

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАДИМА ГЕТЬМАНА**

Інститут інформаційних технологій в економіці

Кафедра штучного інтелекту, моделювання та статистики

Освітньо-професійна програма «Економічна кібернетика»

Галузь знань 05 «Соціальні та поведінкові науки»

Спеціальність 051 «Економіка»

Форма здобуття освіти: очна (денна)

КВАЛІФІКАЦІЙНА БАКАЛАВРСЬКА РОБОТА

**на тему «Оптимізація інвестиційного портфеля на основі прогнозування
дохідності традиційних і цифрових активів»**

здобувача Трутенко Вікторії Олександрівни

**Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
професор Олена ЮНЬКОВА**

**Робота допущена до захисту перед екзаменаційною комісією
з атестації здобувачів вищої освіти (ЕК)**

**Завідувач кафедри: кандидат фізико-математичних наук,
професор Галина ВЕЛИКОІВАНЕНКО**

Київ 2026

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАДИМА ГЕТЬМАНА**

Інститут інформаційних технологій в економіці

Кафедра штучного інтелекту, моделювання та статистики

Освітньо-професійна програма «Економічна кібернетика»

Галузь знань 05 «Соціальні та поведінкові науки»

Спеціальність 051 «Економіка»

ПОГОДЖЕНО

Керівник проектної групи (гарант)
освітньо-професійної програми

Ольга ПРИТОМАНОВА

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри штучного
інтелекту, моделювання та
статистики

Галина ВЕЛИКОІВАНЕНКО

_____ 2026 р.

_____ 2026 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

здобувача вищої освіти Трутенко Вікторії Олександрівни
(прізвище, ім'я, по батькові)

_____очної (денної)_____ форми здобуття освіти

на підготовку кваліфікаційної бакалаврської роботи

на тему

«Оптимізація інвестиційного портфеля на основі прогнозування дохідності
традиційних і цифрових активів»

Темі затверджено наказом ректора Університету від 16.03.2026 р. №417-ст

Кваліфікаційна бакалаврська робота виконується на матеріалах
Фінансового сайту <https://finance.yahoo.com/>

План кваліфікаційної бакалаврської роботи

Розділ 1	Теоретичні засади управління інвестиційним портфелем та його оптимізації
Розділ 2	Статистичний аналіз та прогнозування дохідності фінансових активів
Розділ 3	Оцінювання ризику інвестиційного портфеля та практичні аспекти управління

Об'єкт дослідження:	Процес формування та оптимізації інвестиційного портфеля, що охоплює традиційні фінансові інструменти (акції, золото, облігації) та цифрові активи (криптовалюти).
Предмет дослідження:	Економіко-математичні моделі прогнозування часових рядів та алгоритми портфельної оптимізації для збалансування ризику і дохідності традиційних та цифрових активів.
Мета виконання кваліфікаційної бакалаврської роботи:	Розробка та практична реалізація комплексної моделі оптимізації інвестиційного портфеля на основі прогнозування дохідності традиційних і цифрових активів із застосуванням методів аналізу часових рядів та системи ризикологічних показників.

Конкретні завдання, які здобувач повинен виконати для досягнення поставленої мети:

У розділі 1: Розкрити економічну сутність інвестиційного портфеля та проаналізувати класичні підходи до його формування (зокрема модель Harry Markowitz). Охарактеризувати показники дохідності та ризику фінансових активів. Здійснити статистичний аналіз та прогнозування динаміки фінансових активів. Визначити специфіку цифрових активів у системі портфельного інвестування.

У розділі 2: Сформувати інформаційну базу та здійснити розрахунок історичних показників дохідності й ризику. Побудувати модель прогнозування дохідності традиційних і цифрових активів. Розробити та реалізувати модель оптимізації структури інвестиційного портфеля.

У розділі 3: Проаналізувати структуру та параметри оптимального портфеля. Оцінити рівень очікуваної дохідності та ризику портфеля. Розробити практичні рекомендації щодо формування інвестиційного портфеля з урахуванням цифрових активів.

Завдання підготував
науковий керівник

(підпис)

Олена ЮНЬКОВА

(ім'я, прізвище)

« » 2026 р.

Завдання одержав
здобувач

(підпис)

Вікторія ТРУТЕНКО

(ім'я, прізвище)

« » 2026 р.

Реферат

Кваліфікаційна бакалаврська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, переліку використаних джерел, що містить 33 найменування на 4 сторінках, та 2 додатки на 21 сторінці. Загальний обсяг роботи складає 75 сторінок друкованого тексту, з яких 50 сторінок основної частини. Робота містить 7 рисунків, 13 таблиць, 20 формул.

Об'єкт дослідження - процес формування та оптимізації інвестиційного портфеля, що охоплює традиційні фінансові інструменти (акції, золото, облігації) та цифрові активи (криптовалюти).

Предмет дослідження - економіко-математичні моделі прогнозування часових рядів та алгоритми портфельної оптимізації для збалансування ризику і доходності традиційних та цифрових активів.

Мета роботи – розробка та практична реалізація комплексної моделі оптимізації інвестиційного портфеля на основі прогнозування доходності традиційних і цифрових активів із застосуванням методів аналізу часових рядів та системи ризикологічних показників.

Для досягнення поставленої мети вирішено такі завдання: систематизовано теоретичні засади портфельного інвестування та ризикології; охарактеризовано математичний інструментарій моделей ARIMA; сформовано інформаційну базу з 10 фінансових активів; проведено первинний статистичний аналіз; перевірено стаціонарність часових рядів; побудовано моделі Auto-ARIMA з діагностикою залишків; сформовано оптимальний портфель за критерієм максимізації коефіцієнта Шарпа; здійснено оцінку ризику методами VaR, CVaR, β -аналізу та імітаційного моделювання Монте-Карло; проведено сценарний аналіз та розроблено практичні рекомендації.

Теоретична значущість роботи полягає у систематизації класичних і сучасних підходів до портфельного інвестування - від моделі Марковіца та CAPM до байєсівської моделі Блека–Літтермана та в обґрунтуванні доцільності застосування моделей часових рядів для прогнозування доходності фінансових активів.

Методична значущість визначається розробкою комплексного аналітичного підходу, що поєднує: автоматичну специфікацію моделей ARIMA з діагностикою залишків за тестом Льюнга–Бокса та оцінкою якості прогнозу (MAE, RMSE); середньо-дисперсійну оптимізацію портфеля методом SLSQP з обмеженням максимальної частки одного активу; мультиметодну оцінку ризику; розрахунок β -коефіцієнтів, Max Drawdown та Calmar Ratio.

Практична значущість отриманих результатів полягає у формуванні оптимального інвестиційного портфеля з тижневою доходністю 0,33% при волатильності 1,48% та коефіцієнті Шарпа 0,222. Ризикові характеристики портфеля: $VaR_{95\%} = 2,107\%$, $CVaR_{95\%} = 2,725\%$, Max Drawdown = $-12,45\%$, Calmar Ratio = 1,372, $\beta = 0,707$. Сформульовано практичні рекомендації щодо оптимальної частки цифрових активів, частоти ребалансування та операційних лімітів ризику.

Програмна реалізація здійснена мовою Python з використанням бібліотек yfinance, pmdarima, scipy, matplotlib та seaborn.

Рік виконання кваліфікаційної бакалаврської роботи – 2026.

Рік захисту роботи – 2026.

Ключові слова: інвестиційний портфель, оптимізація, ARIMA, коефіцієнт Шарпа, Value at Risk, криптовалюта, диверсифікація.

Відгук
про кваліфікаційну бакалаврську роботу
здобувача освітньо-професійної програми «Економічна кібернетика»
Трутенко Вікторії Олександрівни
«Оптимізація інвестиційного портфеля на основі прогнозування
дохідності традиційних і цифрових активів»

1. Актуальність дослідження зумовлена зростанням нестабільності фінансових ринків, поширенням цифрових активів та підвищенням вимог до ефективного управління ризиком, що потребує удосконалення методів оптимізації інвестиційного портфеля. Поєднання традиційних фінансових інструментів із криптоактивами потребує використання сучасних моделей прогнозування дохідності та кількісного оцінювання ризику для прийняття обґрунтованих інвестиційних рішень.

2. Позитивні риси кваліфікаційної бакалаврської роботи: робота характеризується логічною структурою, послідовним викладом матеріалу та чіткою відповідністю між теоретичною і практичною частинами. Автор демонструє ґрунтовне розуміння сучасної портфельної теорії та економетричних методів аналізу фінансових даних.

3. Наявність самостійних розробок автора: формування вибірки з 10 фінансових активів різних класів, проведення описової статистики та аналізу ризикових характеристик, перевірка стаціонарності часових рядів за допомогою ADF-тесту, побудова ARIMA-моделей для прогнозування дохідностей, розробка оптимізаційної моделі портфеля, розрахунок ключових показників ефективності та ризику (Sharpe Ratio, β -коефіцієнт, VaR, CVaR, Max Drawdown, Calmar Ratio), а також формування збалансованої портфельної структури з конкурентним співвідношенням дохідності та ризику.

4. Цінність теоретичних результатів полягає у поглибленні підходів до оптимізації інвестиційного портфеля шляхом поєднання економетричного прогнозування дохідності з сучасними методами оцінювання ризику та

диверсифікації активів. Робота пройшла апробацію на IV Міжнародній науково-практичній конференції «Цифрова економіка» (11-12 червня 2026 року).

5. Наявність недоліків: разом із тим робота містить окремі дискусійні аспекти, зокрема обмежений розгляд альтернативних економетричних специфікацій для моделювання волатильності, потребу в більш детальному обґрунтуванні окремих припущень щодо стабільності параметрів, а також можливість розширення аналізу чутливості оптимального портфеля до зміни вхідних параметрів моделі.

6. Загальна оцінка кваліфікаційної бакалаврської роботи та її допущення до захисту перед ЕК: кваліфікаційна бакалаврська Трутенко Вікторії Олександрівни «Оптимізація інвестиційного портфеля на основі прогнозування доходності традиційних і цифрових активів» виконана на високому рівні, відповідає вимогам, що висуваються для даного типу робіт, може бути рекомендована до захисту перед ЕК. Робота свідчить про відповідність набутих здобувачем компетентностей вимогам освітньої програми «Економічна кібернетика», а її автор Трутенко В.О. за умови успішного захисту, заслуговує на присвоєння освітньої кваліфікації «Бакалавр з економіки».

Науковий керівник: професор кафедри

штучного інтелекту, моделювання та статистики

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Олена ЮНЬКОВА

“ ____ ” _____ 20__ р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ УПРАВЛІННЯ ІНВЕСТИЦІЙНИМ ПОРТФЕЛЕМ ТА ЙОГО ОПТИМІЗАЦІЇ.....	8
1.1 Теоретичні і методичні засади портфельного інвестування та управління ризиками.....	8
1.2 Моделювання та прогнозування дохідності цифрових фінансових активів	15
РОЗДІЛ 2. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ДОХІДНОСТІ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ	20
2.1 Статистичний аналіз фінансових часових рядів.....	20
2.2 Економетричне моделювання та прогнозування дохідності фінансових активів.....	26
2.3 Формування та оптимізація інвестиційного портфеля	33
РОЗДІЛ 3. ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКУ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ УПРАВЛІННЯ.....	37
3.1 Оцінювання ризику портфеля на основі VaR, CVaR та максимального просідання.....	37
3.2 Сценарний аналіз, стрес-тестування та рекомендації щодо управління портфелем	45
ВИСНОВКИ	49
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	51
ДОДАТКИ	55

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ACF	автокореляційна функція
ADF	розширений тест Дікі–Фуллера
VaR	Value at Risk
CVaR	Conditional Value at Risk
CV	коефіцієнт варіації
ARIMA	Auto-Regressive Integrated Moving Average
AAPL	Apple Inc
MSFT	Microsoft Corporation
JPM	JPMorgan Chase & Co
XOM	Exxon Mobil Corporation
PG	Procter & Gamble
JNJ	Johnson & Johnson
GC=F	золото
TLT	державні довгострокові облігації
BTC-USD	Bitcoin
ETH-USD	Ethereum

ВСТУП

В умовах глобалізації фінансових ринків та стрімкого розвитку криптовалютного сегменту перед інвесторами постає принципово нова задача: формування ефективного інвестиційного портфеля, що поєднує традиційні та цифрові активи з урахуванням їхніх суттєво відмінних ризикових характеристик. Особливої *актуальності* ця проблема набуває в умовах сучасної України, де волатильність валютного та фондового ринків підштовхує приватних і інституційних інвесторів до пошуку альтернативних інструментів збереження та примноження капіталу, зокрема через міжнародно диверсифіковані портфелі. Класичні підходи до портфельної оптимізації, засновані на статичних оцінках очікуваної дохідності, виявляються недостатніми в умовах нестабільного ринкового середовища, що зумовлює необхідність інтеграції сучасних методів прогнозування часових рядів у процес формування портфеля. Отже, розробка науково обґрунтованої моделі оптимізації інвестиційного портфеля на основі прогнозних оцінок дохідності є актуальним завданням як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Теоретичне підґрунтя портфельного інвестування закладено у фундаментальних працях Г. Марковіца, який у 1952 році сформулював математичну задачу мінімізації дисперсії портфеля, та В. Шарпа, який розвинув цей підхід у моделі CAPM. Подальший розвиток теорії пов'язаний з іменами Ф. Блека та Р. Літтермана, чия байєсівська модель дозволяє інтегрувати суб'єктивні прогнози у процес оптимізації.

У сфері моделювання фінансових часових рядів ключовим є внесок Дж. Бокса та Г. Дженкінса, які розробили методологію ARIMA, що набула широкого застосування у прогнозуванні дохідностей активів. Серед сучасних досліджень варто виділити роботи L. Mochurad та A. Dereviannyi (2024), які продемонстрували ефективність ансамблевих підходів LSTM+ARIMA для фінансових прогнозів, а також праці A. Bouteska (2022) щодо ролі Bitcoin у

диверсифікації портфеля та М. Luchko (2023) щодо специфіки цифрових активів як інвестиційного класу. Серед українських дослідників значний внесок здійснили О. В. Щербина у сфері моделювання оптимізації портфелів, Н. І. Версаль та О. О. Дорошенко у галузі ризик-менеджменту фінансових установ, а також М. І. Єщенко та Я. А. Паламаренко щодо цифрових активів у системі портфельного інвестування. Водночас недостатньо дослідженим залишається питання практичної інтеграції прогнозів ARIMA безпосередньо у вектор очікуваних дохідностей при портфельній оптимізації, а також порівняльна оцінка традиційних і цифрових активів за системою ризикологічних показників у єдиній аналітичній моделі, чому і присвячена дана кваліфікаційна робота.

Метою виконання кваліфікаційної бакалаврської роботи є розробка та практична реалізація комплексної моделі оптимізації інвестиційного портфеля на основі прогнозування дохідності традиційних і цифрових активів із застосуванням методів аналізу часових рядів та системи ризикологічних показників.

Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання:

- 1) Систематизувати теоретико-методологічні засади портфельного інвестування та управління ризиками, охарактеризувати еволюцію підходів від моделі Марковіца до сучасних байєсівських методів.
- 2) Розкрити математичний інструментарій оцінювання дохідності та ризику фінансових активів, зокрема показники математичного сподівання, дисперсії, коефіцієнта варіації, VaR, CVaR та β -коефіцієнта.
- 3) Обґрунтувати методологію побудови моделей ARIMA для прогнозування дохідностей фінансових часових рядів.
- 4) Сформувати інформаційну базу дослідження та здійснити первинний статистичний аналіз обраних активів, включаючи розрахунок показників описової статистики та перевірку стаціонарності часових рядів
- 5) Побудувати та верифікувати моделі Auto-ARIMA для прогнозування дохідностей традиційних і цифрових активів із діагностикою адекватності залишків.

- 6) Реалізувати модель оптимізації структури інвестиційного портфеля за критерієм максимізації коефіцієнта Шарпа на основі прогнозних параметрів.
- 7) Провести комплексну оцінку ризику оптимального портфеля методами VaR, CVaR, β -аналізу, Max Drawdown та імітаційного моделювання Монте-Карло.
- 8) Здійснити сценарний аналіз і розробити практичні рекомендації щодо формування інвестиційного портфеля з урахуванням цифрових активів.

Об'єкт дослідження - процес формування та оптимізації інвестиційного портфеля, що охоплює традиційні фінансові інструменти (акції, золото, облігації) та цифрові активи (криптовалюти).

Предмет дослідження - економіко-математичні моделі прогнозування часових рядів та алгоритми портфельної оптимізації для збалансування ризику і дохідності традиційних та цифрових активів.

У роботі використано такі методи: методи описової статистики - для аналізу розподілу дохідностей активів та оцінювання їхніх ризикових властивостей; методи аналізу часових рядів (тест ADF, аналіз ACF/PACF) - для перевірки стаціонарності та моделі Auto-ARIMA для побудови прогнозних моделей дохідності; методи портфельної оптимізації (середньо-дисперсійний підхід Марковіца) - для визначення оптимальної структури портфеля за критерієм максимізації коефіцієнта Шарпа; методи оцінювання ринкового ризику (параметричний VaR та CVaR, метод історичного моделювання, β -аналіз, визначення показників Max Drawdown та Calmar Ratio) - для комплексної ризикологічної характеристики сформованого портфеля; метод імітаційного моделювання Монте-Карло (10 000 симуляцій) - для побудови розподілу дохідності портфеля та підтвердження параметричних оцінок VaR і CVaR; сценарний аналіз - для оцінки стійкості портфеля в умовах несприятливого та стресового ринкових сценаріїв.

Програмна реалізація всіх розрахунків виконана мовою Python з використанням бібліотек `yfinance`, `pandas`, `numpy`, `pmdarima`, `statsmodels`, `scipy`, `matplotlib` та `seaborn`.

Теоретична значущість отриманих результатів полягає у систематизації класичних і сучасних підходів до портфельного інвестування та обґрунтуванні доцільності інтеграції прогнозних моделей ARIMA у вектор очікуваних дохідностей при портфельній оптимізації. Запропонований підхід розширює концепцію динамічного оцінювання параметрів портфеля на відміну від статичного використання історичних середніх значень, що підсилює теоретичне підґрунтя подальших досліджень у сфері кількісних фінансів.

Методична значущість визначається розробкою відтворюваного аналітичного алгоритму, що послідовно охоплює: збирання і обробку даних, первинний статистичний аналіз із системою ризикологічних показників, автоматичну специфікацію моделей ARIMA з верифікацією якості прогнозу, оптимізацію портфеля з практичними обмеженнями концентрації та мультиметодну оцінку ризику.

Практична значущість результатів полягає у формуванні конкретного оптимального портфеля з річною дохідністю 17,09% при волатильності 10,68%, коефіцієнті Шарпа 0,222 та $VaR_{95\%} = 2,107\%$ на тижневому горизонті. Розроблені рекомендації щодо оптимальної частки цифрових активів, частоти ребалансування (щоквартально) та операційних лімітів ризику можуть бути використані приватними інвесторами, аналітиками інвестиційних компаній та фінансових установ при формуванні реальних портфелів.

Інформаційна база дослідження включає: наукові праці вітчизняних та зарубіжних учених у галузі портфельного інвестування, ризик-менеджменту та аналізу часових рядів; регуляторні документи Базельського комітету з банківського нагляду; щотижневі ціни закриття 10 фінансових активів за період 2021–2026 рр., отримані з фінансової платформи Yahoo Finance; аналітичні матеріали щодо ринку криптовалют.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ УПРАВЛІННЯ ІНВЕСТИЦІЙНИМ ПОРТФЕЛЕМ ТА ЙОГО ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1 Теоретичні і методичні засади портфельного інвестування та управління ризиками

Інвестиційний портфель, як економічне поняття, є сукупністю фінансових активів, сформованих у відповідності до визначених інвестиційних цілей інвестора, його інвестиційного горизонту вкладення та допустимого рівня ризику. На відміну від разового вкладення в окремий актив, портфельний підхід ґрунтується на принципі диверсифікації, що передбачає розподіл капіталу між різними класами активів. Саме цей підхід дає змогу знизити загальний інвестиційний ризик без помітного зменшення очікуваної прибутковості. Цей підхід, теоретично обґрунтований у середині XX століття, визначив напрям подальшого розвитку всієї галузі портфельного інвестування.

Розвиток наукових основ портфельного інвестування розпочався з фундаментальної праці Гаррі Марковіца під назвою «Portfolio Selection», опублікованої у 1952 році в Journal of Finance [1]. До того часу інвестиційна практика ґрунтувалася переважно на інтуїції, якісних оцінках та принципах максимізації очікуваного доходу, без формального врахування ризику. Марковіц вперше запровадив математично суворий підхід, в якому ризик портфеля вимірювався за допомогою дисперсії (або стандартного відхилення) дохідності, а диверсифікація розглядалася як кількісно вимірний механізм його зниження.

Концепція ефективного портфеля є основою теорії Марковіца: портфель вважається ефективним, якщо при заданому рівні ризику він забезпечує найвищу

очікувану дохідність i , навпаки, при заданому рівні дохідності мінімізує ризик. Сукупність усіх таких ефективних портфелів утворює ефективну межу у просторі «очікувана дохідність – стандартне відхилення». Математично задачу оптимізації можна сформулювати так за формулами (1.1 та 1.2) [1]:

$$\text{мінімізувати: } \sigma^2(r_p) = w^T \Sigma w \quad (1.1)$$

$$\text{за умови: } w^T \mu = \mu_p, w^T 1 = 1, w \geq 0 \quad (1.2)$$

де w – вектор часток активів у портфелі;

Σ – матриця коваріацій дохідностей активів;

μ – вектор очікуваних дохідностей;

μ_p – цільовий рівень дохідності портфеля.

Практичне застосування методу Марковіца вимагає оцінювання великої кількості параметрів: для n активів необхідно визначити n очікуваних ставок прибутковості, n дисперсій та $n(n-1)/2$ коваріацій; коли значення n є великим, це робить результати надто чутливими до похибок у вихідних даних [1]. Незважаючи на ці обмеження, модель Марковіца залишається основою всіх подальших розробок теорії портфеля.

Іншим важливим етапом стала модель оцінки капітальних активів (Capital Asset Pricing Model - CAPM), розроблена в 1960-х роках незалежно Вільямом Шарпом [2], Джоном Лінтнером та Яном Моссінім [3]. CAPM базується на фундаментальній гіпотезі: в умовах ринкової рівноваги кожен інвестор тримає ринковий портфель як ризикову складову своїх вкладень, а надприбуток кожного активу визначається виключно його систематичним ризиком (тобто його коефіцієнтом β). Рівняння моделі має такий вигляд по формулі (1.3) [2]:

$$E(r_i) = rf + \beta_i[E(r_m) - rf], \quad (1.3)$$

де $E(r_i)$ – очікувана дохідність активу i ;

rf – безризикова ставка дохідності;

β_i – бета-коефіцієнт активу;

$E(r_m)$ – очікувана дохідність ринкового портфеля.

Різниця $[E(r_m) - rf]$ називається ринковою премією за ризик.

Модель CAPM стала першою рівноважною моделлю для фінансових ринків і забезпечила практичний інструмент для визначення справедливої вартості активів та оцінки ефективності управління портфелем. Однак численні емпіричні дослідження виявили систематичні аномалії – ефект малих компаній, ефект вартості та календарні аномалії, - що продемонстрували неповноту однофакторної моделі. Це спонукало до пошуку багатофакторних альтернатив: трифакторної моделі Фами-Френча (1993), її п'ятифакторної версії (2015) та теорії арбітражного ціноутворення (APT) Росса (1976) [4].

Якісно іншим напрямом удосконалення портфельної оптимізації стала модель Блека-Літтермана (1990), розроблена фахівцями Goldman Sachs [3]. Основна відмінність цієї моделі від класичного підходу Марковіца полягає у способі побудови вектора очікуваної прибутковості: замість прямої статистичної оцінки за вибірковими середніми модель комбінує ринкову рівновагу (прибутковість, що відповідає ринковим вагам активів) та точку зору інвестора, використовуючи байєсівське оновлення. Це забезпечує надійніші вхідні дані, що мають економічне значення та зменшує кількість «кутових рішень», коли оптимізатор концентрує весь капітал у кількох активах [3].

Паралельно з розробкою моделей для фінансових ринків вдосконалювалися також методи оцінки та управління ризиками. Наприкінці 1980-х та у 1990-х роках концепція Value at Risk (VaR) набула значної популярності у банківському секторі та вважалася загальним показником для оцінки ринкового ризику. Базельські регуляторні вимоги щодо банківського сектору (Базель II, Базель III) закріпили VaR як стандартизований підхід до розрахунку вимог до капіталу [5]. У той час науковці визначили головний недолік VaR - його нездатність належним чином відображати ризик у «хвостах» розподілу, що призвело до розробки більш надійних мір ризику, зокрема Conditional Value at Risk (CVaR), також відомого як Expected Shortfall [7].

Таким чином, еволюція портфельних інвестицій пройшла шлях від суто інтуїтивних кроків до математичних моделей оптимізації та від однофакторного виміру ризику моделей до когерентних мір, здатних враховувати нелінійності та

«хвостові» ефекти. Сучасна теорія портфеля поєднує в собі фундаментальні досягнення Марковіца та Шарпа, байєсівські методи оновлення уявлень про дохідність, розвинутого апарату ризик-менеджменту та потужність обчислювальних технологій для обробки величезних обсягів фінансових даних.

Кількісний аналіз для оцінки прибутковості та ризику є важливою основою для прийняття обґрунтованих інвестиційних рішень. У сучасній теорії портфеля ці характеристики описуються за допомогою математико-статистичних інструментів та теорії ймовірностей. Розглянемо основні показники, що використовуються для аналізу окремих активів та портфеля в цілому.

Дохідність фінансового активу. Для часового ряду цін активу $\{p_t\}$ логарифмічна дохідність у момент t визначається за формулою (1.4) як [6]:

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}), \quad (1.4)$$

Перевагою логарифмічних дохідностей над простими арифметичними є їх адитивність за часом (сукупна дохідність за кілька періодів дорівнює сумі одноперіодних логарифмічних дохідностей) та більш симетричний розподіл, що відповідає передумовам для більшості статистичних моделей [6].

Математичне сподівання дохідності ($E[r]$) характеризує середню очікувану дохідність активу за одиницю часу. При вибірковій оцінці за T спостереженнями [8]:

$$E[r] = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{i=1}^T r_i, \quad (1.5)$$

Для портфеля з n активів і вагами $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ очікувана дохідність є зваженою середньою очікуваних дохідностей складових:

$$E[r_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] = w^T \mu, \quad (1.6)$$

Дисперсія та стандартне відхилення є базовими мірами абсолютного ризику активу [3]. Вибіркова дисперсія представлена у формулі (1.7):

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{T-1}\right) \sum_{i=1}^T (r_i - E[r])^2, \quad (1.7)$$

Стандартне відхилення $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ вимірюється в тих самих одиницях, що й дохідність, і тому зручніше для інтерпретації: воно показує, наскільки в середньому фактична дохідність може відхилятися від очікуваного значення. Для портфеля дисперсія залежить від коваріацій між активами [8]:

$$\sigma_p^2 = w^T \Sigma w = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}, \quad (1.8)$$

де σ_{ij} - коваріація між дохідностями активів i та j .

Саме ця залежність робить диверсифікацію ефективним механізмом зниження ризику: включення до портфеля активів із низькою або від'ємною кореляцією між собою зменшує сукупну дисперсію навіть без зниження середньої дохідності.

Коефіцієнт варіації (CV) є відносною мірою ризику, яка усуває залежність стандартного відхилення від масштабу дохідності, що дозволяє коректно порівнювати ризиковість активів із різними рівнями дохідності [8]:

$$CV = \sigma / |E[r]| * 100\% \quad (1.9)$$

Економічний зміст CV полягає у відображенні рівня ризику, що припадає на одиницю середньої дохідності, у відсотковому вираженні. Нижче значення CV відповідає вищій ефективності активу з точки зору співвідношення ризик-дохідність. Слід зазначити, що CV втрачає коректну інтерпретацію, якщо $E[r]$ близьке до нуля або від'ємне, тому цей показник використовується у поєднанні з іншими мірами ризику [8].

Коефіцієнт асиметрії характеризує ступінь відхилення розподілу дохідностей від симетричного [9]:

$$Skewness = (1/T) \sum_i \left[(r_i - E[r]) / \sigma \right]^3, \quad (1.10)$$

Для фінансових активів від'ємна асиметрія (лівий хвіст) є типовою і означає, що екстремально великі збитки трапляються частіше, ніж передбачає нормальний розподіл. Особливо виражена негативна асиметрія властива криптоактивам у кризові періоди.

Ексцес (куртозис) вимірює «гостроту» піку розподілу та «товщину» хвостів порівняно з нормальним розподілом [9]:

$$Excess\ Kurtosis = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_i \left[(r_i - E[r]) / \sigma \right]^4 - 3, \quad (1.11)$$

Додатний ексцес означає «товсті хвости»: ймовірність екстремальних значень вища, ніж при нормальному розподілі. Більшість фінансових часових рядів демонструє саме такий характер, що свідчить про недооцінку хвостового ризику у моделях, що ґрунтуються на нормальному розподілі [9].

Коефіцієнт β (бета) вимірює систематичний ризик активу – чутливість його доходності до коливань ринкового портфеля [9]:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, rm)}{Var(rm)} = \sigma_{im} / \sigma_m^2, \quad (1.12)$$

Актив із $\beta > 1$ є більш волатильним, ніж ринок у цілому, $\beta < 1$ – менш волатильним, $\beta < 0$ – рухається в протифазі з ринком. Для диверсифікованого портфеля β є адитивним: $\beta_p = \sum_i w_i \beta_i$.

Коефіцієнт Шарпа – найпоширеніший показник ефективності портфеля, що вимірює надлишкову доходність на одиницю сукупного ризику [2]:

$$SR = (E[r_p] - rf) / \sigma_p, \quad (1.13)$$

де rf – безризикова ставка доходності.

Вищий коефіцієнт Шарпа відповідає кращому компромісу між доходністю та ризиком. $SR < 0$ означає, що портфель показує гіршу доходність, ніж безризикові вкладення.

Value at Risk (VaR) – міра ризику, що відповідає на запитання: який максимальний збиток може зазнати портфель протягом заданого горизонту з імовірністю $(1-\alpha)$. При параметричному методі та нормальному розподілі [5]:

$$VaR_\alpha = -(E[r_p] + z_\alpha * \sigma_p)W, \quad (1.14)$$

де z_α – квантиль стандартного нормального розподілу (для $\alpha=5\%$: $z=-1,645$;

для $\alpha=1\%$: $z=-2,326$);

W – вартість портфеля.

Таким чином, $\text{VaR}_{95\%} = -(E[r_p] - 1,645 * \sigma_p)W$ означає: з імовірністю 95% збиток за обраний горизонт не перевищить цього значення.

Conditional Value at Risk (CVaR) – когерентна міра ризику, що усуває головний недолік VaR: нездатність охарактеризувати масштаб збитків у «хвості» розподілу [7]. CVaR визначається як умовне математичне сподівання збитків, що перевищують поріг VaR. Для нормально розподілених дохідностей CVaR може бути обчислений аналітично:

$$\text{CVaR}\alpha = (E[r_p] - \sigma_p * \varphi(z_\alpha)/\alpha)W, \quad (1.15)$$

де $\varphi(z_\alpha)$ – значення функції густини стандартного нормального розподілу при квантилі z_α . На відміну від VaR, CVaR задовольняє аксіомам когерентності (монотонність, позитивна однорідність), що робить його теоретично більш обґрунтованою мірою ризику [7].

Для зручності порівняння ключових показників ризику та дохідності наведено їх систематизований перелік у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 - Систематизація ключових показників оцінки інвестиційного портфеля

Показник	Формула	Економічний зміст
Мат.сподівання $E[r]$	$(1 / T)\Sigma R_t$	Середня очікувана дохідність за період
Стандартне відхилення σ	$\sqrt{[(1 / (T - 1))\Sigma(r_t - E[r])^2]}$	Абсолютна міра розкиду дохідностей (ризик)
Коеф. варіації CV	$\sigma / E[r] * 100\%$	Відносний ризик на одиницю дохідності
Бета-коеф. β	$\text{Cov}(r_i, r_m) / \text{Var}(r_m)$	Систематичний ринковий ризик активу
Коеф. Шарпа SR	$(E[r_p] - r_f) / \sigma_p$	Надлишкова дохідність на одиницю ризику
VaR ($\alpha\%$)	$-(E[r_p] + z_\alpha * \sigma_p)W$	Максимальний збиток із ймовірністю $(1 - \alpha)$
CVaR ($\alpha\%$)	$-(E[r_p r_p < \text{VaR}\alpha])$	Очікуваний збиток у «хвості» за VaR

Джерело: складено автором на основі [5; 6; 8; 9]

Узагальнення наведених показників дає змогу комплексно оцінити співвідношення ризику та дохідності фінансових активів, визначити рівень їхньої інвестиційної привабливості та сформулювати аналітичне підґрунтя для подальшої оптимізації інвестиційного портфеля.

1.2 Моделювання та прогнозування дохідності цифрових фінансових активів

Оцінювання дохідності фінансових інструментів є ключовим елементом процесу оптимізації портфеля: точніша оцінка очікуваної дохідності дозволяє сформулювати ефективнішу структуру портфеля. Серед статистичних методів прогнозування фінансових часових рядів найпоширенішим є клас моделей ARIMA (Auto-Regressive Integrated Moving Average), розроблених Боксом і Дженкінсом [10].

Теоретичною основою моделей ARIMA є поняття стаціонарного часового ряду: процес $\{r_t\}$ є стаціонарним, якщо його середнє значення та дисперсія є сталими в часі, а коефіцієнт кореляції між r_t та r_k є функцією лише лагу k , а не моменту часу t . Зазвичай ціна фінансового активу не є стаціонарною (вона демонструє тренди або випадкові шоки), але її логарифмічний процес прибутковості при відповідному диференціюванні, як правило, задовольняє умови стаціонарності [11].

Авторегресійна модель AR(p) стверджує, що поточне значення ряду є лінійною функцією p попередніх значень плюс випадкова помилка [10]:

$$r_t = c + \varphi^1 r_t^{-1} + \varphi^2 r_t^{-2} + \dots + \varphi_p r_t^{-p} + \varepsilon_t \quad (1.16)$$

де c - константа;

$\varphi_1, \dots, \varphi_p$ - авторегресійні коефіцієнти;

$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2\varepsilon)$ - «білий шум».

Умовою стаціонарності AR(p) є розташування коренів характеристичного полінома поза одиничним колом у комплексній площині.

Модель ковзного середнього MA(q) представляє поточне значення ряду як лінійну комбінацію q попередніх значень помилок [11]:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t + \theta^1 \varepsilon_t^{-1} + \theta^2 \varepsilon_t^{-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_t^{-q}, \quad (1.17)$$

де μ - середнє ряду;

$\theta_1, \dots, \theta_q$ - коефіцієнти ковзного середнього.

Модель $MA(q)$ за визначенням є стаціонарною, якщо її коефіцієнти задовольняють умовам оборотності.

Змішана модель $ARMA(p, q)$ комбінує обидва компоненти:

$$r_t = c + \sum_i \varphi_i r_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_j \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (1.18)$$

Якщо вихідний ряд є нестаціонарним, але стає стаціонарним після d -разового диференціювання, застосовується модель $ARIMA(p, d, q)$, де d - порядок інтегрування [10]. Для більшості фінансових дохідностей достатньо $d = 0$ або $d = 1$.

Ідентифікація специфікації моделі $ARIMA$ здійснюється за методологією Бокса–Дженкінса, яка охоплює три ітеративних етапи [11]:

- 1) Ідентифікація: аналіз графіку ряду, корелограми (ACF) і часткової корелограми (PACF) для попереднього визначення порядків p та q . $AR(p)$ характеризується різким обривом PACF на лагу p та поступовим спаданням ACF; $MA(q)$ - різким обривом ACF на лагу q та поступовим спаданням PACF.
- 2) Оцінювання: параметри моделі оцінюються методом максимальної правдоподібності (MLE). Вибір найкращої специфікації серед кандидатів здійснюється за інформаційними критеріями:

$$AIC = -2\ln(L) + 2k; \quad BIC = -2\ln(L) + k \cdot \ln(T), \quad (1.19)$$

де L - значення функції правдоподібності;

k - кількість параметрів;

T - обсяг вибірки.

Перевага надається моделі з меншим значенням AIC/BIC [11].

- 3) Діагностика: перевірка адекватності моделі через аналіз залишків $\{\hat{\varepsilon}_t\}$. Залишки мають поводитися як «білий шум»: тест Льюнга–Бокса перевіряє відсутність автокореляції (Н₀: перші m автокореляцій рівні нулю), тест Жарка–Бера - нормальність розподілу.

На практиці процес ідентифікації та оцінювання здійснюється автоматично за допомогою алгоритмів Auto-ARIMA, які систематично перевіряють різні комбінації параметрів і обирають найкращу специфікацію на основі критеріїв AIC

або BIC [11]. Це особливо важливо під час аналізу великих інвестиційних портфелів, де необхідно одночасно будувати моделі для численних активів.

Важливим обмеженням моделей ARIMA є їхня лінійність: вони не можуть безпосередньо врахувати ефекти умовної гетероскедастичності, характерні для фінансових часових рядів (волатильність є кумулятивною: спокійні періоди змінюються бурхливими). Моделі GARCH (узагальнена авторегресійна умовна гетероскедастичність) використовуються для моделювання динаміки волатильності [11]. У цьому дослідженні для прогнозування умовних середніх доходностей використовується ARIMA, що є достатнім для завдання оптимізації портфеля.

Цифрові активи - криптовалюти, токени, стеблкоїни і інші інструменти на базі технології блокчейн - є радикально новим класом фінансових інструментів, які відрізняються від традиційних активів за ризиковими характеристиками, ринковою мікроструктурою і регуляторним середовищем [12]. З погляду портфельного інвестування додавання цифрових активів до портфеля дає додаткові можливості диверсифікації, водночас при цьому з'являються специфічні виклики для аналітика і ризик-менеджера.

Ринок криптовалют має низку власних особливостей, які значною мірою відрізняють його від традиційних ринків фінансів [12; 13]:

- *надзвичайно висока волатильність*. Щорічне стандартне відхилення доходності Bitcoin і Ethereum постійно перевищує 70–100%, у той час як для акцій індексу S&P 500 цей показник рідко виходить за межі 15–25%. Це означає, що навіть невелика частка криптоактивів у портфелі може значно збільшити його загальний ризик.

- *«товсті хвости» розподілу прибутковості*. Асиметрія розподілу для біткоїна та ефіріума, як правило, у кілька разів перевищує асиметрію нормального розподілу, що вказує на значно вищу ймовірність щоденної екстремальної волатильності ($\pm 10\text{--}20\%$ або більше). Це робить параметричні методи розрахунку VaR, які припускають нормальний розподіл, схильними до недооцінки ризику [12].

- *нестабільна кореляція з традиційними активами.* Емпіричні дослідження показують, що в спокійних ринкових умовах кореляція біткоїна з індексом S&P 500, золотом та облігаціями є відносно низькою, але різко зростає під час криз - це відоме як «феномен підвищеної кореляції під час стресу» [14]. Це суттєво обмежує цінність диверсифікації криптоактивів саме тоді, коли вона є найбільш необхідною.

- *цілодобова торгівля без вихідних* та відсутність центрального маркетмейкера призводять до частіших різких коливань цін і нижчої ліквідності ринку (порівняно з традиційними фондовими ринками), особливо для менш популярних криптовалют. Тому для аналізу портфеля зазвичай використовують біткоїн (BTC) та ефіріум (ETH) як найбільш ліквідні та капіталомісткі активи на ринку.

- *регуляторна невизначеність.* Відсутність єдиного глобального регулювання ринку криптовалют, а також можливість раптових заборон або значних обмежень у різних юрисдикціях є факторами, які не можна кількісно оцінити за допомогою стандартних статистичних моделей, але які суттєво впливають на інвестиційний ризик [14].

Незважаючи на ці характеристики, включення криптовалют до диверсифікованого портфеля може бути доцільним з кількох причин. По-перше, висока очікувана прибутковість (хоча й зі значно вищим ризиком) може покращити коефіцієнт Шарпа оптимального портфеля навіть за відносно скромного розподілу активів у криптовалюті. По-друге, протягом певних ринкових циклів біткоїн демонстрував слабку кореляцію з акціями та позитивну кореляцію із золотом, що робить його потенційним засобом хеджування від інфляції [14]. По-третє, зростаюча інституційна участь на ринку криптовалют (хедж-фонди, ETF, пенсійні фонди) поступово підвищує його зрілість та ліквідність.

З методологічної точки зору, включення цифрових активів вимагає від дослідника запровадження низки додаткових заходів: ретельного вивчення розподілу дохідності для виявлення «товстих хвостів» та перекосів; використання

надійних оцінок коваріаційної матриці (наприклад, Ledoit-Wolf) для зменшення чутливості результатів оптимізації до викидів; використання CVaR замість VaR як міри ризику через неадекватність нормального розподілу; а також проведення поглибленого сценарного аналізу та стрес-тестування для оцінювання поведінки портфеля в кризових умовах [12, 15].

Усі зазначені особливості цифрових активів враховані у методологічному підході даної роботи: аналіз описової статистики включає оцінку ексцесу та асиметрії, матриця коваріацій оцінюється методом Ledoit-Wolf, а оцінка ризику портфеля здійснюється за допомогою VaR, CVaR та імітаційного моделювання Монте-Карло.

РОЗДІЛ 2

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ДОХІДНОСТІ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

2.1 Статистичний аналіз фінансових часових рядів

Для проведення емпіричного дослідження та побудови математичних моделей оптимізації інвестиційного портфеля сформовано вибірку з 10 фінансових активів. До аналізу включено інструменти, які репрезентують різні сектори економіки та класи активів, що має забезпечити належний рівень диверсифікації, а саме:

- 1) Технологічний сектор: Apple Inc. (AAPL), Microsoft Corp. (MSFT);
- 2) Фінансовий та енергетичний сектори: JPMorgan Chase & Co. (JPM), Exxon Mobil Corp. (XOM);
- 3) Захисний сектор: Procter & Gamble (PG), Johnson & Johnson (JNJ);
- 4) Сировинні ринки та облігації: Золото (GC=F), Державні довгострокові облігації США (TLT);
- 5) Цифрові активи (Криптовалюти): Bitcoin (BTC-USD), Ethereum (ETH-USD).

Джерелом даних є фінансова платформа Yahoo Finance [16]. Досліджуваний період охоплює проміжок часу з 1 січня 2021 року по 1 січня 2026 року. Для зменшення впливу ринкового мікрошуму (денної волатильності) та уникнення проблеми несинхронних торгів, за базовий інтервал обрано щотижневі ціни закриття (Weekly frequency).

Для програмної реалізації збирання даних застосовано засоби мови програмування Python з використанням бібліотек `yfinance` та `pandas`. Фрагмент очищеного датасету логарифмічних дохідностей у USD наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Фрагмент очищеного датасету

Дата	AAPL	MSFT	JPM	XOM	PG	JNJ	GC=F	TLT	BTC	ETH
2021-01-04	129.41	222.42	127.07	41.34	121.29	153.07	1898.9	158.75	32127	1040
2021-01-11	126.46	213.26	130.35	42.28	118.89	158.37	1849.9	157.51	35566	1233
2021-01-19	143.16	224.35	135.51	42.88	122.67	162.49	1855.7	156.17	35742	1228
2021-01-25	143.16	232.90	136.77	43.77	121.37	161.34	1851.2	155.92	32296	1382
2021-02-01	134.14	231.96	136.02	46.19	118.55	157.48	1815.1	149.85	37577	1649

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Перед побудовою моделей доцільно оцінити базові характеристики розподілу доходностей - середнє значення, варіацію, асиметрію, ексцес. Це дозволяє:

- визначити попередній рівень дохідності та ризику;
- виявити нестандартні статистичні властивості;
- оцінити доцільність застосування параметричних методів.

Без цього етапу подальші розрахунки можуть базуватися на некоректних припущеннях щодо структури даних.

Описова статистика набору даних дає змогу оцінити кількісні характеристики вибраних інструментів задля розуміння їхньої поведінки, ризиковості та придатності для вміщення в оптимальний портфель (табл.2.2).

Таблиця 2.2 – Результат описової статистики фінансових активів

Показник	AAPL	BTC	ETH	GC=F	JNJ	JPM	MSFT	PG	TLT	XOM
Сер. дохідність (%)	0.291	0.312	0.344	0.313	0.152	0.382	0.321	0.603	-0.153	0.456

Продовження таблиці 2.2

Показник	AAPL	BTC	ETH	GC=F	JNJ	JPM	MSFT	PG	TLT	XOM
Волатильність σ (%)	3.530	7.757	10.046	2.098	2.246	3.326	3.262	2.403	1.989	3.714
CV (%)	1212	2486	2920	671	1477	871	1017	399	н/д*	815
Асиметрія	-0.271	-0.429	-0.607	0.067	0.237	-0.393	-0.078	-0.272	-0.132	-0.96
Ексцес	0.363	3.137	2.789	0.799	0.488	0.826	0.684	0.439	-0.242	1.072

* CV для TLT не розраховується, оскільки $E[r] < 0$ (від'ємна дохідність робить показник економічно беззмістовним)

Джерело: розроблено автором на основі [16]

За результатами таблиці 2.2 можна зробити такі висновки: найвищу середню тижневу прибутковість продемонстрував енергетичний гігант XOM (0.45%); цифрові активи (ETH, BTC) мають високу прибутковість, проте їх волатильність (нестабільність) (7.7%-10%), що у 3-5 разів перевершує нестабільність традиційних акцій; TLT (облігації) - єдиний актив з негативною прибутковістю за цей відрізок часу, що спричинено циклом зростання відсоткових ставок; майже всі активи мають негативну асиметрію, а найбільша вона у ETH-USD (-0.60) та BTC-USD (-0.42) це означає, що для цих активів типові рідкісні, але вагомні спади, що є звичним для фінансових ринків у часи паніки; золото (GC=F) та JNJ мають позитивну асиметрію, що робить їх стабілізуючими активами; найвищий ексцес спостерігається у Bitcoin (3.13) та Ethereum (2.78), значення ексцесу суттєво відрізняються від 0 (який притаманний нормальному розподілу), тобто аномально великі стрибки вартості трапляються набагато частіше, ніж передбачається. Найнижчий CV продемонстрував PG (399%), що означає найкраще співвідношення ризику до дохідності серед усіх розглянутих активів, тобто на кожен відсоток середньої дохідності припадає лише 3,99 відсоткових пункти стандартного відхилення. Золото (GC=F) також характеризується відносно низьким CV (671%) попри помірну дохідність.

Для візуального сприйняття характеристик активів побудовано декілька графіків, які зображені на рис.2.1.

Активи демонструють різний баланс між дохідністю та ризиком. Наприклад, криптовалюти (ETH, BTC) мають найвищу волатильність, але й найвищу середню дохідність. З іншого боку, такі активи як TLT і PG – менш ризикові, але й дохідність нижча. Розподіл прибутковості варіюється: деякі активи мають негативну асиметрію (наприклад, JPM, ETH-USD), що вказує на більший ризик падіння, тоді як інші (наприклад, JNJ) – позитивну. За ексцесом найбільше «товстохвостих» розподілів спостерігається у ETH-USD, BTC-USD і золота (GC=F), що свідчить про більшу ймовірність екстремальних змін.

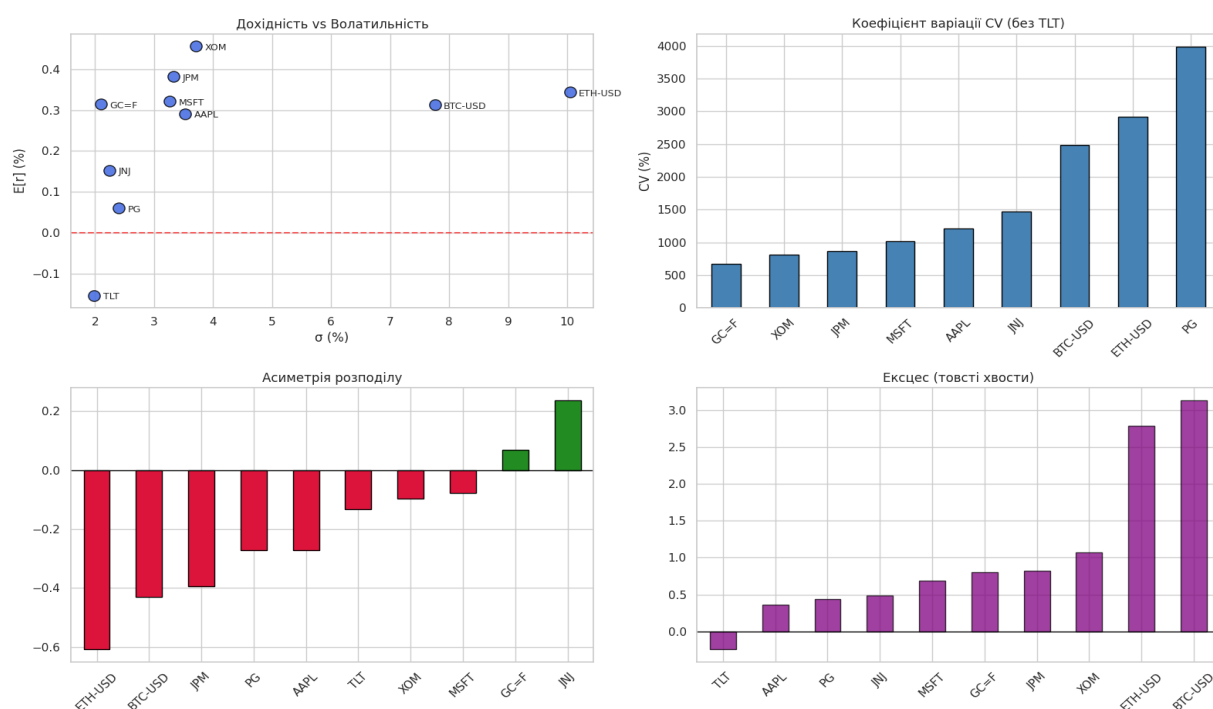


Рисунок 2.1 – Візуалізація статистичних характеристик активів

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Оскільки ключовим принципом портфельного інвестування є диверсифікація, необхідно оцінювати взаємозв'язки між активами. Розрахунок коваріацій і коефіцієнтів кореляції дозволяє сформувати коваріаційну матрицю – основу моделі оптимізації портфеля за підходом Гаррі Марковіц. Саме на цьому етапі визначається потенціал зниження ризику через поєднання активів з низькою або від'ємною кореляцією.

Для розуміння взаємозв'язків між обраними інструментами розраховано матрицю кореляцій Пірсона [17] для дохідностей усіх 10 активів (рис. 2.2). Згідно

отриманих результатів спостерігається висока позитивна кореляція між Bitcoin (BTC-USD) та Ethereum (ETH-USD), тобто ринок криптовалют рухається єдиним фронтом і додавання обох активів до портфеля не дасть суттєвого ефекту диверсифікації ризиків у межах цього класу. Кореляція між цифровими активами та більшістю традиційних акцій (наприклад, PG, JNJ) є близькою до нуля або слабкою позитивною, а це підтверджує гіпотезу про те, що криптоактиви можуть виступати незалежним інструментом для розширення межі ефективності портфеля.

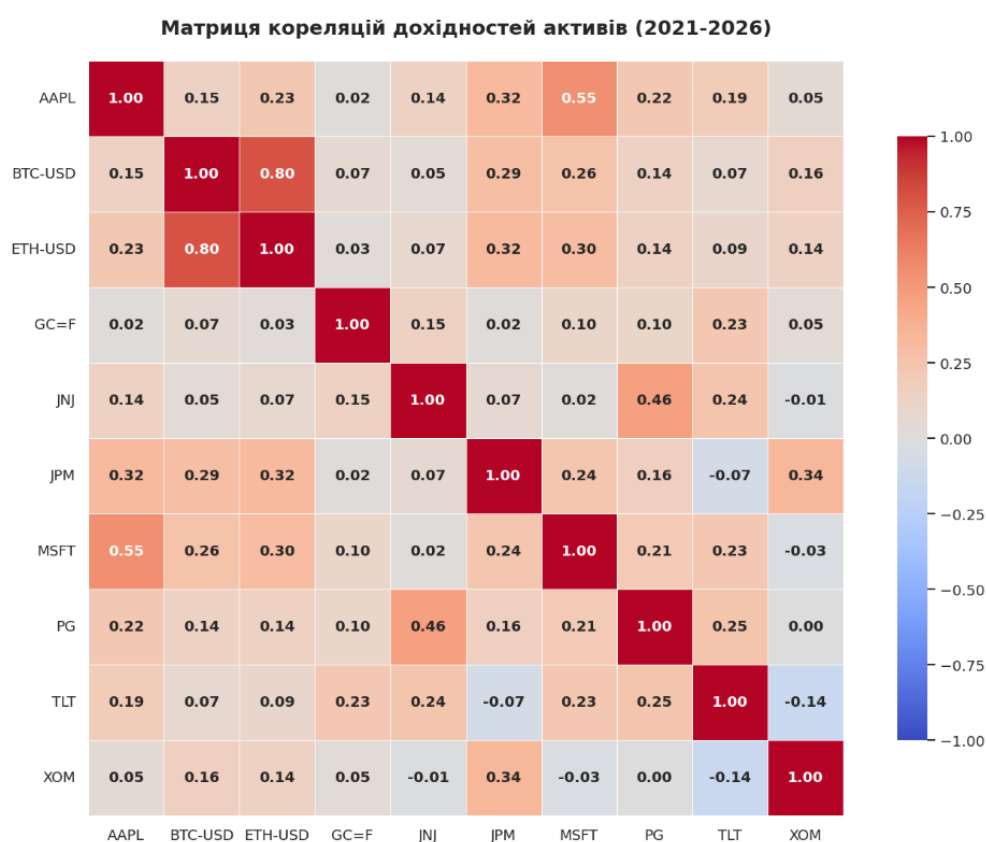


Рисунок 2.2 – Матриця кореляцій дохідностей активів

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Золото (GC=F) та державні облігації (TLT) демонструють стабільно низьку або від'ємну кореляцію з фондовим ринком (особливо з технологічним сектором - AAPL, MSFT). Наявність таких від'ємних значень (сині зони у матриці кореляцій) є математичною основою для хеджування: під час падіння акцій ці інструменти здатні компенсувати збитки. Наявність в аналізованій вибірці активів із низькою та від'ємною кореляцією створює ідеальні передумови для подальшої

математичної оптимізації, тобто це дозволить алгоритму знайти такі вагові коефіцієнти, які суттєво знизять загальний ризик системи порівняно з ризиком кожного окремого інструменту.

Для опису динаміки часових рядів застосовують моделі, які вимагають виконання певних припущень, зокрема стаціонарності та відсутності автокореляції залишків. Ігнорування цього етапу може призвести до хибних висновків і статистично неспроможних моделей. Така перевірка властивостей даних логічно передуює їхньому математичному моделюванню.

Отримані дані цін фінансових активів, насамперед перевіряють на (не)стаціонарність. У разі нестаціонарних даних, коректне застосування більшості економетричних моделей (зокрема, APIMA) неможливе. Стаціонарність часового ряду передбачає, що його статистичні характеристики (середнє значення, дисперсія) не змінюються з часом. Для перевірки стаціонарності часових рядів застосовано тест Дікі-Фуллера, результати тестування представлені в табл. 2.3:

Таблиця 2.3 – Результати тесту Дікі-Фуллера (ADF-тест).

Актив	ADF-статистика	p-value	Висновок
AAPL	-15.47	< 0.0001	Стаціонарний
MSFT	-16.66	< 0.0001	Стаціонарний
JPM	-16.27	< 0.0001	Стаціонарний
XOM	-18.17	< 0.0001	Стаціонарний
PG	-7.65	< 0.0001	Стаціонарний
JNJ	-16.44	< 0.0001	Стаціонарний
GC=F	-16.62	< 0.0001	Стаціонарний
TLT	-16.32	< 0.0001	Стаціонарний
BTC-USD	-15.58	< 0.0001	Стаціонарний
ETH-USD	-15.64	< 0.0001	Стаціонарний

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Нульова гіпотеза (H_0) тесту ADF стверджує, що часовий ряд є нестационарним. Отримані результати свідчать, що для всіх обраних активів (як традиційних, так і цифрових) значення p-value становить менше ніж 0.0001, що значно нижче критичного рівня значущості $\alpha = 0.05$. Відповідно це дає підстави відхилити нульову гіпотезу та прийняти альтернативну гіпотезу (H_1) про стаціонарність досліджуваних рядів. Лише після отримання оцінок очікуваної дохідності, індивідуального та систематичного ризику, а також коваріаційної структури активів можливе формування оптимального портфеля відповідно до заданого критерію (мінімізація ризику або максимізація дохідності).

2.2 Економетричне моделювання та прогнозування дохідності фінансових активів

Моделювання дохідності фінансових активів є ключовим етапом кількісного аналізу інвестицій, оскільки саме очікувана дохідність виступає базовим параметром при формуванні та оптимізації портфеля. Його мета - отримання статистично обґрунтованої оцінки майбутніх доходів з урахуванням ризику та впливу ринкових факторів. Об'єктом виступають часові ряди доходностей фінансових інструментів. У більшості випадків аналіз здійснюється не щодо абсолютних цін, а щодо їх змін (простих або логарифмічних доходностей), що забезпечує кращі статистичні властивості рядів та можливість застосування економетричних методів [18].

У сучасній фінансовій аналітиці сформувалися декілька концептуальних підходів до моделювання дохідності активів, які відрізняються за методологічною основою та припущеннями щодо поведінки ринку.

Найпростішим є статистичний підхід, який базується на аналізі історичних даних. У межах цього підходу майбутня дохідність розглядається як функція її

минулих значень, а оцінка очікуваного доходу здійснюється через середню історичну дохідність або трендові характеристики ряду. Передбачається відносна стабільність статистичних параметрів у часі. Такий підхід є методично простим і придатним для первинного аналізу, однак він не враховує впливу зовнішніх економічних факторів.

Більш складним є факторний (економетричний) підхід, відповідно до якого дохідність активу формується під впливом одного або кількох систематичних факторів. У цьому разі дохідність моделюється як залежна змінна в регресійній моделі, а пояснювальними змінними виступають ринкові індекси, макроекономічні показники або галузеві індикатори. Класичним прикладом є модель CAPM, у якій очікувана дохідність визначається через систематичний ризик (β -коефіцієнт) та премію за ринковий ризик. Факторні моделі дозволяють пояснити структуру доходності та оцінити чутливість активу до змін ринкової кон'юнктури [9].

Окремий напрям становлять моделі часових рядів, у межах яких дохідність розглядається як стохастичний процес. Такі моделі враховують внутрішню динаміку ряду, наявність автокореляції та можливі структурні зміни. Авторегресійні та інтегровані моделі дозволяють описати поведінку середнього значення доходності, тоді як моделі умовної гетероскедастичності застосовуються для прогнозування змінної волатильності, що є характерною рисою фінансових ринків.

Отже, вибір підходу до моделювання залежить від мети дослідження, доступності даних і рівня необхідної аналітичної глибини. На практиці часто поєднуються різні методи з метою підвищення достовірності прогнозних оцінок.

В даному дослідженні прогнозування доходності для обраних традиційних та цифрових активів здійснюється за моделями класу ARIMA (авторегресії та ковзного середнього), які ефективно працюють із фінансовими часовими рядами.

Моделі класу ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) посідають важливе місце у моделюванні доходності фінансових активів завдяки своїй універсальності та адаптивності до різних типів часових рядів. Їх ключова

перевага полягає у здатності працювати як зі стаціонарними, так і з нестаціонарними рядами шляхом використання операції інтегрування (різницювання), що дозволяє усунути тренд або стохастичну нестабільність.

Суттєвою перевагою ARIMA є поєднання двох механізмів пояснення динаміки - авторегресійного компонента (врахування залежності поточного значення від попередніх) та компонента ковзного середнього (врахування впливу випадкових збурень минулих періодів). Це дозволяє досить гнучко описувати внутрішню структуру ряду без необхідності включення зовнішніх факторів [19]. Модель забезпечує відносно точні короткострокові прогнози, що особливо важливо для фінансових ринків, де горизонт прийняття рішень часто є обмеженим. Крім того, процедура ідентифікації параметрів (аналіз автокореляційної та часткової автокореляційної функцій) є формалізованою, що підвищує об'єктивність вибору специфікації.

Ще однією перевагою є економічність параметризації: для адекватного опису ряду часто достатньо невеликої кількості параметрів. Це знижує ризик переадаптації моделі та забезпечує кращу прогностичну стійкість.

Водночас у практиці портфельного аналізу ARIMA нерідко використовується у поєднанні з моделями умовної гетероскедастичності (ARCH/GARCH), що дозволяє окремо моделювати середнє значення доходності та її волатильність. Така комбінація забезпечує більш повну характеристику фінансового ряду і підвищує якість прогнозів ризику.

Автокореляція показує ступінь залежності поточних значень доходності від їхніх минулих значень (лагів). Для коректної специфікації моделі $ARIMA(p, d, q)$ необхідно визначити три ключові параметри: p (порядок авторегресії), d (порядок інтегрування) та q (порядок ковзного середнього). Оскільки в попередньому розділі тестом Дікі-Фуллера було підтверджено стаціонарність вихідних даних без додаткових перетворень, параметр інтеграції прийнято рівним $d = 0$. Для визначення параметрів p та q було побудовано та проаналізовано графіки автокореляційної (ACF) та часткової автокореляційної (PACF) функцій для

кожного активу (рис. 2.3). Усі графіки для всіх досліджуваних активів наведені в Додатку А.

За графіками, наведеними на рис. 2.3, можна зробити такі висновки: для обох активів спостерігається відсутність значущих коефіцієнтів автокореляції на перших лагах (всі значення, крім нульового, знаходяться в межах блакитної зони довірчого інтервалу); притаманні поодинокі сплески (наприклад, на 9-му лагу для MSFT або 16-му для PG) мають випадковий характер і не утворюють системної залежності, тобто поточна дохідність активів практично не залежить від їхніх минулих значень; графіки PACF підтверджують висновки ACF. Оскільки ряди є стаціонарними ($d=0$), а явні лагові залежності відсутні, для цих активів найбільш адекватною може бути модель $ARIMA(0, 0, 0)$ або модель $ARIMA(1, 0, 1)$ для врахування мінімальних короткострокових коливань.

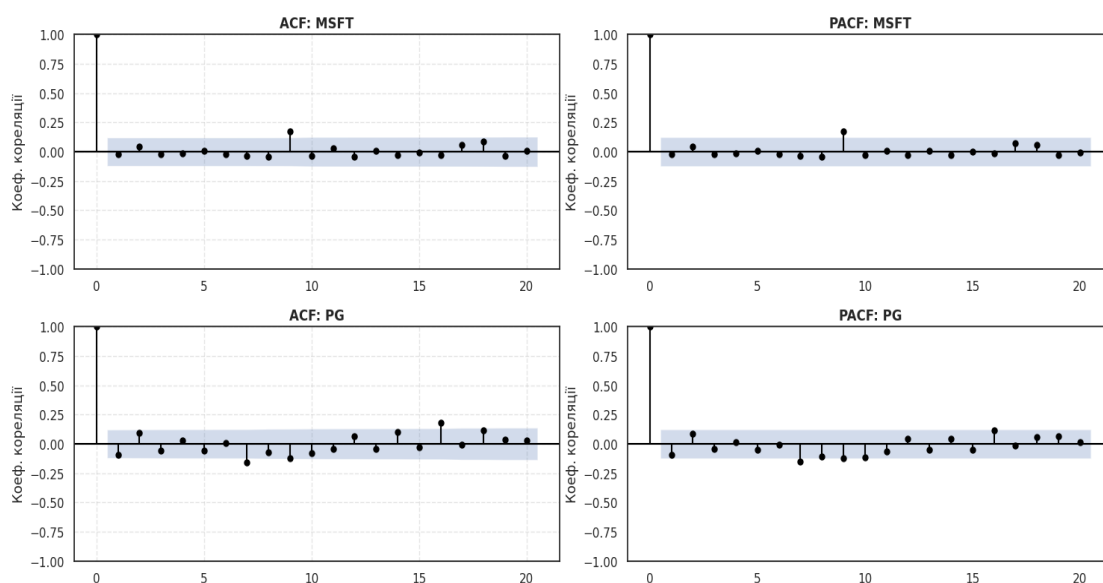


Рисунок 2.3 – Графіки ACF та PACF для двох активів

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Вибір кращої ARIMA-моделі ґрунтується на поєднанні економетричної адекватності та прогнозної ефективності, а не лише на кількості параметрів. Насамперед модель має бути стаціонарною та статистично коректною. Важливо, щоб залишки моделі відповідали властивостям «білого шуму», тобто не мали автокореляції та демонстрували сталість дисперсії. Інформаційні критерії AIC та BIC використовуються для оцінки балансу між якістю апроксимації та складністю

моделі, а остаточний вибір здійснюється на основі перевірки прогностичної здатності на тестовій вибірці.

Для забезпечення максимальної точності прогнозування та уникнення суб'єктивності при виборі параметрів моделей, у роботі застосовано алгоритм Auto-ARIMA. Даний підхід базується на ітераційному пошуку оптимальної комбінації параметрів (p, d, q) шляхом мінімізації інформаційного критерію Акаїке (AIC). Критерій AIC дозволяє знайти баланс між точністю моделі та її складністю, запобігаючи ефекту перенавчання (overfitting) [20]. У процесі автоматичного підбору встановлено обмеження на параметр $d = 0$ (враховуючи підтверджену стаціонарність рядів) та максимальний порядок лагів $p, q \leq 3$. Результати автоматичного підбору показують (табл. 2.4), що для більшості активів оптимальними виявилися моделі низького порядку, такі як ARIMA(1,0,0) або ARIMA(0,0,0). Це підтверджує попередні висновки аналізу ACF/PACF про те, що фінансові ринки мають "коротку пам'ять", і найбільш значущий вплив на майбутню дохідність мають події найближчого минулого. Для BTC-USD, ETH-USD та TLT прогноз становить 0.000000, це можливо, коли модель Auto-ARIMA не знаходить стійкого тренду і вважає, що найбільш ймовірне значення наступного тижня - це нульова зміна (або дуже близька до неї), тобто вона не обіцяє прибутків там, де ринок занадто хаотичний.

Таблиця 2.4 – Результати автоматичного підбору моделей AUTO-ARIMA

Актив	Модель (p,d,q)	AIC	Прогноз на 1 тиждень (%)
AAPL	(0, 0, 0)	-819.72	0.000
XOM	(1, 0, 0)	-766.14	0.004
JPM	(0, 0, 0)	-820.72	0.000
GC=F	(0, 0, 0)	-1032.94	0.000
MSFT	(0, 0, 0)	-822.16	0.003
JNJ	(0, 0, 0)	-1008.84	0.000
BTC-USD	(0, 0, 0)	-448.74	0.000
ETH-USD	(0, 0, 0)	-358.13	0.000
TLT	(0, 0, 0)	-1019.65	-0.002
PG	(0, 0, 0)	-957.79	0.000

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Результати автоматичного підбору показують, що для більшості активів оптимальними виявилися моделі низького порядку. Для більшості активів прогноз становить 0,000 - це відбувається тоді, коли модель Auto-ARIMA не знаходить стійкого тренду і вважає, що найбільш імовірне значення наступного тижня - це нульова зміна. Для інших активів з прогнозом відмінним від нуля алгоритм виявив значущі автокореляційні зв'язки; у цих акціях присутня певна «інерція» або короткострокові тренди, які модель може використати для прогнозу

Для підтвердження адекватності побудованих моделей ARIMA необхідно перевірити, чи їхні залишки поведуть себе як «білий шум», тобто чи відсутня в них систематична автокореляція. Для цього застосовується тест Льюнга–Бокса, статистика якого має вигляд [21]:

$$Q(m) = T(T+2) \cdot \sum_{k=1}^m [\hat{\rho}_k^2 / (T-k)], \quad (2.1)$$

де T - кількість спостережень;

$\hat{\rho}_k$ - вибіркова автокореляція залишків на лагу k ;

m - кількість перевірених лагів.

За нульовою гіпотезою H_0 перші m автокореляцій рівні нулю (залишки є «білим шумом»); $Q(m)$ розподілений як $\chi^2(m)$. Якщо $p\text{-value} > 0.05$, H_0 не відхиляється - модель адекватна.

У таблиці 2.5 наведено результати тесту Льюнга–Бокса для кожного активу при $m = 10$ лагах.

Значення p -критерію тесту Льюнга–Бокса для найбільш досліджуваних активів перевищують рівень значущості $\alpha = 0.05$, що свідчить про відсутність доказів наявності автокореляції в залишках моделей. Це означає, що залишки поведуться як «білий шум», а підібрані ARIMA-моделі є загалом адекватними та добре характеризують структуру часових рядів. Водночас для активу PG значення p менше ніж 0.05, тому нульова гіпотеза про відсутність автокореляції відхиляється. Це може вказувати на наявність немодельованої залежності в залишках та недосконалість моделі для цього конкретного активу. Отже, можна зробити висновок, що більшість підібраних ARIMA-моделей є статистично

обґрунтованими і можуть використовуватися як для прогнозування, так і для фінансового аналізу та оптимізації портфеля.

Таблиця 2.5 - Результати тесту Льюнга–Бокса для залишків моделей ARIMA

Актив	Статистика Q(10)	p-value	Висновок
AAPL	13.17	0.21	Адекватна
BTC-USD	5.08	0.83	Адекватна
ETH-USD	10.06	0.43	Адекватна
GC=F	5.50	0.85	Адекватна
JNJ	4.21	0.93	Адекватна
JPM	8.69	0.56	Адекватна
MSFT	15.27	0.12	Адекватна
PG	18.93	0.04	Не адекватна
TLT	4.39	0.92	Адекватна
XOM	7.49	0.67	Адекватна

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Оцінка якості прогнозу (MAE, RMSE). Дані розбито на навчальну вибірку (2021–2024, 80%) та тестову (2024–2026, 20%). Моделі оцінювались на навчальній вибірці, а якість прогнозу - на тестовій (табл. 2.6).

Таблиця 2.6 – Оцінка якості прогнозів ARIMA на тестовій вибірці

Актив	MAE (тест.)	RMSE (тест.)	RMSE (бенчмарк)
AAPL	0.033139	0.041776	0.075170
BTC-USD	0.043840	0.056595	0.058049
ETH-USD	0.075451	0.094164	0.101556

Продовження таблиці 2.6

Актив	MAE (тест.)	RMSE (тест.)	RMSE (бенчмарк)
GC=F	0.020280	0.025022	0.023273
JNJ	0.021554	0.026625	0.031428
JPM	0.026686	0.033158	0.037765
MSFT	0.021268	0.029821	0.056951
PG	0.019042	0.023641	0.032588
TLT	0.012045	0.016321	0.016469
XOM	0.024898	0.032975	0.033259

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Для переважної більшості активів (крім Золота GC=F) модель показала кращі результати (RMSE тест.), ніж базовий орієнтир (RMSE бенчмарк). Найбільші помилки модель робить на криптовалютах, бо криптовалюта абсолютно дика, вона постійно стрибає вгору-вниз (волатильна). Найменша помилка вийшла на TLT (0.016) - це державні облігації США. Вони за своєю природою стабільні та передбачувані. Моделі ARIMA довели свою адекватність, обігравши стандартні ринкові орієнтири у 9 випадках з 10. Найвищу точність модель демонструє для відносно стабільних акцій та облігацій, тоді як для криптоактивів рівень похибки є вищим через їхню підвищену волатильність, проте отримані результати все одно перевищують ефективність базових методів прогнозування

2.3 Формування та оптимізація інвестиційного портфеля

На основі розрахованих прогнозних значень дохідностей, отриманих за допомогою комбінованого підходу (моделювання ARIMA та розрахунку історичного середнього), побудовано оптимальний інвестиційний портфель за критерієм Максимального коефіцієнта Шарпа (Max Sharpe).

У даному дослідженні за критерієм оптимізації використано максимум коефіцієнта Шарпа, запропонованого William F. Sharpe. Коефіцієнт Шарпа визначається як відношення надлишкової дохідності портфеля (різниці між очікуваною дохідністю портфеля та безризиковою ставкою) до стандартного відхилення його доходності. Економічний зміст коефіцієнта Шарпа полягає в тому, що він показує величину надлишкової дохідності, яку отримує інвестор на одиницю прийнятого ризику.

Результати оптимізації (рис. 2.7 та табл. 2.7) дозволяють зробити кілька важливих теоретичних та практичних висновків: річна очікувана дохідність портфеля становить 17.09% при річній волатильності (ризiku) 10.68%; коефіцієнт Шарпа рівний 0.2220 (у тижневому вимірі), що свідчить про позитивну премію за ризик, тобто кожна одиниця взятого на себе ризику генерує додаткову надлишкову дохідність для інвестора; високе значення коефіцієнта варіації ($CV = 450.5\%$) є типовим для портфелів, що включають високоволатильні інструменти, та відображає значний розмах потенційних коливань навколо середнього значення. Нафтогазовий гігант ExxonMobil отримав максимальну частку в портфелі. Попри те, що його очікувана дохідність (0.3139%) не є найвищою, цей актив має унікальні низькі коефіцієнти кореляції з технологічним сектором та криптовалютами, виконуючи роль потужного стабілізатора та джерела стійкого внеску в загальну дохідність (0.1256%). Сумарно близько 39% портфеля розподілено між захисними активами: Золото (14.57%), Procter & Gamble (13.60%) та Johnson & Johnson (10.71%). Золото, як було доведено аналізом асиметрії, має позитивний правий хвіст, а PG та JNJ забезпечують низьковолатильний фундаментальний дохід.

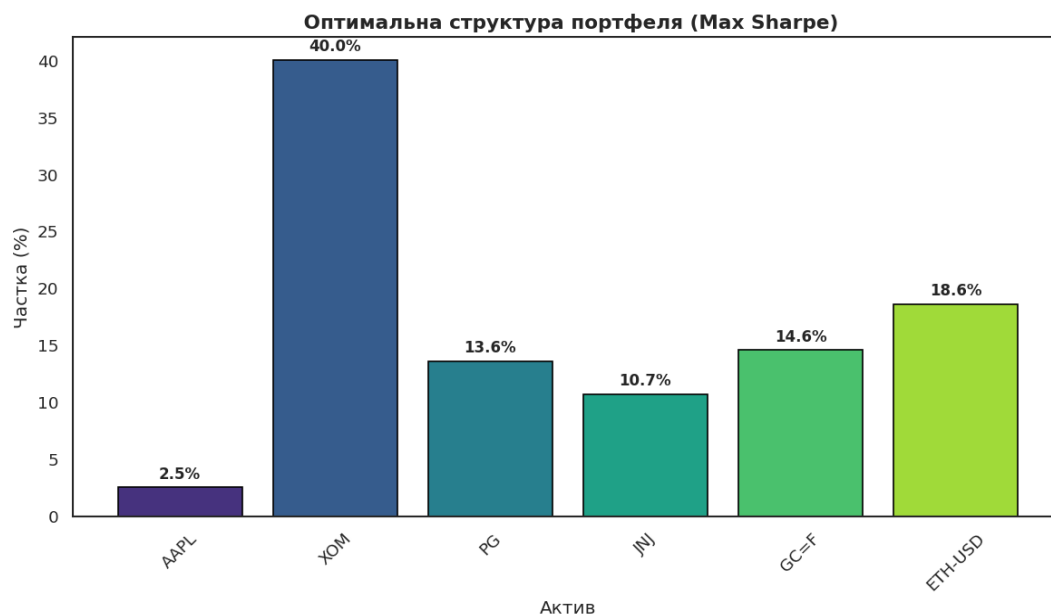


Рисунок 2.7 – Розподіл часток капіталу в оптимальному портфелі

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Таблиця 2.7 – Структура оптимального інвестиційного портфеля

Актив	Вага (частки)	Вага (%)	$E[r]$ активу (%)	Внесок у $E[r_p]$ (%)
AAPL	0.0252	2.52	0.2914	0.0073
MSFT	0.0000	0.00	0.3125	0.0000
JPM	0.0000	0.00	0.3443	0.0000
XOM	0.4000	40.00	0.3139	0.1256
PG	0.1360	13.60	0.1527	0.0208
JNJ	0.1071	10.71	0.3821	0.0409
GC=F	0.1457	14.57	0.3293	0.0480
TLT	0.0000	0.00	0.0603	0.0000
BTC-USD	0.0000	0.00	-0.2102	-0.0000
ETH-USD	0.1860	18.60	0.4626	0.0861

Джерело: розроблено автором на основі [16]

На рис. 2.8 представлена Ефективна межа [22], побудована методом імітаційного моделювання (5000 ітерацій) [23]. Кожна точка на графіку відповідає окремому варіанту розподілу активів у портфелі. Червоною точкою позначено оптимальний портфель, який максимізує коефіцієнт Шарпа. Він забезпечує найкраще співвідношення між ризиком та дохідністю, базуючись на прогнозах ARIMA. Синьою точкою позначено портфель з глобально мінімальним ризиком

(Global Minimum Variance Portfolio). Перебування обраного портфеля на верхній межі "хмари" значень свідчить про високу ефективність запропонованої моделі. Портфелі, що знаходяться нижче межі, вважаються неефективними, оскільки для того ж рівня ризику можна отримати вищу дохідність, або для тієї ж дохідності - забезпечити нижчий ризик.

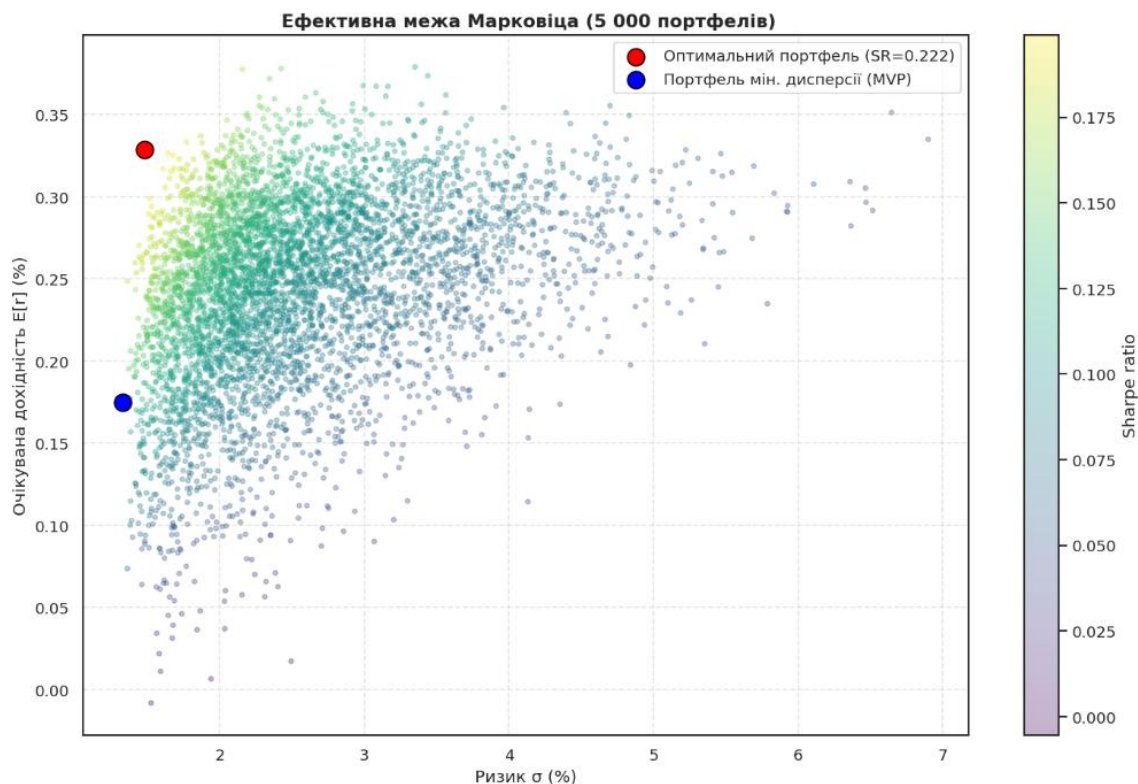


Рисунок 2.8 – Візуалізація ефективної межі Марковіца

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Отже, проведене дослідження демонструє практичну ефективність поєднання прогностного моделювання доходності за допомогою ARIMA та класичного підходу середньо-дисперсійної оптимізації за Марковіцем [1]. Отримані результати підтверджують, що використання кількісно обґрунтованих прогнозів доходності та оцінок ризику дозволяє сформувати збалансований інвестиційний портфель, який забезпечує максимальне співвідношення «дохідність–ризик». Розподіл активів у портфелі враховує як потенціал зростання, так і захисні функції окремих інструментів, що робить його адаптивним до змінювання ринкових умов та сприяє підвищенню прогнозованої ефективності інвестицій.

РОЗДІЛ 3

ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКУ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ УПРАВЛІННЯ

3.1 Оцінювання ризику портфеля на основі VaR, CVaR та максимального просідання

Для комплексної оцінки ризику оптимального портфеля застосовано систему показників ризикології, що охоплює параметричні, непараметричні та симуляційні методи. Такий мультиметодний підхід дозволяє отримати взаємодоповнюючі оцінки ризику і не залежати від жодного єдиного припущення щодо форми розподілу дохідностей.

Коефіцієнт варіації (CV) є першим рівнем аналізу ризику [24]. За отриманими результатами CV оптимального портфеля становить 450,5%. Це суттєво нижче, ніж CV окремих акцій (AAPL - 1212%, JPM - 871%) і радикально нижче за CV криптоактивів (BTC - 2486%, ETH - 2920%).

Value at Risk (VaR) розраховано трьома методами - параметричним (на основі нормального розподілу), методом історичного моделювання та методом Монте-Карло - для рівнів довіри 95% та 99%. Горизонт оцінки - один тиждень (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 - Результати розрахунку VaR та CVaR оптимального портфеля

Рівень довіри	VaR параметр. (%)	CVaR параметр. (%)	VaR історич. (%)	CVaR історич. (%)
95%	2.1067	2.7254	2.1936	3.0079
99%	3.1157	3.6175	3.6594	4.2442

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Інтерпретація результатів: $\text{VaR}_{95\%} = 2,107\%$ означає, що з імовірністю 95% тижневий збиток портфеля не перевищить 2,107% від його вартості. Для інвестора з капіталом 1 000 000 грн це означає, що в нормальних ринкових умовах щотижневий збиток із ймовірністю 95% не перевищить 21 067 грн. $\text{CVaR}_{95\%} = 2,725\%$ є більш жорсткою мірою ризику: він показує, що в 5% найгірших тижнів середній збиток сягатиме 2,725%. Перевищення CVaR над VaR на 0,619 в.п. відображає наявність помірного «хвостового ризику» [8].

Помітна розбіжність між параметричними та історичними оцінками при рівні 99% (VaR параметр. = 3,116% проти VaR істор. = 3,659%, різниця 0,543 в.п.) свідчить про наявність «товстих хвостів» у розподілі дохідностей портфеля. Це означає, що в екстремальних сценаріях реальні збитки можуть перевищувати параметричні оцінки, і тому саме історичний $\text{CVaR}_{99\%} = 4,244\%$ слід використовувати як консервативний орієнтир для ризик-менеджменту.

Монте-Карло оцінка [23]. Для перевірки параметричних результатів проведено імітаційне моделювання ($n = 10\,000$ симуляцій) метод генерує тисячі можливих сценаріїв майбутньої поведінки ринку на основі статистичних характеристик (середньої дохідності та матриці коваріацій), отриманих з реальних даних 2021-2026 рр. Це дозволяє побудувати повний розподіл можливих результатів і оцінити ризик значно точніше, ніж просто дивитись на середнє значення. (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2 - VaR та CVaR методом Монте-Карло ($n = 10\,000$)

Рівень довіри	VaR МК (%)	CVaR МК (%)
95%	2.0965	2.7080
99%	3.1240	3.5970

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Результати Монте-Карло практично збігаються з параметричними оцінками: $\text{VaR}_{95\%}$ МК = 2,097% проти параметричного 2,107% (відхилення 0,010 в.п.), $\text{CVaR}_{95\%}$ МК = 2,708% проти 2,725% (відхилення 0,017 в.п.). Така висока узгодженість трьох методів підтверджує надійність та стійкість отриманих оцінок.

На рисунку 3.1 кожен стовпчик показує, як часто (з якою щільністю імовірності) портфель отримував дохідність у певному діапазоні. Вісь X - тижнева дохідність у відсотках, вісь Y - щільність імовірності (чим вищий стовпчик, тим частіше такий результат зустрічається в симуляціях). Пік розподілу знаходиться трохи правіше від нуля приблизно в районі $+0,3-0,5\%$. Це відповідає очікуваній тижневій дохідності портфеля ($0,3286\%$), яку було отримано в оптимізації і наведено в таблиці 3.3. Розподіл є помірно асиметричним: правий хвіст (позитивні дохідності) простягається далі, ніж лівий (збитки). Ширина розподілу (розкид від -6% до $+6\%$) відповідає тижневій волатильності портфеля $\sigma = 1,4806\%$. Більша частина спостережень зосереджена в діапазоні від -3% до $+4\%$, що є помірним розкидом порівняно з окремими активами (наприклад, ЕТН мав $\sigma = 10,05\%$).

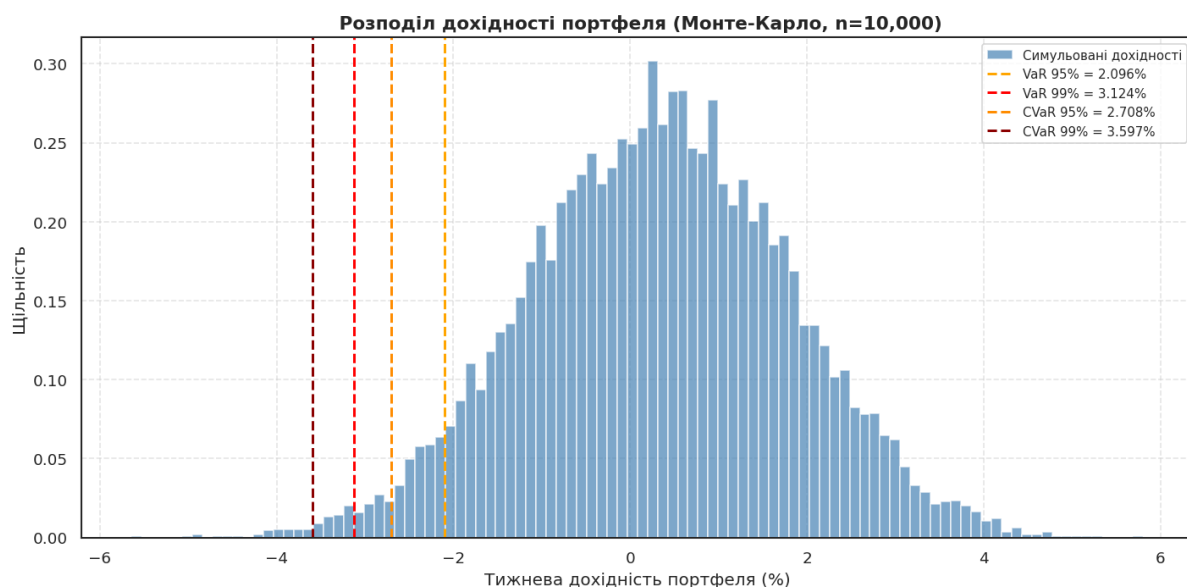


Рисунок 3.1 Розподіл дохідності портфеля

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Помаранчева пунктирна лінія $VaR_{95\%} = 2,096\%$ розташована приблизно на позначці $-2,1\%$ по осі X, тобто з імовірністю 95% тижневий збиток портфеля не перевищить $2,096\%$. Інакше кажучи, лише в 5% симульованих тижнів (тобто приблизно в 500 з 10 000) дохідність виявилась гіршою за $-2,096\%$. Вся площа гістограми ліворуч від цієї лінії становить рівно 5% від загальної площі. Для

інвестора з капіталом 1 000 000 грн це означає: у «нормальний» тиждень (95 тижнів зі 100) портфель не втратить більше ніж 20 960 грн.

Темно-помаранчева пунктирна лінія $CVaR_{95\%} = 2,708\%$ розташована лівіше від $VaR_{95\%}$. $CVaR$ (Conditional VaR або Expected Shortfall) показує середній збиток саме в тих 5% найгірших тижнів, які знаходяться за межею VaR . Тобто якщо ми вже «потрапили» до найгіршого сценарію (перейшли поріг $VaR_{95\%}$), то в середньому збиток сягне 2,708%, а не просто 2,096%. Різниця між $CVaR$ і VaR - 0,612 в.п. характеризує так званий «хвостовий ризик»: наскільки погано може бути у найгірших сценаріях. Невелика різниця (менше 1 в.п.) свідчить про те, що хвіст розподілу є відносно «тонким» і обрізаним, тобто катастрофічних сценаріїв небагато.

Червона пунктирна лінія $VaR_{99\%} = 3,124\%$ знаходиться ще лівіше на позначці приблизно 3,1%. Це більш жорстка межа, тобто лише в 1% симульованих тижнів (100 з 10 000) збиток перевищував 3,124%. Для практичного управління ризиком $VaR_{99\%}$ використовується як «стрес-поріг»: перетин цього рівня є сигналом для термінового перегляду структури портфеля. Слід зауважити, що між VaR 95% (2,096%) і VaR 99% (3,124%) різниця складає 1,028 в.п. Це означає, що при переході від «поганих» тижнів до «дуже поганих» збитки зростають ще майже на відсоток - помірний, але не нульовий стрибок.

Темно-червона пунктирна лінія $CVaR_{99\%} = 3,597\%$ є найлівішою і найбільш консервативною мірою ризику на графіку. Вона показує середній збиток у найгірших 1% сценаріїв (100 найгірших тижнів з 10 000). Значення 3,597% означає: якщо ринок увійшов у режим глибокої кризи (опинились у найгіршому 1% сценаріїв), то в середньому за тиждень портфель втрачатиме 3,597%. Різниця між $CVaR$ 99% (3,597%) і VaR 99% (3,124%) складає 0,473 в.п. - менша, ніж аналогічна різниця при 95%, що свідчить про відсутність екстремальних «хвостів» навіть у найгірших сценаріях. Зведене порівняння всіх показників ризику наведено у таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 - Зведені ризикові характеристики оптимального портфеля

Показник	Тижневе	Річне (~)
$E[r]$ - Очікувана дохідність (%)	0.3286	17.09
σ - Стандартне відхилення (%)	1.4806	10.68
CV - Коефіцієнт варіації (%)	450.5	—
Sharpe ratio	0.2220	0.2220
VaR 95% параметричний (%)	2.1067	—
VaR 99% параметричний (%)	3.1157	—
CVaR 95% параметричний (%)	2.7254	—
CVaR 99% параметричний (%)	3.6175	—
VaR 95% історичний (%)	2.1936	—
CVaR 99% історичний (%)	4.2442	—
VaR 95% Монте-Карло (%)	2.0965	—
CVaR 95% Монте-Карло (%)	2.7080	—
Max Drawdown (%)	-12.4549	—
Calmar Ratio	—	1.3721

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Максимальне просідання (Max Drawdown) – це крива просідання (drawdown) портфеля в часі, тобто наскільки поточна вартість портфеля відхиляється вниз від свого попереднього максимуму [25]. Коли крива на нулі - портфель на новому історичному максимумі. Коли крива опускається - портфель «в ямі» відносно кращого моменту. Динаміку просідання зображено на рис. 3.1.

2021-2022 роки - характеризують спокійний старт, тобто просідання незначні, в межах 2–3%. Ринок акцій і золото зростали, портфель регулярно оновлював максимуми (червона зона майже непомітна).

2022-2023 - найглибша яма (Max Drawdown) і буде найважливішою частиною графіка. Пунктирна лінія Max DD = -12,45% досягнута саме тут -

орієнтовно у другій половині 2022 року. Причини цілком зрозумілі: у 2022 році одночасно впали і акції (агресивне підвищення ставок ФРС), і облігації TLT (які реагують на ставки обернено), і криптовалюта (крах Terra Luna, FTX). Золото частково компенсувало, але не повністю. Видно, що портфель «був у ямі» тривалий час, а відновлення зайняло близько року.

2023-2026 - відновлення та стабілізація, адже після дна 2023 року портфель поступово відновився. Просідання стали меншими переважно в межах 2-5%. У 2025 році помітне ще одне невелике просідання (~5%), але воно значно менше за кризи 2022 року і портфель швидко відновився.



Рисунок 3.2 Просідання (Drawdown) оптимального портфеля (2021–2026)

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Якщо інвестор вклав 1 000 000 грн на початку 2021 року, то в найгірший момент (кінець 2022 - початок 2023) його портфель коштував приблизно 875 500 грн, тобто він «бачив» збиток 124 500 грн на екрані. Але якщо він не панікував і не продавав, то портфель відновився і пішов далі вгору.

$\text{Calmar Ratio} = \text{річна дохідність} / |\text{Max Drawdown}| = 17,09\% / 12,45\% = 1,3721$. Значення Calmar Ratio понад 1,0 вважається прийнятним для диверсифікованого портфеля: на кожен відсоток максимального просідання портфель генерує 1,37% річної дохідності.

β -коефіцієнт - вимірює систематичний ризик активу, тобто чутливість його дохідності до коливань ринкового портфеля. У таблиці 3.4 наведено коефіцієнти по кожному активу відносно S&P 500 [26; 27].

На підставі аналізу кожного активу отримано такі результати:

AAPL ($\beta = 1,1578$) та MSFT ($\beta = 1,1048$) – це агресивні активи. Обидві технологічні акції рухаються синхронно з ринком, але з більшою амплітудою. При зростанні S&P 500 на 10% AAPL зростає в середньому на 11,6%, при падінні – падає на 11,6%. Це типова поведінка технологічного сектору, який є чутливим до змін відсоткових ставок та настроїв інвесторів.

JPM ($\beta = 0,9879$) – є майже нейтральний. Банківський сектор рухається майже ідентично до ринку ($\beta \approx 1$). JPM є «дзеркалом» економічного циклу, бо зростає разом з ринком і падає разом з ним. β трохи нижче 1 пояснюється диверсифікацією бізнесу JPMorgan (роздрібний банкінг, інвестиційний банк, управління активами).

XOM ($\beta = 0,4601$) - захисний, але з власною логікою. Енергетичний сектор має відносно низьку β , оскільки ціни на нафту рухаються за власною динамікою (геополітика, ОПЕК, попит/пропозиція), яка не завжди корелює з фондовим ринком. При падінні S&P 500 на 10% XOM втрачає лише $\sim 4,6\%$ - цінна властивість для диверсифікації.

PG ($\beta = 0,3488$) та JNJ ($\beta = 0,2002$) – класичні захисні активи. Споживчі товари першої необхідності (PG) та фармацевтика (JNJ) - типові «захисні» сектори. Люди купують зубну пасту і ліки навіть під час кризи, тому ці компанії менш залежні від економічного циклу. JNJ з $\beta = 0,20$ - найстабільніший акційний актив у портфелі: при обвалі ринку на 20% JNJ втрачає лише $\sim 4\%$.

GC=F ($\beta = 0,1711$) - золото як квазінезалежний актив. β золота близька до нуля, що підтверджує його роль як диверсифікатора. Золото рухається за власною логікою - інфляційні очікування, курс долара, геополітичний ризик. Практично не реагує на рухи фондового ринку, а в кризові моменти часто зростає.

TLT ($\beta = -0,2342$ показано як 0,2342 з типом «захисний»). Довгострокові облігації теоретично мають від'ємну або близьку до нуля β . Значення 0,23 за досліджуваний період пояснюється аномалією 2022 року, коли і акції, і облігації падали одночасно через агресивне підвищення ставок ФРС, що зруйнувало традиційну від'ємну кореляцію між ними.

BTC-USD ($\beta = 1,3213$) та ETH-USD ($\beta = 2,1520$) – це найагресивніші активи. ETH з $\beta = 2,15$ є найбільш ринково-чутливим активом у вибірці: при падінні S&P 500 на 10% ETH падає в середньому на 21,5%, BTC з $\beta = 1,32$ також є агресивним.

Таблиця 3.4 містить оцінки β -коефіцієнтів активів відносно ринкового індексу S&P 500, що дозволяє оцінити рівень їх систематичного ризику та чутливість до змін ринкової кон'юнктури.

Таблиця 3.4 - β -коефіцієнти активів відносно S&P 500

Актив	β -коефіцієнт	Тип ризику
AAPL	1.1578	Агресивний ($\beta > 1$)
MSFT	1.1048	Агресивний ($\beta > 1$)
JPM	0.9879	Захисний ($0 < \beta < 1$)
XOM	0.4601	Захисний ($0 < \beta < 1$)
PG	0.3488	Захисний ($0 < \beta < 1$)
JNJ	0.2002	Захисний ($0 < \beta < 1$)
GC=F	0.1711	Захисний ($0 < \beta < 1$)
TLT	0.2342	Захисний ($0 < \beta < 1$)
BTC-USD	1.3213	Агресивний ($\beta > 1$)
ETH-USD	2.1520	Агресивний ($\beta > 1$)

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Підсумовуючи результати таблиці 3.4, можна зробити висновок, що активи суттєво відрізняються за рівнем систематичного ризику: найбільш чутливими до коливань ринку є технологічні та криптовалютні активи, тоді як захисні інструменти й облігації характеризуються нижчими значеннями β -коефіцієнта, що підтверджує їх стабілізуючу роль у структурі інвестиційного портфеля.

Для сформованого портфеля $\beta = 0,7074$, що відносить його до захисного типу. Значення 0,7074 означає: при падінні S&P 500 на 10% портфель у середньому втрачає лише 7,07%. При зростанні ринку на 10% - портфель зростає приблизно на 7,07%. Це класичний профіль збалансованого захисного портфеля: він відстає від ринку в сильні роки, але суттєво захищає капітал під час корекцій

та криз. Для консервативного або збалансованого інвестора це є оптимальним результатом.

3.2 Сценарний аналіз, стрес-тестування та рекомендації щодо управління портфелем

Статистичні характеристики оцінюють ризик в умовах «нормального» ринкового середовища. Однак реальний інвестиційний процес неминуче стикається із стресовими ситуаціями. Для оцінювання поведінки оптимального портфеля у таких умовах проведено сценарний аналіз із трьома сценаріями.

Базовий сценарій відповідає ринковим умовам згідно з прогнозами ARIMA без додаткових шоків. Параметри портфеля: $E[r] = 0,3286\%$, $s = 1,4806\%$, $Sharpe = 0,2220$, $CV = 450,5\%$.

Несприятливий сценарій моделює помірну ринкову корекцію: технологічні акції (AAPL, MSFT) -15%; JPM, XOM -10%; PG, JNJ - 5%; золото +5%; TLT +8%; BTC -30%; ETH -35%.

Стресовий сценарій відповідає системній фінансовій кризі масштабу 2008-2009 рр. [28]: AAPL, MSFT -30%; JPM -25%; XOM -20%; PG, JNJ -10%; золото +10%; TLT +15%; BTC -50%; ETH -55%.

Таблиця 3.5 - Результати сценарного аналізу оптимального портфеля

Показник	Базовий	Несприятливий	Стресовий	Зміна (стрес – базовий)
$E[r]$ тижнева (%)	0.3286	-11.0478	-19.6337	-19.9623
σ тижнева (%)	1.4806	1.4806	1.4806	0.0000
Sharpe ratio	0.2220	-7.4617	-13.2606	-13.4826
CV (%)	450.5	н/д*	н/д*	—

* CV не інтерпретується при від'ємній очікуваній дохідності.

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Результати сценарного аналізу виявляють критичну чутливість портфеля до стресових шоків. У несприятливому сценарії дохідність портфеля падає до -11,05% на тиждень. Причина такого різкого падіння - значна частка акцій (AAPL, PG, ХОМ, JPM тощо), які отримують одночасні негативні шоки. Золото зростає на 5%, частково пом'якшуючи удар, але не може повністю компенсувати втрати акцій. Різке падіння Sharpe означає, що портфель генерує негативну дохідність при збереженні ризику.

У стресовому сценарії дохідність падає до -19,63%. Це є важливим сигналом для інвестора: портфель добре захищений від «нормальних» коливань (низький VaR та Max Drawdown), але залишається вразливим до системних ринкових криз, диверсифікація фактично не працює в кризі.

Незмінність волатильності (1,4806%) в усіх сценаріях є методологічним обмеженням: сценарний аналіз застосовує детерміновані зсуви дохідностей без модифікації матриці коваріацій. У реальних кризах кореляції між активами різко зростають, що може підвищити фактичну волатильність [17].

На рисунку 3.3 показано результати аналізу сценаріїв для оптимального інвестиційного портфеля на основі трьох ринкових сценаріїв (базовий сценарій, несприятливий сценарій та стресовий сценарій). Для оцінки ефективності портфеля було використано два важливі показники: очікувана дохідність $E[r]$ та коефіцієнт Шарпа.

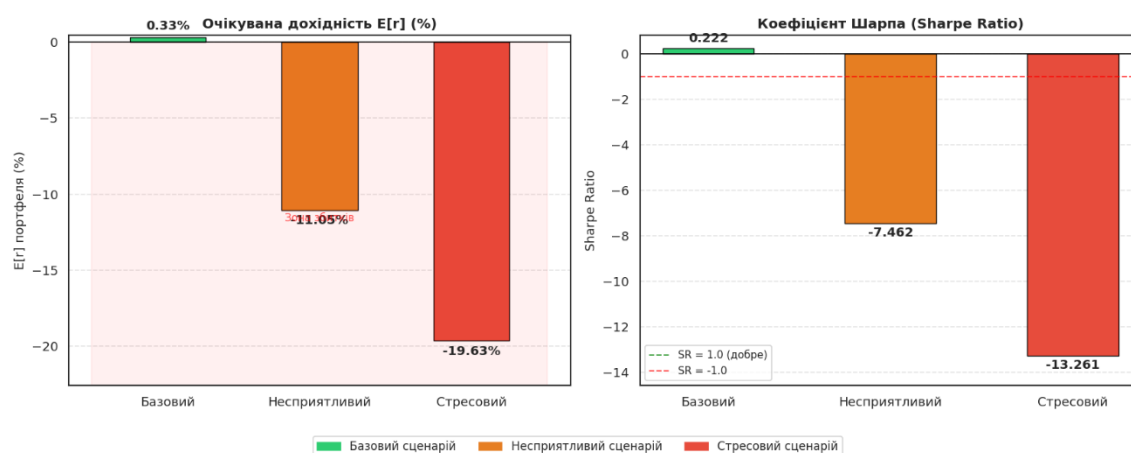


Рисунок 3.3 Сценарний аналіз оптимального портфеля

Джерело: розроблено автором на основі [16]

Ліва частина діаграми показує динаміку очікуваної дохідності портфеля. У базовому сценарії портфель демонструє незначну позитивну дохідність у розмірі 0,3286 %, що вказує на те, що за нормальних ринкових умов він може приносити прибуток. Натомість у негативному та стресовому сценаріях ефективність значно знизилася, а очікувана дохідність становить $-11,0478\%$ та $-19,6337\%$ відповідно. Усі негативні значення потрапляють у позначену червоним кольором зону збитків, що підкреслює високу чутливість портфеля до критичних ринкових змін.

Права частина діаграми показує коефіцієнт Шарпа, який вказує на співвідношення прибутковості до ризику. У базовому сценарії коефіцієнт Шарпа становить 0,2220, що є додатним, однак істотно нижчим за орієнтовне нормативне значення $SR=1.0$, позначене зеленою пунктирною лінією. Це свідчить про недостатню компенсацію ризику отриманою дохідністю навіть у стабільних умовах. У несприятливому та стресовому сценаріях показник набуває різко від'ємних значень ($-7,4617$ та $-13,2606$ відповідно), що вказує на критичне погіршення співвідношення «дохідність-ризик» та домінування збитків над потенційною вигодою.

На підставі проведеного аналізу сформульовано комплекс практичних рекомендацій для інвестора.

Рекомендація № 1. Золото як основний стабілізатор [29; 30]. Золото ($GC=F$) досягло частки 14% в оптимальному портфелі та виконує функцію захисного активу. Це робить золото ефективним інструментом хеджування системного ризику, особливо в умовах геополітичної нестабільності. Водночас високий коефіцієнт варіації CV (671%) свідчить про значну волатильність, що потребує обмеження його частки в портфелі.

Рекомендація № 2. Частота ребалансування. Рекомендується щоквартальне ребалансування. Альтернативою є порогове ребалансування: лише при відхиленні ваги активу від цільової більш ніж на ± 5 в.п. В умовах підвищеної ринкової волатильності та геополітичної нестабільності (зокрема, воєнного фактору) доцільно уникати надмірно частого ребалансування, оскільки це призводить до зростання транзакційних витрат і реалізації тимчасових збитків [31].

Рекомендація №3. Операційні ліміти ризику. Рекомендується встановити такі обмеження: (а) максимальна частка одного активу - не більше 40% (вже закладено в модель); (б) операційний ліміт $VaR_{95\%}$ - не більше 3% тижневої вартості (поточний портфель: 2,107% - в нормі); (в) якщо $CVaR_{99\%}$ (істор.) перевищить 5% - здійснити ребалансування у напрямку золота та захисних акцій. Ці ліміти відповідають принципам Базеля III [5]. У разі перевищення встановлених лімітів рекомендується автоматичне коригування структури портфеля шляхом зменшення частки ризикових активів і збільшення частки захисних інструментів (золото, державні облігації). Такий підхід відповідає сучасним практикам ризик-менеджменту.

Рекомендація №4. Врахування стресових сценаріїв при плануванні. Сценарний аналіз виявив, що несприятливий сценарій (одночасна корекція усіх акцій) може призвести до тижневих збитків понад 11%. Інвестору рекомендується зберігати ліквідний резерв у розмірі 10–15% від вартості портфеля поза його межами, щоб уникати вимушеного продажу активів у момент найглибшого просідання. Особливої актуальності ця рекомендація набуває в умовах політичної та макроекономічної нестабільності.

Рекомендація №5. Диверсифікація за класами активів. Незважаючи на формальну диверсифікацію, портфель має концентрацію в окремих активах (зокрема, енергетичному секторі), що підвищує специфічний ризик. Рекомендується забезпечити більш рівномірний розподіл між класами активів (акції, сировина, облігації), а також враховувати зростання кореляцій у кризових періодах, що знижує ефективність диверсифікації [32; 33].

ВИСНОВКИ

Актуальність проведеного дослідження зумовлена зростанням складності сучасних фінансових ринків, підвищенням волатильності традиційних активів та активною інтеграцією цифрових активів в інвестиційні стратегії. У цих умовах особливого значення набуває розробка комплексних підходів до прогнозування дохідності та оптимізації інвестиційних портфелів із урахуванням багатовимірною ризику.

У бакалаврській роботі розроблено та реалізовано комплексну модель оптимізації інвестиційного портфеля на основі прогнозування дохідності традиційних і цифрових активів із використанням методів аналізу часових рядів та ризикологічних показників. За результатами дослідження можна зробити такі висновки відповідно до поставлених завдань.

1. Узагальнено теоретичні та методичні засади портфельного інвестування та управління ризиками. Розглянуто еволюцію підходів до формування інвестиційного портфеля від класичної моделі Марковіца до сучасних байєсівських підходів, що враховують невизначеність параметрів та динамічність фінансових ринків.
2. Розкрито основні методи оцінювання дохідності та ризику фінансових активів. Проаналізовано показники математичного сподівання, дисперсії, коефіцієнта варіації, VaR, CVaR та β -коефіцієнта, що дозволяють комплексно оцінювати ризик і дохідність інвестицій.
3. Обґрунтовано використання моделей ARIMA для прогнозування дохідностей фінансових активів. Показано доцільність застосування цього підходу для аналізу часових рядів з урахуванням їх автокореляційної структури та можливої нестационарності.
4. Сформовано інформаційну базу дослідження та проведено первинний статистичний аналіз обраних активів. Виконано розрахунок основних

описових статистик та перевірку стаціонарності часових рядів, що підтвердило необхідність їх попередньої обробки перед моделюванням.

5. Побудовано та перевірено моделі Auto-ARIMA для прогнозування дохідностей традиційних і цифрових активів. Діагностика залишків підтвердила адекватність моделей та їх придатність для подальшого використання в оптимізаційних процедурах.
6. Реалізовано модель оптимізації структури інвестиційного портфеля за критерієм максимізації коефіцієнта Шарпа на основі прогнозних значень дохідності та ризику, що дозволило сформувати ефективну структуру портфеля.
7. Проведено оцінку ризику сформованого портфеля із застосуванням показників VaR, CVaR, β -аналізу, максимального просідання (Max Drawdown) та методу Монте-Карло. Отримані результати підтвердили прийнятний рівень ризику та стійкість портфеля до ринкових коливань.
8. Виконано сценарний аналіз та сформульовано практичні рекомендації щодо формування інвестиційного портфеля з урахуванням цифрових активів. Встановлено, що включення криптоактивів підвищує потенційну дохідність, але водночас збільшує ризик, що потребує збалансованого управління ним.

Практична значущість отриманих результатів полягає в тому, що розроблена модель може бути використана для формування та оптимізації інвестиційних портфелів як індивідуальними, так і інституційними інвесторами. Запропонований підхід дозволяє підвищити обґрунтованість інвестиційних рішень за рахунок поєднання прогнозування дохідності, оцінювання ризиків та оптимізаційних процедур, що особливо важливо в умовах високої невизначеності фінансових ринків.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Markowitz H. Portfolio selection. *Journal of Finance*. 1952. Vol. 7, No. 1. P. 77–91. DOI: 10.2307/2975974.
2. Sharpe W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*. 1964. Vol. 19, No. 3. P. 425–442. DOI: 10.2307/2977928.
3. Black F., Litterman R. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*. 1992. Vol. 48, No. 5. P. 28–43. DOI: 10.2469/faj.v48.n5.28.
4. Fama E. F., French K. R. A Five-Factor Asset Pricing Model. *Journal of Financial Economics*. 2015. Vol. 116, No. 1. P. 1–22. DOI: 10.1016/j.jfineco.2014.10.010.
5. Rockafellar R. T., Uryasev S. Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*. 2002. Vol. 26, No. 7. P. 1443–1471. DOI: 10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
6. Basel Committee on Banking Supervision. *Minimum Capital Requirements for Market Risk*. Basel : BIS, 2019. 137 p. URL: <https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf> (дата звернення: 01.04.2026).
7. Ledoit O., Wolf M. A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices. *Journal of Multivariate Analysis*. 2004. Vol. 88, No. 2. P. 365–411. DOI: 10.1016/S0047-259X(03)00096-4.
8. Щербина О. В. Моделювання оптимізації портфеля інвестиційного фонду акцій. *Ефективна економіка*. 2014. №12. URL: <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=3671> (дата звернення: 01.04.2026).
9. Вітлінський В. В., Великоіваненко Г. І. *Ризикологія в економіці та підприємництві : монографія*. Київ : КНЕУ, 2004.

10. Mochurad L., Dereviannyi A. An Ensemble Approach Integrating LSTM and ARIMA Models for Enhanced Financial Market Predictions. *Royal Society Open Science*. 2024. Vol. 11, No. 9. DOI: 10.1098/rsos.240699.
11. Тимчук Ю. С. ARIMA-моделі прогнозування волатильності фінансових ринків *Вісник THEU*. 2018. № 2. С. 144–155. URL: <https://api.dspace.wunu.edu.ua/api/core/bitstreams/05876335-31a2-4265-99dc-e5c8ea81f384/content> (дата звернення: 01.04.2026).
12. Гринько А. П., Горобець О. В. Оцінка ризиків інвестиційного портфеля з використанням методів VaR та CVaR. *Проблеми економіки*. 2022. № 1. С. 201–210.
13. Nakamoto S. Bitcoin: *A Peer-to-Peer Electronic Cash System*. 2008. URL: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf> (дата звернення: 23.04.2026).
14. Bouteska A., Mefteh-Wali S., Dang T. Crypto-Portfolio Performance: Does Bitcoin Improve Portfolio Diversification? *Finance Research Letters*. 2022. Vol. 46. Art. 102324. DOI: 10.1016/j.frl.2021.102324.
15. Hyndman R. J., Athanasopoulos G. *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed. Melbourne : OTexts, 2021. URL: <https://otexts.com/fpp3/> (дата звернення: 23.04.2026).
16. Yahoo Finance : фінансова платформа. URL: <https://finance.yahoo.com/quote/BTC-USD/history/?period1=1609459200&period2=1767225600&frequency=1wk> (дата звернення: 27.02.2025).
17. Pearson vs Spearman Correlation. *Guru99* : вебсайт. URL: <https://www.guru99.com/uk/r-pearson-spearman-correlation.html> (дата звернення: 23.04.2026).
18. Головач С. М. *Статистичне моделювання та прогнозування* : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2011. 350 с.
19. Яровий А. А. та ін. Використання ARIMA моделей для прогнозування загального рівня злочинності в Україні. *Український журнал інформаційних технологій*. 2025. Т. 6, № 2. С. 49–56.

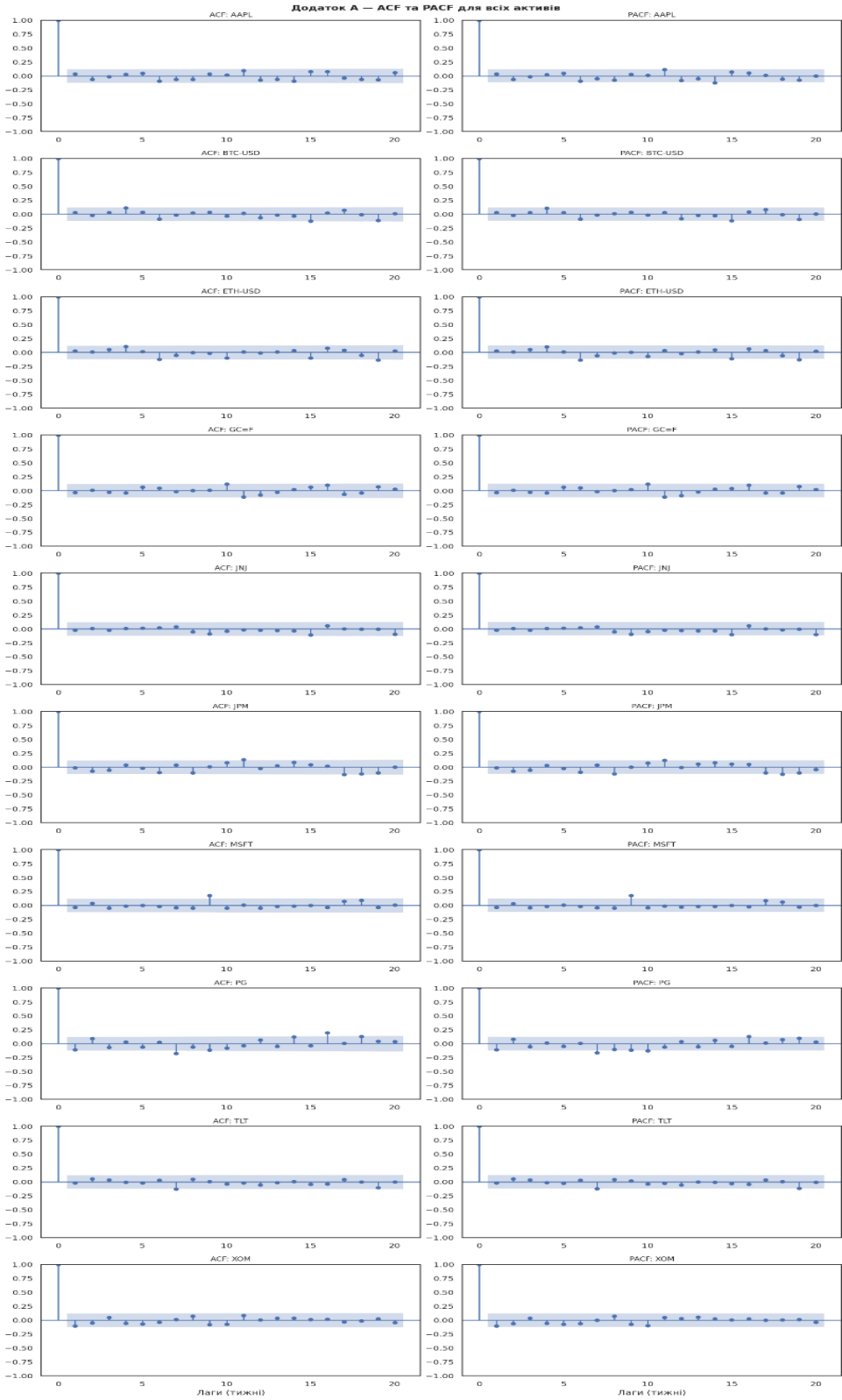
20. Shumway R. H., Stoffer D. S. *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. 5th ed. Cham : Springer, 2024. 592 p.
21. Box G. E. P., Pierce D. A. Distribution of Residual Correlations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*. 1970. Vol. 65. P. 1509–1526.
22. Efficient Frontier. *Corporate Finance Institute* : вебсайт. URL: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/career-map/sell-side/capital-markets/efficient-frontier/> (дата звернення: 01.05.2026).
23. Monte Carlo Simulation. *Investopedia* : вебсайт. URL: <https://www.investopedia.com/terms/m/montecarlosimulation.asp> (дата звернення: 01.05.2026).
24. Coefficient of Variation. *Corporate Finance Institute* : вебсайт. URL: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/data-science/coefficient-of-variation/> (дата звернення: 01.05.2026).
25. Maximum Drawdown (MDD). *Investopedia* : вебсайт. URL: <https://www.investopedia.com/terms/m/maximum-drawdown-mdd.asp> (дата звернення: 12.05.2026).
26. S&P 500 Index. *S&P Dow Jones Indices* : вебсайт. URL: <https://www.spglobal.com/spdji/en/indices/equity/sp-500/> (дата звернення: 12.05.2026).
27. Індекс S&P 500. *Мінфін* : вебсайт. URL: <https://index.minfin.com.ua/markets/stock/sp/> (дата звернення: 12.05.2026).
28. Чорний понеділок: як почалася світова фінансова криза 2008 року. *Finteco* : вебсайт. URL: <https://finteco.com.ua/publications/4339-chorny-ponedilok-ia-pochalasia-svitova-finansova-kryza-2008-roku/> (дата звернення: 12.05.2026).
29. Безпечні активи: чому золото вважається головним і які ще інструменти використовують інвестори. *УНН* : вебсайт. URL: <https://unn.ua/news/bezpechni-aktyvy-chomu-zoloto-vvazhaietsia-holovnym-i-yaki-shche-instrumenty-vykorystovuiut-investory> (дата звернення: 12.05.2026).

- 30.Еволюція ролі золота у сучасній монетарній системі : наукова праця. URL: <https://api.dspace.wunu.edu.ua/api/core/bitstreams/5b2b2a03-75c0-4dba-ae74-e3bfa3824ad0/content> (дата звернення: 12.05.2026).
- 31.Що таке ребалансування криптопортфеля. *Binance Square* : вебсайт. URL: <https://www.binance.com/uk-UA/square/post/6576687714825> (дата звернення: 15.05.2026).
- 32.Інвестиційний портфель: як побудувати стабільне фінансове майбутнє. *EcoFin* : вебсайт. URL: <https://ecofin.in.ua/articles/investiciyi/investicijnij-portfel-yak-pobuduvati-stabilne-finansove-majbutnye> (дата звернення: 15.05.2026).
- 33.Asset Diversification: Key Principles for Private Investors. *ICLUB* : вебсайт. URL: <https://iclub.vc/uk/insights/asset-diversification%3A-key-principles-for-private-investors.html> (дата звернення: 15.05.2026).

ДОДАТКИ

Додаток А

ACF та PACF для всіх активів



Додаток Б

Програмний код у середовищі Google Colab

```

!pip install pmdarimaimport warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.gridspec as gridspec
import seaborn as sns
import yfinance as yf
import pmdarima as pm

from statsmodels.tsa.stattools import adfuller, kpss
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf, plot_pacf
from scipy import stats
from scipy.optimize import minimize

sns.set_theme(style="whitegrid")
plt.rcParams['font.family'] = 'DejaVu Sans'
plt.rcParams['figure.dpi'] = 120

TICKERS = ['AAPL', 'MSFT', 'JPM', 'XOM', 'PG', 'JNJ', 'GC=F', 'TLT', 'BTC-USD', 'ETH-
USD']

START_DATE = '2021-01-01'
END_DATE = '2026-01-01'

RISK_FREE = 0.0 # тижнева безризикова ставка (0% для спрощення)
ALPHA_VAR = [0.05, 0.01] # рівні значущості для VaR/CVaR (5% та 1%)
N_SIM = 10_000 # кількість симуляцій Монте-Карло
N_PORTFOLIOS = 5_000 # кількість портфелів для ефективної межі
print("=" * 60)
print("Завантаження даних")
print("=" * 60)

```

```
raw_data = yf.download(TICKERS, start=START_DATE, end=END_DATE, interval='1wk',
auto_adjust=True)
```

```
# Вилучення цін закриття
```

```
if isinstance(raw_data.columns, pd.MultiIndex):
```

```
    prices = raw_data['Close']
```

```
else:
```

```
    prices = raw_data[['Close']]
```

```
prices = prices.dropna()
```

```
prices.columns.name = None
```

```
print(f"\nЗавантажено: {len(prices)} тижневих спостережень")
```

```
print(f"Період: {prices.index[0].date()} — {prices.index[-1].date()}")
```

```
print("\nТаблиця 2.1 — Фрагмент датасету (перші 5 рядків):")
```

```
print(prices.head().round(3).to_string())
```

```
# Логарифмічні дохідності
```

```
returns = np.log(prices / prices.shift(1)).dropna()
```

```
print(f"\nРозраховано {len(returns)} тижневих логарифмічних дохідностей")
```

```
print("КРОК 2. ОПИСОВА СТАТИСТИКА")
```

```
stats_df = pd.DataFrame()
```

```
stats_df['E[r] — Середня дохідність (%)'] = returns.mean() * 100
```

```
stats_df['σ — Волатильність (%)'] = returns.std() * 100
```

```
stats_df['CV — Коеф. варіації (%)'] = (returns.std() / returns.mean().abs()) * 100
```

```
stats_df['Асиметрія'] = returns.skew()
```

```
stats_df['Експес'] = returns.kurtosis()
```

```
stats_df['Мінімум (%)'] = returns.min() * 100
```

```
stats_df['Максимум (%)'] = returns.max() * 100
```

```
# Для TLT (від'ємна дохідність) CV не інтерпретується
```

```
print("\nТаблиця 2.2 — Описова статистика фінансових активів:")
```

```
print(stats_df.round(3).T.to_string())
```

```
print("\n* CV для TLT не інтерпретується (від'ємна середня дохідність)")
```

```
# Графік 2.1
```

```
fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(16, 11))
```

```

fig.suptitle('Рис. 2.1 — Статистичні характеристики активів (2021–2026)',
            fontsize=14, fontweight='bold')

means = returns.mean() * 100
stds = returns.std() * 100

# Scatter: дохідність vs ризик
axes[0,0].scatter(stds, means, color='royalblue', s=120, edgecolor='black', alpha=0.85)
for i, txt in enumerate(returns.columns):
    axes[0,0].annotate(txt, (stds.iloc[i]+0.15, means.iloc[i]-0.01), fontsize=9)
axes[0,0].axhline(0, color='red', linestyle='--', alpha=0.6)
axes[0,0].set_title('Дохідність vs Волатильність'); axes[0,0].set_xlabel('σ (%)');
axes[0,0].set_ylabel('E[r] (%)')

# CV
cv_vals = stats_df['CV — Коеф. варіації (%)'].drop('TLT').sort_values()
cv_vals.plot(kind='bar', ax=axes[0,1], color='steelblue', edgecolor='black')
axes[0,1].set_title('Коефіцієнт варіації (без TLT)'); axes[0,1].set_ylabel('CV (%)');
axes[0,1].tick_params(axis='x', rotation=45)

# Асиметрія
skews = returns.skew().sort_values()
colors_s = ['crimson' if x < 0 else 'forestgreen' for x in skews]
skews.plot(kind='bar', ax=axes[1,0], color=colors_s, edgecolor='black')
axes[1,0].axhline(0, color='black', linewidth=1)
axes[1,0].set_title('Асиметрія розподілу'); axes[1,0].set_ylabel('Skewness');
axes[1,0].tick_params(axis='x', rotation=45)

# Екцес
kurts = returns.kurtosis().sort_values()
kurts.plot(kind='bar', ax=axes[1,1], color='purple', alpha=0.75, edgecolor='black')
axes[1,1].axhline(0, color='black', linewidth=1)
axes[1,1].set_title('Екцес (товсті хвости)'); axes[1,1].set_ylabel('Kurtosis');
axes[1,1].tick_params(axis='x', rotation=45)

plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.96])

```

```

plt.savefig('fig_2_1_stats.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_2_1_stats.png")
correlation_matrix = returns.corr()

plt.figure(figsize=(12, 9))
sns.set_theme(style="white")

# 3. Побудова теплової карти (Heatmap)
# vmin=-1, vmax=1 фіксують правильні межі шкали
# cmap='coolwarm' робить від'ємну кореляцію синьою, додатну - червоною, а нульову -
білою

sns.heatmap(correlation_matrix, annot=True, cmap='coolwarm', fmt=".2f",
            vmin=-1, vmax=1, linewidths=0.5, square=True,
            cbar_kws={"shrink": .8}, annot_kws={"size": 11, "weight": "bold"})

plt.title('Матриця кореляцій дохідностей активів (2021-2026)',
        fontsize=15, fontweight='bold', pad=20)
plt.yticks(rotation=0)
plt.tight_layout()
plt.show()

stationarity_results = []
for col in returns.columns:
    series = returns[col].dropna()

# КРОК 4. ТЕСТ СТАЦІОНАРНОСТІ ADF
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
import pandas as pd

print("=" * 60)
print("КРОК 4. ТЕСТ СТАЦІОНАРНОСТІ (ADF)")
print("=" * 60)

# Список для результатів
adf_results = []

```

```

# Перевірка кожного активу
for column in returns.columns:

    # ADF тест
    adf_test = adfuller(returns[column])

    # Витягуємо статистику та p-value
    adf_stat = adf_test[0]
    adf_pvalue = adf_test[1]

    # Висновок
    conclusion = "Стационарний" if adf_pvalue < 0.05 else "Нестационарний"

    # Додаємо результат
    adf_results.append([
        column,
        round(adf_stat, 4),
        round(adf_pvalue, 4),
        conclusion
    ])

# Формування таблиці
adf_table = pd.DataFrame(
    adf_results,
    columns=[
        "Актив",
        "ADF статистика",
        "ADF p-value",
        "Висновок"
    ]
)

# Робимо назву активів індексом
adf_table.set_index("Актив", inplace=True)

```

```

# Виведення результатів
print("\nРезультати ADF-тесту:")
print(adf_table.to_string())
stat_df = pd.DataFrame(stationarity_results).set_index('Актив')
print("\nТаблиця 2.3 — Результати тестів ADF:")
print(stat_df.to_string())

# Два активи на головному рисунку (AAPL та BTC)
fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(14, 8))
fig.suptitle('Рис. 2.3 — Графіки ACF та PACF (AAPL та BTC-USD)',
             fontsize=13, fontweight='bold')

for idx, asset in enumerate(['AAPL', 'BTC-USD']):
    data_s = returns[asset].dropna()
    plot_acf(data_s, lags=20, ax=axes[idx,0], alpha=0.05)
    axes[idx,0].set_title(f'ACF: {asset}')
    plot_pacf(data_s, lags=20, ax=axes[idx,1], alpha=0.05, method='ywm')
    axes[idx,1].set_title(f'PACF: {asset}')

plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
plt.savefig('fig_2_3_acf_pacf.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_2_3_acf_pacf.png")

# Повний додаток А — усі активи
fig2, axes2 = plt.subplots(len(TICKERS), 2, figsize=(14, 3.5 * len(TICKERS)))
fig2.suptitle('Додаток А — ACF та PACF для всіх активів',
             fontsize=13, fontweight='bold')

for i, asset in enumerate(returns.columns):
    d = returns[asset].dropna()
    plot_acf(d, lags=20, ax=axes2[i,0], alpha=0.05)
    axes2[i,0].set_title(f'ACF: {asset}', fontsize=10)
    plot_pacf(d, lags=20, ax=axes2[i,1], alpha=0.05, method='ywm')

```

```

axes2[i,1].set_title(f'PACF: {asset}', fontsize=10)
if i == len(TICKERS) - 1:
    axes2[i,0].set_xlabel('Лаги (тижні)')
    axes2[i,1].set_xlabel('Лаги (тижні)')

plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.99])
plt.savefig('fig_A_acf_pacf_all.png', bbox_inches='tight')
plt.show() # ← було plt.close(), замінено на plt.show()
print("Збережено: fig_A_acf_pacf_all.png (Додаток А)")
# Поділ на train/test (80/20)
split_idx = int(len(returns) * 0.8)
train_data = returns.iloc[:split_idx]
test_data = returns.iloc[split_idx:]
print(f"Train: {len(train_data)} спост. | Test: {len(test_data)} спост.")

arima_results = []

for asset in returns.columns:
    train = train_data[asset].dropna()
    test = test_data[asset].dropna()

    # --- Auto-ARIMA ---
    model = pm.auto_arima(
        train,
        start_p=0, start_q=0, max_p=3, max_q=3,
        d=0, seasonal=False,
        stepwise=True, suppress_warnings=True, error_action='ignore',
        information_criterion='aic'
    )

    # --- Прогноз на 1 крок вперед (для портфеля) ---
    forecast_1 = model.predict(n_periods=1)[0]

    # --- Прогноз на тестову вибірку (для MAE/RMSE) ---
    forecast_test = model.predict(n_periods=len(test))

```

```

mae = np.mean(np.abs(test.values - forecast_test))
rmse = np.sqrt(np.mean((test.values - forecast_test) ** 2))

# Бенчмарк: наївна модель (останнє відоме значення)
naive = np.full(len(test), train.iloc[-1])
rmse_bench = np.sqrt(np.mean((test.values - naive) ** 2))

# --- Тест Льюнга–Бокса для залишків ---
residuals = model.resid()
lb_result = acorr_ljungbox(residuals, lags=[10], return_df=True)
lb_stat = lb_result['lb_stat'].values[0]
lb_pval = lb_result['lb_pvalue'].values[0]

arima_results.append({
    'Актив': asset,
    'Модель (p,d,q)': model.order,
    'AIC': round(model.aic(), 2),
    'Прогноз (тиждень)': round(forecast_1, 6),
    'MAE (тест)': round(mae, 6),
    'RMSE (тест)': round(rmse, 6),
    'RMSE (бенчмарк)': round(rmse_bench, 6),
    'Льюнга-Бокса Q': round(lb_stat, 3),
    'L-B p-value': round(lb_pval, 4),
    'Залишки ОК': 'Так' if lb_pval > 0.05 else 'НІ',
})

print(f" {asset:10s}: {str(model.order):12s} AIC={model.aic():.2f} "
      f"Прогноз={forecast_1:.5f} LB p={lb_pval:.3f} MAE={mae:.5f}")

arima_df = pd.DataFrame(arima_results)
print("\nТаблиця Результати Auto-ARIMA:")
print(arima_df[['Актив', 'Модель (p,d,q)', 'AIC', 'Прогноз (тиждень)']].to_string(index=False))
print("\nТаблиця Тест Льюнга–Бокса:")
print(arima_df[['Актив', 'Льюнга-Бокса Q', 'L-B p-value', 'Залишки ОК']].to_string(index=False))
print("\nТаблиця Якість прогнозу (MAE/RMSE):")

```

```

print(arima_df[['Актив','MAE', (тест.), 'RMSE', (тест.), 'RMSE
(бенчмарк)']].to_string(index=False))

# Очікувані дохідності: ARIMA прогнози + fallback на історичне середнє якщо ~0
arima_forecasts = np.array(arima_df['Прогноз (тиждень)'].values, dtype=float)
historical_means = returns.mean().values

# Якщо ARIMA прогноз близький до нуля — беремо історичне середнє
expected_returns = np.where(
    np.abs(arima_forecasts) < 1e-4,
    historical_means,
    arima_forecasts
)

print("\nОчікувані дохідності (ARIMA + fallback на істор. середнє):")
for i, ticker in enumerate(TICKERS):
    source = "ARIMA" if np.abs(arima_forecasts[i]) >= 1e-4 else "істор.середнє"
    print(f" {ticker:10s}: {expected_returns[i]*100:.4f}% ({source})")

# Коваріаційна матриця (з усіх даних)
cov_matrix = returns.cov().values
n_assets = len(TICKERS)

def portfolio_performance(weights, exp_ret, cov_mat):
    p_ret = np.dot(weights, exp_ret)
    p_vol = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov_mat, weights)))
    return p_ret, p_vol

def neg_sharpe(weights, exp_ret, cov_mat, rf=RISK_FREE):
    r, v = portfolio_performance(weights, exp_ret, cov_mat)
    return -(r - rf) / v if v > 0 else 0

# Обмеження та межі: мін 0%, макс 40% на один актив
constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda w: np.sum(w) - 1})
bounds = tuple((0.0, 0.40) for _ in range(n_assets))
w0 = np.array([1/n_assets] * n_assets)

```

```
# Оптимізація
```

```
opt_result = minimize(neg_sharpe, w0,
                      args=(expected_returns, cov_matrix),
                      method='SLSQP',
                      bounds=bounds,
                      constraints=constraints,
                      options={'ftol': 1e-12, 'maxiter': 1000})

opt_weights = opt_result.x
opt_ret, opt_vol = portfolio_performance(opt_weights, expected_returns, cov_matrix)
opt_sharpe = (opt_ret - RISK_FREE) / opt_vol
opt_cv = (opt_vol / abs(opt_ret)) * 100 if opt_ret != 0 else np.nan
```

```
print(f"\nОптимальний портфель (Max Sharpe):")
print(f" Очікувана дохідність (тижн.): {opt_ret*100:.4f}%")
print(f" Волатильність (тижн.): {opt_vol*100:.4f}%")
print(f" Коефіцієнт Шарпа: {opt_sharpe:.4f}")
print(f" Коефіцієнт варіації (CV): {opt_cv:.1f}%")
print(f" Річна дохідність ( $\sim \times 52$ ): {opt_ret*52*100:.2f}%")
print(f" Річна волатильність ( $\sim \sqrt{52}$ ): {opt_vol*np.sqrt(52)*100:.2f}%")
```

```
# Таблиця ваг
```

```
weights_df = pd.DataFrame({
    'Актив': TICKERS,
    'Вага (частки)': opt_weights.round(4),
    'Вага (%)': (opt_weights * 100).round(2),
    'E[r] активу (%)': (expected_returns * 100).round(4),
    'Внесок у E[rp] (%)': (opt_weights * expected_returns * 100).round(4),
})

print("\nТаблиця 2.7 — Структура оптимального портфеля:")
print(weights_df.to_string(index=False))
```

```
# Графік ваг (рис. 2.4)
```

```
plot_data = weights_df[weights_df['Вага (%)'] > 0.1].copy()
```

```

plt.figure(figsize=(10, 6))
bars = plt.bar(plot_data['АКТИВ'], plot_data['Bara (%)'],
               color=sns.color_palette("viridis", len(plot_data)), edgecolor='black')
for bar in bars:
    h = bar.get_height()
    plt.text(bar.get_x() + bar.get_width()/2, h + 0.5, f'{h:.1f}%',
             ha='center', va='bottom', fontweight='bold', fontsize=10)
plt.title('Оптимальна структура портфеля (Max Sharpe)', fontsize=13, fontweight='bold')
plt.xlabel('АКТИВ'); plt.ylabel('Частка (%)'); plt.xticks(rotation=45)
plt.tight_layout()
plt.savefig('fig_2_4_weights.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_2_4_weights.png")

# Ефективна межа (рис. 2.5)
ret_arr, vol_arr, sharpe_arr = [], [], []
for _ in range(N_PORTFOLIOS):
    w = np.random.dirichlet(np.ones(n_assets))
    r, v = portfolio_performance(w, expected_returns, cov_matrix)
    ret_arr.append(r); vol_arr.append(v)
    sharpe_arr.append((r - RISK_FREE) / v if v > 0 else 0)

ret_arr = np.array(ret_arr)
vol_arr = np.array(vol_arr)
sharpe_arr = np.array(sharpe_arr)
mvp_idx = vol_arr.argmin()

plt.figure(figsize=(12, 8))
sc = plt.scatter(vol_arr*100, ret_arr*100, c=sharpe_arr, cmap='viridis', alpha=0.3, s=10)
plt.colorbar(sc, label='Sharpe ratio')
plt.scatter(opt_vol*100, opt_ret*100, c='red', s=150, edgecolors='black', zorder=5,
            label=f'Оптимальний портфель (SR={opt_sharpe:.3f})')
plt.scatter(vol_arr[mvp_idx]*100, ret_arr[mvp_idx]*100, c='blue', s=150, edgecolors='black',
            zorder=5, label='Портфель мін. дисперсії (MVP)')
plt.title('Ефективна межа Марковіца (5 000 портфелів)', fontsize=13, fontweight='bold')

```

```

plt.xlabel('Ризик  $\sigma$  (%)'); plt.ylabel('Очікувана дохідність  $E[r]$  (%)'); plt.legend()
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.5)
plt.tight_layout()
plt.savefig('fig_2_5_frontier.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_2_5_frontier.png")

# --- 8.1 Дохідність портфеля за весь період ---
portfolio_returns = returns.dot(opt_weights)

# --- 8.2 Параметричний VaR і CVaR ---
risk_table = []
for alpha in ALPHA_VAR:
    z = stats.norm.ppf(alpha)                # від'ємний квантиль

    # Параметричний (нормальний розподіл)
    var_param = -(opt_ret + z * opt_vol)
    cvar_param = -(opt_ret - opt_vol * stats.norm.pdf(z) / alpha)

    # Історичний VaR і CVaR
    var_hist = -np.percentile(portfolio_returns, alpha * 100)
    cvar_hist = -portfolio_returns[portfolio_returns <= -var_hist].mean()

    risk_table.append({
        'Рівень довіри': f'{int((1-alpha)*100)}%',
        'VaR параметр. (%)': round(var_param * 100, 4),
        'CVaR параметр. (%)': round(cvar_param * 100, 4),
        'VaR історич. (%)': round(var_hist * 100, 4),
        'CVaR історич. (%)': round(cvar_hist * 100, 4),
    })

print(f"\n Рівень довіри {int((1-alpha)*100)}%:")
print(f"  VaR параметричний: {var_param*100:.4f}%")
print(f"  CVaR параметричний: {cvar_param*100:.4f}%")
print(f"  VaR історичний: {var_hist*100:.4f}%")
print(f"  CVaR історичний: {cvar_hist*100:.4f}%")

```

```

risk_df = pd.DataFrame(risk_table)
print("\nТаблиця 3.1 — VaR та CVaR оптимального портфеля:")
print(risk_df.to_string(index=False))

# --- 8.4 Max Drawdown ---
cumulative = (1 + portfolio_returns).cumprod()
rolling_max = cumulative.cummax()
drawdown = (cumulative - rolling_max) / rolling_max
max_dd = drawdown.min()
print(f"\n Max Drawdown портфеля: {max_dd*100:.4f}%")

annual_ret = opt_ret * 52
calmar_ratio = annual_ret / abs(max_dd) if max_dd != 0 else np.nan
print(f" Calmar Ratio (річна дохідність / |MDD|): {calmar_ratio:.4f}")

# Графік просідання
plt.figure(figsize=(12, 5))
drawdown.plot(color='crimson', linewidth=1.2)
plt.fill_between(drawdown.index, drawdown.values, 0, alpha=0.3, color='crimson')
plt.title('Просідання (Drawdown) оптимального портфеля', fontsize=13, fontweight='bold')
plt.ylabel('Drawdown'); plt.xlabel('Дата')
plt.axhline(max_dd, color='black', linestyle='--', label=f'Max DD = {max_dd*100:.2f}%')
plt.legend(); plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.5)
plt.tight_layout()
plt.savefig('fig_3_1_drawdown.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_3_1_drawdown.png")

# ---  $\beta$ -коефіцієнти активів відносно S&P 500 ---
print("\n---  $\beta$ -коефіцієнти активів ---")
try:
    sp500_raw = yf.download('^GSPC', start=START_DATE, end=END_DATE,
                           interval='1wk', auto_adjust=True)

# Виправлення: витягуємо колонку правильно

```

```

if isinstance(sp500_raw.columns, pd.MultiIndex):
    sp500_prices = sp500_raw['Close']['^GSPC']
else:
    sp500_prices = sp500_raw['Close']

sp500_ret = np.log(sp500_prices / sp500_prices.shift(1)).dropna()
sp500_ret.name = 'SP500'

# Вирівнюємо індекси
aligned = returns.copy()
aligned['SP500'] = sp500_ret
aligned = aligned.dropna()

var_m = aligned['SP500'].var()

beta_rows = []
for asset in TICKERS:
    cov_am = np.cov(aligned[asset], aligned['SP500'])[0, 1]
    beta = cov_am / var_m
    if beta > 1:
        tip = 'Агресивний ( $\beta > 1$ )'
    elif beta > 0:
        tip = 'Захисний ( $0 < \beta < 1$ )'
    else:
        tip = 'Обернений ( $\beta < 0$ )'
    beta_rows.append({
        'Актив': asset,
        'β-коефіцієнт': round(beta, 4),
        'Тип ризику': tip
    })

beta_df = pd.DataFrame(beta_rows)
print("\nТаблиця 3.2 — β-коефіцієнти активів відносно S&P 500:")
print(beta_df.to_string(index=False))

```

```

#  $\beta$  портфеля (зважений)
beta_portfolio = sum(
    row[' $\beta$ -коефіцієнт'] * opt_weights[i]
    for i, row in enumerate(beta_rows)
)
print(f"\n  $\beta$  портфеля (зважений): {beta_portfolio:.4f}")

if beta_portfolio < 0.8:
    print(f" Тип портфеля: Захисний (менш волатильний за ринок)")
elif beta_portfolio < 1.2:
    print(f" Тип портфеля: Нейтральний (рухається разом з ринком)")
else:
    print(f" Тип портфеля: Агресивний (більш волатильний за ринок)")

except Exception as e:
    print(f" Помилка: {e}")
np.random.seed(42)
sim_returns = np.random.multivariate_normal(
    mean=returns.mean().values,
    cov=cov_matrix,
    size=N_SIM
)
sim_portfolio_ret = sim_returns.dot(opt_weights)

# VaR і CVaR з симуляцій
mc_results = []
for alpha in ALPHA_VAR:
    var_mc = -np.percentile(sim_portfolio_ret, alpha * 100)
    cvar_mc = -sim_portfolio_ret[sim_portfolio_ret <= -var_mc].mean()
    mc_results.append({
        'Рівень довіри': f'{int((1-alpha)*100)}%',
        'VaR МК (%)': round(var_mc * 100, 4),
        'CVaR МК (%)': round(cvar_mc * 100, 4),
    })

```

```
print(f'    {int((1-alpha)*100)}%: VaR МК = {var_mc*100:.4f}%    |    CVaR МК = {cvar_mc*100:.4f}%")
```

```
mc_df = pd.DataFrame(mc_results)
print("\nТаблиця 3.3 — VaR та CVaR (Монте-Карло):")
print(mc_df.to_string(index=False))

# Графік розподілу
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 6))
ax.hist(sim_portfolio_ret * 100, bins=100, color='steelblue', edgecolor='white',
        alpha=0.7, density=True, label='Симульовані дохідності')

var95_mc = -np.percentile(sim_portfolio_ret, 5)
var99_mc = -np.percentile(sim_portfolio_ret, 1)
cvar95_mc = -sim_portfolio_ret[sim_portfolio_ret <= -var95_mc].mean()
cvar99_mc = -sim_portfolio_ret[sim_portfolio_ret <= -var99_mc].mean()

for val, col, lbl in [
    (var95_mc, 'orange', f'VaR 95% = {var95_mc*100:.3f}%'),
    (var99_mc, 'red', f'VaR 99% = {var99_mc*100:.3f}%'),
    (cvar95_mc, 'darkorange', f'CVaR 95% = {cvar95_mc*100:.3f}%'),
    (cvar99_mc, 'darkred', f'CVaR 99% = {cvar99_mc*100:.3f}%'),
]:
    ax.axvline(-val*100, color=col, linestyle='--', linewidth=1.8, label=lbl)

ax.set_title(f'Розподіл дохідності портфеля (Монте-Карло, n={N_SIM:,})',
            fontsize=13, fontweight='bold')
ax.set_xlabel('Тижнева дохідність портфеля (%)'); ax.set_ylabel('Щільність')
ax.legend(fontsize=9); ax.grid(True, linestyle='--', alpha=0.5)
plt.tight_layout()
plt.savefig('fig_3_2_montecarlo.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_3_2_montecarlo.png")
scenarios = {
```

```

    'Базовий':      {'AAPL':0,'MSFT':0,'JPM':0,'XOM':0,'PG':0,'JNJ':0,'GC=F':0,'TLT':0,'BTC-
USD':0,'ETH-USD':0},
    'Несприятливий': {'AAPL':-0.15,'MSFT':-0.15,'JPM':-0.10,'XOM':-0.10,'PG':-0.05,'JNJ':-
0.05,'GC=F':0.05,'TLT':0.08,'BTC-USD':-0.30,'ETH-USD':-0.35},
    'Стресовий':      {'AAPL':-0.30,'MSFT':-0.30,'JPM':-0.25,'XOM':-0.20,'PG':-0.10,'JNJ':-
0.10,'GC=F':0.10,'TLT':0.15,'BTC-USD':-0.50,'ETH-USD':-0.55},
    }

```

```

scenario_results = []
for sc_name, shocks in scenarios.items():
    shock_vec = np.array([shocks[t] for t in TICKERS])
    sc_ret     = opt_weights.dot(expected_returns + shock_vec)
    sc_vol     = opt_vol
    sc_sharpe  = (sc_ret - RISK_FREE) / sc_vol if sc_vol > 0 else np.nan
    sc_cv      = (sc_vol / abs(sc_ret)) * 100 if sc_ret != 0 else np.nan
    scenario_results.append({
        'Сценарій':      sc_name,
        'E[r] портфеля (%)': round(sc_ret * 100, 4),
        'σ портфеля (%)':   round(sc_vol * 100, 4),
        'Sharpe ratio':    round(sc_sharpe, 4),
        'CV (%)':          round(sc_cv, 1),
    })
    print(f"      {sc_name:15s}:      E[r]={sc_ret*100:.4f}%      σ={sc_vol*100:.4f}%
SR={sc_sharpe:.4f}")

```

```

sc_df = pd.DataFrame(scenario_results)
print("\nТаблиця Сценарний аналіз оптимального портфеля:")
print(sc_df.to_string(index=False))

```

```

summary = {
    'Показник': [
        'Очікувана дохідність E[r] (тижн., %)',
        'Стандартне відхилення σ (тижн., %)',
        'Коефіцієнт варіації CV (%)',
        'Коефіцієнт Шарпа',
    ]
}

```

```

    'Річна дохідність (приблизно, %)',
    'Річна волатильність (приблизно, %)',
    'VaR 95% параметричний (тижн., %)',
    'VaR 99% параметричний (тижн., %)',
    'CVaR 95% параметричний (тижн., %)',
    'CVaR 99% параметричний (тижн., %)',
    'VaR 95% Монте-Карло (тижн., %)',
    'CVaR 95% Монте-Карло (тижн., %)',
    'Max Drawdown (%)',
    'Calmar Ratio',
],
'Значення': [
    f'{opt_ret*100:.4f}',
    f'{opt_vol*100:.4f}',
    f'{opt_cv:.1f}',
    f'{opt_sharpe:.4f}',
    f'{opt_ret*52*100:.2f}',
    f'{opt_vol*np.sqrt(52)*100:.2f}',
    f'{risk_df["VaR параметр. (%)"].iloc[0]}',
    f'{risk_df["VaR параметр. (%)"].iloc[1]}',
    f'{risk_df["CVaR параметр. (%)"].iloc[0]}',
    f'{risk_df["CVaR параметр. (%)"].iloc[1]}',
    f'{mc_df["VaR МК (%)"].iloc[0]}',
    f'{mc_df["CVaR МК (%)"].iloc[0]}',
    f'{max_dd*100:.4f}',
    f'{calmar_ratio:.4f}',
]
}

summary_df = pd.DataFrame(summary)
print("\nТаблиця Зведені ризикові характеристики оптимального портфеля:")
print(summary_df.to_string(index=False))
import matplotlib.patches as mpatches

fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6))

```

```

fig.suptitle('Рис. 3.3 — Сценарний аналіз оптимального портфеля',
            fontsize=14, fontweight='bold')

scenarios_names = sc_df['Сценарій'].tolist()
ret_values      = sc_df['E[r] портфеля (%)'].tolist()
sr_values       = sc_df['Sharpe ratio'].tolist()

colors = ['#2ecc71', '#e67e22', '#e74c3c'] # зелений, помаранчевий, червоний
bars1 = axes[0].bar(scenarios_names, ret_values, color=colors,
                   edgecolor='black', linewidth=0.8, width=0.5)

for bar, val in zip(bars1, ret_values):
    va = 'bottom' if val >= 0 else 'top'
    offset = 0.3 if val >= 0 else -0.3
    axes[0].text(bar.get_x() + bar.get_width()/2,
                 val + offset, f'{val:.2f}%',
                 ha='center', va=va, fontweight='bold', fontsize=11)

axes[0].axhline(0, color='black', linewidth=1.0, linestyle='-')
axes[0].set_title('Очікувана дохідність E[r] (%)', fontsize=12, fontweight='bold')
axes[0].set_ylabel('E[r] портфеля (%)', fontsize=11)
axes[0].set_ylim(min(ret_values) * 1.15, max(ret_values) * 1.4)
axes[0].grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.5)
axes[0].tick_params(axis='x', labelsize=11)

# Зафарбовуємо зону збитків
axes[0].fill_between([-0.5, 2.5], [0, 0],
                    [min(ret_values) * 1.15] * 2,
                    alpha=0.06, color='red')
axes[0].text(1.0, min(ret_values) * 0.6, 'Зона збитків',
            ha='center', color='red', fontsize=9, alpha=0.7)
bars2 = axes[1].bar(scenarios_names, sr_values, color=colors,
                   edgecolor='black', linewidth=0.8, width=0.5)

for bar, val in zip(bars2, sr_values):

```

```

va    = 'bottom' if val >= 0 else 'top'
offset = 0.15 if val >= 0 else -0.15
axes[1].text(bar.get_x() + bar.get_width()/2,
             val + offset, f'{val:.3f}',
             ha='center', va=va, fontweight='bold', fontsize=11)

axes[1].axhline(0, color='black', linewidth=1.0, linestyle='-')
axes[1].axhline(1.0, color='green', linewidth=1.2,
               linestyle='--', alpha=0.7, label='SR = 1.0 (добре)')
axes[1].axhline(-1.0, color='red', linewidth=1.2,
               linestyle='--', alpha=0.7, label='SR = -1.0')
axes[1].set_title('Коефіцієнт Шарпа (Sharpe Ratio)', fontsize=12, fontweight='bold')
axes[1].set_ylabel('Sharpe Ratio', fontsize=11)
axes[1].set_ylim(min(sr_values) * 1.1, max(sr_values) * 1.4 + 0.5)
axes[1].grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.5)
axes[1].legend(fontsize=9)
axes[1].tick_params(axis='x', labelsz=11)
patches = [
    mpatches.Patch(color='#2ecc71', label='Базовий сценарій'),
    mpatches.Patch(color='#e67e22', label='Несприятливий сценарій'),
    mpatches.Patch(color='#e74c3c', label='Стресовий сценарій'),
]
fig.legend(handles=patches, loc='lower center',
          ncol=3, fontsize=10,
          bbox_to_anchor=(0.5, -0.04),
          frameon=True)

plt.tight_layout(rect=[0, 0.04, 1, 0.95])
plt.savefig('fig_3_3_scenarios.png', bbox_inches='tight')
plt.show()
print("Збережено: fig_3_3_scenarios.png")

```

Короткий звіт подібності

Метадані

ДОКУМЕНТ

Заголовок

Трутенко_Юнькова_плагіат

Автор

Трутенко

Науковий керівник / Експерт

Юнькова

ІД документа

334107164

ОРГАНІЗАЦІЯ

Назва організації

Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman
KNEU

Підрозділ

кафедра штучного інтелекту, моделювання та статистики

ЗВІТ

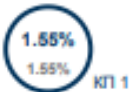
Дата звіту

5/31/2026

Дата редагування

Обсяг знайдених подібностей

Коефіцієнт подібності визначає, який відсоток тексту по відношенню до загального обсягу тексту було знайдено в різних джерелах. Зверніть увагу, що високі значення коефіцієнта не автоматично означають плагіат. Звіт має аналізувати компетентна / уповноважена особа.



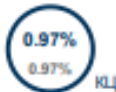
25

Довжина фраз для коефіцієнта подібності 2



10580

Кількість слів



81416

Кількість символів

Тривога

У цьому розділі ви знайдете інформацію щодо текстових спотворень. Ці спотворення в тексті можуть говорити про МОЖЛИВІ маніпуляції в тексті. Спотворення в тексті можуть мати намісний характер, але частіше характер технічних помилок при конвертації документа та його збереженні, тому ми рекомендуємо вам підходити до аналізу цього модуля відповідально. У разі виникнення запитань, просимо звертатися до нашої служби підтримки.

Заміна букв		25
Інтервали		0
Мікропробіли		0
Білі знаки		0
Парафрази (SmartMarks)		10

Джерела

Нижче наведений список джерел. В цьому списку є джерела із різних баз даних. Копії тексту означає в якому джерелі він був знайдений. Ці джерела і значення Коефіцієнту Подібності не відображають прямого плагіату. Необхідно відкрити кожне джерело і проаналізувати зміст і правильність оформлення джерела.

10 найдовших фраз

Копії тексту

#	НАЗВА ТА АДРЕСА ДЖЕРЕЛА URL (НАЗВА БАЗИ)	КІЛЬКІСТЬ (ІДЕНТИЧНИХ СЛІВ (ФРАГМЕНТІВ))
---	--	--

Копія тез

ЮНЬКОВА О.О.,

к.ф.-м. н., доцент

Трутенко В. О.,

здобувач першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана

КІЛЬКІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДОХІДНОСТІ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

Ефективне управління інвестиціями потребує використання сучасних методів кількісного аналізу. У роботі розглянуто задачу формування та оптимізації інвестиційного портфеля на основі моделі Марковіца, яка передбачає досягнення оптимального співвідношення між очікуваною дохідністю та ризиком.

Для емпіричного дослідження сформовано вибірку з 10 фінансових активів різних класів: Apple Inc. (AAPL), Microsoft Corp. (MSFT), JPMorgan Chase & Co. (JPM), Exxon Mobil Corp. (XOM), Procter & Gamble (PG), Johnson & Johnson (JNJ), Золото (GC=F), Bitcoin (BTC-USD), Ethereum (ETH-USD), Державні довгострокові облігації США (TLT). Дані охоплюють період 2021–2026 рр. із тижневою частотою спостережень.

Результати описової статистики показали високі рівні дохідності та волатильності криптовалют, а також наявність асиметрії та екстремальних коливань цифрових активів порівняно зі стабільнішими захисними інструментами. Кореляційний аналіз (рис.1) виявив сильний взаємозв'язок між криптоактивами та низьку кореляцію між окремими класами активів, що створює передумови для ефективної диверсифікації портфеля. Перевірка стаціонарності за ADF-тестом підтвердила придатність часових рядів до подальшого економетричного моделювання.

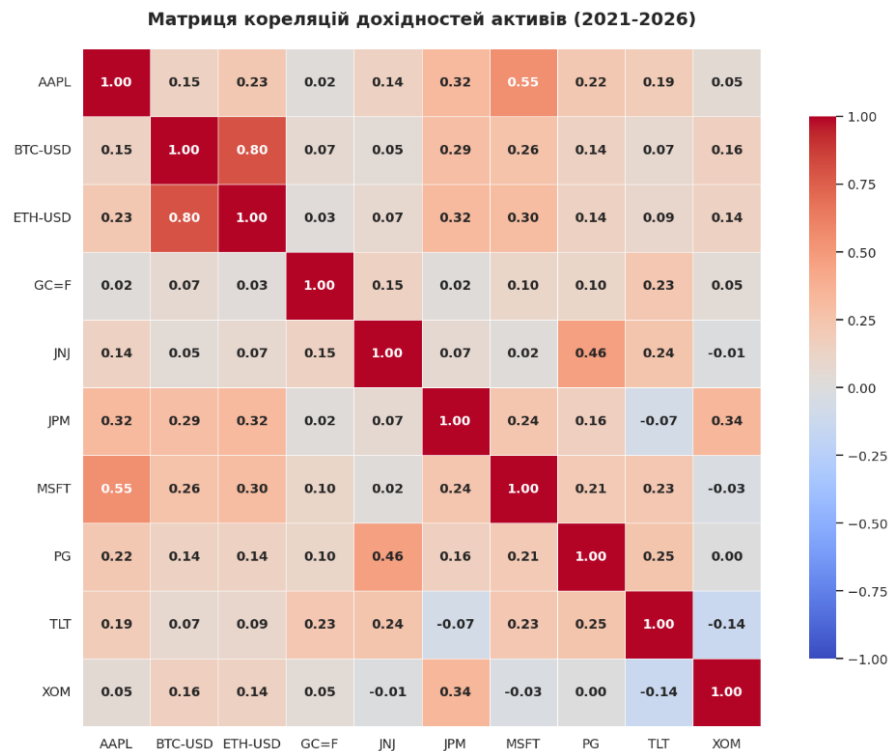


Рисунок 1 - Матриця кореляцій дохідностей активів

Джерело: розроблено автором

Для прогнозування дохідності фінансових активів застосовано підхід Auto-ARIMA з автоматичним підбором параметрів моделі на основі мінімізації інформаційного критерію Акаїке (AIC). Отримані прогнозні оцінки дохідності та ризику використано в середньо-дисперсійній моделі Марковіца з оптимізацією за критерієм максимізації коефіцієнта Шарпа. У результаті оптимізації до складу портфеля включено активи з найкращим співвідношенням «дохідність–ризик», зокрема золото, AAPL, XOM та інші активи наведені на рисунку 2. Нафтогазовий гігант XOM, отримав максимальну частку в портфелі. Попри те, що його очікувана дохідність (0.3139%) не є найвищою, цей актив має унікальні низькі коефіцієнти кореляції з технологічним сектором та криптовалютами виконуючи роль потужного стабілізатора та джерела стійкого внеску в загальну дохідність (0.1256%).

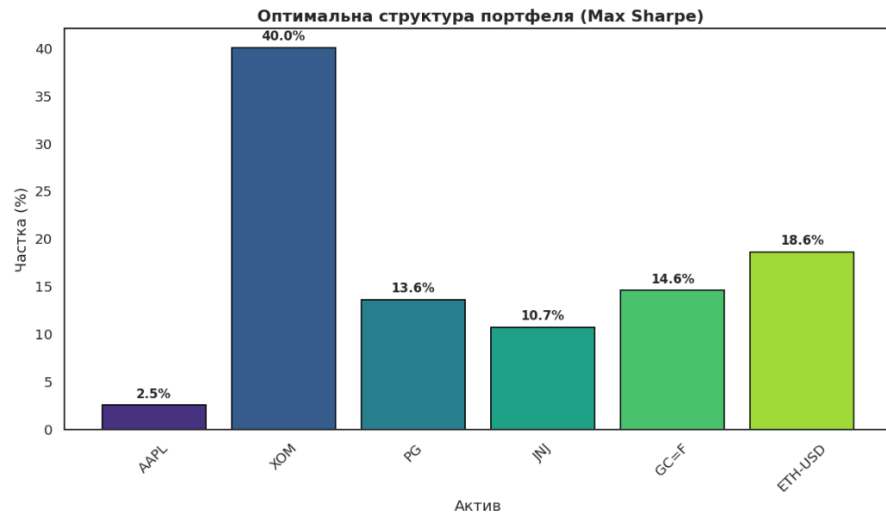


Рисунок 2 - Розподіл часток капіталу в портфелі

Джерело: розроблено автором

Сформований портфель забезпечує очікувану тижневу дохідність 0.517% при ризику 1.689% та коефіцієнті Шарпа 0.277. Побудова ефективної межі методом імітаційного моделювання підтвердила ефективність отриманої структури портфеля.

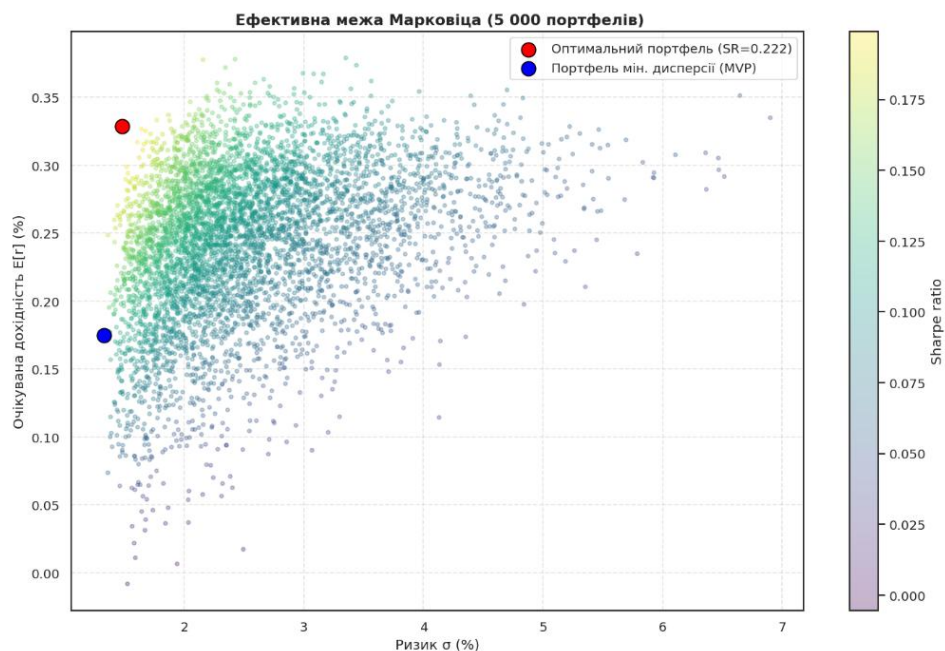


Рисунок 3 - Візуалізація ефективної межі Марковіца

Джерело: розроблено автором

Отримані результати засвідчили доцільність поєднання моделей Auto-ARIMA та Марковіца для прогнозування дохідності й формування збалансованого інвестиційного портфеля в умовах мінливості фінансових ринків.

Проведене дослідження підтвердило ефективність поєднання економетричного моделювання дохідності та методів портфельної оптимізації для обґрунтування інвестиційних рішень. Отримані результати демонструють здатність моделі адаптуватися до динамічних змін фінансового ринку, що забезпечує прогнозовану ефективність портфеля та дає змогу формувати стратегії інвестування з урахуванням сучасних ринкових тенденцій і потенційних коливань.

Список використаних джерел

1. Гринько, А. П., & Горобець, О. В. (2022). Оцінка ризиків інвестиційного портфеля з використанням методів VaR та CVaR. *Проблеми економіки*, 1, 201–210.
2. Наumenко, В. В. (2023). Моделювання волатильності фондового ринку в умовах глобальної невизначеності. *Економіка та суспільство*, 51.
3. Вітлінський, В. В., & Великоіваненко, Г. І. (2004). *Ризикологія в економіці та підприємстві: монографія*. Київ: КНЕУ
4. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
5. Щербина, О. В. (2014). Моделювання оптимізації портфеля інвестиційного фонду акцій. *Ефективна економіка*, 12. <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=3671>