9. Рева О. М. Методи розпізнавання образів у оцінюванні компетентності викладачів щодо пріоритетності індикаторів мотивів їхньої праці / О. М. Рева, І. М. Суворова // Управління проектами, системний аналіз і логістика: Наук. журн. — Вип. 6. — К.: НТУ, 2009. — С. 208—216.

10. Перегудов Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И Перегудов, Ф. П. Тарасенко. — М.: Высшая школа, 1989. — 367 с.

11. Рева О. М. Комплексне визначення кількісних характеристик недисциплінованої поведінки студентів / О. М. Рева, І. А. Добрянський, А. А. Чабак // Рідна школа: Щомісячний науково-педагогічний журнал. — К.: Деміур, 2004. — № 12. — С. 63—66.

12. Рева О. М. Розстановка пріоритетів на множині обставин, що пом'якшують та обтяжують відповідальність / О. М. Рева, Д. Г. Радов // Держава і право: Зб. нак. праць Ін-ту держави та права ім. В. М. Корецького НАНУ (Юридичні і політичні науки). — К.: ІДП, 2001. — № 11. — С. 406—417.

13. Рева О. М. Моделювання розстановки пріоритетів у визначенні коефіцієнтів важливості мотивів трудової діяльності викладачів / О. М. Рева, І. М. Суворова // Актуальні проблеми економіки: Науковий економічний журнал. — К., 2009. — № 9. — С. 243—249.

Статтю подано до редакції 29.06.10 р.

УДК 330:51(075.8)

Ю. В. Коляда, докторант,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ОБМІННОГО ТИПУ. 2. ДВОПАРАМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

АНОТАЦІЯ. Викладено низку нелінійних математичних моделей (ММ) економічної динаміки, котрими описуються обмінні процеси, враховуючи при цьому притаманні та характерні для економіки явища. На прикладі однієї з моделей отримано узагальнення формули рівноважної ціни.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математична модель, нелінійна економіка, узагальнення формули ціни.

АННОТАЦИЯ. Приведены математические модели нелинейной экономической динамики, в которых учитываются отличительные черты обменных процессов в экономике. На примере одной из моделей получено обобщение формулы равновесной цены.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математическая модель, нелинейная экономика, обобщенная формула цены.

SUMMARY. A row over of mathematical models of non-linear economic dynamics, in which the distinguishing features of exchange processes are taken into account in an economy, is brought. On the example of one of models generalisation of formula of equilibrium price is got.

KEYWORDS: mathematical model, non-linear economy, generalised formula of price.

Вступ. Дана праця продовжує започатковане [1] дослідження нелінійної економічної динаміки. Його логіка викликана тим, що обмінним процесам економіки притаманна низка явищ, кожне з яких окремо взяте принципово впливає на еволюцію економіки, а тим більше внаслідок сукупної їх дії.

Аналіз останніх публікацій по темі дослідження. Праці [2, 3] останнього часу свідчать про досить широке використання в економіко-математичному моделюванні добре знаної в математичній біології, біофізиці та екології класичної системи рівнянь Лотки—Вольтерра, незважаючи на її вади (в ній неураховується важливі аспекти економічної діяльності). Зокрема, виписана в монографіях [3, 4] множина математичних моделей (ММ) являє собою розвинення базисної, тобто Лотки—Вольтерра, системи рівнянь. Згадуваною множиною моделей охвачується широке коло проблем (задач, явищ і процесів) економічної практики. Щодо кожної ММ у [3, 4] проголошено результати її вивчення з використанням теорії якісного аналізу звичайних диференційних рівнянь. У статті [2] навпаки, наводяться результати числового моделювання над системою рівнянь Лотки—Вольтерра, яка інтерпретується як дуопольно-дуопсонієва конкуренція. В згадуваних працях не розглядається такі важливі аспекти економічних обмінних процесів, як досягнення насиченого стану, врахування ступеня взаємодії і взаємовпливу конкурентів у нелінійних умовах виробництва товару та у випадку малої його кількості тощо.

Мета статті полягає у тому, щоб навести рівняння ММ економічного стану для всіх практично важливих моментів економічної діяльності. На прикладі одного із важливих аспектів провести повноцінне і цілком доступне економісту якісне дослідження, а його результати тлумачити в контексті появи грошей у суспільстві, їх впливу на рівні сторони економічного життя.

Основні результати роботи. Опираючись на економічне тлумачення моделі Лотки—Вольтерра як базової [2] та ґрунтуючись на відомих у математичній біології підходах [5] до узагальнення системи рівнянь, нижче подається кілька математичних моделей (ММ), у кожній з яких враховується той чи той аспект протікання процесу обміну в економіці.

Конкуренція товару x і насичення товаром y описується системою рівнянь: $\dot{x} = ax \cdot \frac{K-x}{K} - \frac{bxy}{1+Ax}$ і $\dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1+Ax}$, де a, b, c, d, K і A — деякі сталі величини. Заміною змінних: $t = \tau/a$; $x = \frac{c}{d}u$; $y = \frac{a}{b}v$ здійснюється перехід до безрозмірної моделі: $\dot{u} = u - \frac{uv}{1+\alpha u} - \varepsilon u^2$; $\dot{v} = -\gamma v\left(1 - \frac{u}{1+\alpha u}\right)$, де присутні лише два параметри: $\alpha = Ac/d$; $\varepsilon = c/Kd$; коефіцієнт $\gamma = c/a$ органічним чином притаманний моделі. Привертається увага, що замість початкових п’яти параметрів у безрозмірній моделі фігурують лише два.

Одночасне врахування дії факторів конкуренції серед товару x і нелінійним зростанням його обсягу для малих кількостей модель записується $\dot{x} = \frac{ax^2}{N+x} \cdot \frac{K-x}{K} - bxy$; $\dot{y} = -cy + dxy$, котра заміною: $t = \tau/a$; $x = Ku$; $y = \frac{a}{b}v$ набуває безрозмірного вигляду: $\dot{u} = \frac{u^2(1-u)}{n+u} - uv$; $\dot{v} = -\gamma v(m-u)$, де $n = N/Ka$; $m = c/dK$; $\gamma = dK/a$.

Зауваження. Системи рівнянь, що залежать від кількох параметрів, можна привести до безрозмірного виду різними способами. Формально всі вони рівноправні, але з позицій простоти дослідження і тлумачення результатів деякі способи більш придатні. Рекомендацій віддати перевагу якомусь з них нема, значну роль відіграє інтуїція і досвід дослідника.

Нелінійний обмін між товарами y та x при малій кількості останнього з урахуванням насиченості описується рівняннями: $\dot{x} = ax - \frac{bx^2 y}{1 + Ax^2}$; $\dot{y} = -cy + \frac{dx^2 y}{1 + Ax^2}$.

Конкуренція другого товару y та його стан насичення ураховуються у моделі: $\dot{x} = ax - \frac{bxy}{1 + Ax}$; $\dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax} - \varepsilon y^2$.

Динаміка конкуренції товару y в обміні з товаром x та стан його насичення відображаються системою рівнянь: $\dot{x} = ax - \frac{bxy}{(1 + Ax)(1 + By)}$; $\dot{y} = -cy + \frac{dxy}{(1 + Ax)(1 + By)}$.

Нелінійна закономірність створення товару y і внутрішня конкуренція для першого товару x відтворюються рівняннями: $\dot{x} = ax\frac{K - x}{K} - bxy$; $\dot{y} = -cy + \frac{dxy^2}{N + y}$.

Таким чином, розглянуто повний набір двофакторних рівнянь класичної моделі Лотки—Вольтерра, який утворюється з урахуванням одного стабілізуючого фактора та іншого — дестабілізуючого.

Далі пропонується методика і результати якісного аналізу узагальнення відомої [4] в літературі з синергетичної економіки математичної моделі (ММ) обміну двома товарами, яка, будучи очевидною модифікацією класичної системи рівнянь Лотки—Вольтерра, записується:

$$\begin{cases} \dot{x} = j_1 - j_2 xy - j_3 x \\ \dot{y} = j_4 - j_5 xy - j_6 y \end{cases}, \tag{1}$$

де змінна $x = x(t)$ відповідає обсягу товару першого виробника, а $y = y(t)$ — товару другого виробника; величини $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ і $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ є швидкості змінюваності обсягів товарів, для котрих має місце обмінний процес; коефіцієнти моделі j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 і j_6 скаляри, причому j_1 і j_4 сприяють початку обміну. Саме для умови $j_1 = j_4 = 0$ з (1) отримуються класична система диференційних рівнянь Лотки—Вольтерра з точністю до знаків складових моделі нелінійної економічної динаміки.

Узагальнення (1) являють собою двопараметричну модель обмінного типу:

$$\begin{cases} \dot{x} = j_1 - j_2 \dfrac{xy}{1 + D_1 y} - j_3 x \\ \dot{y} = j_4 - j_5 \dfrac{xy}{1 + D_2 x} - j_6 y \end{cases}, \quad (2)$$

де присутність співмножника $\dfrac{1}{1 + D_1 y}$ біля доданку $j_2 xy$ і $\dfrac{1}{1 + D_2 x}$ для $j_5 xy$ якраз забезпечує нелінійну динаміку мутуалістично [5] пов'язаних товарів обмінного процесу з урахування стану насиченості. Мутуалізм складових обміну вбачає обов'язковим чином взаємодію між ними — має місце обмінний процес! Цей термін фігурує у нелінійній біофізиці і математичній біології, для яких з економікою є багато спільного, оскільки предмет уваги згадуваних дисциплін відносяться до класу відкритих, нестаціонарних, нелінійних, нерівноважних систем незворотної дії. Зрозуміло, що (2) узагальнює (ММ) (1), яка отримується при $D_1 = D_2 = 0$.

Стосовно ММ (2) у окремому випадку $j_1 = j_4 = 0$ фазовий портрет відомий [5] — сепаратриса сідла ділить фазовий простір на дві області: в тій, що лежить близько до координатних осей, обмін товарами згасає, а в інших — далекій від першої області — відбуваються обмінні процеси. Дослідимо вплив коефіцієнтів j_1 j_4 на перебіг подій у фазовому просторі.

Згідно техніки якісного аналізу звичайних диференційних рівнянь [6] послідовно виконуються наступні кроки. Спочатку шукаються особливі (стаціонарні або рівноважні) точки, покладаючи $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Для ММ (2) координати таких точок записується:

$$\bar{x} = \frac{j_1(1 + D_1 \bar{y})}{j_2 \bar{y} + j_3(1 + D_1 \bar{y})}; \quad \bar{y} = \frac{j_4(1 + D_2 \bar{x})}{j_5 \bar{x} + j_6(1 + D_2 \bar{x})}.$$

Підстановкою абсциси $\bar{x}$ у формулу для ординати отримується квадратне рівняння $a\bar{y}^2 + b\bar{y} + c = 0$, де $a = \left[j_1 D_1 (j_5 + j_6 D_2) + \right.$ $\left. + j_6 j_2 + j_3 j_6 D_1 \right]$; $b = \left[j_1 (j_5 + j_6 D_2) + j_6 j_3 - j_4 j_2 - j_4 j_3 D_1 - j_4 j_1 D_1 D_2 \right]$; $c = -j_4 j_3 - j_4 j_1 D_2$.

Отже, для ММ (2) існують два стани рівноваги: $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$.

Далі записується функціональна матриця Якобі ММ (2), яка являє собою матрицю другого порядку для часткових похідних. У наступному випадку вона має вигляд:

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} -j_2 \dfrac{\bar{y}}{1 + D_1\bar{y}} - j_3; & -j_2\bar{x}\dfrac{1}{(1 + D_1\bar{y})^2} \\ -j_5\bar{y}\dfrac{1}{(1 + D_2\bar{x})^2}; & -j_5\dfrac{\bar{x}}{1 + D_2\bar{x}} - j_6 \end{pmatrix},$$

оскільки обчислюється в точках рівноваги.

Слід матриці SpJ — сума елементів головної діагоналі записується

$$SpJ = \left(-\frac{j_2\bar{y}}{1 + D_1\bar{y}} - j_3 - \frac{j_5\bar{x}}{1 + D_2\bar{x}} - j_6 \right) < 0 .$$

Визначник матриці має вигляд:

$$\det J = \left(\frac{j_2\bar{y}}{1 + D_1\bar{y}} + j_3 \right)\left(\frac{j_5\bar{x}}{1 + D_2\bar{x}} + j_6 \right) - \frac{j_2 j_5 \overline{xy}}{(1 + D_1\bar{y})^2 (1 + D_2\bar{x})^2} .$$

Слід і детермінант матриці лінеаризації ММ (2) потрібні, щоб скористатися діаграмою (рис. 1) розташування фазових портретів, уникаючи безпосереднього обчислення власних чисел (коренів квадратного рівняння).

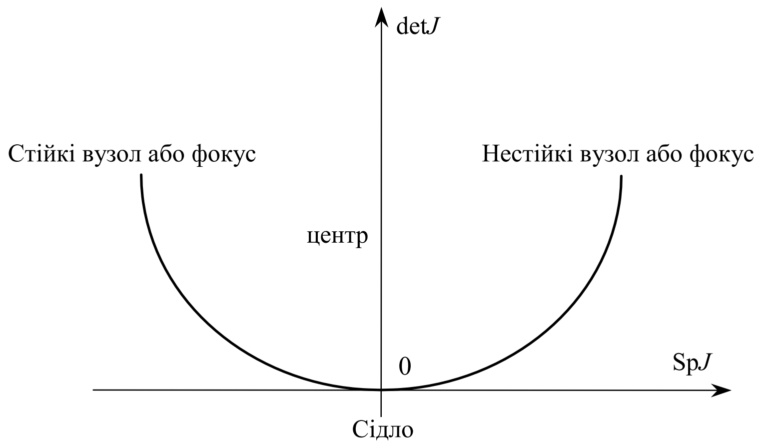

Рис. 1. Розташування фазових портретів

Для спрощення виразу детермінанта матриці Якобі скористаємося майже очевидною рівністю:

$$\frac{j_3 j_4}{\bar{y}} = j_3 j_5 \frac{\bar{x}}{1 + D_2 \bar{x}} + j_3 j_6 ,$$

яка отримується з другого рівняння ММ (2) із-за умови $\dot{y} = 0$, попередньо помноживши на j_3. Після очевидних, але громіздких перетворень остаточно записується вираз:

$$\det J = \frac{j_3 j_4}{\bar{y}} + \frac{j_2 j_4}{1 + D_1 \bar{y}} - j_2 j_4 + \frac{j_2 j_6 \bar{y}}{(1 + D_1 \bar{y})^2} .$$

Знак визначника визначається координатою $\bar{y}$. Отже, одна з особливих точок може бути стійким фокусом (вузлом) для $\bar{y} > 0$, а інша — сідлом ($\det J < 0$) — нестійкою точкою.

Зауважимо, що для $D_1 = D_2 = 0$, повторюється відомий результат [4].

Згідно з означенням [4] обмінна вартість $C_0 = {}^{j_2}\!/\!_{j_5}$ є відношення білінійних доданків ММ, котрими описується зустріч двох товарів. У нашому випадку вона має вигляд:

$$C_0 = \frac{j_2(1 + D_2 x)}{j_5(1 + D_1 y)}.$$

Її вираз через координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ особливих (рівноважних, стаціонарних) точок записується:

$$C_0 = \frac{(j_1 - j_3\bar{x})(1 + D_1\bar{y})}{(j_4 - j_6\bar{y})(1 + D_2\bar{x})}. \quad (3)$$

Для випадку граничного переходу $j_3 \to 0$ ($\tau_x \to \infty$), що еквівалентно існуванню довговічного товару x, тобто з'являються гроші, останній вираз спрощуються

$$C_0 = \frac{j_1(1 + D_1\bar{y})}{\left(j_4 - \bar{y}/\tau_y\right)\left(1 + D_2\bar{x}\right)}. \quad (3а)$$

У формулі нерівноважної ціни (3а) коефіцієнт j_1 є платоспроможний попит за одиницю часу, j_4 — виробництво або пропозиція товару y за одиницю часу; $\bar{x}$ і $\bar{y}$ — запаси товарів; τ_y — довговічність товару виду y, пов'язана з фізичним зносом і моральним старінням; коефіцієнти D_1 і D_2 стосуються ступеня насиченості економічного стану.

В умовах дефіциту обмінна вартість має вигляд:

$$C_0 = \frac{j_1(1 + D_1|\bar{y}|)}{\left(j_4 + |\bar{y}|/\tau_y\right)\left(1 + D_2\bar{x}\right)}, \quad (4)$$

де $|\bar{y}|$ є абсолютний дефіцит товару y. Після очевидних алгебраїчних перетворень над (4) формула абсолютного дефіциту записується:

$$|\bar{y}| = \frac{\tau_y\left[C_0 j_4(1 + D_2\bar{x}) - j_1\right]}{\left[\tau_y D_1 j_1 - C_0(1 + D_2\bar{x})\right]}. \quad (5)$$

Зауважимо, що для $D_1 = D_2 = 0$ отримується раніше відомий [4] результат.

Отже, в оцінюванні обсягу абсолютного дефіциту приймають участь усі наявні фактори, що цілком логічно. Для з'ясування ролі деяких факторів шляхом перетворень виразу (5) отримуємо нерівність:

$$|\bar{y}| \geq \frac{\tau_y j_4}{D_1} \cdot \frac{C_0(1 + D_2\bar{x})}{\tau_y j_1} + \frac{\tau_y j_1}{C_0(1 + D_2\bar{x})}. \qquad (5a)$$

У формуванні обсягу абсолютного дефіциту провідна роль належить грошовій масі $\bar{x}$ суспільства. Таким чином, величина абсолютного дефіциту прямо пропорційно залежить від відношення коефіцієнтів $\left(\frac{j_4}{j_1}\right)$, обмінної вартості C_0 та кількості грошей. Вплив коефіцієнта D_1 на $|\bar{y}|$ обернено пропорційний.

Зауваження. Нерівність (5а) формально можна переписати у вигляді функції $y \geq k \cdot z + \frac{1}{z}$, де $k = {}^{\tau_y j_4}\!/_{D_1}$ — стала величина. Графік цієї функції являє собою суму прямої $y_1 = k \cdot z$ і рівносторонньої гіперболи $y_2 = {}^{1}\!/_{z}$ зображено на рис. 2 для $k = 1$.

Точка мінімуму функції $y = k \cdot z + \frac{1}{z}$ обчислюється $z_{\min} = \sqrt{{}^{1}\!/_{k}}$. Зліва від точки екстремуму обсяг дефіциту зростає катастрофічно і не так швидко справа від $z_{\min}$ для $k > 1$; значно менше зростання дефіциту матиме місце праворуч від точки мінімуму у випадку $k < 1$. Таким чином з'ясовується роль коефіцієнтів τ_y, j_4 і D_1.

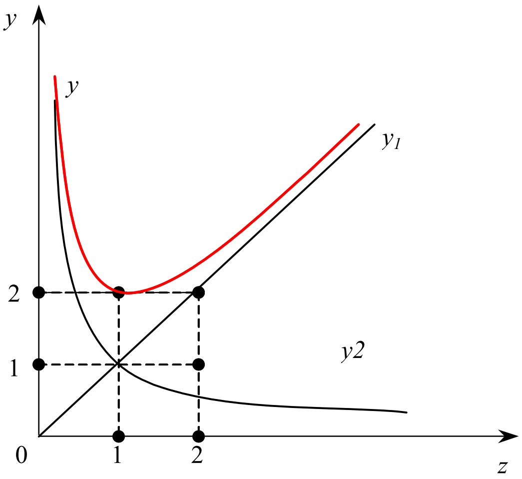

Рис. 2. Графік функції $y = z + \dfrac{1}{z}$

Із виразу (5), нехтуючи величиною j_1 у чисельнику, легко записати нерівність мажорантного типу:

$$|\bar{y}| \leq \frac{\tau_y j_4}{\dfrac{\tau_y D_1 j_1}{C_0(1 + D_2\bar{x})} - 1}$$

для обсягу абсолютного дефіциту, яку можна переписати:

$$|\bar{y}| \leq \frac{k}{\dfrac{\tau_y j_1}{C_0\left[1 + D_2\bar{x}\right]} - \dfrac{1}{D_1}} .$$

Висновки. У даній праці висвітлено шлях побудови двопараметричних математичних моделей процесу обміну двома товарами. З використанням однієї з низ аналітично досліджено обсяг абсолютного дефіциту, який детермінується головним чином наявною грошовою масою у суспільстві та обмінною вартістю C_0, також залежить від стартових умов початку обміну та коефіцієнтів ступеня насиченості економічного стану. Будь-які спроби безоплатного розподілу послуг у суспільстві, що відображається умовою $C_0 \to 0$, приречені на крах, штовхають державу до катастрофи.

Література

1. *Коляда Ю. В.* Моделювання соціально-економічних процесів обмінного типу. 1. Однопараметричні моделі // Формування ринкової економіки. Зб. наук. праць / Відп. ред. О. О. Бєляєв. — 2010. — Вип. 23.

2. *Козик В. В., Сидоров Ю. І., Скворцов І. Б., Тарасовська О. Б.* Застосування моделі Лоткі—Вольтерра для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції // Актуальні проблеми економіки. — 2010. — № 2. — С. 252—260.

3. *Милованов В. П.* Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика. — М.: КомКнига, 2005. — 168 с.

4. *Милованов В. П.* Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. — М.: УРСС, 2001. — 263 с.

5. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — М. — Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. — 368 с.

6. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 243 с.

Статтю подано до редакції 03.06.10 р.

УДК 658.8.012.2

В. В. Магда, аспірантка,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

РОЗВИТОК МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ЗБУТУ ПІДПРИЄМСТВА ЗА ДОПОМОГОЮ Р-ПЕРЕТВОРЕННЯ

АНОТАЦІЯ. У статті розглядається процес моделювання функції збуту підприємства за допомогою р-перетворення, що обмежується довірчими інтервалами логістичної моделі.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: р-перетворення, лінійна парна регресія, довірчий інтервал.

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается процесс моделирования функции сбыта предприятия с помощью р-