

УДК 519.21

Т. В. Блудова, д-р екон. наук, професор,
Н. П. Щекань, асистент,
кафедра вищої математики
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

КОРОТКО ПРО РОЗВИТОК ЧИСЛА

Відчути мову числа дається не кожному. Збагнути суть його можуть лише вибрані і одержимі, бо, заговоривши, воно стає прозорливим проводирем на незліченних роздоріжжях науки.

М. Сорока (нар. 1935 р.) — український журналіст

У статті розглядається еволюція історичного розвитку поняття числа, його алгебраїчне зображення і розширення на множини цілих, дійсних і комплексних чисел. Приведено прізвища видатних математиків, завдяки яким ми маємо сучасну форму множин чисел та їх зображень.

В статье рассматривается эволюция исторического развития понятия числа, его алгебраическое изображение и расширение на множество целых, действительных и комплексных чисел. Приведено фамилии выдающихся математиков, благодаря которым мы имеем современную форму множеств чисел и их изображение.

Ключові слова: натуральні числа, цілі числа, раціональні, ірраціональні числа, кватерніони, комплексні числа.

Ключевые слова: натуральные числа, целые числа, рациональные и иррациональные числа, кватернионы, комплексные числа.

Keywords: natural, rational, irrational, kvanternions, complex interegs.

Створення в XVII ст. математичного аналізу, основою якого є поняття неперервності, що обумовлює його застосування в безмежній області дослідження неперервних природних процесів, започаткувало розвиток математичної науки. Математичний аналіз (диференціальне та інтегральне числення) створили одночасно і незалежно один від одного англійський фізик, механік, астроном і математик Ісаак Ньютон (1643–1727) і німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгем Лейбніц (1646–1716), який є також творцем комбінаторно-дискретного аналізу, предметом якого являється символічна логіка. Створенню математичного аналізу сприяло дослідження в геометрії засобами алгебри із застосуванням методу координат і, в основному, послідовне розширення поняття числа.

«Число, як і всяке математичне поняття, є відображенням у нашій свідомості деяких відношень реального світу», — писав радянський математик О.Я. Хінчин (1894–1959). Поняття про число у нашій свідомості формується в результаті абстракції лічби та вимірювання реальних об'єктів. У процесі лічби виникла множина натуральних чисел:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\},$$

на якій є замкненими тільки дії додавання та множення. Цікавий вислів німецького математика Р. Дедекінда (1831–1916): «Натуральні числа — це вільні витвори люд-

ського розуму». Для виконання дії віднімання натуральних чисел множина N розширюється, вводяться число нуль і цілі від'ємні числа — це множина цілих чисел:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\},$$

на якій не замкнена дія ділення. Німецький математик Г. Мінковський (1864–1909) вдало підкреслив: «Цілі числа — першоджерело математики».

Для виконання дії ділення цілих чисел множина Z розширюється введенням раціональних чисел (ділення на нуль не має смислу):

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}.$$

Додатні і від'ємні числа вперше в історії розглядалися біля двох тисяч років тому в Китаї у восьмій книзі праці «Математика у дев'яти книгах». У V–VI ст. від'ємні числа поширилися в індійській математиці; вважають, що індійці ввели число нуль. В Європі від'ємні числа вперше (1484) використав французький математик Н. Шюке (1445–1500) у трактаті «Наука про числа». Сучасні позначення додатних і від'ємних чисел знаками «+» (плюс), «-» (мінус) ввів у кінці XV ст. німецький математик Я. Відман (1460–1498). В Європі від'ємні числа стали використовуватися в науці після створення аналітичної геометрії французькими математиками Р. Декартом (1596–1660) і П. Ферма (1601–1665).

Додатні дробі були відомі вже стародавнім цивілізаціям Вавілона та Єгипту. Від'ємні раціональні числа були введені в Італії в епоху Відродження. Загальне визнання від'ємних чисел відбулось на початку XIX ст., коли була побудована теорія додатних та від'ємних чисел; початок теорії покладено німецькими математиками Г. Грассманом (1809–1877), Г. Гельмгольцом (1821–1894) і французьким математиком Ж. Таннері (1848–1910).

Існують несумірні відрізки: якщо довжину одного з таких відрізків прийняти за одиницю виміру, то інший з них, що вимірюється цією одиницею, не виражається раціональним числом; наприклад, діагональ квадрата і його сторона, прийнята за одиницю довжини, несумірні. «Відношення несумірних величин неможливо встановити, оскільки в них немає спільної міри, за допомогою якої вдалося б їх порівняти», — зазначав французький філософ Н. Мальбранш (1638–1715). Вимірювання несумірних величин, обчислення таких операцій, як добування кореня, обчислення логарифмів, розв'язування алгебраїчних рівнянь приводить до подальшого поширення чисел, введенням ірраціональних чисел. В аналізі ірраціональним числом називається неперіодичний нескінченний десятковий дріб.

Множина раціональних та ірраціональних чисел називається множиною дійсних чисел.

У геометричній інтерпретації між точками числової осі та дійсними числами існує взаємно однозначна відповідність; вона є властивістю повноти множини дійсних чисел. З цією властивістю зв'язаний увесь розвиток математичного аналізу.

Дійсні числа ще поділяються на алгебраїчні, якщо вони є розв'язком алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами. Зокрема, ірраціональні числа, які є коренями з раціональних чисел, — числа алгебраїчні. Всі неалгебраїчні числа називаються трансцендентними (лат. *transcendents* — що виходить за межу).

Французький математик Ж. Ліувіль (1809–1892) довів (1851) існування трансцендентних чисел і вперше побудував конкретні класи цих чисел, користуючись методом побудови їх у вигляді нескінченних ланцюгових дробів. Після досліджень Ж. Ліувілля німецький математик Г. Кантор (1845–1918), творець теорії множин, привів просте доведення трансцендентних чисел. Він довів, що множина всіх алгебраїчних чисел зчислення (множина зчислення, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел), а множина всіх дійсних чисел є незчисленною. Звідси випливає, що існує незчисленна множина дійсних трансцендентних чисел.

Французький математик Ш. Ерміт (1822–1901) довів (1873) трансцендентність числа $e = 2,7182818\dots$.

Німецький математик Ф. Лінденман (1852–1939) довів (1882) трансцендентність числа $\pi = 3,14159\dots$.

Протягом двадцяти п'яти століть витрачено багато зусиль на розв'язання задачі про квадратуру круга: циркулем і лінійкою побудувати квадрат, рівновеликий даному кругу. Нарешті було доведено про неможливість її розв'язання, оскільки площа круга одиничного радіуса дорівнює трансцендентному числу π .

Російський математик О. Гельфонд (1906–1968) довів (1936) сьому проблему Гільберта, одну з двадцяти трьох нерозв'язаних проблем у математиці на рубежі XX ст., які поставив (1900) німецький математик Д. Гільберт (1862–1943) на II Міжнародному математичному конгресі, трансцендентність числа a^ω , $a \neq 0, \pm 1$ є алгебраїчне число, ω — алгебраїчне раціональне число. Звідси, як наслідок, дістаємо: десяткові логарифми натуральних чисел, які не є цілими степенями числа 10, є числами трансцендентними. Це має велике значення в науці: десятковими логарифмами користуються більше трьохсот років, але природу трансцендентності цього класу чисел вдалося розкрити і довести тільки у 40-х роках XX ст.

Після того, коли у працях Б. Больцмана (1781–1848), О. Коші (1789–1857) і К. Вейерштрасса (1815–1897) було визначено строге означення границі та інших основних понять математичного аналізу, стала можливість побудови теорії дійсних чисел.

У 1872 р. Р. Дедекінд (1831–1916) і незалежно від нього, дещо пізніше, Г. Кантор, К. Вейерштрасс, беручи за основу множину раціональних чисел, побудували теорію дійсних чисел. Оригінальну теорію дійсних чисел побудував (1946) видатний російський математик А.М. Колмогоров (1903–1987) на основі теорії цілих чисел.

Розширення множини дійсних чисел, яке пов'язане з появою комплексних чисел, було обумовлене внутрішньою логікою розвитку математики: в алгебрі у зв'язку з добуванням квадратного кореня з від'ємних чисел та розв'язанням кубічних рівнянь привело у XVI ст. до системи нових чисел вигляду $a + b\sqrt{-1}$; $b \in R$.

Л. Ейлер (1707–1783) у книзі: «Вступ до математичного аналізу» (1746) ввів позначення $\sqrt{-1} = i$ та прийняв назву: i — уявна (*i* [maginarius] — уявний) одиниця, запропоновану Р. Декартом. Л. Ейлер розглядає нові уявні числа вигляду $a + bi$; $a, b \in R$, як символи, що не мають ніякого смислу, на які індуктивно поширюються всі правила дій та їх властивостей з дійсними числами.

Початок розвитку уявних чисел прослідкувати нелегко. Вважається, що вперше вони з'явилися у XVI ст. у працях італійських математиків Д. Кардано (1501–1576) у книзі «Велике мистецтво або про правила алгебри» (1545) та Р. Бомбеллі (1526–1572) у книзі «Алгебра» (1572), де приводяться правила дій над уявними числами та їх застосування до дослідження незвідного випадку кубічного рівняння.

Минуло майже двісті років після введення уявних чисел в алгебру і як вони дістали широке поширення у математиці та застосуванні, коли німецький математик К. Гаусс (1777–1855) дав їм геометричну інтерпретацію за допомогою точок евклідової площини.

Ще до К. Гаусса інтерпретацію уявних чисел геометричними образами встановили англійський математик Д. Валліс (1616–1703) у праці «Історичне і практичне керівництво алгебри» (1685) та німецький математик Г. Кюн (1690–1769), який намагався (1750–1751) побудувати теорію уявних чисел.

Геометричне тлумачення уявних чисел та арифметичних дій над ними дали: датчанин К. Вессель (1745–1818) у книзі «Досвід аналітичного представлення напрямів» (1799) (тлумачення природи уявних чисел та дій над ними К. Весселем біля двохсот років тому є основою сучасного поняття комплексних чисел, хоча праця К. Весселя залишилася непомітною серед математиків протягом ста років і за цей час його тлумачення про уявні числа відкривались заново в працях інших математиків), швейцарець Ж. Арган (1768–1822) у книзі «Досвід деякого зображення уяв-

них чисел у геометричних побудовах» (1806), француз М. Бюе (1748–1826), англійець Д. Уоррен (1796–1852) та ін.

Проте К. Гаусс, незалежно від К. Весселя, Ж. Аргана та ін., наприкінці XVIII ст. створює на евклідовій площині геометричну інтерпретацію уявних чисел у праці «Теорія бікватратних величин» (1799) і пізніше в праці «Арифметичні теорії комплексних чисел» (1806, 1825, 1831), де, розглядаючи спосіб інтерпретації уявних чисел, назвав їх вперше комплексними числами (лат. *complexus* — об'єднання) і застосував геометричне тлумачення комплексних чисел до розв'язання проблемних геометричних задач, зокрема, про розв'язність побудови правильних многокутників; він поклав початок застосування комплексних чисел.

Уявні числа через їх геометричну інтерпретацію на евклідовій площині дістали реальне тлумачення, з'явилися подальшим поширенням множини дійсних чисел і перестали бути уявлюваними. Аналогічно, як і геометрія Лобачевського дістала наукове визнання та подальший розвиток тоді, коли була побудована її модель геометричної інтерпретації на евклідовій площині (модель (1863) італійського математика Бельтрамі (1835–1900) і модель (1882) французького математика А. Пуанкаре (1854–1912)).

Розв'язання квадратного рівняння привело до комплексних чисел вигляду $a \pm bi$. Тому вважали, що для розв'язання рівнянь степеня $n \geq 3$, потрібно вводити все нові й нові числа, відмінні від $a \pm bi$, тобто комплексні числа $a \pm bi$ не єдині.

Голландський математик А. Жирар (1595–1632) уперше (1629) в книзі «Новий вступ до алгебри» та Р. Декарт у «Геометрії» у третій книзі «Про природу рівнянь» (1637) висловили твердження близьке основній теоремі алгебри: число дійсних і комплексних коренів будь-якого алгебраїчного рівняння дорівнює його степені.

Французький математик Ж. д'Аламбер (1717–1783) довів (1741), що будь-яке алгебраїчне рівняння має хоча б один комплексний корінь.

Л. Ейлер дав (1749) чітке формулювання основної теореми алгебри: будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на множники першого та другого степеня з дійсними коефіцієнтами.

К. Гаусс довів основну теорему алгебри; він неодноразово (1803–1817) повертався до доведення цієї теореми і привів не менше шести різних її доведень.

У працях Л. Ейлера, Ж. д'Аламбера та К. Гаусса було доведено, що при будь-яких алгебраїчних та інших математичних діях дістаємо комплексні числа вигляду $a \pm bi$; $a, b \in \mathbb{R}$. Цим було доведено, що розширення множини дійсних чисел є множиною комплексних чисел, на якій будь-які алгебраїчні і трансцендентні дії є замкненими.

До середини XIX ст. установився реальний зміст про комплексні числа і з'явилося намагання подальшого їх узагальнення на тривимірний простір.

Цю проблему поставив ще К. Вессель, але не зміг її розв'язати; її розв'язав (1843) ірландський математик У.Р. Гамільтон (1805–1865). Він розглядає систему чисел a з чотирма одиницями: одна дійсна $i_0 = I$ і три уявних i, j, k , яка визначається упорядкованою четвіркою дійсних чисел — $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$: $a = a_0 i_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, і назвав її кватерніонами (лат. *quatern* — чотири). Гамільтон на множині кватерніонів описав означення арифметичних дій. Проте кватерніони не є подальшим розширенням комплексних чисел, оскільки в численні кватерніонів не виконується комутативний закон для дії множення.

Числова система — числення кватерніонів — знайшла широке застосування в геометрії, механіці, теоретичній фізиці. Достатньо вказати, що шотландський фізик і математик Дж. К. Максвелл (1831–1879) у кватерніонах записав (1860–1865) свої відомі рівняння (рівняння Максвелла), які явилися основою теорії електромагнетизму. Максвелл писав: «Винахід кватерніонів — крок уперед до розуміння величин, зв'язаних з простором; він рівний за своїм значенням з винаходом Декарта системи координат». Французький фізик і математик А. Пуанкаре (1854–1912) писав: «Поява кватерніонів дала могутній поштовх розвитку алгебри; виходячи від них, наука рушила шляхом узагальнення поняття числа, прийшовши до концепції матриці

та лінійного оператора, які пронизують сучасну математику. Це була революція в арифметиці, подібна тій, яку зробив Лобачевський у геометрії».

Необхідно відмітити, що Ейлер користувався (1748) в задачах механіки твердого тіла і теорії чисел математичним апаратом, подібним теорії кватерніонів. У чернетках Гаусса знайдено нарис «Мутація простору трьох вимірів» (1819), у якому він розглядає систему чисел, як упорядковану четвірку дійсних чисел і дії над ними, які по суті не відрізняються від гамільтонових.

Угорський математик Янош Больяї (1802–1860) подав (1837) працю на конкурс, оголошений лейпцігським ученим товариством на тему «Удосконалення теорії комплексних чисел», у якій будує теорію комплексних чисел, випереджаючи гамільтонівську побудову (1843) кватерніонів. Я. Больяї у своїй праці «Appendix» (1832) прийшов до відкриття неевклідової геометрії незалежно від Лобачевського (1829) і Гаусса (дослідження Гаусса по неевклідовій геометрії — її відкриття не були опубліковані, їх виявили тільки після його смерті у переписці з німецькими математиками у листах (1819) Швейкарту (1780–1859), (1824) Таурінусу (1794–1874), (1829) Бесселю (1784–1846), а також у зошитах його архіву.

Три генія — Лобачевський, Больяї, Гаусс — незалежно один від одного, досліджуючи різними шляхами, відкрили неевклідову геометрію. Після Евкліда протягом двох тисяч років математики марно докладали зусиль на доведення п'ятого постулату евклідової геометрії як теореми. Далі Евкліда не зрушилися. Дійсно, як просто, коли вже відкрито!

Зокрема, числення кватерніонів тільки з трьома одиницями $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ вигляду $a = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k} \in$ сучасним векторним численням, яке за ініціативою американського фізика Дж. Гіббса (1839–1903) й англійського фізика О. Хевісайда (1850–1925) стали розглядати без посилання на кватерніони.

Відкриття кватерніонів явилось імпульсом для створення ряду важливих розділів сучасної математики, зокрема, теорії матриць, багатовимірної геометрії та ін. «Поява кватерніонів дала могутній поштовх розвитку алгебри; виходячи від них, наука рушила шляхом узагальнення поняття числа, прийшовши до концепції матриць та лінійного оператора, які пронизують сучасну математику. Це була революція в арифметиці, подібна до тієї, яку зробив Лобачевський в геометрії», — писав французький математик А. Пуанкаре (1854–1912).

У середині XIX ст. почали розглядатися числові системи чисел a з $(n+1)$ -ою одиницями: $i_0 = 1$ та $i_1, i_2, \dots, i_n$ — уявні одиниці, які записуються за допомогою упорядкованих дійсних чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ у вигляді $a = a_0i_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + \dots + a_ni_n$, їх назвали гіперкомплексними $(n+1)$ -го рангу; за цим означенням, зокрема, комплексні числа і кватерніони є гіперкомплексними числами відповідно 2-го і 4-го рангу.

Англійський математик А. Келі (1821–1895), який відвідував лекції Гамільтона по кватерніонам, побудував (1845) гіперкомплексні числа 8-го рангу (тепер їх називають числами Келі), які назвав октавами (лат. octo — вісім), описав дії над цими числами, причому для множення цих чисел не виконуються закони комутативності та асоціативності.

Після створення кватерніонів і октав стала можливість будувати числові системи гіперкомплексних чисел у вигляді упорядкованих рядків з упорядкованими числами в кожному з них, які виявились плідними для застосування.

А. Келі побудував (1858) числову систему нової природи: не рядків, а прямокутних, зокрема квадратних, таблиць складених з упорядкованих дійсних чисел, вони дістали назву матриць. Він описав відомі тепер дії з матрицями, установив зв'язок між матрицями, комплексними числами, кватерніонами. Матриці широко застосовуються в усіх областях науки і техніки.

У другій половині XIX ст. своїми дослідженнями К. Вейерштрасс, Ф. Фробеніус (1849–1917), Ч. Пірс (1839–1914) довели, що будь-яке розширення комплексних чисел зв'язане з невиконанням законів арифметичних дій.

Таким чином, єдиним розширенням дійсних чисел з виконанням арифметичних законів: комутативності, асоціативності та дистрибутивності є комплексні числа. Множина дійсних чисел є підмножина множини комплексних чисел.

З розвитком теорії комплексних чисел почала розвиватись теорія функцій комплексної змінної, основи її закладено у XVII ст. в основному працями Л. Ейлера. Подальший її розвиток зв'язаний з працями О. Коші, Б. Рімана (1826–1866), К. Вейерштрасса.

Значний внесок у розвиток теорії функцій комплексної змінної і її застосування зробили російські математики І.І. Сомов (1815–1876), Ю. В. Сохоцький (1842–1927), М.Є. Жуковський (1847–1921), М.Я. Сонін (1815–1876), С.В. Ковалевська (1850–1891), С.А. Чаплигін (1869–1942), В. І. Смірнов (1887–1974), І.І. Прівалов (1891–1941), М. І. Мусхелішвілі (1891–1976), М. О. Лаврентьев (1900–1980), Г. М. Голузін (1906–1952), М.В. Келдиш (1911–1978), Д.Є. Меньшов (1892–1988) та ін.

Фундаментальні дослідження в розвитку теорії аналітичних функцій здійснили українські математики М.В. Остроградський (1802–1862), М.С. Ващенко-Захарченко (1825–1912), В.П. Єрмаков (1845–1922), Б.Я. Букреев (1859–1962), С.Н. Бернштейн (1890–1968), Ю.Д. Соколов (1896–1971), О.С. Смогоржевський (1896–1969), Й.З. Штокало (1897–1987), М.П. Кравчук (1892–1942), Н.І. Ахієзер (1901–1980), М.М. Боголюбов (1909–1992), В.А. Зморевич (1909–1994), Г.М. Положий (1914–1968), П.Ф. Фільчаков (1916–1978), М.Г. Крейн, В.К. Дзядик, М.О. Давидов, Н.О. Пахарєва, Н.О. Вірченко, І.І. Ляшко, В.С. Чемерис, В.І. Лаврик, Л.С. Дундученко, Н.І. Нагнибіда та багато ін.

Теорія функції комплексної змінної знаходить численні застосування в аеро-, гідромеханіці, теорії пружності, електротехніці, атомній фізиці, у різних розділах теоретичної математики, таких як аналітична теорія чисел, диференціальні рівняння та ін.

Широке застосування теорії функції комплексної змінної зумовлюється виключним значенням комплексних чисел у математиці.

Закінчуючи про розвиток числа, хочеться привести вислів семи давньогрецьких мудреців (список мудреців навів Платон у своєму діалозі «Протагор» у 4 ст. до н.е., це — Пітак з Мітіліні (о. Лесбос), Солон Афінський, Клеобул з Лінда (о. Родос), Біант Приєнський, Місон Хенейський, Фалес Мілетський, Хілон зі Спарти): «Природа числа є те, що дає пізнання, скеровує і навчає кожного стосовно всього, що для нього сумнівне і невідоме. Справді, якби не було числа і його сутності, то ні для кого не було б нічого ясного ані в речах самих по собі, ані в їхніх взаємних стосунках... Можна помітити, що природа і сила числа діє не тільки в божественних речах, але також повсюди в усіх людських справах і стосунках, у всіх технічних мистецтвах і в музиці».

Література

1. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биограф. слов. справ. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Рад.школа, 1987. — 656 с.
2. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел. — М.: Просвещение, 1975. — 158 с.
3. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные. — М.: Мир, 1966. — 196 с.
4. Вишенський В. А., Суцанський В. І. — К.: Вища школа, 1988. — 94 с.
5. Блудова Т. В., Мартиненко В. С. Теорія функцій комплексного змінного. — К.: Прогрес, 2000. — 472 с.

Надійшла до редакції: 04.01.2010