

А.А.Березовський,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Інститут математики АН України.
М.В.Сільченко,
аспірантка,
Київський національний економічний університет.

Модельний аналіз функціонування ринку опціонів

В статті розглядається нелінійна модель Блека-Шоулза визначення ціни опціону, яка враховує наявність на ринку програмної торгівлі. Пропонується метод знаходження наближеного аналітичного розв'язку цієї моделі та визначається у відповідності з отриманим результатом стратегія хеджування ризиків з точки зору продавця опціону на купівлю.

Одним з видів похідних цінних паперів є опціони. Їх принципова відмінність від ф'ючерсів полягає у тому, що покупець опціону має право (а не зобов'язання) на протязі певного часу реалізувати опціон. Невизначеність, яка виникає в зв'язку з цим, зумовлює наявність великого фінансового ризику, якого зазнає продавець опціону. Для особи, яка виписує опціон на купівлю, цей ризик в матеріальному виразі складає різницю між поточною ринковою ціною та ціною реалізації опціону (чим більше різниця, тим більше втрати). При цьому ризик продавця опціону на купівлю нічим не обмежений, оскільки до закінчення терміну дії опціону ціна на акції, які покладені в основу опціону, може необмежено зрости. Для особи, яка виписує опціон на продаж, розміри ризику більш обмежені: границею тут є ціна акцій, що лежать в основі опціону, (тобто чисто теоретично його ризик обмежується різницею між поточною ціною та нижчою точкою ймовірного падіння цієї ціни, а саме, нулем).

В залежності від типу опціону з метою понизити ризик використовують відповідну стратегію хеджування. В статті розглядається стратегія хеджування з точки зору продавця опціону на купівлю.

Продавець опціону на купівлю може обмежити свої втрати різними шляхами. Суть одного з них полягає у тому, щоб мати в своєму портфелі певну кількість акцій, що лежать в основі опціону, та певну кількість безризикових облігацій; ця кількість основних акцій та облігацій певним чином залежить від ціни опціону. Таким чином, щоб визначити стратегію хеджування, необхідно знайти “справедливу” ціну опціону, яка залежить від часу та поточної ринкової вартості цінних паперів, і встановити залежність від неї точного числа основних активів та облігацій, яке необхідно тримати в кожний момент часу.

Існують різні методи визначення ціни опціону: статистичний, ймовірносний, диференціальних числень. Серед них найбільш сучасним та надійним вважається метод, який використовує для визначення ціни опціону диференціальні рівняння в частинних похідних.

Одним з найбільших успіхів сучасної фінансової теорії з точки зору наближеності та застосованості вважається оцінка ціни опціону, яка була запропонована Ф.Блекум та М.Шоулзом [1], що дозволяє інвесторам визначити “справедливу” ціну опціону, значення якої залежить від наступних факторів:

- поточної ринкової ціни активу, що лежить в основі опціону;
- ціни виконання (або реалізації);
- часу до терміну закінчення дії опціону;
- процентної ставки по безризиковим облігаціям;
- мінливості (волатильності) цін на основні цінні папери.

В основі моделі лежить принцип відсутності арбітражних можливостей.

Аналіз Блека та Шоулза дає явну стратегію торгівлі основним активом та безризиковими облігаціями, кінцевий виграш від якої є рівним ціні опціону в строк платежу. Таким чином, продаж дериватива та продаж і купівля інших активів згідно цієї стратегії захищає інвестора від ризику можливих втрат, в

результаті чого к кінцевій даті втрата, якої зазнала одна половина портфелю, буде точно компенсована прибутком в іншій.

Опишемо структуру неперервної в часі моделі економіки, запропонованої Р.Фрейєм та А.Стріммі [2]. В цій моделі є дві різні групи торговців: reference-торговці та programme-торговці, характеристики яких наведені нижче. Ці інвестори утворюють неперервний в часі ринок приватних активів, процес рівноваги яких позначений як $\{X_t, t \geq 0\}$. В даній моделі ціна основного активу береться як геометричний Броуновський рух, тобто

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

де $\{W_t, t \geq 0\}$ є стандартним Броуновським рухом, μ та σ – сталі, μ – очікувана миттєва швидкість повернення, σ – коефіцієнт волатильності ціни основного активу.

Ціновий процес облігації позначається як $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$, де r – стала процентна ставка. Ціновий процес опціону, виписаного на дані акції, позначається як $\{D_t, t \geq 0\}$. Функція виграшу в деякій кінцевій даті $T > 0$ (даті закінчення) є випадковою величиною, залежною від ціни основного активу X_T : $D_T = h(X_T)$ для деякої функції $h(\bullet)$ (надалі будемо припускати, що $h(x) = (x - K)^+$, тобто $h(x) = x - K$ при $x > K$ та $h(x) = 0$ при $x \leq K$). Для актива припускається, що не виплачуються ніякі дивіденди при $0 \leq t \leq T$. Припустимо, що ціна опціону задається як $D_t = C(X_t, t)$ для деякої функції $C(x, t)$, яка припускає достатню гладкість, щоб наступні викладки мали силу.

Динамічна стратегія хеджування, яка нейтралізує ризик, властивий продажу опціону, полягає в тому, щоб тримати основний актив на суму $C_x(X_t, t)$ в час t , неперервно торгуючи таким чином, щоб підтримувати це число активів та вкладати в облігації капітал на суму $C(X_t, t) - X_t C_x(X_t, t)$ в час t . $C_x(x, t)$ означає похідну функції $C(x, t)$ по x . Витрати на виконання цього дорівнюють $C(X_t, t)$, що і є “справедливою” ціною опціону.

Ми охарактеризуємо більшу з двох груп торговців, reference-торговців, як інвесторів, які купують та продають активи таким чином, немов вони єдині діючі особи в економіці. Рівновага ціни активу буде точно дотримуватись траєкторії розв'язку рівняння (1). Друга група складається з программе-торговців. Єдиною причиною для їх торгівлі є прагнення застрахувати від ризику деякий інший портфель (наприклад, від ризику причиненого продажем Європейського опціону на цьому активі). Нехай ρ уявляє собою, грубо кажучи, частину ринку активів, яку тримають программе-торговці. Тоді повна модель визначення ціни опціону з врахуванням впливу программе-торгівлі на формування ціни опціону, наступна:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \rho \frac{\partial C}{\partial x}}{1 - \rho \frac{\partial C}{\partial x} - \rho x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}} \right]^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial C}{\partial x} - C \right) = 0, \quad x > 0, \quad t < T - \varepsilon \\ C(x, T - \varepsilon) = C_{BS}(x, T - \varepsilon), \quad x > 0 \\ C(0, t) = 0, \quad t < T - \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow \infty} |C(x, t) - (x - K e^{-r(T-t)})| = 0, \quad t < T - \varepsilon, \\ C(x, t) = C_{BS}(x, t) \quad \text{при} \quad T - \varepsilon \leq t \leq T, \quad x > 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

де $\varepsilon > 0$ – параметр згладжування, який вводиться, щоб згладити вплив зворотнього зв'язку, спричиненого надчутливістю динамічної стратегії хеджування Блека-Шоулза до цінових коливань в околі $x=K$ при $t \rightarrow T$. Цей параметр знаходиться з рівняння

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\sigma \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right) + \frac{e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 \varepsilon}}{\sigma \sqrt{2\pi \varepsilon}} = \frac{1}{\rho}$$

Блек та Шоулз отримали розв'язок цієї задачі при $\rho=0$ в явному вигляді:

$$C_{BS}(x, t) = \frac{1}{2} x \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{d_1}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{K}{2} e^{-r(T-t)} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{d_2}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

$$\text{де} \quad d_{1,2}(x, t) = \frac{\ln(x/K) + (r \pm \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta$$

Проте при $\rho \neq 0$ аналітичними методами отримати точний розв'язок задачі (2) неможливо. К.Сіркар и Дж.Папаніколау розглянули метод знаходження аналітичного розв'язку при малих значеннях параметра ρ та чисельний метод розв'язання задачі при будь-яких ρ [3]. Нами був розглянутий метод введення еквівалентного коефіцієнта волатильності, а також метод, запропонований в даній роботі, який полягає в поетапному застосуванні методу Роте, методу нелінійних варіаційних параметрів та методу Бубнова-Гальоркіна. Метою цієї роботи є пошук більш простого методу розв'язання задачі (4) з точки зору економістів, тобто більш простого для програмування та застосування.

Аналіз характеру граничної умови задачі (2), а також результатів, отриманих К.Сіркаром та Дж.Папаніколау, дозволяє стверджувати, що існує достатньо велике число $M > 0$, яке залежить від K , таке, що $C(x, t) = C_{BS}(x, t)$ та $C_{BS}(x, t) = x - Ke^{-r(T-t)}$ з точністю до 10^{-15} при $x \geq M$.

Враховуючи це, а також роблячи заміну $t = T - \tau$ (таким чином, τ означає час, що залишився до закінчення дії опціону), ми переходимо від задачі (2) до наступної задачі для функції $c(x, \tau) := C(x, T - \tau)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \rho \frac{\partial c}{\partial x}}{1 - \rho \frac{\partial c}{\partial x} - \rho x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}} \right]^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial c}{\partial x} - c \right) = 0, \quad 0 < x < M, \quad \tau > \varepsilon \\ c(x, \varepsilon) = C_{BS}(x, T - \varepsilon), \quad 0 < x < M \\ c(0, \tau) = 0, \quad \tau > \varepsilon \\ c(M, \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau > \varepsilon, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$c(x, \tau) = C_{BS}(x, T - \tau) \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq \varepsilon, \quad 0 < x < M$$

де $\varphi(\tau) = M - Ke^{-r\tau}$. Розв'язування задачі (3) здійснимо за допомогою метода Роте. Введемо рівномірну сітку по τ з кроком $\Delta\tau$, де $\Delta\tau = (T - \varepsilon)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $\tau_i = \varepsilon + i\Delta\tau$, $c_i = c(x, \tau_i)$, $\varphi_i = \varphi(\tau_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Заміною похідної по часу кінцевою різницею $c_\tau = v(c_i - c_{i-1})$, де $v = 1/\Delta\tau$, зводимо задачу (3) до послідовного розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1 - \rho \frac{dc_{i-1}}{dx}}{1 - \rho \frac{dc_{i-1}}{dx} - \rho x \frac{d^2 c_{i-1}}{dx^2}} \right] \sigma^2 x^2 \frac{d^2 c_i}{dx^2} + r \left(x \frac{dc_i}{dx} - c_i \right) - \nu c_i = -\nu c_{i-1}, \quad 0 < x < M \\ c_i(0) = 0, \quad c_i(M) = \varphi_i \end{array} \right. \quad (4)$$

При $i=0$ функція $c_0(x)$ відома з початкової умови задачі (3):

$$c_0(x) = C_{BS}(x, T - \varepsilon), \quad 0 < x < M \quad (5)$$

Задачу (4) будемо розв'язувати методом нелінійних варіаційних параметрів. Згідно з цим методом, наближений розв'язок рівняння (4) на кожному часовому шарі τ_i будемо шукати у вигляді:

$$c_i(x) = L_{BS}(x, \tau_i) + A_i f_i(x), \quad (6)$$

де

$$L_{BS}(x, \tau) = \frac{1}{2} x \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{l_1}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{K e^{-r\tau}}{2} e^{-r\varepsilon} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{l_2}{\sqrt{2}} \right) \right), \quad l_{1,2}(x, \tau) = \frac{\ln \left(\frac{x}{K e^{-r\tau}} \right) + (r \pm \frac{1}{2} \sigma^2) \varepsilon}{\sigma \sqrt{\varepsilon}}$$

і $A_i = \text{const} > 0$ – довільний параметр. Функцію $f_i(x)$ підберемо таким чином, щоб функція (6) задовільняла крайові умови задачі (4).

Було розглянуто декілька функцій, які задовільняють дані вимоги. Найбільш прийнятною функцією в сенсі більш точного задовільнення нею крайових умов задачі (4) та відповідності результатам, отриманим К.Сіркарром та Дж.Папаніколау, є функція $f_i(x) = 1 - \operatorname{erf}^2(x - L_i)$, де $L_i = K e^{-r\tau_i}$. Таким чином, наближений аналітичний розв'язок задачі (4) на кожному часовому шарі τ_i шукається у вигляді:

$$c_i(x) = L_{BS}(x, \tau_i) + A_i (1 - \operatorname{erf}^2(x - L_i)), \quad 0 < x < M \quad (7)$$

Ця функція задовільняє крайові умови задачі (4) з точністю, яка не перевищує десятих долей відсотка, та містить довільний параметр $A_i > 0$. Параметр A_i на кожному часовому шарі будемо шукати з умови, щоб нев'язка

$$\Psi(x) := \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \rho \frac{d\tilde{c}_{i-1}}{dx}}{1 - \rho \frac{d\tilde{c}_{i-1}}{dx} - \rho x \frac{d^2 \tilde{c}_{i-1}}{dx^2}} \right] \sigma^2 x^2 \frac{d^2 \tilde{c}_i}{dx^2} + r(x \frac{d\tilde{c}_i}{dx} - \tilde{c}_i) - v\tilde{c}_i + \delta \tilde{c}_{i-1} \neq 0$$

задовільняла в сенсі методу Бубнова-Гальоркіна умову:

$$\int_0^M \Psi(x) dx = 0 \quad (8)$$

Підстановкою (7) в (8) була отримана рекурентна формула для знаходження параметрів A_i

$$A_i = A_i(\rho) = \frac{F_1(A_{i-1}, \rho)}{F_2(A_{i-1}, \rho)}, \quad (9)$$

де

$$F_1 = -(\delta + 2r) \int_0^M L_{BS}(x, \tau_i) dx - (\delta + 2r) L_i M (e^{-r\epsilon} - 1) - \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^M \frac{F(x; A_{i-1}, \rho)}{x} e^{-l_1^2(x, \tau_i)/2} dx + \\ + \delta \int_0^M L_{BS}(x, \tau_{i-1}) dx + \delta L_{i-1} M (e^{-r\epsilon} - 1) + \delta A_{i-1} \int_0^M (1 - \text{erf}^2(x - L_{i-1})) dx$$

$$F_2 = (\delta + 2r) \int_0^M (1 - \text{erf}^2(x - L_i)) dx + \frac{4\sigma^2}{\pi} \int_0^M F(x; A_{i-1}, \rho) x^2 e^{-2(x-L_i)^2} dx + \\ + \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^M F(x; A_{i-1}, \rho) x^2 e^{-(x-L_i)^2} (x - L_i) \text{erf}(x - L_i) dx$$

$$F(x; A_{i-1}, \rho) = \left[\frac{1 - \rho \frac{d\tilde{c}_{i-1}}{dx}}{1 - \rho \frac{d\tilde{c}_{i-1}}{dx} - \rho x \frac{d^2 \tilde{c}_{i-1}}{dx^2}} \right]^2,$$

$$\frac{d\tilde{c}_{i-1}}{dx} = \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{l_1(x, \tau_{i-1})}{\sqrt{2}} \right) \right) + \frac{4A_{i-1}}{\sqrt{\pi}} \text{erf}(x - L_{i-1}) e^{-(x-L_{i-1})^2}$$

$$\frac{d^2 \tilde{c}_{i-1}}{dx^2} = \frac{\rho}{\sigma \sqrt{2\pi\epsilon}} \frac{e^{-l_1^2(x, \tau_{i-1})/2}}{x} - \frac{8A_{i-1}}{\pi} e^{-2(x-L_{i-1})^2} + \frac{8A_{i-1}}{\sqrt{\pi}} \text{erf}(x - L_{i-1}) e^{-(x-L_{i-1})^2} (x - L_{i-1})$$

Параметр A_0 на початковому шарі $\tau_0=\varepsilon$ шукаємо з умови, щоб функція $c_0(x)$ задовільняла рівняння (5) в сенсі метода Бубнова-Гальоркіна, тобто:

$$\int_0^M (L_{BS}(x, \varepsilon) + A_0(1 - \operatorname{erf}^2(x - L_0)) - C_{BS}(x, T - \varepsilon)) dx = 0$$

Звідси:

$$A_0 = \frac{\int_0^M (C_{BS}(x, T - \varepsilon) - L_{BS}(x, \varepsilon)) dx}{\int_0^M (1 - \operatorname{erf}^2(x - L_0)) dx} \quad (10)$$

Таким чином, на кожному часовому шарі τ_i наближений розв'язок має вигляд (7), де послідовність значень параметра A_i знаходиться за рекурентною формулою (9) і A_0 знаходиться за формулою (10). Інтеграли, які входять до формул (9) і (10), можуть бути обчислені за допомогою ЕОМ для конкретних значень параметрів моделі.

Зауважимо, що в випадку, коли ρ є малим числом, залежність параметру A_i від ρ , задану формулою (9), можна лінеаризувати наступним чином:

$$A_i(\rho) \approx A_i' + \rho A_i'', \quad \text{де}$$

$$A_i' = \frac{F_1(A_{i-1}, 0)}{F_2(A_{i-1}, 0)},$$

$$A_i'' = \left(\frac{\sigma F_2(A_{i-1}, 0)}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^M x^2 e^{-l_1^2(x, \tau_i)/2} \frac{d^2 \tilde{c}_{i-1}}{dx^2} dx - \frac{8\sigma^2 F_1(A_{i-1}, 0)}{\pi} \int_0^M x^3 \frac{d^2 \tilde{c}_{i-1}}{dx^2} \left(e^{-2(x-L_i)^2} - \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x - L_i) e^{-(x-L_i)^2} (x - L_i) \right) dx \right) / F_2^2(A_{i-1}, 0)$$

Запропонований наближений аналітичний розв'язок задачі (3) в порівнянні з методом, представленим в роботі К.Сіркара та Дж.Папаніколау, є простим та ефективним для використання, оскільки вимагає лише послідовного обчислення параметра A_i на кожному часовому шарі.

Тепер повернемося до змінної t . З формули (7) випливає, що на кожному часовому шарі $t_i = T - \tau_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ціна опціону може бути наближена наступним чином:

$$C(x, t_i) = c(x, \tau_i) \approx L_{BS}(x, T - t_i) + A_i(1 - \operatorname{erf}^2(x - Ke^{-r(T-t_i)})), \quad 0 < x < M$$

Згідно з викладеним раніше методом страхування від збитків, ми визначаємо стратегію хеджування даного опціону наступним чином: в кожний момент часу t_i необхідно тримати основний капітал на суму S_1 та вкладати в облігації капітал на суму S_2 , де:

$$S_1 = C_x(X_{t_i}, t_i) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{l_1(X_{t_i}, T - t_i)}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{4A_i}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(X_{t_i} - Ke^{-r(T-t_i)}) e^{-(X_{t_i} - Ke^{-r(T-t_i)})^2}$$

$$S_2 = C(X_{t_i}, t_i) - X_{t_i} C_x(X_{t_i}, t_i) = L_{BS}(X_{t_i}, T - t_i) + A_i(1 - \operatorname{erf}^2(X_{t_i} - Ke^{-r(T-t_i)})) - S_1 X_{t_i}$$

X_{t_i} – ціна основного актива в момент часу t_i .

Для порівняння результатів, які були отримані нами та К.Сіркарром і Дж.Папаніколау, була зроблена чисельна реалізація знаходження наближеного аналітичного розв'язку задачі (2) запропонованим нами методом за допомогою ЕОМ при таких саме значеннях параметрів. Були отримані графік залежності ціни опціону $C(x, t)$ від ціни основного актива x та часу t та графік стратегії хеджування опціону – функції $S_1(x, t)$, які задовільно узгоджуються з тими, що були одержані К.Сіркарром та Дж.Папаніколау.

Насамкінець треба відзначити, що в теперішній час ринок опціонів в Україні практично відсутній. Але, з розвитком ринкових відносин, ми прийдемо до розуміння необхідності функціонування на фондовому ринку такого фінансового інструменту, яким є опціони.

В світовій практиці накоплений великий досвід роботи з опціонами, а також розроблені математичні методи, в результаті чого загадкова задача визначення справедливої ціни опціона набула цілком визначені границі.

Опанування даного математичного апарату дозволить фахівцям з фондового ринку в подальшому не діяти “наосліп”, а, дотримуючись запропонованих в цій статті стратегій, мінімізувати ризик, пов’язаний з продажем опціона, і, отже, отримати більший прибуток.

Список використаної літератури

1. Black, F. and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economics*, 1973. **81**, 637-659.
2. Frey, R. and Stremme, A. Market volatility and feedback effects from dynamic hedging, 1995. Technical Report B-310, University of Bonn.
3. Sircar, K. and Papanicolaou, G. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance* 1998. **5**, 45-82

В статье рассматривается нелинейная модель Блека-Шоулза определения цены опциона, которая учитывает наличие на рынке программной торговли. Предлагается метод нахождения приближенного аналитического решения этой модели и определяется в соответствии с полученным результатом стратегия хеджирования рисков с точки зрения продавца опциона на покупку.

Надійшла до редколегії
«___» _____ 2000р.