видається можливим для аналізу критичних явищ використовувати відповідні методи.

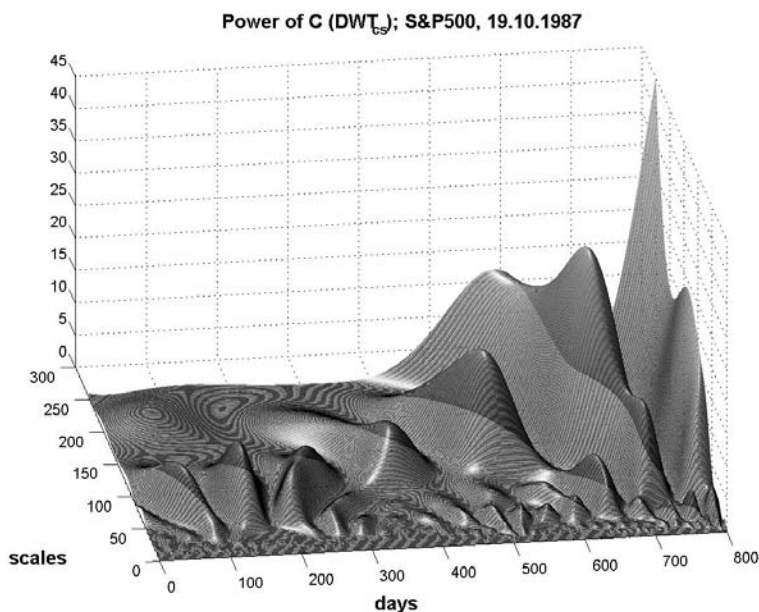


Рис. 1. Поверхня енергій вейвлет-коефіцієнтів для індексу S&P500, що містить крах 19.10.1987 р. Використано дискретне вейвлет-перетворення часового ряду

Ми зупинились на моделі затухаючих коливань як такій, що найбільш відповідає отриманим результатам [3; 4].

Розглянемо однорідне диференціальне рівняння другого порядку, що описує затухаючі коливання або вільні коливання у дисипативних системах з в'язким тертям:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2q = 0. \quad (4)$$

Характеристичне рівняння для нього має вигляд:

$$s^2 + 2hs + k^2 = 0. \quad (5)$$

Для випадку малого опору, який нас і цікавить, корені характеристичного рівняння дорівнюють:

$$s_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2}, \quad (6)$$

$$s_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2}. \quad (7)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$q = ae^{-ht} \sin(t\sqrt{k^2 - h^2} + \epsilon). \quad (8)$$

Нехай початкові умови будуть: при $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, тоді отримаємо:

$$a = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + hq_0)^2}{k^2 - h^2}}, \quad \text{tg}\epsilon = \frac{q_0\sqrt{k^2 - h^2}}{\dot{q}_0 + hq_0}, \quad (9)$$

де a — початкова амплітуда, ϵ — фаза.

Отже, для побудови моделі необхідно знати початкове відхилення q_0 , яке нам відомо як перший елемент масиву вхідних даних, початкову швидкість $\dot{q}_0$, яку ми можемо знайти за допомогою лінійної регресії методом найменших квадратів невеликої кількості перших із значень вхідних даних, а також показник затухання h і власну частоту незатухаючих гармонічних коливань k . Знайти показник затухання h можна, побудувавши залежність $q(t)$ у напівлогарифмічному масштабі і взявши коефіцієнт нахилу прямої, яка інтерполує точки отриманого графіка. Власну частоту незатухаючих гармонічних коливань, яка в даному випадку буде приблизно рівною частоті затухаючих коливань $\sqrt{k^2 - h^2}$, знаходимо за допомогою підрахунку нулів функції, тим

самим отримавши період коливань, з чого за формулою $k = \frac{2\pi}{T}$ обраховуємо шукану величину.

Тобто, як видно, наша модель є більш зрозумілою, адже всі її параметри мають чітке фізичне значення і обраховуються відповідно до нього.

Етапи побудови моделі затухаючих коливань

Побудова моделі затухаючих коливань складається з наступних етапів.

1. Будується поверхня вейвлет-коефіцієнтів часового ряду з використанням неперервного чи дискретного вейвлет-перетворення. Оскільки в деяких випадках вейвлет-коефіцієнти отримуються в комплексній області — для відображення у дійсну область знаходяться їх енергії.

2. Вибираються масштаби, на яких проводитиметься вибірка вейвлет-коефіцієнтів для подальшої побудови моделі.

У більшості випадків можна вибрати кілька масштабів, на яких спостерігаються найбільш яскраво виражені наростаючі коливання вейвлет-коефіцієнтів (наприклад, на рис. це масштаби з сегментів [50, 150] та [200, 250]). Для більш точного вибору масштабів проводиться розрахунок масштабової вейвлет-ентропії, в результаті чого отримується ентропійний «профіль» енергій вейвлет-коефіцієнтів (рис. 2).

В якості базової формули розрахунку значення ентропії було обрано ентропію Шенона внаслідок досить простого методу отримання розподілу щільності ймовірності енергії сигналу. У випадку розрахунку масштабової вейвлет-ентропії формула Шенона застосовується до оброблених даних по масштабам. При розрахунку показника вейвлет-ентропії поле енергій вейвлет-коефіцієнтів

$E_{ij} = C_{ij}^2$ нормалізується середнім квадратичним відхиленням вихідного часового ряду $\tilde{E}_{ij} = \frac{E_{ij}}{\sigma_t}$. Для розрахунку масштабової ентропії

визначається розподіл щільності ймовірності енергій $p_{ij} = \frac{\tilde{E}_{ij}}{\tilde{E}_{tot}}$, де

$\tilde{E}_{tot} = \sum_i \sum_j \tilde{E}_{ij}$. Значення ентропії знаходяться за формулою

$$E_{WS} = -\sum_i \left(\left(\sum_j p_{ij} \right) \cdot \frac{\log_2 \sum_j p_{ij}}{\log_2 N} \right), \quad (10)$$

де $\log_2 N$ — константа, що є нормалізуючим множником, N — кількість елементів часового ряду.

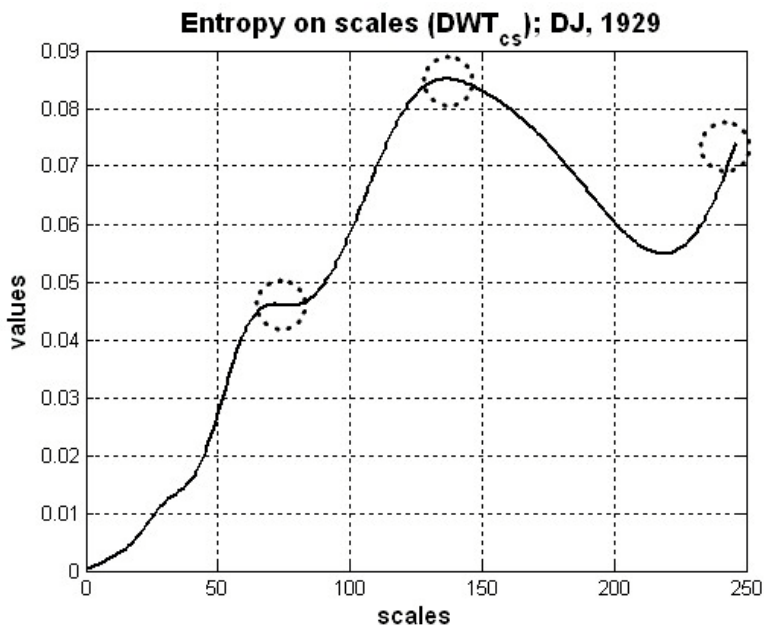


Рис. 2. Профіль масштабової вейвлет-ентропії для поверхні енергій вейвлет-коефіцієнтів індекса S&P500, що містить крах 19.10.1987 р. Пунктирними колами обведені ділянки профілю, відповідні яким масштаби вибрані для подальшої побудови моделі

На основі отриманого профілю масштабової ентропії вибираються масштаби, що відповідають локальним максимумам профілю (іноді вибираються ділянки, на яких похідна додатна, але близька до 0, як ділянка для масштабів 74—76 на рис. 2).

3. Для кожної групи масштабів вирізаються поверхні енергій вейвлет-коефіцієнтів та розраховується значення точкової вейвлет-ентропії, розрахунок якого аналогічний до методу, описаного вище, проте масштаби та час (дні) поміняно місцями. Точкова вейвлет-ентропія використовується як один із варіантів отримання ряду, що містить наростаючі коливання, проте, можливі інші методи, наприклад, звичайне усереднення енергій вейвлет-коефіцієнтів по дням тощо.

4. Для кожного із отриманих на етапі 3 рядів знаходяться параметри затухаючих коливань моделі, описаної вище.

Побудована модель може використовуватись як для оцінки досліджуваного критичного явища, так і для прогнозування його динаміки.

Висновки

1. У результаті використання теорії коливань на основі лого-періодичності передкризової поведінки часового ряду отримана модель затухаючих коливань для аналізу та прогнозування критичного явища, параметри якої розраховуються, а не підбираються, як у моделі Д. Сорнета.

2. Застосування моделювання до відомих криз показує можливість дослідження тривалості передкризового періоду та прогнозування точки краху. На даний момент, однак, можливе проведення якісного дослідження критичних явищ. Проводяться дослідження роботи моделі для виявлення чисельних показників чи значень параметрів моделі, що можуть підвищити точність отриманих результатів.

Література

1. *Сорнетте Д.* Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в комплексных финансовых системах. — М.: Интернет-трейдинг, 2003. — 400 с.

2. *Соловійов В.М., Кононенко В.В., Сердюк О.А.* Передвісники критичних та кризових явищ в складних фінансово-економічних системах // Збірник наукових праць «Економіка: проблеми теорії і практики». — Дніпропетровськ, ДНУ, 2004. — В. 197. — С. 1304—1310.

3. *Бутенин Н.В.* Теория колебаний. — М.: Высшая школа, 1963. — 189 с.

4. *Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А.* Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики). — М.: Физический факультет МГУ, 2001. — 144 с.

Стаття надійшла до редакції 23.01.09 р.