

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАДИМА ГЕТЬМАНА**

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАДИМА ГЕТЬМАНА**

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ПОЗНЯК СЕРГІЙ ПЕТРОВИЧ

УДК 004.8:[519.86:519.23]:330.341(043.3)

**ДИСЕРТАЦІЯ
АДАПТИВНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ ДЛЯ
ВІДКРИТОЇ ЕКОНОМІКИ**

Спеціальність – 051 Економіка

Подається на здобуття наукового ступеня **доктора філософії**.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ **С.П. Позняк**

Науковий керівник – **Коляда Юрій Васильович**, доктор економічних наук, професор

КИЇВ – 2026

АНОТАЦІЯ

Позняк С.П. Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 051 «Економіка». – Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ, 2026.

Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю розвитку сучасного економіко-математичного інструментарію для моделювання економічного зростання у відкритих економіках в умовах зростання впливу глобалізаційних процесів, зовнішніх шоків, інституційних змін та структурних трансформацій. Існуючі класичні, неокласичні та ендогенні моделі зростання базуються на спрощених припущеннях та недостатньо враховують комплексну взаємодію внутрішніх і зовнішніх факторів, адаптивну поведінку економічних агентів, циклічні коливання та роль тіньового сектору, що обмежує їх прогнозовані можливості. У сучасних умовах зростає потреба в адаптивних багатовимірних моделях, здатних інтегрувати виробничі, інвестиційні, демографічні та інституційні чинники й забезпечувати більш точне оцінювання траєкторій економічного зростання та пов'язаних із ним ризиків.

Відповідно, дисертаційну роботу присвячено розробці та реалізації нового науково-методичного підходу до вирішення задачі моделювання економічного зростання, який одночасно поєднує багаторічні напрацювання теорії економічного зростання та враховує вплив нових факторів, що визначають сучасні тенденції соціально-економічного розвитку в умовах глобалізаційних і технологічних трансформацій. Цей підхід забезпечує кількісне оцінювання впливу ключових чинників – приватного і державного капіталу, людського потенціалу, праці, земельних ресурсів, внутрішніх і зовнішніх інвестицій, заощаджень та міжнародних трансфертів – на динаміку розвитку економіки, а також враховує часові лаги, циклічні коливання, специфіку ринкової структури та роль тіньового сектору, що дає змогу підвищити точність прогнозування траєкторій економічного зростання та оцінювання ризиків.

Об'єктом дослідження є процеси економічного зростання відкритої економіки, які визначають динаміку макроекономічних факторів та системну взаємодію між ними.

Предметом дослідження є інструментарій адаптивного моделювання економічного зростання, що забезпечує оцінювання траєкторії розвитку відкритої економіки.

Метою дослідження є розробка науково-методичного підходу щодо моделювання економічного зростання, який відповідає сучасним тенденціям економічного розвитку в умовах глобалізаційних і технологічних трансформацій. У дисертаційній роботі визначено та послідовно розв'язано такі завдання: досліджено еволюцію теорій економічного зростання та визначено основні методи моделювання економічного зростання і їх модифікації; визначено ключові фактори та індикатори, що впливають на економічне зростання відкритої економіки за допомогою кількісного та якісного аналізу основних методів моделювання економічного зростання; розроблено підхід апостеріорного оцінювання величини економічного ризику; побудовано адаптивну математичну модель економічного зростання для відкритої економіки на основі багатовимірної підходу до моделювання; проведено кількісний обчислювальний експеримент для апробації запропонованої моделі на реальних даних із оцінюванням економічних ризиків та точності прогнозування; досліджено підходи щодо модифікації моделі економічного зростання для відкритої економіки та оцінено їх ефективність у практичному застосуванні; сформовано рекомендації щодо можливостей застосування адаптивної моделі в системі державного управління й економічної політики.

Практична цінність одержаних результатів дослідження полягає у можливості їх застосування як аналітико-прогностичного інструментарію для дослідження закономірностей економічного зростання у відкритих економіках. Розроблена модель забезпечує комплексний кількісний аналіз впливу ключових макроекономічних чинників на динаміку розвитку економічних систем, що дозволяє підвищити обґрунтованість управлінських рішень у сфері економічної політики. Її використання сприяє вдосконаленню процедур макроекономічного прогнозування шляхом врахування багатфакторної структури економіки, взаємодії внутрішніх і зовнішніх детермінант розвитку, а також динамічних ефектів, пов'язаних із циклічністю та структурними зрушеннями. Окреме практичне значення полягає у можливості застосування моделі для оцінювання економічних ризиків, ідентифікації потенційних

дисбалансів розвитку та визначення чутливості економічного зростання до змін ключових параметрів. Це, у свою чергу, створює передумови для підвищення якості стратегічного планування соціально-економічного розвитку на національному та регіональному рівнях, а також для формування більш ефективних механізмів реагування на зовнішні та внутрішні шоки.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у розробленні математичних багатовимірних (на відміну від класичних одновимірних) динамічних моделей в умовах функціонування відкритої економіки, що забезпечують можливість глибшого опису складної структури економічних процесів. Запропонована множина взаємопов'язаних моделей створює основу для адаптивного комп'ютерного моделювання систем господарювання та формування сценаріїв їх розвитку з урахуванням нелінійної динаміки та зовнішніх впливів.

Вперше, у межах дослідження, побудовано систему взаємопов'язаних складових нелінійної динамічної моделі відкритої економіки, внаслідок чого отримуються віртуальні сценарії її еволюції, що підвищує адаптивність моделювання до змін зовнішнього середовища. Розроблено методологічний підхід до апостеріорного оцінювання економічного ризику на основі моделей економічного зростання, що забезпечує можливість кількісного оцінювання рівня невизначеності траєкторій економічного зростання в динаміці.

Удосконалено наукові підходи до оцінювання економічного зростання в умовах багатовимірної структури моделі, що підвищує точність моделювання економічної динаміки. Механізм взаємодії факторів виробництва у виробничій функції розширено шляхом включення додаткових складових, зокрема через виокремлення приватного та публічного капіталу, що підвищує чутливість моделі до структурних змін економіки. Також удосконалено механізм врахування інвестицій, імпорту та експорту у моделі економічного зростання не ізольовано, а через їх взаємозв'язок зі споживанням, заощадженнями й динамікою розвитку економічної системи. Крім того, поглиблено підходи до аналізу впливу людського капіталу на довгострокові темпи економічного зростання, що забезпечує повне врахування інноваційної складової розвитку. Удосконалено підхід до комп'ютерного моделювання економічних процесів на основі

великих масивів даних, що підвищує точність і швидкість розрахунків. Було запропоновано методологічний підхід та відповідний інтегральний індекс оцінювання результатів кластеризації на основі стандартизованих показників якості кластеризації, що підвищує обґрунтованість вибору кількості кластерів.

Набули подальшого розвитку теоретичні положення щодо взаємозв'язку накопичення капіталу та економічного зростання в умовах відкритої економіки, що сприяє глибшому розумінню механізмів довгострокового розвитку економічних систем. Розвинено системний підхід до моделювання економічного зростання для формування можливих траєкторій розвитку, що підвищує достовірність прогнозування.

Методи дослідження ґрунтуються на поєднанні загальнонаукових, теоретичних і емпіричних підходів, що забезпечили як обґрунтування, так і перевірку моделі економічного зростання. Застосовано аналіз, синтез, абстрагування та системний підхід для визначення ключових факторів розвитку й побудови структури моделі. Теоретичні методи використано для дослідження еволюції теорій економічного зростання та інтеграції різних наукових підходів у межах адаптивної моделі. Емпірична складова дослідження ґрунтується на застосуванні сучасного економіко-математичного інструментарію, у тому числі кластеризації, зменшення розмірності, економетричних та нейромережевих методів прогнозування, для аналізу взаємозв'язків між макроекономічними змінними. Додаткова увага приділена аналізу панельних та часових рядів, що дозволяє оцінити як просторові, так і часові закономірності розвитку економічних процесів. Також використано методи комп'ютерного моделювання та прогнозування, які забезпечують реалізацію розробленої моделі та отримання сценарних оцінок економічного зростання в умовах невизначеності.

Інформаційною основою дослідження є офіційні статистичні дані міжнародних організацій (Світовий банк, ООН, ОЕСР), національних статистичних органів і центральних банків щодо макроекономічних показників відкритих економік за досліджуваний період, даних з міжнародної торгівлі, інвестиційної активності,

демографічних та інституційних характеристик, а також аналітичні звіти, результати наукових і емпіричних досліджень у сфері економічного зростання.

У розділі 1 здійснено детальний аналіз економічного зростання як базової категорії економічної науки, узагальнено еволюцію теоретичних підходів до його розуміння та структуровано ключові фактори, типи і закономірності економічної динаміки. Окремо розглянуто методологічні засади оцінювання економічного зростання та обґрунтовано провідну роль адаптаційних механізмів, інституційного середовища та структурних трансформацій у формуванні довгострокових траєкторій розвитку економічних систем. Показано еволюцію наукових концепцій економічного зростання – від класичних підходів, що базуються на нагромадженні факторів виробництва (капіталу, праці, землі), до сучасних неокласичних, ендогенних, інституційних та еволюційних теорій. Встановлено, що ускладнення теоретичних уявлень супроводжувалося переходом від домінування екзогенних чинників до визнання внутрішніх механізмів саморозвитку економіки, серед яких ключову роль відіграють інновації, людський капітал, знання та технологічний прогрес. Обґрунтовано, що в сучасних умовах ефективність традиційних факторів виробництва значною мірою визначається якістю інституційного середовища, рівнем розвитку ринкових механізмів, соціально-економічною стабільністю та адаптивністю економічної системи до зовнішніх і внутрішніх шоків. Особливу увагу приділено інституціям як ключовому детермінанту економічного зростання, що впливають на інвестиційний клімат, ефективність розподілу ресурсів, рівень довіри та швидкість поширення інновацій. Детально проаналізовано систему факторів економічного зростання та їх якісні й кількісні характеристики, а саме продуктивність факторів виробництва, структурні зрушення, технологічний розвиток і соціально-економічні ефекти. Розглянуто сучасні підходи до вимірювання економічного розвитку, які виходять за межі традиційних макроекономічних показників і враховують індикатори якості життя, людського розвитку, інституційної ефективності та сталості економічного зростання.

У розділі 2 здійснено комплексний аналіз сучасних підходів до моделювання економічного зростання, систематизовано методи його кількісного та якісного

оцінювання, а також досліджено можливості застосування класичних, неокласичних, ендогенних і сучасних стохастичних моделей. Проведено порівняльний аналіз існуючих підходів щодо моделювання економічного зростання, визначено їх переваги та обмеження, що дозволило обґрунтувати необхідність переходу від спрощеного одновимірного до багатовимірного адаптивного моделювання відкритої економіки. Встановлено, що сучасні моделі економічного зростання, попри значний рівень теоретичної обґрунтованості, мають низку суттєвих методологічних обмежень, пов'язаних із припущеннями про замкненість економіки, недостатнім врахуванням зовнішнього сектору, циклічних коливань, інституційних факторів, тіньової економіки та багатовимірності економічних процесів. Проведений обчислювальний експеримент дав змогу оцінити практичні можливості найбільш поширених моделей економічного зростання та виявити обмеження їх застосування в умовах сучасної відкритої економіки.

На основі проведеного аналізу розроблено адаптивну математичну модель економічного зростання, у межах якої економіка розглядається як відкрита багатовимірна система, що функціонує у взаємодії зі світовим господарством. Запропонована модель інтегрує приватний і публічний капітал, людський капітал, працю, земельний ресурс, внутрішні та зовнішні інвестиції, а також враховує вплив імпорту, експорту, державних і міжнародних трансфертів. Структурно модель поділено на взаємопов'язані блоки, що описують динаміку приватного та публічного капіталу, заощаджень і людського капіталу. Розроблений підхід забезпечує можливість адаптивного комп'ютерного моделювання економічного зростання з урахуванням багатфакторної структури економіки, часових лагів, нелінійної динаміки та зовнішніх впливів. Це створює підґрунтя для формування точніших прогнозованих сценаріїв розвитку відкритих економічних систем, оцінювання економічних ризиків і підвищення ефективності аналітичного забезпечення економічної політики.

Здійснено практичну апробацію адаптивної моделі економічного зростання на основі реальних статистичних даних, проведено оцінювання її параметрів та досліджено можливості застосування для аналізу і прогнозування макроекономічної

динаміки. Виконано порівняння результатів моделювання на основі власної адаптивної моделі з іншими моделями економічного зростання, що дозволило підтвердити переваги запропонованого підходу з точки зору адаптивності, стійкості та точності відтворення реальних економічних процесів. Проведено оцінювання покоординатного економічного ризику та визначено чутливість моделі до змін ключових параметрів.

У розділі 3 особливу увагу приділено вдосконаленню моделі економічного зростання шляхом модифікації основного рівняння. Здійснено перетворення моделі з урахуванням демографічних чинників, які визначають формування та відтворення трудового потенціалу країни. Зокрема, до моделі інтегровано показники, що характеризують динаміку чисельності населення, зміни у структурі зайнятості, рівень народжуваності та смертності, а також масштаби та інтенсивність міграційних процесів. Такий підхід дав змогу комплексно відобразити вплив демографічних трансформацій на параметри економічного розвитку, продуктивність праці та потенціал довгострокового економічного зростання. Досліджено вплив ринкової типології на динаміку економічного розвитку шляхом включення до моделі параметрів, пов'язаних із рівнем конкуренції, монопольною владою та диференціацією продукції. У межах модифікації моделі враховано параметри, що характеризують рівень конкуренції на ринку, ступінь концентрації економічної влади, масштаби монополізації та рівень диференціації продукції. Це дозволило оцінити особливості функціонування різних типів ринкових структур і визначити їхній вплив на інвестиційну активність, інноваційний розвиток та ефективність розподілу ресурсів у національній економіці.

У дослідженні розглянуто тіньову економіку як важливий фактор, що потенційно впливає на достовірність макроекономічних показників та ускладнює оцінювання реального рівня економічного розвитку. Включення цього чинника до теоретичної конструкції моделі спрямоване на підвищення її аналітичної повноти та врахування прихованих економічних процесів, які можуть суттєво змінювати результати макроекономічного аналізу. У межах удосконалення моделі передбачено врахування інвестиційного лагу, який характеризує часову затримку між здійсненням

інвестицій та проявом їх економічного ефекту. Урахування часового лагу дає можливість реалістичніше описати механізми економічного зростання та відобразити відтермінований вплив інвестиційної діяльності на динаміку виробництва, продуктивність праці та структурні зміни в економіці.

Результати проведеного дослідження підтвердили ефективність запропонованого модельного підходу для формування сценаріїв економічного розвитку відкритих економік в умовах структурних трансформацій та зовнішніх викликів. Розроблена модель створює підґрунтя для подальшого вдосконалення методів прогнозування економічного зростання, розширення інформаційної бази досліджень та підвищення якості аналітичного забезпечення економічної політики.

Ключові слова: економічне зростання, адаптивне моделювання, моделювання економічного зростання, багатовимірні моделі економічного зростання, відкрита економіка, приватний капітал, публічний капітал, людський капітал, інвестиції, демографічні фактори, типологія ринку, тіньова економіка.

ABSTRACT

Poznyak S.P. Adaptive modeling of economic growth for an open economy. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

The relevance of this research topic stems from the need to develop modern economic and mathematical tools for modeling economic growth in open economies amid the growing influence of globalization, external shocks, institutional changes, and structural transformations. Existing classical, neoclassical, and endogenous growth models are based on simplified assumptions and do not sufficiently account for the complex interaction of internal and external factors, the adaptive behavior of economic agents, cyclical fluctuations, and the role of the shadow economy, which limits their forecasting capabilities. In today's environment, there is a growing need for adaptive multidimensional models capable of integrating production, investment, demographic, and institutional factors and providing a more accurate assessment of economic growth trajectories and associated risks.

Accordingly, this thesis is devoted to the development and implementation of a new scientific and methodological approach to modeling economic growth, which

simultaneously integrates long-standing theoretical insights into economic growth and accounts for the influence of new factors that shape contemporary trends in socioeconomic development amid globalization and technological transformations. This approach enables a quantitative assessment of the impact of key factors – private and public capital, human capital, labor, land resources, domestic and foreign investment, savings, and international transfers – on the dynamics of economic development, and also accounts for time lags, cyclical fluctuations, the specifics of market structure, and the role of the shadow economy, which allows for greater accuracy in forecasting economic growth trajectories and assessing risks.

The object of this thesis is the processes of economic growth in an open economy, which determine the dynamics of macroeconomic factors and the systemic interaction between them. The subject of this study is the toolkit for adaptive modeling of economic growth, which enables the assessment of the development trajectory of an open economy.

The aim of the thesis is to develop a scientific and methodological approach to modeling economic growth that corresponds to contemporary trends in economic development amid globalization and technological transformations.

This thesis identifies and systematically addresses the following objectives: it examines the evolution of economic growth theories and identifies the main methods of modeling economic growth and their modifications; it identifies the key factors and indicators influencing the economic growth of an open economy through quantitative and qualitative analysis of the main methods of modeling economic growth; a approach for a posteriori assessment of economic risk magnitude was developed; an adaptive mathematical model of economic growth for an open economy was constructed based on a multidimensional approach to modeling; a quantitative computational experiment was conducted to test the proposed model on real data, including an assessment of economic risks and forecasting accuracy; approaches to modifying the economic growth model for an open economy were investigated, and their effectiveness in practical application was assessed; recommendations were formulated regarding the possibilities for applying the adaptive model in the system of public administration and economic policy.

The practical value of the research findings lies in their potential application as analytical and forecasting tools for studying the patterns of economic growth in open economies. The developed model provides a comprehensive quantitative analysis of the impact of key macroeconomic factors on the dynamics of economic systems, thereby enhancing the soundness of management decisions in the field of economic policy. Its use contributes to the improvement of macroeconomic forecasting procedures by taking into account the multifactorial structure of the economy, the interaction of internal and external determinants of development, as well as dynamic effects associated with cyclicity and structural shifts. A separate practical significance lies in the possibility of applying the model to assess economic risks, identify potential development imbalances, and determine the sensitivity of economic growth to changes in key parameters. This, in turn, creates the conditions for improving the quality of strategic planning for socio-economic development at the national and regional levels, as well as for developing more effective mechanisms for responding to external and internal shocks.

The scientific novelty of the obtained results lies in the development of multidimensional mathematical (as opposed to classical one-dimensional) dynamic models under the conditions of an open economy, which enable a more in-depth description of the complex structure of economic processes. The proposed set of interconnected models forms the basis for adaptive computer modeling of economic systems and the development of scenarios for their evolution, taking into account nonlinear dynamics and external influences.

For the first time, as part of this study, a system of interrelated components of a nonlinear dynamic model of an open economy has been constructed, resulting in virtual scenarios of its evolution, which enhances the adaptability of the modeling to changes in the external environment. A methodological approach to the a posteriori assessment of economic risk based on economic growth models has been developed, which enables the quantitative assessment of the level of uncertainty in economic growth trajectories over time.

Scientific approaches to assessing economic growth within the context of a multidimensional model structure have been refined, thereby increasing the accuracy of

modeling economic dynamics. The mechanism of interaction among factors of production in the production function has been expanded by including additional components—in particular, by distinguishing between private and public capital—which increases the model’s sensitivity to structural changes in the economy. The mechanism for accounting for investment, imports, and exports in the economic growth model has also been refined; these factors are no longer considered in isolation but rather through their interrelationship with consumption, savings, and the dynamics of the economic system’s development. Furthermore, approaches to analyzing the impact of human capital on long-term economic growth rates have been deepened, ensuring that the innovative component of development is fully accounted for. The approach to computer modeling of economic processes based on large datasets has been refined, increasing the accuracy and speed of calculations. A methodological approach and a corresponding integrated index for evaluating clustering results based on standardized clustering quality indicators were proposed, which enhances the validity of the choice of the number of clusters.

Theoretical concepts regarding the relationship between capital accumulation and economic growth in an open economy have been further developed, contributing to a deeper understanding of the mechanisms underlying the long-term development of economic systems. A systematic approach to modeling economic growth has been developed to identify possible development trajectories, thereby improving the reliability of forecasts.

The research methods are based on a combination of general scientific, theoretical, and empirical approaches, which provided both the theoretical foundation and empirical validation of the economic growth model. Analysis, synthesis, abstraction, and a systems approach were applied to identify key development factors and construct the model’s structure. Theoretical methods were used to study the evolution of economic growth theories and to integrate various scientific approaches within an adaptive model. The empirical component of the study is based on the application of modern economic-mathematical tools, including clustering, dimensionality reduction, and econometric and neural network forecasting methods, to analyze the interrelationships between macroeconomic variables. Additional attention is paid to the analysis of panel and time series data, which allows for the assessment of both spatial and temporal patterns in the development of economic

processes. Methods of computer modeling and forecasting are also employed, enabling the implementation of the developed model and the generation of scenario-based estimates of economic growth under conditions of uncertainty.

The study is based on official statistical data from international organizations (the World Bank, the UN, the OECD), national statistical agencies, and central banks regarding macroeconomic indicators of open economies for the period under review, as well as data on international trade, investment activity, demographic and institutional characteristics, and analytical reports, results of scientific and empirical studies in the field of economic growth.

Chapter 1 provides a detailed analysis of economic growth as a fundamental concept in economic science, summarizes the evolution of theoretical approaches to understanding it, and outlines the key factors, types, and patterns of economic dynamics. The methodological foundations for assessing economic growth are examined separately, and the leading role of adaptive mechanisms, the institutional environment, and structural transformations in shaping the long-term trajectories of economic systems is substantiated. The evolution of scientific concepts of economic growth is demonstrated – from classical approaches based on the accumulation of factors of production (capital, labor, land) to modern neoclassical, endogenous, institutional, and evolutionary theories. It has been established that the increasing complexity of theoretical concepts was accompanied by a shift from the dominance of exogenous factors to the recognition of internal mechanisms of economic self-development, among which innovation, human capital, knowledge, and technological progress play a key role. It is argued that, under current conditions, the effectiveness of traditional factors of production is largely determined by the quality of the institutional environment, the level of development of market mechanisms, socioeconomic stability, and the economic system's ability to adapt to external and internal shocks. Particular attention is paid to institutions as a key determinant of economic growth, influencing the investment climate, the efficiency of resource allocation, the level of trust, and the speed of innovation diffusion. The system of economic growth factors and their qualitative and quantitative characteristics –namely, factor productivity, structural shifts, technological development, and socio-economic effects—are analyzed in detail. The paper examines contemporary approaches to measuring economic development that goes beyond

traditional macroeconomic indicators and takes into account indicators of quality of life, human development, institutional effectiveness, and the sustainability of economic growth.

Chapter 2 presents a comprehensive analysis of contemporary approaches to modeling economic growth, systematizes methods for its quantitative and qualitative assessment, and examines the applicability of classical, neoclassical, endogenous, and modern stochastic models. A comparative analysis of existing approaches to modeling economic growth is conducted, and their advantages and limitations are identified, which justifies the need to transition from simplified one-dimensional to multidimensional adaptive modeling of an open economy. It has been established that modern economic growth models, despite a significant level of theoretical soundness, have a number of significant methodological limitations related to assumptions about the closed nature of the economy, insufficient consideration of the external sector, cyclical fluctuations, institutional factors, the shadow economy, and the multidimensionality of economic processes. The computational experiment conducted made it possible to assess the practical capabilities of the most common economic growth models and identify the limitations of their application in the context of a modern open economy.

Based on the analysis conducted, an adaptive mathematical model of economic growth has been developed, within which the economy is viewed as an open multidimensional system that operates in interaction with the global economy. The proposed model integrates private and public capital, human capital, labor, land resources, domestic and foreign investment, and also accounts for the impact of imports, exports, and domestic and international transfers. Structurally, the model is divided into interconnected blocks describing the dynamics of private and public capital, savings, and human capital. The developed approach enables adaptive computer modeling of economic growth, taking into account the multifactorial structure of the economy, time lags, nonlinear dynamics, and external influences. This creates a foundation for developing more accurate forecast scenarios for the development of open economic systems, assessing economic risks, and improving the effectiveness of analytical support for economic policy.

A practical validation of the adaptive economic growth model was conducted using real statistical data; its parameters were evaluated, and its potential applications for

analyzing and forecasting macroeconomic dynamics were investigated. A comparison of the modeling results based on our own adaptive model with other economic growth models was performed, which confirmed the advantages of the proposed approach in terms of adaptability, stability, and accuracy in reproducing real economic processes. A multi-dimensional economic risk assessment was conducted, and the model's sensitivity to changes in key parameters was determined.

Chapter 3 focuses on refining the economic growth model by modifying the core equation. The model has been adapted to account for demographic factors that determine the formation and reproduction of the country's labor force. In particular, the model incorporates indicators characterizing population dynamics, changes in the structure of employment, birth and death rates, as well as the scale and intensity of migration processes. This approach made it possible to comprehensively reflect the impact of demographic transformations on the parameters of economic development, labor productivity, and the potential for long-term economic growth. The study examined the impact of market typology on the dynamics of economic development by incorporating parameters related to the level of competition, monopoly power, and product differentiation into the model. The modified model took into account parameters characterizing the level of market competition, the degree of concentration of economic power, the extent of monopolization, and the level of product differentiation. This made it possible to assess the characteristics of how different types of market structures function and to determine their impact on investment activity, innovation, and the efficiency of resource allocation in the national economy.

This study examines the shadow economy as an important factor that potentially affects the reliability of macroeconomic indicators and complicates the assessment of the actual level of economic development. The inclusion of this factor in the theoretical framework of the model aims to enhance its analytical completeness and account for hidden economic processes that can significantly alter the results of macroeconomic analysis. As part of the model's refinement, the study accounts for the investment lag, which characterizes the time delay between the implementation of investments and the manifestation of their economic effects. Accounting for this time lag allows for a more

realistic description of the mechanisms of economic growth and reflects the delayed impact of investment activity on production dynamics, labor productivity, and structural changes in the economy.

The results of the study confirmed the effectiveness of the proposed model-based approach for developing economic development scenarios for open economies in the context of structural transformations and external challenges. The developed model provides a foundation for further improving methods for forecasting economic growth, expanding the information base for research, and enhancing the quality of analytical support for economic policy.

Keywords: economic growth, adaptive modeling, economic growth modeling, multidimensional models of economic growth, open economy, private capital, public capital, human capital, investment, demographic factors, market typology, shadow economy.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

У періодичних наукових виданнях, проіндексованих у наукометричній базі Scopus

1. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2023). Comparative analysis of the effectiveness of dimensionality reduction algorithms and clustering methods on the problem of modelling economic growth. *Neuro-fuzzy modeling techniques in economics*, 12, 67-110. <http://doi.org/10.33111/nfmte.2023.067> (Scopus) (2,26 д.а., особисто автору – 1,13 д.а.: описано методику проведення кластерного аналізу країн в контексті економічного зростання та проведено сам кластерний аналіз).
2. Kolyada, Y., Poznyak, S., Ramskyi, A., & Shevchenko, S. (2024) Adaptation applying of economic growth theoretical models. *CEUR Workshop Proceedings*, 3665, 22-35. <https://ceur-ws.org/Vol-3665/paper3.pdf> (Scopus) (1,14 д.а., особисто автору – 0,29 д.а.: відпрацьовано методику апробації моделей економічного зростання).
3. Kolyada, Y., Poznyak, S., Babii, N., & Zhurakovskiy, B. (2025) Adaptive model of economic development with an open market. *CEUR Workshop Proceedings*, 4029, 28-50. <https://ceur-ws.org/Vol-4029/paper3.pdf> (Scopus) (1,43 д.а., особисто автору – 0,36 д.а.: описано адаптивну модель економічного зростання, логіку її роботи, апробовано на розширеному наборі реальних даних, досліджено динаміку та залежності параметрів моделі).

У наукових фахових виданнях України:

4. Коляда, Ю., & Позняк, С. (2024). Адаптивна модель економічного зростання для відкритої економіки. *Національні інтереси України*, 2(2), 267-286. [https://doi.org/10.52058/3041-1793-2024-2\(2\)-267-286](https://doi.org/10.52058/3041-1793-2024-2(2)-267-286) (1,06 д.а., особисто автору – 0,53 д.а.: описано адаптивну модель економічного зростання, логіку її роботи та апробовано її на реальних даних).
5. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2024). The role of investment lag in economic system development trajectory. *Grail of Science*, 38, 181-184. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.12.04.2024.030> (0,27 д.а., особисто автору – 0,13 д.а.: описано роль інвестиційного лагу в економічному зростанні та модифіковано деякі моделі економічного зростання з урахуванням інвестиційного лагу).

6. Позняк, С., & Коляда, Ю. (2024). Інвестиційний лаг і траєкторія еволюції нелінійної економіки. *Grail of Science*, 42, 93-104. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.02.08.2024.012> (0,71 д.а., особисто автору – 0,35 д.а.: модифіковано деякі моделі економічного зростання з урахуванням інвестиційного лагу та апробовано модифікації на реальних даних).

7. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2024). Virtual scenarios of demographic impact on economic growth. *Економічний вісник Донбасу*, 4(78), 173-182. [https://doi.org/10.12958/1817-3772-2024-4\(78\)-173-182](https://doi.org/10.12958/1817-3772-2024-4(78)-173-182) (0,89 д.а., особисто автору – 0,45 д.а.: розглянуто вплив демографічної динаміки на економічне зростання, модифіковано адаптивну модель, яка враховує як природній так і механічний рух населення, апробовано модифікацію на реальних даних).

8. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). Market typology and economic growth dynamics. *Herald of the economic sciences of Ukraine*, 1(48), 140-154. [https://doi.org/10.37405/1729-7206.2025.1\(48\).140-152](https://doi.org/10.37405/1729-7206.2025.1(48).140-152) (1,17 д.а., особисто автору – 0,59 д.а.: описано залежність між основними типами ринку та економічним зростанням, модифіковано адаптивну модель економічного зростання відповідним чином, апробовано її на реальних даних)

9. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). The conceptual role of the shadow economy in economic growth. *Economy and Society*, 73. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-73-7> (0,82 д.а., особисто автору – 0,41 д.а.: описано вплив тіньової економіки на економічне зростання та відповідно модифіковано адаптивну модель економічного зростання).

10. Коляда, Ю., & Позняк, С. (2025). Підвищення узагальнюючої здатності моделей економічного зростання. *Український журнал прикладної економіки та техніки*, 2025(2), 55-63. <https://doi.org/10.36887/2415-8453-2025-2-9> (1,48 д.а., особисто автору – 0,74 д.а.: описано методику модифікації адаптивної моделі економічного зростання в врахуванням демографічної динаміки, типології ринку та тіньової економіки).

11. Poznyak, S., and Kolyada, Y. (2025) Economic growth risks based on dynamic models. *Business Inform*, 7, 131-148. <https://doi.org/10.32983/2222-4459-2025-7-131-148>

(1,67 д.а., особисто автору – 0,83 д.а.: описано методику розрахунку покоординатного економічного ризику для зростання економіки).

12. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2025). Interval analysis of economic growth dynamics. *Grail of Science*, 57, 196-207. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.17.10.2025.019> (0,76 д.а., особисто автору – 0,38 д.а.: застосовано методику інтервального аналізу до моделей економічного зростання).

13. Коляда, Ю., & Позняк, С. (2025). Покоординатний економічний ризик на основі моделей економічного зростання. *Економічні горизонти*, 4(33), 57-84. [https://doi.org/10.31499/2616-5236.4\(33\).2025.342888](https://doi.org/10.31499/2616-5236.4(33).2025.342888) (1,40 д.а., особисто автору – 0,71 д.а.: застосовано покоординатний економічний ризик до моделей економічного зростання).

14. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). Market typology and dynamics of economic growth. *The problems of economy*, 3(65), 321-343. <https://doi.org/10.32983/2222-0712-2025-3-321-343> (1,72 д.а., особисто автору – 0,86 д.а.: глибше досліджено питання впливу типологій ринку на економічне зростання та апробовано на реальних даних).

Інші публікації апробаційного характеру:

15. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2020). Forecasting the potential of the economic system on the basis of the exogenic growth model. In *Integration of traditional and innovation processes of development of modern science* (pp. 138-155). Baltija Publishing (Литва). <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-021-6-20> (0,37 д.а., особисто автору – 0,19 д.а.: описано методику визначення максимальної межі потенціалу економічного зростання економіки та апробовано її на реальних даних).

16. Позняк, С. П., & Коляда, Ю. В. (2021). Трисекторна модель потенціалу економічної еволюції. In *Матеріали II міжнародної студентської наукової конференції «Сучасні аспекти та перспективні напрямки розвитку науки»* (pp. 77-80). Молодіжна наукова ліга. <https://doi.org/10.36074/liga-inter-03.12.2021> (0,14 д.а., особисто автору – 0,07 д.а.: описано підхід до визначення максимальної межі потенціалу економічного зростання економіки)

17. Позняк, С. П., & Коляда, Ю. В. (2023). Апробація ортодоксальних моделей макроекономічного зростання. In *Сучасні аспекти науки XXX* (pp. 199-231). Publishing Group “Scientific Perspectives” (Чехія), <http://perspectives.pp.ua/public/site/mono/mono-30.pdf> (21,61 д.а., особисто автору – 0,59 д.а.: апробовано моделі економічного зростання, які найчастіше зустрічаються в економічній літературі).
18. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2024). Scalar parameters behavior dynamics of economic growth model. In *Modeling and forecasting of economic processes: Proceedings of the 18th International scientific and practical conference* (pp. 105-112). National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. https://ecocyber.fmm.kpi.ua/wp-content/uploads/2025/05/mpep_XVIII_2024.pdf (0,56 д.а., особисто автору – 0,28 д.а.: описано динаміку поведінки основних параметрів адаптивної моделі економічного зростання).
19. Позняк, С., & Коляда, Ю. (2024). Адаптивна модель зростання відкритої економіки. In *Матеріали III Міжнародної наукової конференції «Теорія модернізації в контексті сучасної світової науки»* (pp. 87-92). International Center of Scientific Research. <https://doi.org/10.62731/mcnd-02.08.2024.001> (0,36 д.а., особисто автору – 0,18 д.а.: описано адаптивну модель економічного зростання).
20. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). Market typology in economic growth dynamics modelling. In *Collection of materials of the III International Scientific and Practical Conference "Digital Economy"* (pp. 749-753). KNEU. <https://doi.org/10.33111/978-966-926-559-3> (0,24 д.а., особисто автору – 0,12 д.а.: описано методику модифікації адаптивної моделі економічного зростання з урахуванням типів ринкової структури).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	22
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНЕ ПІДРУНТЯ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ.....	30
1.1. Економічне зростання та його еволюція в економічній теорії.....	30
1.2. Основні детермінанти економічного зростання.....	42
1.3. Методи оцінювання економічного зростання	55
Висновки до розділу 1	99
РОЗДІЛ 2. СУЧАСНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ.....	103
2.1. Якісний та кількісний аналіз моделей економічного зростання.....	103
2.2. Адаптивна математична модель економічного зростання для відкритої економіки.....	151
2.3. Практична апробація моделі та її порівняння з іншими моделями економічного зростання	204
Висновки до розділу 2	243
РОЗДІЛ 3. СЦЕНАРІЇ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ НА ПІДСТАВІ РЕАЛЬНИХ ДАНИХ.....	246
3.1. Модифікації адаптивної моделі з довгостроковим демографічним впливом ..	246
3.2. Особливості включення ринкової типології у адаптивну модель економічного зростання	262
3.3. Інші модифікації адаптивної моделі, зокрема з урахуванням тіньової економіки та інвестиційного лагу	285
Висновки до розділу 3	295
ВИСНОВКИ.....	298
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	304
ДОДАТКИ	325

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Моделювання економічного зростання у відкритій економіці є центральним завданням сучасної макроекономічної теорії та прикладного економічного аналізу. Відкритість господарських систем до міжнародної торгівлі, руху капіталу, технологічного трансферу й міграції робочої сили суттєво ускладнює механізми формування траєкторій зростання, посилює роль зовнішніх шоків і водночас розширює можливості для підвищення довгострокового потенціалу розвитку. За таких умов особливого значення набуває побудова моделей, які дозволяють кількісно описати взаємодію внутрішніх виробничих факторів та зовнішнього середовища, оцінити стійкість економічної динаміки та ідентифікувати ключові детермінанти зростання.

Теоретична й емпірична еволюція поглядів на економічне зростання демонструє перехід від простих схем накопичення капіталу до складних конструкцій, що враховують технологічний прогрес, інституційні зміни, людський капітал, адаптаційні механізми та структурні зрушення. На цьому тлі особливу наукову і практичну цінність становить системне поєднання класичних, неокласичних, ендогенних і сучасних підходів з інструментарієм економетричного, стохастичного та обчислювального моделювання.

Актуальність теми дисертаційної роботи зумовлена необхідністю формування ефективних моделей економічного зростання, здатних відображати реальні умови функціонування відкритої економіки. Класичні, неокласичні та ендогенні теорії зростання, попри значний теоретичний доробок, базуються переважно на спрощених припущеннях щодо дії зовнішнього сектору, адаптаційних можливостей економічної системи, інституційних обмежень та структурних зрушень. У сучасних умовах високої мінливості зовнішнього середовища, посилення впливу глобальних шоків, поглиблення технологічних та інституційних диспропорцій використання таких моделей без урахування адаптивної поведінки економіки, демографічних факторів, специфіки ринкової структури та тіньового сектору призводить до заниження ризиків і спотворення оцінок траєкторій зростання.

Додатковим фактором актуальності є практична потреба у кількісному інструментарії, який поєднує теоретичну узгодженість із можливістю емпіричної верифікації на основі реальних даних. Наявні економетричні, стохастичні та структурні моделі часто або надмірно абстрактні, або прив'язані до конкретних історичних умов і погано відтворюються на нових вибірках, що обмежує їх прогностичний та прикладний потенціал. Потребують подальшого розвитку підходи до інтеграції в єдину модельну конструкцію виробничих детермінант зростання (капіталу, праці, технологій), адаптаційної здатності економіки, демографічної динаміки, ринкової типології та тіньового сектору, а також кількісного вимірювання економічного ризику за координатами ключових параметрів. Це зумовлює необхідність розроблення адаптивної математичної моделі економічного зростання для відкритої економіки та її емпіричної апробації на реальних даних.

Огляд наукової літератури з проблематики економічного зростання засвідчує наявність широкого кола теоретичних і емпіричних підходів, які сформували підґрунтя сучасного моделювання динаміки макроекономічних систем. Класичні й докейнсіанські моделі зростання представлені працями Є. Домара, Т. Мальтуса, Д. Рікардо, А. Сміта, Р. Харрода, які заклали основи аналізу накопичення капіталу та динамічної рівноваги. Неокласичний напрям пов'язаний насамперед з роботами П. Даймонда, Д. Каса, Т. Купманса, Ф. Рамсея, Т. Свана, Р. Солоу, що запропонували формалізовані моделі з виробничими функціями типу Кобба-Дугласа та акцентом на ролі заощаджень, інвестицій і технологічного прогресу. Ендогенні теорії зростання розвивалися у працях Р. Барро, Р. Лукаса, Г. Менк'ю, С. Ребело, П. Ромера, Х. Удзави та інших, які інтегрували в моделі людський капітал, навчання в процесі діяльності, інновації та дифузії технологій. Подальший розвиток одержали інституційні, еволюційні та посткейнсіанські підходи, що розглядають зростання через призму структурних змін, інституційної якості, нерівноважної динаміки та адаптивної поведінки економічних агентів. Серед українських вчених проблему моделювання економічного зростання розглядали А. С. Гальчинський, В. М. Геєць, Л. С. Гур'янова, Б. М. Данилишин, Л. М. Зомчак, Т. Л. Кмитюк, Ю. В. Коляда, Е. М. Лібанова, А. В. Матвійчук, Ю. О. Чалюк та інші.

Сучасні дослідження економічного зростання для відкритих економік характеризуються інтенсивним розвитком як теоретичних, так і прикладних моделей, з акцентом на ролі зовнішнього сектору, інституційної якості, людського капіталу, технологічних змін та адаптивної поведінки економічних агентів. За останні 5 років у провідних наукометричних базах (Scopus, Web of Science) щороку реєструється орієнтовно кілька тисяч публікацій, присвячених проблематиці економічного зростання, з яких істотна частка стосується саме відкритих економік, впливу глобалізації, міжнародної торгівлі, фінансової інтеграції та зовнішніх шоків на траєкторії зростання. Значний масив робіт зосереджено на ендогенних моделях зростання, DSGE-моделях, панельних економетричних оцінках та використанні методів машинного навчання й нейронних мереж для прогнозування макроекономічної динаміки. Зростання кількості таких досліджень відображає як посилення наукового інтересу до комплексного аналізу детермінант зростання у відкритій економіці, так і запит з боку економічної політики на формування надійного кількісного інструментарію для оцінювання стійкості та ризиків економічного розвитку.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконувалось відповідно до тематики науково-дослідних робіт Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана та безпосередньо пов'язане із такими темами: науково-дослідна тема за кошти державного бюджету «Моделювання ризиків та безпеки в цифровій економіці» (державний реєстраційний номер 0120U102151, 2022 р.), ініціативна науково-дослідна тема «Технології Дата Сайнс у дослідженні економічних процесів» (державний реєстраційний номер 0122U001994, 2022-2025 рр.); ініціативна науково-дослідна тема «Статистичний аналіз та математичне моделювання економічних процесів в умовах глобальних зрушень в економіці» (державний реєстраційний номер 0123U101526, 2023-2025 рр.); науково-дослідна тема за кошти державного бюджету «Дата Сайнс аналіз зеленої трансформації глобальної продовольчої безпеки та імплементація міжнародного досвіду в Україні» (державний реєстраційний номер 0126U001738, 2026 р.).

Мета та завдання дослідження. Метою дослідження є розробка науково-методичного підходу щодо моделювання економічного зростання, який відповідає

сучасним тенденціям економічного розвитку в умовах глобалізаційних і технологічних трансформацій.

Для досягнення зазначеної мети в дисертаційній роботі поставлено і послідовно вирішено такі *завдання*:

- дослідити еволюцію теорій економічного зростання та визначити перелік основних методів моделювання економічного зростання і їх модифікацій;
- визначити ключові фактори та індикатори, що впливають на економічне зростання відкритої економіки за допомогою кількісного та якісного аналізу основних методів моделювання економічного зростання;
- розробити підхід апостеріорного оцінювання величини економічного ризику;
- побудувати адаптивну математичну модель економічного зростання для відкритої економіки на основі багатовимірної підходу до моделювання;
- провести кількісний обчислювальний експеримент для апробації моделі економічного зростання для відкритої економіки на реальних даних, оцінити економічні ризики та точність прогнозування;
- дослідити підходи до модифікації моделі економічного зростання для відкритої економіки та оцінити їх ефективність на практиці;
- сформулювати рекомендації щодо можливостей застосування адаптивної моделі в системі державного управління й економічної політики.

Об'єктом дослідження є процеси економічного зростання відкритої економіки, які визначають динаміку макроекономічних факторів та системну взаємодію між ними.

Предметом дослідження є інструментарій адаптивного моделювання економічного зростання, що забезпечує оцінювання траєкторії розвитку відкритої економіки.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у отриманні математично багатовимірних (на відміну від класичних одновимірних) динамічних моделей функціонування відкритої економіки. Їх множина сприяє адаптивному комп'ютерному моделюванню систем господарювання.

Вперше:

- розроблено науково-методичний підхід до моделювання економічного зростання відкритої економіки на основі системи взаємопов'язаних нелінійних динамічних моделей, який, на відміну від існуючих підходів, одночасно враховує багатовимірну взаємодію макроекономічних показників, ширше коло факторів та вплив зовнішнього середовища;
- розроблено методологічний підхід до апостеріорного оцінювання величини економічного ризику, новизна якого полягає у можливості розрахунку ризику економічної системи в динаміці саме на основі моделей економічного зростання.

Удосконалено:

- існуючі наукові підходи до оцінювання економічного зростання шляхом формування багатовимірної моделі, новизна якої полягає у поєднанні макроекономічних, інституційних та зовнішньоекономічних чинників в єдиній системі, що, на відміну від підходів, орієнтованих переважно на окремі групи факторів, дозволяє врахувати їх комплексний вплив на динаміку економічного розвитку;
- механізм взаємодії факторів виробництва у виробничій функції, який, на відміну від традиційного подання капіталу як узагальненого показника, передбачає його поділ на приватний і публічний капітал, а також урахування змінного фактора, що підвищує чутливість моделі до структурних змін економіки;
- механізм врахування інвестицій, імпорту та експорту у моделі економічного зростання не ізольовано, а через їх взаємозв'язок зі споживанням, заощадженнями й динамікою розвитку економічної системи;
- методологію дослідження впливу людського капіталу на довгострокові темпи економічного зростання, новизна якої полягає в розгляді людського капіталу, як накопичувального показника, на відміну від підходів, у яких він трактується переважно як поточний фактор виробництва, що дало змогу більш точно врахувати його вплив на розвиток економічної системи.
- методологічний підхід та відповідний інтегральний індекс оцінювання результатів кластеризації об'єктів дослідження, що базується на комплексному поєднанні з

урахуванням напрямку зміни (стимулятори/дестимулятори) стандартизованих показників якості кластеризації, зокрема коефіцієнта силуету, індексу Девіса-Болдіна та індексу Калінського-Харабаша, що забезпечило підвищення обґрунтованості вибору кількості кластерів та стійкості сформованих кластерних структур.

Набули подальшого розвитку:

- теоретичні положення щодо взаємозв'язку накопичення капіталу та економічного зростання в умовах відкритої економіки шляхом урахування впливу зовнішньоекономічних чинників, міжнародного руху капіталу та адаптивних реакцій економічної системи, що дозволило поглибити пояснення механізмів довгострокового економічного розвитку;
- системний підхід до моделювання економічного зростання шляхом інтеграції макроекономічних, інституційних та зовнішніх факторів у багаторівневу модель прогнозування, що забезпечило формування альтернативних прогнозних траєкторій розвитку та підвищило достовірність прогнозних оцінок;
- підхід до комп'ютерного моделювання економічних процесів на основі великих масивів даних шляхом поєднання методів економетричного аналізу, адаптивного моделювання та автоматизованої обробки даних, що забезпечило підвищення точності розрахунків, швидкості обчислень і стійкості результатів до змін вхідних параметрів.

Практичне значення одержаних результатів проявляється у можливості використання розробленої адаптивної багатовимірної моделі економічного зростання для кількісного аналізу та прогнозування макроекономічної динаміки у відкритих економіках. Модель дозволяє оцінювати вплив внутрішніх і зовнішніх факторів на розвиток економіки, а також враховує циклічні коливання та часові лаги. Результати дослідження можуть застосовуватися для оцінювання ризиків економічного розвитку та удосконалення методики прогнозування траєкторій економічного зростання на національному і регіональному рівнях.

Практичне значення одержаних результатів дослідження підтверджується їх впровадженням у діяльність суб'єктів реального сектору економіки. Зокрема,

удосконалені методичні підходи та розроблена адаптивна модель аналізу й прогнозування економічного зростання були використані в ТОВ «ФК ФЕНІКС» (Україна) та ТОВ «СВІФТ ГАРАНТ» (Україна), що підтверджено довідками № 20/Ф та №19/СГ (відповідно) про впровадження результатів від 18 березня 2026 року, для підвищення обґрунтованості управлінських рішень. На основі отриманих результатів оцінено вплив зовнішніх чинників на динаміку макроекономічних показників України, досліджено альтернативні сценарії трансформації макроекономічного середовища та обґрунтовано рекомендації щодо впровадження адаптивної моделі у практику управління й формування економічної політики компанії.

Методи дослідження. У роботі використано комплекс методів дослідження, що забезпечують теоретичне обґрунтування та емпіричну перевірку процесу моделювання економічного зростання. До загальнонаукових методів належать аналіз, синтез, абстрагування та системний підхід, що дозволили визначити ключові детермінанти економічного розвитку та структуру моделі. Теоретичні методи використовувалися для узагальнення еволюції економічних теорій зростання та інтеграції класичних, неокласичних, ендогенних і сучасних підходів у побудову адаптивної моделі. Емпіричні та кількісні методи дослідження охоплювали економетричний аналіз, стохастичне та економіко-математичне моделювання, методи математичної статистики, кореляційно-регресійний аналіз, аналіз панельних даних та часових рядів, оптимізаційні методи, кластеризацію, а також методи комп'ютерного моделювання, прогнозування та сценарного аналізу.

Інформаційну базу дослідження становлять офіційні статистичні дані міжнародних організацій (зокрема, Світового банку, Міжнародного валютного фонду, Організації економічного співробітництва та розвитку), національних статистичних служб та центральних банків, а також макроекономічні показники відкритих економік за низку років. Додатково використано бази даних міжнародної торгівлі, показники інвестиційної активності, демографічні та інституційні індикатори, інформацію з аналітичних звітів урядових і наднаціональних структур, результати наукових публікацій і емпіричних досліджень, що стосуються динаміки економічного зростання та його детермінант.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, викладені у дисертаційній роботі, отримані автором самостійно в процесі проведення теоретичних та емпіричних досліджень. У роботі також використано матеріали, опубліковані у співавторстві, проте застосовуються лише ті дані та висновки, які були сформовані безпосередньо автором у результаті власних індивідуальних досліджень. Це забезпечує наукову самостійність та оригінальність представленої роботи, а також гарантує достовірність отриманих результатів.

Апробація результатів дослідження. Основні положення наукового дослідження доповідалися й були схвалені на наукових і науково-практичних конференціях: II Міжнародна студентська наукова конференція «Сучасні аспекти та перспективні напрямки розвитку науки» (2021, Україна), Одинадцята Міжнародна конференція «Моніторинг, моделювання та управління економікою, що розвивається» (2024, Україна), XVIII Міжнародна наукова та практична конференція «Моделювання та прогнозування економічних процесів» (2024, Україна), III Міжнародна наукова конференції «Теорія модернізації в контексті сучасної світової науки» (2024, Україна), III Міжнародна наукова та практична конференція «Цифрова економіка» (2025, Україна).

Публікації за темою дисертації. Основний зміст і результати дисертації опубліковано самостійно та у співавторстві в 20 наукових працях загальним обсягом 40,06 д.а., з яких особисто автору належить 9,19 д.а., з них: 3 – статті у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у базі Scopus; 13 – статей у наукових фахових виданнях України; 4 – публікації в інших виданнях апробаційного характеру.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи становить 209 сторінок. Робота містить 80 рисунків на 65 сторінках, 17 таблиць на 18 сторінках і 2 додатки. Список використаних джерел налічує 217 найменувань.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНЕ ПІДГРУНТЯ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

1.1. Економічне зростання та його еволюція в економічній теорії

Економічне зростання є однією з фундаментальних категорій макроекономіки, що відображає довгострокову тенденцію збільшення виробничого потенціалу національного господарства, зумовлену нагромадженням виробничих факторів, зростанням продуктивності праці та впровадженням технологічних інновацій. Його сутність полягає не лише в кількісному прирості обсягів валового внутрішнього продукту (ВВП), а й у якісних трансформаціях, які супроводжують підвищення ефективності використання ресурсів.

У теоретичному вимірі економічне зростання трактується як стаłe або періодичне збільшення реального обсягу національного продукту протягом тривалого періоду. Ця характеристика виокремлює економічне зростання від короткострокових коливань економічної активності, що формують предмет аналізу економічного циклу. Таким чином, економічне зростання розглядається як процес, що виявляє здатність економіки до розширеного відтворення на системній основі.

Водночас економічне зростання не зводиться виключно до кількісного збільшення обсягів виробництва. Воно охоплює також якісні трансформації економічної системи, пов'язані зі зміною структури виробництва, підвищенням продуктивності праці, технологічним оновленням, накопиченням людського капіталу та вдосконаленням інституційного середовища. Саме тому сучасні підходи до аналізу економічного зростання враховують не лише темпи приросту валового внутрішнього продукту, а й чинники, що визначають довгострокову конкурентоспроможність та ефективність національної економіки.

У макроекономічній теорії економічне зростання традиційно пов'язується з динамікою основних факторів виробництва – праці, капіталу, природних ресурсів і технологічного прогресу. Залежно від домінуючих джерел розвитку розрізняють екстенсивний та інтенсивний типи економічного зростання. Екстенсивний тип

ґрунтується на кількісному збільшенні виробничих ресурсів, тоді як інтенсивний передбачає зростання ефективності їх використання завдяки інноваціям, підвищенню кваліфікації робочої сили та вдосконаленню організації виробництва. В умовах сучасної глобалізованої економіки саме інтенсивні чинники дедалі більше визначають довгострокові перспективи розвитку держав.

Особливого значення проблема економічного зростання набуває в умовах відкритої економіки, де національний розвиток суттєво залежить від зовнішньоекономічних зв'язків, міжнародного руху капіталу, технологій та робочої сили. Відкритість економічної системи створює додаткові можливості для прискорення економічного розвитку через інтеграцію у світові ринки, однак одночасно підвищує чутливість економіки до зовнішніх шоків, фінансових криз та геополітичних ризиків. У зв'язку з цим дослідження закономірностей економічного зростання потребує врахування як внутрішніх структурних характеристик економіки, так і впливу глобального економічного середовища.

У сучасних умовах економічне зростання виступає важливим фактором забезпечення конкурентоспроможності держави у світовій економіці, зміцнення її фінансової стійкості та інвестиційної привабливості. Високі темпи економічного зростання сприяють активізації інноваційної діяльності, модернізації виробничої бази та підвищенню ефективності функціонування економічних інститутів. Для країн із трансформаційною економікою економічне зростання набуває особливого значення, оскільки створює умови для структурної перебудови господарської системи, інтеграції у світовий економічний простір та подолання соціально-економічних диспропорцій.

З огляду на важливість економічного зростання для забезпечення сталого розвитку держави, у науковій літературі значна увага приділяється визначенню його сутності та основних характеристик. Різноманітність теоретичних підходів до трактування економічного зростання зумовлена складністю цього явища, його багатфакторною природою та взаємозв'язком із широким спектром економічних, соціальних і інституційних процесів. У зв'язку з цим доцільним є розгляд основних підходів до визначення економічного зростання, сформованих у межах сучасної економічної теорії (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Визначення поняття економічного зростання

Автор/джерело	Визначення
А. Сміт [1]	Найбільше зростання продуктивної сили праці, а також значна частина майстерності, вправності та розсудливості, з якими вона скрізь спрямовується чи застосовується, стали наслідком поділу праці.
Р. Солоу [2,3].	Збільшення обсягу виробництва зумовлюється двома основними групами чинників: зростанням ресурсів, таких як праця і капітал, та технічним прогресом
С. Кузнець [4]	Економічне зростання країни може бути визначене як довгострокове підвищення здатності забезпечувати населення дедалі різноманітнішими економічними благами, причому ця зростаюча здатність ґрунтується на розвитку технологій та необхідних інституційних і ідеологічних змінах
П. Ромер [5,6].	Економічне зростання відбувається тоді, коли люди беруть ресурси та переорганізують їх у більш цінний спосіб
Д. Норт [7].	Економічне зростання залежить не лише від капіталу та праці, а й від правил, законів та норм, які регулюють використання цих ресурсів.
Світовий Банк [8].	Економічне зростання – це збільшення ринкової вартості товарів і послуг, вироблених економікою протягом певного часу, зазвичай вимірюване як темп зміни реального ВВП.

Джерело: узагальнено автором на основі [1-8]

Аналіз визначень економічного зростання свідчить про його багатогранну природу, що виходить за межі простого збільшення виробництва. У класичному підході, представленому А. Смітом [1], зростання пов'язується насамперед із підвищенням продуктивності праці через поділ праці та спеціалізацію, що підкреслює вирішальну роль організації виробничого процесу. Таким чином, початкові теоретичні уявлення зосереджуються на мікроекономічних чинниках ефективності як основі економічного розвитку.

У неокласичній традиції, яку розвинув Р. Солоу [2,3], економічне зростання пояснюється через взаємодію праці, капіталу та технологічного прогресу, який розглядається як ключовий чинник довгострокової динаміки. У цьому підході зростання формалізується як результат нагромадження факторів виробництва та підвищення їхньої продуктивності, що дозволяє описати загальні закономірності економічного розвитку на макрорівні.

Подальше теоретичне поглиблення у працях С. Кузнеця [4] розширює розуміння економічного зростання, включаючи не лише збільшення виробничих можливостей, але й довгострокові структурні та інституційні зміни. У центрі уваги опиняється здатність економіки забезпечувати населення дедалі різноманітнішими благами, що базується на

технологічному прогресі та трансформації соціально-економічних інститутів. Таким чином, зростання інтерпретується як комплексний процес економічної еволюції.

В ендогенній теорії, яку розвинув П. Ромер [5,6], економічне зростання розглядається як результат внутрішньо зумовленого процесу створення та накопичення знань, де ключову роль відіграють інновації та людський капітал. Ресурси набувають більшої цінності завдяки їхньому переосмисленню та технологічному переозброєнню, що робить знання центральним фактором довгострокового розвитку.

Інституційний підхід Д. Норта [7] акцентує увагу на ролі правил, норм і правових механізмів, які формують стимули економічних агентів. Згідно з цим підходом, економічне зростання залежить від якості інституційного середовища, яке визначає рівень трансакційних витрат і ефективність використання ресурсів.

У прикладному вимірі Світовий банк [8] визначає економічне зростання як зміну реального обсягу виробництва товарів і послуг, що вимірюється темпами зростання реального ВВП. Такий підхід має переважно статистичний характер і використовується для кількісної оцінки динаміки економічного розвитку.

Узагальнення наведених підходів свідчить, що сучасне трактування економічного зростання є інтегрованим і охоплює ресурсні, технологічні, інституційні та інноваційні чинники. У результаті економічне зростання слід розглядати як довгостроковий процес кількісної та якісної трансформації економічної системи, який визначається взаємодією виробничих факторів, технологічного прогресу та інституційного середовища.

Водночас важливо розмежовувати економічне зростання й розвиток. Перше відображає кількісне збільшення виробництва, тоді як друге охоплює ширші показники – освіту, здоров'я, інституційну якість, екологію та добробут. Тому сучасні підходи поєднують динаміку виробництва з якісними характеристиками соціально-економічної системи.

У структурно-функціональному аспекті економічне зростання є результатом взаємодії основних факторів виробництва: праці, капіталу, природних ресурсів і технологій. Його динаміка може бути зумовлена як екстенсивними чинниками – зростанням кількості використаних ресурсів, так і інтенсивними – підвищенням їхньої продуктивності. Саме домінування інтенсивних факторів надає зростанню стійкого та

ефективного характеру. Крім того, у контексті сучасної економічної думки економічне зростання не розглядається як самоціль, а як інструмент підвищення рівня життя, створення умов для інклюзивного розвитку та забезпечення макроекономічної стабільності. Тому в теоретичному й прикладному аналізі все частіше застосовується концепція «якісного зростання», яка враховує енергетичну ефективність, структурну збалансованість і соціальну справедливість.

Формування уявлень про економічне зростання в межах класичної політичної економії XVIII – першої половини XIX ст. стало визначальним для подальшого розвитку економічної думки. Класики, зокрема А. Сміт [1], Д. Рікардо [9], Т. Мальтус [10] та Дж. С. Мілль [11], прагнули теоретично пояснити природу багатства націй, роль праці, землі та капіталу у забезпеченні економічного прогресу.

А. Сміт у праці «Дослідження про природу і причини багатства народів» [1] обґрунтував, що головним джерелом зростання є поділ праці, який підвищує продуктивність і ефективність використання ресурсів. Розширення поділу праці, за Смітом, можливе завдяки накопиченню капіталу, що визначає масштаби ринку та темпи економічного розвитку. Таким чином, капітал у його концепції постає центральною детермінантою зростання.

Д. Рікардо, розвиваючи ідеї Сміта, у праці «Про принципи політичної економії та оподаткування» [9] зосередився на розподілі доходів між капіталістами, робітниками й землевласниками. Він доводив, що зростання обмежується законом спадної родючості землі: із розширенням виробництва орендна плата зростає, а прибутки капіталістів скорочуються, що веде економіку до стаціонарного стану. Отже, головним бар'єром зростання Рікардо вважав обмеженість природних ресурсів.

Т. Мальтус у «Дослідженні закону народонаселення» [10] підкреслював демографічний аспект, стверджуючи, що населення зростає швидше, ніж засоби існування. Це породжує перенаселення, зниження добробуту та гальмує економічний розвиток. Він убачав розв'язання проблеми у стримуванні приросту населення.

Класики також визнавали закономірність наближення економіки до стаціонарного стану, коли прибутки й інвестиції зникають, а виробництво стабілізується. Дж. Мілль

[11], продовжуючи, зазначав, що стаціонарність не є кризою, а може слугувати основою морального й культурного розвитку суспільства.

Суттєвою рисою класичного підходу є переконання, що економічне зростання є результатом внутрішньої логіки ринкової системи за мінімального втручання держави. Водночас класики визнавали існування внутрішніх меж саморегульованого ринку, зумовлених обмеженістю ресурсів, демографічними чинниками та розподільчими відносинами, які сповільнюють нагромадження капіталу.

Класичні уявлення про джерела зростання заклали основи подальшого аналізу макроекономічної динаміки, хоч і спиралися переважно на якісні описи. Їхній внесок полягав у визначенні ролі капіталу, праці, землі та технологій і у виявленні об'єктивних закономірностей, що формують довгострокові тенденції розвитку.

Неокласичний етап теорій зростання характеризується подальшою формалізацією підходів до аналізу макроекономічної динаміки в умовах ринкової рівноваги та раціональної поведінки економічних агентів. Ключовими стали моделі Р. Солоу [2,3] і Т. Свана [12], які сформували аналітичну основу дослідження довгострокових процесів економічного розвитку через неокласичну виробничу функцію. Модель Солоу-Свана [2,3,12] виходить із припущення про агреговану виробничу функцію, де випуск економіки визначається обсягом капіталу, праці та рівнем технології, що зростає екзогенно. Її концептуальна новизна полягає у чіткому розмежуванні факторів нагромадження (капітал і праця) та технологічного прогресу, який виступає зовнішньо заданим параметром і визначає довгострокову траєкторію економічного розвитку.

Важливою характеристикою неокласичної моделі є припущення про спадну граничну продуктивність капіталу, що зумовлює поступове уповільнення темпів зростання у міру нагромадження капіталу за незмінного технологічного рівня. У таких умовах економіка має тенденцію до зближення зі стаціонарним станом, у якому виробництво на душу населення залишається сталим. Таким чином, у межах моделі довгострокове економічне зростання не може підтримуватися лише за рахунок інвестицій у капітал і працю, а потребує постійного вдосконалення технологій, що забезпечує підвищення ефективності виробництва.

Додатковим важливим результатом неокласичного аналізу стало формулювання концепції «золотого правила» нагромадження капіталу, яке визначає такий рівень інвестицій, за якого досягається максимальний рівень споживання в довгостроковій рівновазі. Це дозволило не лише теоретично описати умови оптимального економічного розвитку, але й надати інструментарій для оцінювання ефективності інвестиційної політики. У практичному вимірі ці положення набули особливого значення для країн, що розвиваються, оскільки дозволили обґрунтовувати стратегії індустріалізації та формування оптимальної структури нагромадження капіталу в процесі економічного зростання.

Подальший розвиток неокласичних моделей відбувся у працях Ф. Рамсея [13], Д. Касса [14] та Т. Купманса [15], які через інструментарій міжчасової оптимізації сформували модель Рамсея-Касса-Купманса [13-15]. У цій моделі економічне зростання розглядається як результат міжчасового вибору репрезентативного агента, який максимізує дисконтовану корисність споживання протягом усього життєвого горизонту. На відміну від попередніх неокласичних підходів, норма заощаджень тут не задається екзогенно, а є ендегенним результатом оптимальної поведінки домогосподарств, що суттєво підвищує аналітичну гнучкість моделі та її здатність відображати індивідуальні рішення щодо споживання й інвестування.

У рамках цієї моделі формалізовано взаємозв'язок між уподобаннями економічних агентів, технологічними обмеженнями та динамікою капіталу, що дозволило інтегрувати мікроекономічні основи в аналіз довгострокового макроекономічного зростання. Важливою особливістю є також те, що економіка описується як система з міжчасовою рівновагою, де траєкторія розвитку визначається оптимальними рішеннями агентів у кожний момент часу. Це забезпечило значний теоретичний прогрес у порівнянні з базовою моделлю Солоу-Свана, оскільки дозволило пояснювати динаміку заощаджень і споживання без необхідності зовнішніх припущень.

Попри суттєвий внесок у розвиток теорії економічного зростання, неокласичні моделі, включно з моделлю Рамсея-Касса-Купманса, зазнають критики через низку обмежувальних припущень. Зокрема, технологічний прогрес у цих моделях здебільшого залишається екзогенним або недостатньо поясненим, що обмежує їх здатність описувати

внутрішні джерела довгострокового зростання. Крім того, припущення про досконалу конкуренцію, повну раціональність економічних агентів та миттєву адаптацію ринків не повною мірою відповідають реальним умовам функціонування сучасних економік.

Водночас саме ці моделі стали фундаментом для подальших емпіричних досліджень економічного зростання та розвитку концепції конвергенції, згідно з якою економіки з подібними структурними параметрами мають тенденцію до зближення рівнів доходу в довгостроковому періоді. Це положення суттєво вплинуло на формування сучасної емпіричної макроекономіки, оскільки дозволило тестувати гіпотези щодо швидкості зближення країн та оцінювати роль накопичення капіталу, продуктивності та інституційних факторів у процесах економічного розвитку.

У підсумку, неокласичний етап став ключовою віхою розвитку теорій зростання, оскільки він не лише формалізував довгострокову динаміку, а й підготував підґрунтя для ендогенних моделей, які пояснюють технологічний прогрес внутрішніми економічними чинниками.

Перехід від неокласичної до ендогенної парадигми зумовлений обмеженнями моделі Солоу-Свана, зокрема екзогенністю технологічного прогресу та нездатністю пояснити різницю в темпах зростання між країнами з подібними параметрами заощаджень і демографії. Ендогенні теорії, що активно розвиваються з кінця 1980-х рр., спрямовані на пояснення внутрішніх джерел технологічного розвитку та продуктивності як результату економічної поведінки агентів.

Перші формалізовані ендогенні моделі економічного зростання були запропоновані П. Ромером [5,6] та Р. Лукасом [16] і стали важливим етапом переходу від неокласичної до сучасної теорії довгострокової економічної динаміки. У моделі Ромера [5,6] технологічний прогрес розглядається як безпосередній результат інвестицій у науково-дослідний сектор (R&D), які здійснюються приватними фірмами в умовах недосконалої конкуренції. Така структура ринку дозволяє фірмам отримувати монопольні прибутки від інновацій, що створює стимули для постійного інвестування в розробку нових знань і технологій.

Ключовою особливістю підходу Ромера є наявність позитивних зовнішніх ефектів знань, які означають, що результати інноваційної діяльності одних агентів підвищують

продуктивність усієї економіки. У цьому контексті знання набувають властивостей специфічної форми капіталу, для якої характерні зростаюча або постійна віддача від масштабу. Це дозволяє пояснити можливість тривалого економічного зростання навіть без екзогенних технологічних шоків, оскільки інновації генеруються всередині економічної системи.

У моделі Р. Лукаса та Х. Удзави [16,17] основна увага зосереджується на людському капіталі як ключовому факторі економічного зростання. Освіта, професійна підготовка та накопичення навичок розглядаються як інвестиції, що підвищують продуктивність праці та формують основу для довгострокового розвитку. При цьому процес накопичення людського капіталу має кумулятивний характер і створює умови для ендогенного технологічного прогресу, оскільки більш кваліфікована робоча сила здатна генерувати та впроваджувати інновації.

Подальші модифікації ендогенних моделей [18-20] розширили аналітичні можливості теорії, показавши, що навіть за відсутності явного технологічного прогресу можливе стале економічне зростання за рахунок достатнього рівня заощаджень та інвестицій у фізичний і людський капітал. Це підкреслює взаємозв'язок між накопиченням ресурсів і довгостроковою динамікою економіки, а також посилює роль економічної політики держави у створенні стимулів для інвестування в освіту, інновації та виробничу інфраструктуру. У сукупності ці підходи формують теоретичне підґрунтя для розуміння економічного зростання як ендогенного процесу, що визначається внутрішніми механізмами розвитку економічної системи.

Ендогенний підхід також враховує інноваційну діяльність і механізми інтелектуальної власності. У моделях із продуктовою диференціацією фірми інвестують у створення нових продуктів, отримуючи тимчасову монопольну ренту, що пояснює вищі темпи зростання в країнах із розвиненими інститутами захисту прав власності. Ендогенні моделі забезпечили новий інструментарій для оцінки економічної політики: податкові стимули, інвестиції в освіту, підтримку R&D і зменшення інформаційної асиметрії. Політика перестає бути нейтральною щодо зростання, як у неокласичній моделі, і стає ключовим фактором його підтримання. Ендогенний підхід також пояснює

дивергенцію між країнами: різницю в інституційній якості, освіті, здатності до інновацій і технологічного засвоєння.

Поряд із неокласичними та ендогенними підходами, значну роль у сучасній теорії економічного зростання відіграють інституційні [21], еволюційні [22] та посткейнсіанські [23] інтерпретації. Вони пропонують альтернативний погляд на рушійні сили розвитку, акцентуючи увагу на інституційній структурі, історичній спадковості, інноваційній динаміці, попиті та макроекономічній нестабільності. Ці напрями критикують неокласичні припущення про ефективні ринки, досконалу конкуренцію та екзогенність технологічного прогресу.

Інституційний підхід виходить із того, що якість економічних, правових і політичних інститутів визначає стимули до інвестування в продуктивні активи, інновації та людський капітал. Д. Норт [24], Д. Аджемоглу, С. Джонсон і Дж. Робінсон [25] доводять, що саме інституції задають траєкторію розвитку. Зокрема, Д. Аджемоглу та Дж. Робінсон у праці [25] показали, що інклюзивні інститути – ті, що забезпечують захист прав власності та рівні можливості, – сприяють зростанню, тоді як екстрактивні ведуть до стагнації.

Еволюційний підхід, сформований під впливом Й. Шумпетера [26] і розвинений Р. Нельсоном та С. Вінтером [27], трактує зростання як процес постійних структурних змін, зумовлений конкуренцією, інноваціями та технологічними «мутаціями». Фірми тут діють не як раціональні оптимізатори, а як організації, що навчаються й адаптуються. Ключова категорія – рутина, тобто сукупність технологічних і управлінських практик, які еволюціонують через «творче руйнування». Такий підхід підкреслює нелінійний і кумулятивний характер інновацій, на відміну від детермінізму неокласики.

Посткейнсіанський підхід, започаткований Дж. М. Кейнсом [28], Н. Калдором [29], М. Пазнетті [30] та ін., пояснює зростання через ефективний попит, інвестиційну динаміку та розподіл доходів. У моделі Калдора [29] інвестиції виступають автономним джерелом зростання, породжуючи мультиплікативний ефект у вигляді збільшення доходів, заощаджень і попиту. Невизначеність очікувань, коливання інвестицій та співвідношення доходів між працею і капіталом визначають нестійкість економічної

динаміки. Посткейнсіанці також підкреслюють роль державної політики – фіскальної, монетарної й регуляторної – як детермінанти траєкторії зростання.

Зазначені концепції суттєво розширюють аналітичні межі теорії зростання. Вони відходять від моделі рівноваги, наголошуючи на історичній контекстуальності, структурних обмеженнях та соціально-інноваційних чинниках розвитку. У межах цих підходів економічне зростання розглядається як складний, інституційно зумовлений і міждисциплінарний процес.

Сучасна теорія економічного зростання зазнала глибоких трансформацій під впливом як еволюції економічної науки, так і зовнішніх викликів – фінансових криз, кліматичних змін, цифрової революції та зростання глобальної нерівності. Вектор досліджень змістився від універсальних моделей до багаторівневих, адаптивних і контекстно чутливих аналітичних систем, здатних відобразити структурну складність сучасних економік.

Однією з провідних тенденцій стала інтеграція екологічного виміру. У межах концепції сталого розвитку зростання розглядається як частина екосистеми, що враховує енергетичні баланси, стійкість та вуглецеві обмеження. Моделі типу В. Нордгауза [31] поєднують макродинаміку з кліматичними блоками, моделюючи вплив викидів вуглецю на добробут. Це зумовлює переорієнтацію від ВВП як єдиного показника добробуту до альтернативних індикаторів – зеленого зростання, енергоефективності чи екологічного сліду.

Важливим напрямом є врахування цифрової трансформації та переходу до економіки знань. Новітні моделі включають змінні, що характеризують рівень цифровізації, інноваційне підприємництво й використання великих даних. Так звані «цифрові моделі зростання» аналізують вплив штучного інтелекту, автоматизації та big data на продуктивність, зайнятість і структуру попиту.

Зростаюча увага до нерівності та інклюзивності спричинила появу моделей, орієнтованих не лише на обсяги виробництва, а й на розподіл добробуту. У дослідженнях Т. Пікетті [32] і Б. Мілановича [33] зростання пов'язується з часткою доходів верхнього дециля, доходом з капіталу та міжпоколінною мобільністю. Таким чином, сучасні моделі дедалі більше фокусуються на якості зростання.

Розширення методологічного арсеналу передбачає використання агентного моделювання, складних адаптивних систем і стохастичних симуляцій. Це дозволяє враховувати гетерогенність агентів, мережеву структуру економіки та поведінкові аспекти, що не відображаються у рівноважних моделях.

Актуальним залишається й аналіз ризиків довгострокового зростання. Моделі, що враховують фінансову крихкість, глобальні шоки і геополітичну нестабільність, демонструють, що економічна динаміка є нерівномірною та піддається структурним зсувам [34]. Зростає значення підходів, які поєднують макроекономічний і системний аналіз, зокрема сценарне прогнозування [35].

Підсумовуючи еволюцію теорій економічного зростання, можна зробити висновок, що наукове розуміння цього явища пройшло тривалий шлях від якісних описових концепцій класичної політичної економії до формалізованих математичних моделей і подальших міждисциплінарних підходів.

Класичний етап заклав базові уявлення про роль праці, капіталу, землі та технологічних змін у формуванні багатства націй, водночас підкресливши внутрішні обмеження ринкової системи, пов'язані з ресурсною рідкістю та демографічними факторами. Це створило теоретичне підґрунтя для подальшої формалізації макроекономічної динаміки.

Неокласичний напрям став ключовим етапом у розвитку теорії зростання, оскільки забезпечив її математичну формалізацію та запровадив поняття довгострокової рівноваги. Моделі цього періоду дозволили описати механізми нагромадження капіталу, роль технологічного прогресу та міжчасові рішення економічних агентів. Водночас обмеження цих моделей, зокрема екзогенність технологічного прогресу та ідеалізовані припущення щодо ринків, зумовили перехід до нової дослідницької парадигми, яка прагнула пояснити внутрішні джерела економічного розвитку. Ендогенні моделі зростання, суттєво розширили аналітичні можливості теорії, інтегрувавши інновації, знання та людський капітал як ключові фактори довгострокової динаміки. Вони довели, що технологічний прогрес є не зовнішнім, а внутрішньо зумовленим процесом, який формується через інвестиції, освіту та накопичення знань. Це дозволило по-новому

інтерпретувати роль державної політики, яка отримала значний вплив на траєкторію економічного зростання через стимули до інновацій і розвитку людського капіталу.

Подальший розвиток теорії відбувся у межах інституційного, еволюційного та посткейнсіанського підходів, які розширили розуміння економічного зростання за межі суто ринкових механізмів. У цих концепціях ключовими стали інституції, історична динаміка, інноваційна конкуренція та ефективний попит, що підкреслює багатофакторність і контекстуальність економічного розвитку. Таким чином, економічне зростання розглядається як результат взаємодії економічних, соціальних та інституційних процесів.

Сучасний етап розвитку теорії економічного зростання характеризується інтеграцією нових викликів, зокрема цифровізації, екологічних обмежень, глобальної нерівності та фінансової нестабільності. Це зумовлює перехід до складних динамічних моделей, які враховують гетерогенність агентів, мережеві ефекти та сценарну невизначеність. У підсумку, сучасна теорія економічного зростання постає як багаторівнева система знань, що поєднує класичні, неокласичні, ендогенні та інституційні підходи в межах єдиної аналітичної рамки, спрямованої на пояснення довгострокової еволюції економічних систем. А моделювання економічного зростання набуває інтердисциплінарного характеру, поєднуючи екологічні, технологічні, соціальні та інституційні чинники.

1.2. Основні детермінанти економічного зростання

Економічне зростання є одним із ключових процесів розвитку національних господарств, що відображає довгострокове збільшення виробничого потенціалу та підвищення рівня добробуту населення. Його формування не є випадковим, а визначається складною системою взаємопов'язаних умов і впливів, які в сукупності задають траєкторію розвитку економіки. Розуміння цих детермінант є необхідним для пояснення як стійких тенденцій зростання, так і причин його уповільнення або нестабільності в різних країнах та періодах.

Фактори економічного зростання зазвичай поділяють на кілька великих груп, що відображають різні сторони функціонування економічної системи. Такий поділ дозволяє краще зрозуміти, яким чином формується сукупний результат розвитку та які джерела мають вирішальний вплив у коротко- і довгостроковій перспективі. У науковій літературі найчастіше виокремлюють фактори пропозиції, попиту та інституційно-соціального середовища [18].

Фактори пропозиції є базовою складовою економічного зростання, оскільки вони безпосередньо визначають виробничий потенціал національної економіки та її здатність до довгострокового розширення обсягів випуску продукції та послуг. У макроекономічному аналізі ця група факторів розглядається як ключова, адже саме вона формує межі виробничих можливостей країни та визначає стійкість економічного розвитку в часі. Вони є центральним елементом у неокласичних моделях зростання, де довгострокова динаміка ВВП пояснюється насамперед накопиченням факторів виробництва та технологічним прогресом.

До ресурсної складової факторів пропозиції належать природні ресурси, трудові ресурси та капітал, які використовуються у процесі виробництва. Наприклад, країни з розвиненим сільським господарством, такі як Франція чи Бразилія, значною мірою використовують природно-кліматичні переваги та земельні ресурси для формування значної частки ВВП [36]. Водночас держави з обмеженими природними ресурсами, як Японія, компенсують цей недолік через інтенсивний розвиток людського капіталу та імпорту сировини, що дозволяє їм підтримувати високі темпи економічного розвитку [37,38].

Природні ресурси є одним із базових елементів економічного потенціалу країни, оскільки вони формують сировинну основу виробництва та впливають на галузеву структуру економіки. До них належать корисні копалини, енергетичні ресурси, водні та лісові ресурси, а також кліматичні умови. Їх наявність або дефіцит суттєво визначає спеціалізацію країни у світовому поділі праці. Наприклад, держави з великими запасами нафти та газу, як Норвегія, мають можливість формувати значні експортні доходи, тоді як країни з обмеженими ресурсами змушені орієнтуватися на імпорту сировини та розвиток переробних або високотехнологічних галузей [39]. У макроекономічному

аналізі природні ресурси розглядаються як стартова умова економічного розвитку, але не як самодостатній фактор зростання.

Земля як економічний ресурс охоплює не лише сільськогосподарські угіддя, але й територіальне розміщення економічної діяльності, доступ до транспортних шляхів та інфраструктури. Її продуктивність безпосередньо впливає на ефективність аграрного сектору та продовольчу безпеку країни. Наприклад, у країнах з родючими ґрунтами та сприятливими кліматичними умовами, таких як Україна або Канада, сільське господарство відіграє значну роль у структурі експорту [40]. Водночас у густонаселених урбанізованих країнах земля має високу альтернативну вартість, що стимулює інтенсивне використання території та розвиток високої доданої вартості в промисловості й послугах.

Фізичний капітал включає виробничі будівлі, машини, обладнання, інфраструктуру та інші матеріальні активи, що використовуються у виробничому процесі. Він є ключовим фактором підвищення продуктивності праці та розширення виробничих потужностей. Наприклад, модернізація виробничих ліній у машинобудуванні або впровадження автоматизованих систем у логістиці дозволяє значно знизити витрати та збільшити обсяги випуску. У державному вимірі інвестиції в інфраструктуру – дороги, енергетику, транспортні мережі – створюють мультиплікативний ефект для всієї економіки, стимулюючи розвиток приватного сектору та підвищуючи ефективність ринків.

Людський капітал охоплює знання, навички, здоров'я та професійні компетенції населення, які безпосередньо впливають на продуктивність економіки. Його розвиток забезпечується через систему освіти, охорони здоров'я та професійної підготовки. Країни з високим рівнем людського капіталу, як Фінляндія чи Південна Корея, демонструють стійке інноваційне зростання та високу адаптивність до технологічних змін [41]. У цьому контексті інвестиції в освіту та наукові дослідження розглядаються як стратегічні вкладення, що формують довгострокову конкурентоспроможність економіки.

Фізичний капітал можна умовно поділити на приватний та публічний (державний). Приватний капітал формується через інвестиції підприємств і домогосподарств та

спрямований на отримання прибутку, тоді як публічний капітал представлений державними інвестиціями в інфраструктуру, соціальні послуги та стратегічні сектори економіки. Наприклад, приватні інвестиції активно розвивають сферу послуг і промисловість, тоді як державні вкладення у інфраструктуру створюють умови для їхнього функціонування. Ефективна взаємодія цих двох форм капіталу є критично важливою для збалансованого економічного розвитку.

Трудові ресурси є однією з ключових складових факторів виробництва та відображають чисельність, структуру та якість робочої сили. Їх роль полягає не лише в забезпеченні фізичної участі у виробничому процесі, але й у формуванні загального рівня продуктивності економіки. Наприклад, країни з демографічними перевагами та високим рівнем зайнятості можуть швидше розширювати виробництво, тоді як старіння населення, характерне для багатьох європейських країн, створює додаткові виклики для економічного зростання. У сучасних умовах особливого значення набуває якість трудових ресурсів, що визначається рівнем освіти, цифрових навичок та мобільності робочої сили.

Особливе місце у структурі факторів пропозиції займає технологічний розвиток, який визначає ефективність використання наявних ресурсів. Впровадження інноваційних технологій у виробництво, наприклад автоматизація на заводах автомобільної промисловості або використання цифрових платформ у сфері послуг, дозволяє суттєво підвищити продуктивність праці та знизити витрати виробництва. Саме технологічний прогрес є одним із головних джерел довгострокового економічного зростання у розвинених країнах, зокрема у США, Німеччині та Південній Кореї, де значна частка зростання ВВП пояснюється інноваційною активністю [37,38].

Продуктивність праці як елемент факторів пропозиції відображає ефективність використання трудових ресурсів та є інтегральним показником якості економічної системи. Вона залежить від рівня освіти, професійної підготовки, організації виробничих процесів та доступу до сучасних технологій. Наприклад, у країнах Європейського Союзу підвищення продуктивності праці значною мірою забезпечується через інвестиції в освіту та перепідготовку кадрів, що дозволяє адаптувати робочу силу

до змін у структурі економіки [42]. У країнах, що розвиваються, низька продуктивність праці часто виступає ключовим обмеженням економічного зростання [37,38].

Ефективність використання ресурсів є завершальним елементом цієї групи факторів і визначає, наскільки раціонально економіка перетворює наявні ресурси у кінцевий продукт. Вона проявляється через рівень втрат у виробничих процесах, енергоефективність, якість управління підприємствами та оптимальність розподілу ресурсів між секторами економіки. У прикладному вимірі цей фактор використовується при оцінюванні конкурентоспроможності національних економік, формуванні промислової політики та розробці стратегій сталого розвитку. Таким чином, сукупність факторів пропозиції визначає фундаментальні межі економічного зростання та виступає ключовим орієнтиром для довгострокового макроекономічного планування.

Фактори попиту є важливою складовою механізму економічного зростання, оскільки вони визначають, наскільки повно реалізується виробничий потенціал економіки та чи існують стимули для його подальшого розширення. На відміну від факторів пропозиції, які формують довгострокові можливості виробництва, фактори попиту забезпечують фактичне завантаження цих потужностей у коротко- та середньостроковому періодах. У макроекономічній теорії вони безпосередньо пов'язані з моделлю сукупного попиту, яка використовується для аналізу коливань ділової активності, формування ВВП та розробки стабілізаційної політики держави.

Внутрішнє споживання домогосподарств є одним із ключових компонентів сукупного попиту, оскільки воно формує базовий рівень реалізації товарів і послуг на внутрішньому ринку. Його вплив особливо помітний у секторах роздрібної торгівлі, харчової промисловості, будівництва житла та сфери послуг. Наприклад, зростання доходів населення та споживчого кредитування призводить до збільшення попиту на автомобілі, нерухомість та побутову техніку, що, у свою чергу, стимулює розширення виробництва у відповідних галузях. У країнах із розвиненою споживчою економікою, таких як США, саме внутрішній попит є головним драйвером економічного зростання, забезпечуючи значну частку ВВП [37,38].

Інвестиційна активність є ще одним критично важливим елементом факторів попиту, оскільки вона формує не лише поточний попит на товари виробничого

призначення, але й майбутній виробничий потенціал економіки. Інвестиції бізнесу у модернізацію обладнання, цифровізацію процесів або розширення виробничих потужностей безпосередньо стимулюють розвиток таких галузей, як машинобудування, будівництво та ІТ-сектор. Наприклад, активне впровадження інвестицій у відновлювану енергетику в країнах ЄС створює попит на високотехнологічне обладнання та сприяє формуванню нових секторів економіки. У макроекономічному моделюванні інвестиції розглядаються як один із найбільш волатильних, але водночас стратегічно важливих компонентів сукупного попиту.

Окрему роль відіграє державний попит, який реалізується через бюджетні витрати на інфраструктуру, оборону, освіту та охорону здоров'я. Державні закупівлі можуть виступати стабілізуючим фактором у періоди економічного спаду, компенсуючи зниження приватного попиту. Наприклад, масштабні інфраструктурні програми будівництва доріг або мостів не лише створюють безпосередній попит на продукцію будівельного сектору, але й підвищують довгострокову продуктивність економіки через покращення логістики та транспортної доступності. У практиці економічної політики цей інструмент широко використовується для стимулювання економічної активності в умовах рецесії.

Зовнішньоекономічна кон'юнктура є важливим каналом впливу на сукупний попит у відкритих економіках, оскільки експорт формує попит з боку іноземних ринків. Зростання глобального попиту на продукцію, наприклад металургії, аграрного сектору або машинобудування, безпосередньо стимулює виробництво в країнах-експортерах. Для таких економік, як Німеччина або Китай, експорт є ключовим драйвером зростання, тоді як коливання світових цін на сировину або зміни у торговельній політиці можуть суттєво впливати на темпи економічного розвитку [37, 38]. Таким чином, зовнішній попит інтегрує національну економіку у глобальні ланцюги доданої вартості.

У прикладному вимірі фактори попиту широко використовуються у прогнозуванні економічної динаміки, розробці монетарної та фіскальної політики, а також у стратегічному плануванні розвитку секторів економіки. Центральні банки аналізують споживчий та інвестиційний попит для визначення процентних ставок, уряди – для формування бюджетної політики, а бізнес – для оцінки перспектив розширення

виробництва. Таким чином, сукупний попит виступає не лише індикатором поточної економічної активності, але й важливим інструментом впливу на траєкторію економічного зростання в середньо- та довгостроковій перспективі.

Інституційні та соціальні фактори займають особливе місце в системі детермінант економічного зростання, оскільки вони визначають «правила гри», в межах яких функціонують усі інші економічні процеси. На відміну від ресурсних чинників чи чинників попиту, які мають більш безпосередній економічний вимір, інститути формують якість середовища, в якому приймаються рішення щодо інвестицій, виробництва, споживання та розподілу ресурсів. У сучасній економічній теорії інституційний підхід розглядається як один із ключових пояснювальних факторів міждержавних відмінностей у рівнях доходу та темпах економічного зростання.

Одним із центральних елементів інституційного середовища є захист прав власності та верховенство права. Чітко визначені та гарантовані права власності знижують невизначеність для економічних агентів і стимулюють довгострокові інвестиції. Наприклад, у країнах із високим рівнем правової захищеності бізнесу, таких як Швейцарія або Німеччина, підприємства більш схильні вкладати кошти у дорогі інноваційні проєкти, оскільки ризик втрати активів або результатів інновацій є мінімальним [43]. Натомість у країнах зі слабкими інституціями інвестиційна активність часто обмежується короткостроковими проєктами з швидкою окупністю через високий рівень правової та політичної невизначеності [24].

Важливим аспектом є також якість державного управління та ефективність публічних інституцій, які визначають здатність держави формувати та реалізовувати економічну політику. Ефективна бюрократія, низький рівень корупції та прозорі регуляторні процедури сприяють зниженню трансакційних витрат для бізнесу та підвищенню інвестиційної привабливості економіки. Наприклад, спрощення процедур реєстрації підприємств або отримання будівельних дозволів у країнах Східної Європи суттєво вплинуло на розвиток малого та середнього бізнесу, який є важливим джерелом економічного зростання та зайнятості [37,38].

Соціальні фактори, зокрема рівень довіри в суспільстві, соціальна згуртованість та якість людських взаємодій, також відіграють суттєву роль у формуванні економічної

динаміки. Високий рівень суспільної довіри знижує витрати на контроль і забезпечення виконання контрактів, що особливо важливо для розвитку фінансових ринків та інноваційної діяльності. Наприклад, у скандинавських країнах високий рівень соціальної довіри сприяє ефективному функціонуванню податкової системи та перерозподілу ресурсів через державний сектор, що, у свою чергу, підтримує високий рівень соціального захисту та стабільність економічного розвитку [37,38].

Інституційні та соціальні фактори також мають вирішальне значення у контексті макроекономічної стабільності та стійкості до криз. Сильні інститути дозволяють швидше реагувати на зовнішні шоки, такі як фінансові кризи, пандемії або коливання світових ринків, шляхом ефективного впровадження антикризової політики. Наприклад, під час глобальної фінансової кризи 2008 року країни з розвиненими інституційними системами змогли швидше стабілізувати банківський сектор та відновити економічне зростання завдяки скоординованим діям уряду та центрального банку [44].

У прикладному вимірі інституційні та соціальні фактори активно використовуються в міжнародних рейтингах конкурентоспроможності, інвестиційної привабливості та якості державного управління, таких як індекси ООН [45] або Світового економічного форуму [46]. Вони також є ключовими орієнтирами для формування реформ у сфері державного управління, судової системи та антикорупційної політики. Таким чином, інституційне середовище виступає фундаментальною умовою ефективної взаємодії всіх інших факторів економічного зростання, визначаючи не лише його темпи, але й якість та стійкість у довгостроковій перспективі.

Адаптивність економічної системи є важливою детермінантою економічного зростання, що відображає її здатність швидко реагувати на внутрішні та зовнішні зміни, трансформуючи структуру виробництва, інститути та механізми розподілу ресурсів відповідно до нових умов. У сучасній глобалізованій економіці, яка характеризується високою волатильністю ринків, технологічними зрушеннями та частими кризовими явищами, саме рівень адаптивності визначає, наскільки ефективно країна може підтримувати стійке зростання. Вона охоплює як гнучкість економічної політики та інституцій, так і здатність бізнесу та домогосподарств до інноваційної поведінки й структурних змін.

Поняття адаптації займає центральне місце в аналізі поведінки економічних систем у мінливому середовищі. Вона визначається як здатність економічних суб'єктів трансформувати свої структурні, функціональні та поведінкові характеристики для збереження стійкості, конкурентоспроможності й потенціалу розвитку. Адаптація виступає не лише реакцією на шоки, а й проактивною стратегією трансформації, що формує довгострокову траєкторію зростання.

У класичній та неокласичній теорії адаптаційні процеси розглядаються імпліцитно – через ціновий механізм, рівновагу та раціональну поведінку. Адаптація виражається у зміні заощаджень, інвестицій і трудових ресурсів у відповідь на екзогенні шоки. Проте ці підходи не враховують інституційні та технологічні чинники, а також обмежену раціональність агентів [2,3]. Еволюційна економіка надає адаптації провідну роль у поясненні динаміки [47], згідно з нею економічні агенти діють не цілком раціонально, покладаючись на навчання, наслідування й відбір найуспішніших практик. Адаптація стає рушієм інноваційного розвитку та конкурентної еволюції. У інституційній теорії [7] адаптація трактується як здатність інститутів змінюватися відповідно до технологічних, соціальних і глобальних викликів. Інститути розглядаються як результат постійної еволюції, де неефективні структури поступаються ефективнішим формам організації. Поведінкова економіка [48] підкреслює когнітивні обмеження та соціальні норми, які формують адаптивну поведінку індивідів. Вона не завжди оптимальна, проте забезпечує мінімізацію ризиків і трансакційних витрат, підтримуючи функціональну ефективність системи. У межах теорії складних систем [49] адаптація виступає властивістю самоорганізації, що дозволяє зберігати цілісність і стійкість за умов невизначеності. Здатність до адаптації є передумовою сталого зростання, оскільки запобігає дестабілізації економічної системи.

Таким чином, адаптація в економічній науці розглядається як багатовимірний феномен, що поєднує поведінкові, інституційні, інноваційні та системні механізми. Її теоретичне осмислення створює основу для аналізу практичних проявів адаптаційних процесів у національних економіках та визначення їх ролі у забезпеченні довгострокового економічного зростання.

Адаптаційні процеси на макрорівні забезпечують здатність національної економіки реагувати на зовнішні та внутрішні виклики через взаємодію структурних, політичних та інституційних механізмів. Вони формують адаптивний потенціал держави та визначають її стійкість до кризових змін.

Першим ключовим механізмом є переорієнтація виробничих факторів – капіталу, праці та технологій – відповідно до змін у попиті, пропозиції та глобальних тенденціях. Перерозподіл ресурсів між секторами сприяє підвищенню продуктивності, диверсифікації економіки та зменшенню залежності від окремих галузей чи ринків. Другий механізм – коригування макроекономічної політики. Гнучкість монетарних, фіскальних і валютних інструментів дозволяє пом'якшувати наслідки зовнішніх шоків і підтримувати рівновагу. Ефективна бюджетна політика, незалежна монетарна влада та контроль інфляції є умовами стабільного розвитку.

Також варто зазначити інституційну, інноваційно-освітню, міжнародну, фінансову, екологічну та територіальну адаптацію.

Інституційна адаптація проявляється через реформування правових і регуляторних рамок, посилення захисту прав власності, боротьбу з корупцією та підвищення прозорості управління. Здатність інститутів до трансформації визначає довгострокову гнучкість економіки. Не менш важливою є інноваційно-освітня адаптація, що базується на розвитку людського капіталу, досліджень і цифрової інфраструктури. Інвестиції в освіту, науку та технології підвищують інноваційну спроможність і створюють нові конкурентні переваги. Значну роль відіграє міжнародна інтеграція, яка забезпечує доступ до ринків, технологій і фінансів, водночас вимагаючи узгодження з міжнародними стандартами та стимулюючи внутрішні реформи.

Серед важливих напрямів також – адаптація фінансової системи. Розвинений банківський сектор, ринки капіталу та механізми фінансової інклюзії сприяють стійкості економіки під час шоків. За даними Світового банку [50], інклюзивне фінансування прискорює відновлення зайнятості та підтримує внутрішній попит. Важливим сучасним аспектом є екологічна адаптація, що передбачає інтеграцію принципів сталого розвитку в економічне планування. Розвиток «зеленої» інфраструктури, енергоефективності та циркулярної економіки знижує ресурсозалежність і відкриває нові напрями зростання.

Територіальна адаптація охоплює спроможність регіонів пристосовуватись до структурних змін через формування інноваційних кластерів, розвиток урбанізації та децентралізацію. Посилення ролі місцевого самоврядування сприяє зменшенню соціально-економічної диференціації та підвищує національну стійкість.

У сукупності ці механізми демонструють, що адаптація є не пасивною реакцією, а цілісним процесом структурної, інституційної та технологічної трансформації, який визначає довгострокову стабільність і конкурентоспроможність економічної системи. Адаптаційна здатність економічної системи є важливою детермінантою формування її довгострокової траєкторії зростання. У сучасних теоретичних підходах вона трактується як комплексна характеристика, що відображає здатність системи ефективно реагувати на структурні, технологічні та інституційні зміни, зберігаючи потенціал сталого розвитку. Передусім адаптаційна здатність визначає гнучкість економіки у перерозподілі ресурсів та зміні виробничих моделей. Висока адаптивність сприяє переходу до нових технологічних укладів, оновленню капіталу й мобілізації людських ресурсів, що забезпечує зростання продуктивності та інноваційного потенціалу. Вона тісно пов'язана з інституційною структурою, оскільки інститути, здатні до трансформації, створюють сприятливе середовище для підприємництва, інвестицій і захисту прав власності. Ефективні інституції знижують невизначеність, зміцнюють довіру та стимулюють довгострокове інвестування, підтримуючи сталі темпи розвитку.

Емпіричні дослідження показують, що розвинені адаптаційні механізми корелюють із вищими темпами зростання та конкурентоспроможністю, тоді як низька адаптивність веде до інституційної деградації й технологічного відставання [20]. Адаптаційна здатність також визначає стійкість до кризових явищ і шоків: країни з високим рівнем адаптивності швидше відновлюються після рецесій, пристосовуються до глобальних трендів і запобігають затяжним спадним фазам. Важливою складовою є людський капітал – основа інноваційності та гнучкості економіки. Інвестиції в освіту, науку та розвиток навичок підвищують здатність до створення й освоєння нових технологій, забезпечуючи конкурентоспроможність на глобальному рівні.

Отже, адаптаційна здатність є системоутворюючим чинником економічного розвитку, що визначає швидкість і якість структурних перетворень. Вона поєднує

інституційну ефективність, технологічну динаміку та інтелектуальний потенціал суспільства, забезпечуючи перехід від реактивного нестійкого до проактивного стійкого типу зростання. Підвищення адаптивності вимагає узгодження державної політики з довгостроковими цілями модернізації, розвитку людського капіталу та стимулювання інновацій. Саме через механізми адаптації економіка здатна не лише долати кризи, а й формувати конкурентні переваги у глобальному середовищі.

Характер економічного зростання. У процесі економічного розвитку важливими є не лише фактори зростання, а й джерела, характер та вплив на інституційне середовище. Далі розглянемо різні типи економічного зростання, серед яких варто виділити екстенсивне та інтенсивне зростання за характером використання виробничих факторів. Стійке, нестійке та циклічне зростання за динамікою траєкторії за впливом на інституційне середовище варто згадати інклюзивне та зелене зростання.

Екстенсивне зростання базується на розширенні використання ресурсів – праці, капіталу, землі – без підвищення продуктивності. Воно характерне для початкових етапів індустріалізації, коли розвиток досягається за рахунок залучення невикористаних ресурсів. Така модель супроводжується зростанням витрат на одиницю ВВП і зниженням ефективності в довгостроковій перспективі.

Інтенсивне зростання, навпаки, відображає підвищення ефективності використання ресурсів через технологічні інновації, модернізацію виробництва, підвищення кваліфікації робочої сили та зростання загальної факторної продуктивності. У неокласичних моделях воно пов'язується з технологічним прогресом, що забезпечує приріст продукту без додаткових ресурсів і виступає показником економічної ефективності.

Кількісне розмежування цих типів здійснюється через факторний аналіз або декомпозицію зростання, що оцінює внесок праці, капіталу й залишкового чинника, який інтерпретується як технологічний прогрес. У роботах Е. Денісона [50], Д. Джоргенсона [51] та пізніших дослідженнях TFP-аналізу тип зростання визначається співвідношенням між приростом факторів і випуску продукції. За дослідженнями МВФ [52], Світового банку [53] та ОЕСР [54], лише країни, що інвестували в освіту,

R&D та створення ефективного інституційного середовища, змогли перейти від екстенсивної до стійкої інтенсивної моделі розвитку.

Стійке зростання (sustainable/steady growth) передбачає тривале збільшення виробництва без різких коливань і збереження макроекономічної рівноваги. Йому властиві помірні темпи, низька інфляція, стабільна зайнятість і структурна збалансованість [55]. У неокласичних моделях стійкий стан означає рівномірне зростання основних змінних – ВВП, капіталу, споживання – за сталих темпів, що забезпечується гармонійним поєднанням нагромадження капіталу, демографії та технічного прогресу. На практиці стійкість підтримується ефективною фіскальною та монетарною політикою, прозорими регуляціями й стабільним фінансовим сектором.

Нестійке зростання (unsustainable growth) характеризується дисбалансами, вразливістю до шоків і надмірною залежністю від окремих джерел доходу чи боргового фінансування. Його типовий прояв – «перегріте зростання», що супроводжується короткочасним бумом, інфляцією, спекулятивними процесами та макроекономічними перекосами. Дослідження [56-57] показують, що така динаміка часто передуює фінансовим кризам, особливо у країнах із слабкими інституціями та високою відкритістю до спекулятивного капіталу.

Циклічне зростання виражається у чергуванні фаз піднесення й спаду, що формують бізнес-цикл. Дж. Кейнс [28] пояснював цикли коливаннями попиту й пропозиції, неокласики – технологічними шоками, монетаристи, зокрема, М. Фрідман [58] – змінами грошової маси, а посткейнсіанці [59] – фінансовими дисбалансами та борговими ризиками. Економічні цикли мають комплексний характер, а їх дослідження потребує поєднання різних підходів для більш повного розуміння причин макроекономічної динаміки.

Інклюзивне зростання (inclusive growth) забезпечує участь усіх соціальних груп у процесі розвитку та справедливий розподіл його результатів. Його ознаками є зменшення нерівності, зростання зайнятості, розширення доступу до освіти, охорони здоров'я та інфраструктури. За визначенням ОЕСР [60] і ООН [61], інклюзивне зростання передбачає активну роль держави у розвитку людського потенціалу, підтримці малого бізнесу та формуванні ефективної системи соціального захисту.

Зелене зростання (green growth) інтегрує екологічний вимір у процес економічного розвитку. Його метою є раціональне використання ресурсів, декарбонізація, перехід до циркулярної економіки та скорочення викидів парникових газів. У межах концепції сталого розвитку, закріпленої у Цілях ООН [61], таке зростання вимірюється не лише ВВП, а й показниками енергоємності, вуглецевого сліду та біорізноманіття. Перехід до зеленої моделі потребує реформування системи субсидій, розвитку чистих технологій та запровадження фіскальних інструментів екологічного спрямування.

Таким чином, різні типи економічного зростання дають змогу глибше зрозуміти механізми розвитку національної економіки, виявити джерела економічної динаміки та оцінити її довгострокові наслідки. Їх аналіз є важливою передумовою для побудови моделей економічного зростання, оскільки дає змогу визначити ключові фактори впливу, врахувати структурні особливості економіки та обґрунтувати вибір методів оцінювання й прогнозування макроекономічної динаміки.

1.3. Методи оцінювання економічного зростання

Оцінювання економічного зростання у сучасній економічній науці розглядається як системний процес вимірювання кількісних і якісних змін у національному господарстві з метою виявлення закономірностей його розвитку. Економічне зростання визначається як тривале збільшення обсягів виробництва товарів і послуг, що супроводжується структурними трансформаціями, удосконаленням технологій і підвищенням добробуту населення. Відтак, оцінювання виступає не лише технічною процедурою, а й аналітичним інструментом пізнання соціально-економічної динаміки.

Необхідність науково обґрунтованого вимірювання зростання зумовлена теоретичними та практичними потребами. З одного боку, воно забезпечує перевірку економічних гіпотез і побудову моделей розвитку, а з іншого — надає державним інституціям, бізнесу та міжнародним організаціям достовірні дані для стратегічного планування. Методи оцінювання, таким чином, формують зв'язок між економічною

теорією та політикою, дозволяючи фіксувати поточний стан економіки й прогнозувати її подальшу еволюцію.

Оцінювання економічного зростання є комплексне відображення динаміки розвитку країни через систему показників, що поєднують обсяг виробництва з технологічними, структурними та інституційними змінами. Завдання такого оцінювання полягає у створенні цілісної аналітичної картини, яка інтегрує статистичні дані з їх інтерпретацією у соціально-економічному контексті. Для цього доцільно використовувати як абсолютні, так і відносні показники, що охоплюють різні аспекти економічного зростання.

В науковій літературі зустрічаються різноманітні підходи щодо класифікації методів оцінювання економічного зростання. Дані методи класифікуються за рівнем аналізу: макроекономічні (національне господарство, ВВП, ВНД), мезоекономічні (регіони, галузі, кластери) та мікроекономічні (підприємства, господарські одиниці). Залежно від часової орієнтації виділяють ретроспективні, поточні та прогнозні методи, які у практиці часто комбінуються. За методологічним підходом розрізняють кількісні методи – засновані на статистичних та економетричних розрахунках, і якісні – орієнтовані на оцінку людського капіталу, інституційної якості й інноваційної активності через індекси та експертні оцінки. Особливу роль відіграють інтегровані підходи, що поєднують кількісні та якісні параметри. До них належать, зокрема, методики розрахунку глобальних індексів, як Індексу людського розвитку (HDI), Індексу інклюзивного зростання (IGI), Індексу добробуту (LPI) та інших, які забезпечують комплексну оцінку соціально-економічного прогресу. Далі розглянемо детально якісні та кількісні методи оцінювання економічного зростання.

Якісні методи оцінювання економічного зростання спрямовані на вимірювання нематеріальних і багатовимірних аспектів розвитку, що не відображаються у традиційних макроекономічних показниках. Вони зосереджуються на аналізі структурних, соціальних, інституційних та екологічних чинників, які визначають довгострокову конкурентоспроможність економіки. На відміну від кількісних підходів, якісні методи оцінюють не лише масштаби, а й зміст процесу зростання та його відповідність стратегічним цілям суспільства.

Основу якісного аналізу становить індексний підхід, реалізований через інтегральні показники соціально-економічного розвитку. Наприклад, серед них – Індекс людського розвитку [45], що поєднує оцінку рівня життя, освіти та тривалості життя; Індекс інклюзивного зростання [46], орієнтований на соціальну справедливість і доступність можливостей; Індекс світового добробуту [62], який охоплює економічні, соціальні та культурні виміри. Перевагою таких індикаторів є комплексність і можливість міжнародного порівняння. Серед індексних методів також є більш спеціалізовані індекси, як, наприклад, Індекс фінансової залученості [63], який відображає рівень фінансової інклюзії, Індекс екологічної ефективності [64], який характеризує результативність державної екологічної політики та рівень екологічного навантаження на економіку, а також Індекс скоригованого чистого заощадження [65], що відображає взаємозв'язок між економічним зростанням, виснаженням природних ресурсів і накопиченням людського капіталу. Використання таких показників дозволяє оцінювати не лише поточні результати економічного розвитку, а й перспективи його довгострокової стійкості в умовах обмеженості ресурсів та посилення глобальних екологічних викликів.

Вагому роль у якісному аналізі економічного зростання відіграють експертні методи, засновані на використанні професійних оцінок фахівців, отриманих шляхом анкетування, інтерв'ювання, опитувань або застосування методу Delphi [66]. Такі підходи дозволяють враховувати фактори, які складно формалізувати або кількісно виміряти за допомогою традиційної статистики. Зокрема, йдеться про оцінювання якості інституційного середовища, політичної стабільності, рівня корупції, інноваційного потенціалу, ділового клімату та соціальної довіри. Експертні оцінки забезпечують можливість виявлення прихованих тенденцій, ризиків і бар'єрів розвитку, а також формування прогностичних сценаріїв у ситуаціях високої невизначеності.

Кількісні методи оцінювання економічного зростання становлять найбільш розвинений і формалізований інструментарій аналізу, що базується на об'єктивно вимірюваних показниках. Їхня методологічна основа спирається на статистичний облік обсягів виробництва, інвестицій, продуктивності праці, зовнішньоекономічних операцій та інших макро- і мікроекономічних параметрів. Перевагою цих методів є можливість точної кількісної репрезентації економічної динаміки, що забезпечує порівнянність

результатів у часовому та просторовому вимірах. До кількісних методів належать статистичні методи, агрегатні індексні методи та методи моделювання.

Статистичні методи полягають в аналізі макроекономічних показників, найчастіше валового внутрішнього продукту (ВВП) і валового національного доходу (ВНД). Оцінювання реального та номінального ВВП дозволяє врахувати вплив інфляції, а розрахунок ВВП на душу населення – визначити рівень економічного добробуту. Використання порівняльних або постійних цін забезпечує коректність міжчасового аналізу та дозволяє уникнути спотворень, пов'язаних зі зміною загального рівня цін. Валовий національний дохід, на відміну від ВВП, додатково враховує міжнародні потоки доходів, зокрема надходження від зовнішньоекономічної діяльності, трансферти та доходи від факторів виробництва за кордоном, що є особливо важливим для аналізу відкритих економік. Крім базових макроекономічних агрегатів, статистичні методи передбачають використання системи похідних показників, зокрема темпів приросту виробництва, продуктивності праці, капіталомісткості, інвестиційної активності, рівня зайнятості та структури споживання. Їх комплексне застосування дозволяє більш повно оцінити тенденції економічної динаміки, виявити структурні диспропорції та визначити ключові фактори економічного розвитку.

До кількісних підходів належать також методи оцінювання продуктивності праці й капіталовіддачі, включно з розрахунком сукупної факторної продуктивності (TFP), що інтегрує ефективність використання ресурсів і відображає вплив технологічних та організаційних змін.

Агрегатні індексні методи, що ґрунтуються на побудові індексів Ласпейреса [67], Пааше [68] та Фішера [69], використовуються для вимірювання змін у виробництві, цінах і витратах у часі. Ці підходи застосовуються для аналізу динаміки споживчих цін, галузевих показників і фізичних обсягів виробництва. На відміну від інтегральних якісних індексів, орієнтованих на комплексну оцінку соціально-економічного розвитку, агрегатні індексні методи мають кількісний характер і спрямовані на вимірювання динаміки конкретних економічних показників у часі.

Сучасний інструментарій моделювання економічного зростання охоплює широкий спектр підходів, серед яких ключове місце займають класичні економетричні методи,

факторні моделі економічного зростання, а також сучасні методи машинного навчання та штучного інтелекту, зокрема описані в [70-75].

Лінійні регресійні моделі є фундаментальним інструментом економетричного аналізу, що використовується для кількісного оцінювання впливу ключових факторів виробництва – фізичного капіталу, праці та технологічного прогресу – на валовий внутрішній продукт або інші показники економічної динаміки. Загальна форма лінійної регресійної моделі, що описує залежність темпів економічного зростання Y від набору пояснювальних змінних $X_1, X_2, \dots, X_n$, має вигляд:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

де Y_i – залежна змінна (наприклад, темп приросту ВВП),

X_{ij} – пояснювальні змінні (капітал, праця, технології тощо),

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ – параметри моделі, що підлягають оцінці,

ε_i – випадкова похибка.

В класичних моделях економічного зростання часто використовується логарифмічна трансформація змінних, що дає можливість інтерпретувати коефіцієнти регресії як еластичності:

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln K_i + \beta_2 \ln L_i + \varepsilon_i, \quad (1.2)$$

де K_i – фізичний капітал,

L_i – трудові ресурси,

а $\ln$ – натуральний логарифм.

Використання лінійних регресійних моделей у дослідженні економічного зростання дає змогу кількісно оцінити вплив капіталомісткості, праці та технологічного прогресу на динаміку виробництва. Такі моделі дозволяють визначити величину й напрямок впливу окремих факторів, оцінити їхню значущість, а також виявити структурні зміни в економіці через аналіз параметрів у часі.

Дотримання припущень класичної регресії (лінійність, гомоскедастичність, відсутність автокореляції та мультиколінеарності) є необхідною умовою отримання надійних результатів. У макроекономічних дослідженнях, де часто використовуються часові або панельні дані, можливі порушення цих припущень потребують застосування

діагностичних тестів і корекцій, зокрема робастних оцінок чи динамічних моделей [76-94].

Модель Мальтуса сформована в умовах індустріальної революції, відображала занепокоєння темпами приросту населення порівняно з обмеженими ресурсами. Т. Мальтус у [10] поставив під сумнів ідею безмежного економічного зростання, прогножуючи кризи, спричинені дисбалансом між демографічним і продовольчим розвитком. Його концепція суттєво вплинула на подальшу демографічну та економічну думку.

Суть моделі полягає в тому, що населення зростає експоненційно, тоді як ресурси – лише арифметично. Такий розрив неминуче веде до дефіциту, голоду, бідності й епідемій, тобто соціально-економічних криз. Мальтус розглядав обмеженість природних ресурсів як ключовий бар'єр сталого розвитку суспільства. Математичне вираження моделі Мальтуса базується на припущенні, що населення зростає експоненційно зі сталою нормою приросту:

$$\frac{dP}{dt} = rp(t), \quad (1.3)$$

де $P(t)$ – кількість населення в момент часу

t , r – темп природного приросту населення (постійна величина).

Розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд:

$$P(t) = P_0 e^{rt}, \quad (1.4)$$

де P_0 - початкова кількість населення.

Водночас, Мальтус припускав, що продовольчі ресурси зростають лінійно:

$$R(t) = R_0 + st, \quad (1.5)$$

де R_0 – початковий обсяг ресурсів,

s – сталий приріст ресурсів за одиницю часу.

Таким чином, оскільки населення зростає швидше за ресурси, виникає нерівність: $P(t) > R(t)$ при достатньо великому t , що ілюструє неминучий дисбаланс між населенням і ресурсами за відсутності стримуючих факторів.

Модель Мальтуса ґрунтується на кількох припущеннях: населення зростає експоненційно, тоді як продовольчі ресурси – лише лінійно через обмеження землі та технологій; технологічний прогрес і соціальні зміни не враховуються; механізми стримування населення діють лише під час криз.

Ця модель стала першою спробою формалізувати взаємозв'язок між демографічними процесами та економічними обмеженнями, підкресливши значення ресурсного чинника і скінченність економічного зростання. Вона заклала основу подальших досліджень у демографії, екології та економіці розвитку, привернувши увагу до проблеми сталого розвитку. Основні недоліки моделі полягають у спрощеності: вона ігнорує технологічний прогрес, соціальні механізми регулювання народжуваності та міграції, а також демографічну стабілізацію, характерну для сучасних суспільств. Через це її пояснювальна сила є обмеженою, і вона потребує доповнення сучасними теоретичними підходами.

Модель класичного накопичення капіталу Сміта-Рікардо. Ідеї класичного накопичення капіталу сформувалися під час індустріальної революції XVIII-XIX ст., коли відбувалися глибокі зміни у виробництві та розподілі. А. Сміт [1] визначив капітал і працю як основні фактори виробництва, а Д. Рікардо [9] розвинув ці положення, підкресливши роль накопичення капіталу у довгостроковому економічному зростанні та розподілі доходів. Ці ідеї стали основою ранніх моделей економічного розвитку, що наголошували на значенні інвестицій і заощаджень.

Сутність моделі полягає в тому, що накопичення капіталу забезпечує економічне зростання, оскільки інвестиції розширюють виробничі потужності та підвищують національний дохід. Виробництво розглядається як функція капіталу й праці, а заощадження – як головне джерело інвестицій і створення додаткової вартості.

У загальному вигляді модель можна записати як:

$$Y = F(K, L). \quad (1.6)$$

Накопичення капіталу можна відобразити як:

$$\frac{dK}{dt} = sY, \quad (1.7)$$

де s – норма заощаджень.

Модель класичного накопичення капіталу спирається на низку припущень: виробництво має сталі віддачі від масштабу, капітал і праця є взаємозамінними; норма заощаджень – стала частка національного доходу, що повністю трансформується в інвестиції; технологічний рівень фіксований у короткостроковому періоді, ресурси повністю зайняті, а амортизація відбувається за сталою нормою. Ці передумови формують логіку моделі, але обмежують її реалістичність.

Модель вперше формалізувала зв'язок між заощадженнями, інвестиціями та зростанням виробництва, визначивши капітал головним чинником економічного розвитку й інструментом аналізу динаміки накопичення багатства. Вона заклала основу подальших досліджень економічного зростання та теорії виробництва.

Водночас модель обмежена низкою спрощень: постійна норма заощаджень і повна інвестиційна трансформація рідко відповідають реальності; припущення про сталу віддачу та повну зайнятість ігнорують циклічність і безробіття; відсутнє врахування технологічного прогресу та інституційних факторів. Через це її застосування обмежене, а подальші моделі, зокрема модель Солоу, розвинули її положення.

Виробнича функція Леонтьєва. Виробнича функція є одним із базових понять в економічній теорії, що відображає кількісну залежність між обсягом випуску продукції та кількістю використовуваних факторів виробництва. Вона служить інструментом для аналізу ефективності виробничих процесів, визначення граничної продуктивності ресурсів та формування моделей економічного зростання. Виробнича функція показує, яким чином зміни у кількості праці, капіталу, землі чи інших ресурсів впливають на загальний обсяг виробництва.

Основна мета виробничої функції – формалізувати технологічні можливості виробництва, зафіксувати існуючі технологічні обмеження та дати змогу вивчати наслідки змін у ресурсах та їх структурі. Вона дозволяє аналізувати питання оптимального розподілу факторів, оцінювати ефективність виробничих систем і прогнозувати потенціал зростання.

У загальному вигляді виробнича функція може бути записана як:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (1.8)$$

де Y – обсяг виробництва,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ – обсяги відповідних факторів виробництва (наприклад, праця, капітал, земля, енергія).

Виробничі функції поділяються за кількома характеристиками:

- Ступінь замінності факторів: від повної замінності (функція Кобба-Дугласа) до повної жорсткості (функція Леонтьєва).
- Віддача від масштабу: постійна, зростаюча або спадна.
- Врахування технологічного прогресу: екзогенний або ендогенний.

Різні типи виробничих функцій застосовуються залежно від специфіки досліджуваної економіки чи галузі. Наприклад, у класичних моделях економічного зростання часто використовується функція Кобба-Дугласа [95] через її аналітичну зручність і властивість сталих віддач від масштабу. Функція Леонтьєва [96] більш доречна для міжгалузових моделей, де технології мають жорсткі пропорції. Функції типу CES (Constant Elasticity of Substitution) [97] дозволяють гнучко моделювати ступінь замінності факторів, що важливо для більш реалістичних сценаріїв.

Виробнича функція визначає граничні продукти факторів – приріст випуску при збільшенні одного ресурсу за незмінності інших, що дає змогу оцінювати ресурсоемність виробництва та оптимізувати інвестиції. Важливою її властивістю є віддача від масштабу, яка показує зміну випуску при пропорційному зростанні всіх ресурсів: вона може бути зростаючою, сталою або спадною, що має ключове значення для аналізу довгострокового зростання та масштабування виробництва.

Гранична продуктивність факторів відображає зміну випуску при збільшенні одного ресурсу на одиницю; згідно з класичною теорією, вона зазвичай спадає, що пояснює обмеження зростання без технологічного прогресу. Останній може бути екзогенним (інновації задаються ззовні) або ендогенним, коли інновації залежать від економічної активності.

У сучасних моделях виробнича функція охоплює ширший набір факторів – людський капітал, природні ресурси, інновації, – що дозволяє відображати складність сучасної економіки та оцінювати внесок кожного елемента у загальний розвиток.

Виробнича функція Леонтьєва [96] – це особливий тип виробничої функції, який характеризується жорсткою технологічною пропорційністю факторів виробництва. Вона названа на честь радянського економіста В. Леонтьєва, який широко застосував цей підхід для міжгалузевого аналізу економіки. Головна ідея цієї функції полягає у тому, що для виробництва одиниці продукції необхідно строго певне співвідношення капіталу і праці (а іноді і інших ресурсів), і фактори не можуть замінювати один одного.

$$Y = \min\left(\frac{K}{a}; \frac{L}{b}\right), \quad (1.9)$$

де Y – обсяг виробництва,

K – використаний капітал,

L – використана праця,

a та b – сталі технологічні коефіцієнти, що показують кількість капіталу та праці, необхідну для виробництва одиниці продукції.

Функція Леонтьєва показує, що обсяг виробництва визначається найдефіцитнішим ресурсом: якщо капітал використовується менше, ніж праця у встановленій пропорції, саме він стає обмежувальним фактором, і навпаки.

Ця функція описує технології з фіксованими нормами витрат, де ресурси не є взаємозамінними, що характерно для виробництв із жорсткими технологічними вимогами до матеріалів чи обладнання. Вона лежить в основі міжгалузевих моделей, зокрема аналізу ланцюгів постачання та структурних змін в економіці.

Переваги:

- Чітко відображає технічні обмеження і жорсткість у використанні ресурсів.
- Забезпечує простоту інтерпретації і моделювання у складних системах, де фактори не взаємозамінні.
- Служить базою для міжгалузевих моделей (наприклад, матриця Леонтьєва), що широко використовуються у плануванні і аналізі економічних систем.

Обмеження:

- Не дозволяє враховувати замінність факторів виробництва, що часто зустрічається в реальній економіці.
- Жорсткість пропорцій може призводити до нереалістичних результатів при моделюванні динамічних процесів.
- Ігнорує можливості технічного прогресу, який часто забезпечує більшу гнучкість у використанні ресурсів.

Загалом, функція Леонтьєва є ефективним інструментом для аналізу структурних взаємозв'язків і систем із фіксованими технологічними пропорціями, однак її застосування доцільне лише за наявності відповідної технологічної специфіки галузі.

Модель Харрода-Домара (Harrod-Domar model). Класична теорія економічного зростання, розроблена Р. Харродом [98] і Е. Домаром [99] формалізує взаємозв'язок між інвестиціями, накопиченням капіталу й темпами зростання національного доходу, пояснюючи умови стабільності та причини економічних коливань. Модель підкреслює роль інвестицій як головного рушія зростання, залежність темпів розвитку від норми заощаджень і продуктивності капіталу, а також ризик дисбалансу між виробничими потужностями та сукупним попитом.

Основні передумови моделі наступні:

- Лінійна виробнича функція – випуск прямо пропорційний капіталу при сталому технічному рівні, інші фактори вважаються забезпеченими.
- Стала норма заощаджень – фіксована частка національного доходу, що повністю переходить у інвестиції.
- Фіксований коефіцієнт капіталоозброєності – постійна кількість капіталу для виробництва одиниці продукції, що знижує гнучкість економіки.
- Баланс між зростанням потужностей і попиту – рівність їх темпів забезпечує стабільність; відхилення спричиняють кризи.
- Відсутність зовнішніх шоків і гнучкість ринків – економіка реагує на зміни інвестицій без значних затримок.

У моделі використовується виробнича функція Леонтьєва, що відображає жорсткі технологічні пропорції між капіталом і працею. Зростання обмежується дефіцитним

ресурсом, тому стабільний розвиток можливий лише за збалансованого нагромадження капіталу й робочої сили. Це підкреслює вразливість економіки до диспропорцій і пояснює циклічність, властиву моделі Харрода-Домара.

Модель Харрода-Домара описується диференціальним рівнянням, яке зв'язує темп зростання національного доходу з нормою заощаджень та капіталоємністю виробництва. Формально ця залежність виражається так:

$$BY^* + Y = C_0 * e^{rt}, \quad (1.10)$$

аналітичний розв'язок якого записується

$$Y_{HD}(t) = \left[Y_0 - \frac{C_0}{1 - Br} \right] * e^{\frac{1}{B}t} + \frac{C_0}{1 - Br} * e^{rt}, \quad (1.11)$$

де Y_0 – початкове значення випущеного продукту;

C_0 – початкове значення споживання;

B – коефіцієнт капіталомісткості;

r – темп споживання.

За умов стаціонарного зростання, коли темпи приросту капіталу та випуску збігаються, інвестиції можуть відрізнятися від заощаджень через чистий імпорт. Від'ємний чистий імпорт «поглинає» заощадження й уповільнює зростання доходу, тоді як позитивний – сприяє його прискоренню. Регіони з чистим експортом розвиваються швидше, оскільки отримують додаткові зовнішні заощадження. Баланс розвитку підтримується також міграцією робочої сили: приплив працівників компенсує їх дефіцит, а відтік – надлишок, що сприяє вирівнюванню ресурсів.

Початкові відмінності у темпах зростання можуть посилюватися, однак притік капіталу до бідніших регіонів сприяє конвергенції їхніх доходів із рівнем розвиненіших територій. Регіони з високою нормою заощаджень, ефективним використанням капіталу та низькою капіталоємністю демонструють швидше економічне зростання завдяки більшій здатності генерувати продуктивні інвестиції.

Модель Харрода-Домара відіграла ключову роль у розвитку теорій зростання. Вона демонструє значення заощаджень та інвестицій як основних рушіїв розвитку, аналізує

баланс між капіталом і працею та можливі циклічні коливання, а її простота робить модель ефективним інструментом для аналізу економік, що розвиваються.

Динамічна модифікація моделі пояснює швидке зростання економіки за умов низьких внутрішніх заощаджень і від'ємного торгового балансу, коли фінансування здійснюється через імпорт капіталу. Однак модель має обмеження: вона передбачає закриту економіку, не враховує міжнародні потоки капіталу й праці, а також роль держави, інституційних чинників і технологічних змін. Через відсутність стабілізуючих механізмів рівноважне зростання в моделі є нестійким, тому зовнішні чи внутрішні коливання можуть викликати тривалі відхилення від рівноваги.

Виробнича функція Кобба-Дугласа. Функція була вперше запропонована Ч. Коббом та П. Дугласом [95] в контексті емпіричного дослідження залежності обсягів промислового виробництва США від кількості праці та капіталу.

Загальна характеристика функції Кобба-Дугласа полягає в описі залежності випуску продукції Y від кількості використаних ресурсів капіталу K та праці L за формулою:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (1.12)$$

де A – коефіцієнт технологічного рівня,

α та β – еластичності випуску за капіталом і працею відповідно.

Припущення про сталість віддачі від масштабу означає, що $\alpha + \beta = 1$. Така функціональна форма дає змогу кількісно оцінювати вплив кожного фактора на виробництво та моделювати структурні зрушення в економіці.

Виробнича функція Кобба-Дугласа характеризується сталою еластичністю випуску за факторами, що спрощує аналіз і прогнозування. Вона відображає зменшувану граничну продуктивність ресурсів, відповідаючи неокласичним принципам, і стала базою для моделі зростання Солоу-Свана [2-3,12].

Її переваги полягають у простоті, зручній економічній інтерпретації, універсальності та можливості емпіричного калібрування. Функція забезпечує прямий зв'язок між теорією та кількісним аналізом, дозволяючи оцінювати вплив змін ресурсної структури на випуск.

До недоліків належать жорсткі припущення про сталість еластичностей і віддачі від масштабу, відсутність взаємозамінності факторів, слабе врахування технічного прогресу та структурних змін. Її результати також чутливі до статистичних похибок.

Модель Солоу-Свана (Solow-Swan model). Модель економічного зростання Солоу була запропонована Р. Солоу у 1956 році [2-3] та незалежно розроблена Т. Сваном [12]. Вона виникла як відповідь на обмеження моделі Харрода-Домара, зокрема на проблему нестабільності збалансованого зростання. Мета Солоу полягала в тому, щоб створити більш гнучку теоретичну конструкцію, яка б враховувала вплив технологічного прогресу та зміни ефективності використання ресурсів на економічний розвиток.

Основою моделі є припущення про функціонування конкурентної ринкової економіки, де ціни на фактори виробництва визначаються їхньою граничною продуктивністю. У загальному вигляді усі передумови моделі Солоу-Свана:

- Закрита економіка – відсутні зовнішньоекономічні зв'язки, міжнародна торгівля та рух капіталу.
- Відсутність уряду – немає податків, державних витрат чи трансфертів.
- Конкурентний ринок – ціни на фактори виробництва визначаються їхньою граничною продуктивністю.
- Сталий темп зростання населення – населення збільшується з нормою n .
- Постійна норма заощаджень – фіксована частка доходу заощаджується й інвестується.
- Інвестиції дорівнюють заощадженням – відсутні фінансові дисбаланси.
- Фіксована норма амортизації – капітал зношується з швидкістю δ .
- Екзогенний технологічний прогрес – ефективність праці зростає з постійною швидкістю g .
- Стала віддача від масштабу – одночасне пропорційне збільшення всіх факторів призводить до такого ж збільшення випуску.
- Зменшувана гранична продуктивність факторів – приріст випуску від додаткової одиниці капіталу чи праці зменшується за інших рівних умов.

- Однорідна праця та капітал – усі одиниці факторів є взаємозамінними в межах свого виду.

Модель Солоу зазвичай використовує виробничу функцію Кобба-Дугласа:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}. \quad (1.13)$$

Ця функція дозволяє врахувати вплив технологічного прогресу та зростання населення на довгострокові темпи розвитку.

Модель Солоу-Свана (Рис. 1.1) пояснює, як економіка рухається до стаціонарного стану (steady state), де темпи зростання капіталу і випуску на душу населення визначаються лише технологічним прогресом. Вона демонструє ефект зменшеної віддачі від капіталу та передбачає можливість конвергенції – зближення рівнів доходу між країнами за схожих параметрів заощаджень, технологій і приросту населення.

Остаточно рівняння моделі Солоу-Свана приймає вигляд:

$$k^* = sAk^\alpha - (d + n)k, \quad k_0 = k(t_0), \quad (1.14)$$

де змінна $k=k(t)$ відповідає капіталомісткості;

$k^* = \frac{dk}{dt}$ – перша її похідна; коефіцієнт;

s – норма накопичування капіталу;

A відображає непрямі витрати, належить функції Кобба-Дугласа;

α є еластичністю, належить функції Кобба-Дугласа;

s – норма накопичення капіталу;

d – ступінь вибуття капіталу;

n – середній темп зростання зайнятого населення.

При чому $d+n=\lambda$.

Інтегруванням диференціального рівняння (1.14) Солоу-Свана записується його аналітичний розв'язок:

$$k(t) = \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{s(1-\alpha)}{\lambda})e^{-\lambda t(1-\alpha)} + \frac{sA(1-\alpha)t}{\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (1.15)$$

де k_0 відображає початковий рівень капіталомісткості виробництва.

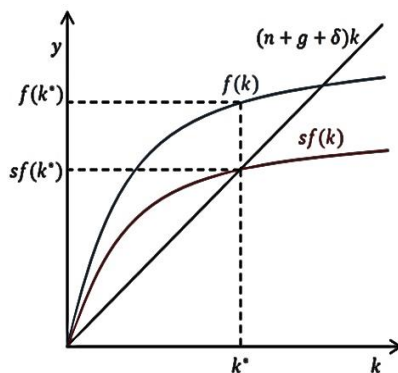


Рис. 1.1 Рівновага за моделлю Солоу-Свана.

Джерело: [2,3]

У моделі Солоу підвищення норми заощаджень веде до зростання рівня капіталу на одного працівника (Рис. 1.2) та, відповідно, рівня випуску на душу населення у довгостроковій перспективі. Однак воно не змінює сталий темп зростання доходу на душу населення, який у стаціонарному стані визначається лише темпом технологічного прогресу. Підвищення заощаджень прискорює накопичення капіталу й тимчасово збільшує темпи зростання, але після досягнення нового стаціонарного стану ефект обмежується лише вищим рівнем доходу, без постійного прискорення економічного зростання.

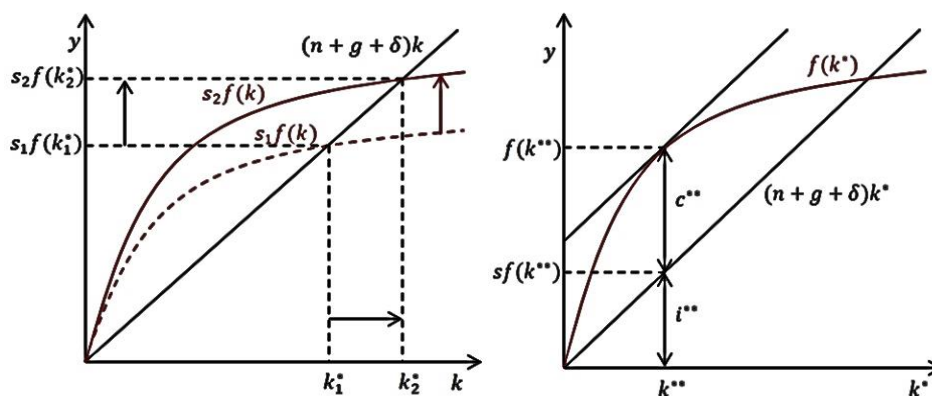


Рис. 1.2 Зміна норми заощаджень та «Золоте правило» за моделлю Солоу-Свана.

Джерело: [2,3]

Золоте правило (Golden Rule) визначає таку норму заощаджень, за якої споживання на одного працівника в стаціонарному стані є максимальним (Рис. 1.2). Це баланс між достатнім інвестуванням для підтримки високого рівня капіталу та уникненням надмірного скорочення поточного споживання. Якщо норма заощаджень нижча за оптимальну, економіка втрачає потенційні вигоди від додаткового інвестування; якщо ж

вона вища — капітал накопичується понад оптимальний рівень, зменшуючи можливості для поточного споживання. Таким чином, золоте правило встановлює межу між економічним зростанням і добробутом населення.

Модель Солоу-Свана передбачає умовну конвергенцію: країни з нижчим початковим рівнем капіталу на одного працівника мають потенційно вищі темпи зростання, за умови однакових структурних параметрів — норми заощаджень, темпів зростання населення, технологічного прогресу та амортизації. Це означає, що бідні економіки здатні наздоганяти багатші, якщо дотримуються подібних інституційних і структурних умов. Водночас модель визнає існування дивергенції, якщо параметри значно відрізняються: у такому випадку країни рухаються до різних стаціонарних рівнів доходу, а розриви можуть зростати.

Стаціонарний стан (steady state) — це рівень капіталу на одного працівника, за якого обсяг інвестицій дорівнює обсягу амортизації та забезпечення потреб зростаючого населення. У цій точці економіка зберігає постійний рівень капіталу на душу населення, а зростання випуску можливе лише за рахунок технологічного прогресу. Перехід до стаціонарного стану відбувається поступово, і його швидкість залежить від норми заощаджень, темпів приросту населення та ефективності використання ресурсів.

Розрахувати точку стаціонарного стану для моделі Солоу-Свана можна за формулою:

$$k^* = \left[\frac{sA}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (1.15)$$

Модель Солоу-Свана чітко демонструє роль заощаджень, демографії та технологій у довгостроковому зростанні, дозволяє пояснити різницю в рівнях доходу між країнами та формалізує процес наближення до стаціонарного стану. Її простота й аналітична прозорість роблять її зручною для використання як у теоретичних дослідженнях, так і в емпіричних перевірках гіпотез.

Основна критика стосується екзогенного характеру технологічного прогресу, що не пояснює його джерел, а лише вводить як зовнішній фактор. Модель ігнорує інституційні,

політичні та соціальні чинники, що можуть впливати на зростання, а також не враховує роль людського капіталу, структурних змін та нерівності в розподілі доходів.

Модель Рамсея-Касса-Купманса (*Ramsey-Cass-Koopmans model*). Історично модель (Рис. 3) постала як розвиток підходу Ф. Рамсея [13], який запропонував оптимізаційний опис міжчасового вибору споживання і заощаджень. У 1965 р. Д. Касс [14] та незалежно від нього Т. Купманс [15] модифікували й формалізували цей підхід у динамічну макроекономічну модель, інтегрувавши його з неокласичною моделлю Солоу-Свана. В результаті була створена теоретична конструкція, яка поєднала оптимізаційну поведінку репрезентативного економічного агента з довгостроковою динамікою зростання економіки.

Передумови моделі базуються на кількох ключових гіпотезах:

- Закрита економіка – відсутність зовнішньої торгівлі, капітальних потоків та імпорту/експорту товарів.
- Єдиний агрегований товар використовується як для споживання, так і для інвестицій.
- Репрезентативний економічний агент (домогосподарство) максимізує міжчасову корисність споживання протягом нескінченного горизонту часу.
- Функція корисності є зростаючою, увігнутою та задовольняє аксіоми міжчасової оптимізації; часто використовується форма з постійною відносною схильністю до ризику (CRRA).
- Досконала конкуренція на ринках праці та капіталу: ціни на фактори дорівнюють їх граничним продуктам.
- Домогосподарства володіють усіма факторами виробництва та отримують доходи у вигляді заробітної плати (за працю) та ренти (за капітал).
- Відсутність державного сектору – немає оподаткування, державних витрат чи регулювань.
- Технологічний прогрес екзогенний і зростає сталим темпом g .
- Приріст населення екзогенний і відбувається з постійним темпом n .

- Виробнича функція неокласичного типу з постійною віддачею від масштабу, диференційована, монотонна та зменшуваною граничною продуктивністю кожного фактора.
- Відсутність транзакційних витрат та зовнішніх ефектів у виробництві та споживанні.
- Раціональні очікування економічних агентів та повна передбачуваність економічного середовища.

Виробнича сторона моделі описується неокласичною виробничою функцією з постійною віддачею від масштабу, у формі Кобба-Дугласа, що аналогічна моделі Солоу (1.14).

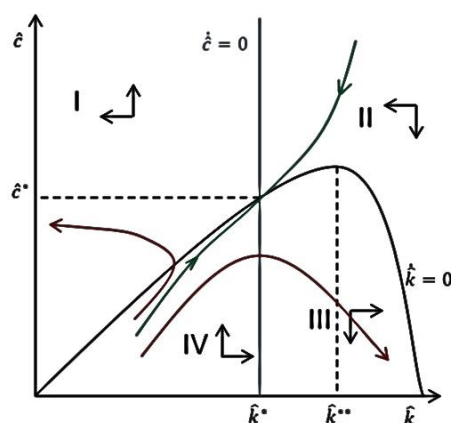


Рис. 1.3 Рівновага за моделлю Рамсея-Касса-Купманса.

Джерело: [13]

Загальна характеристика моделі полягає в описі траєкторії накопичення капіталу та споживання, що максимізує сумарну дисконтовану корисність домогосподарств. Розв'язок моделі визначається умовою рівноваги Ейлера, яка встановлює зв'язок між граничною корисністю споживання, реальною відсотковою ставкою та нормою міжчасових переваг (Рис. 1.3). На відміну від моделі Солоу, норма заощаджень тут є ендегенним результатом оптимізаційного вибору, що робить модель придатною для аналізу впливу змін у вподобаннях або демографічних параметрах на довгострокову економічну динаміку [13-15].

У межах моделі економічні агенти прагнуть до максимізації корисності від споживання блага, при цьому функція корисності має такий вигляд:

$$U = \int_0^{\infty} u(c) e^{-(\rho-n)t} dt, \quad (1.16)$$

де c – норма споживання на одиницю праці, або $c=C/L$,

ρ – коефіцієнт міжчасової переваги споживача.

Функція корисності $u(c)$ є сепарабельною, тобто поточна корисність залежить виключно від споживання в даному періоді, тоді як споживання в минулих чи майбутніх періодах на неї не впливає. За таких умов рівняння моделі Солоу набуває наступного вигляду.

$$k^* = Ak^{\alpha} - c - (d + n)k, \quad k_0 = k(t_0). \quad (1.17)$$

Модель Рамсея-Касса-Купманса передбачає конвергенцію економік із подібними параметрами та технологічним рівнем, але лише за близьких початкових умов і схожих міжчасових уподобань. Значні відмінності у капіталі чи технологіях можуть спричинити дивергенцію, коли розвинені країни зростають швидше, посилюючи розрив. Таким чином, модель пояснює як зближення, так і розходження темпів економічного розвитку.

Стаціонарний стан визначається рівновагою, за якої споживання й капітал на одного працівника зростають темпом екзогенного технологічного прогресу. У цій точці гранична норма міжчасової заміни дорівнює чистій ставці відсотка, що забезпечує оптимальну траєкторію зростання без стимулів до відхилення.

Перевагою моделі є включення міжчасового оптимального вибору, який ендогенно визначає норми заощаджень і споживання. Вона враховує вплив уподобань, демографії та технологій, формуючи більш реалістичну основу для аналізу політики й структури економіки. Модель також підтримує концепцію оптимального сталого зростання, важливу для довгострокового розвитку.

Серед обмежень – екзогенність технологічного прогресу, відсутність інституційних чинників, зовнішніх шоків і гетерогенності агентів. Вона не враховує роль інновацій та людського капіталу як рушіїв зростання, що зменшує її пояснювальну здатність у сучасних умовах.

Модель Даймонда-Самуельсона (*overlapping generations model*). Модель була запропонована П. Даймондом [100] і незалежно П. Самуельсоном [101], є розвитком

теорії економічного зростання з урахуванням демографічної структури населення через концепцію перекриваючих поколінь (Overlapping Generations Model, OLG). Цей підхід розширює класичні неокласичні моделі, шляхом введення часової обмеженості життя економічних агентів і їх взаємодії у різних поколіннях, що дозволяє більш реалістично моделювати процес накопичення капіталу, заощадження та вплив демографічних змін на макроекономічну динаміку.

Передумови моделі базуються на наступному:

- Населення складається з нескінченної послідовності поколінь, кожне з яких живе два періоди: молодість і старість.
- Молоде покоління працює, отримує доходи, споживає частину доходу та заощаджує для забезпечення споживання у старості.
- Старше покоління не працює і споживає за рахунок накопичених заощаджень, інвестованих у капітал.
- Відсутність альтруїзму між поколіннями: кожне покоління відповідає за своє споживання та заощадження без міжпоколінного трансферту.
- Відсутність ринку страхування старості, що змушує економічних агентів самотійно планувати накопичення.
- Економіка є замкнутою (без зовнішньої торгівлі і державного сектора).
- Технологічний прогрес є екзогенним та зростає сталим темпом.
- Приріст населення є екзогенним і сталим.
- Досконала конкуренція на ринках праці та капіталу, де ціни факторів виробництва дорівнюють їх граничній продуктивності.
- Виробнича функція неокласичного типу з постійною віддачею від масштабу, диференційована і монотонна.
- Раціональна поведінка економічних агентів з повною інформацією про економічні умови.
- Відсутність транзакційних витрат і зовнішніх ефектів у виробництві та споживанні.

Виробнича функція у моделі Даймонда-Самуельсона зазвичай задається класичною неокласичною формою у вигляді функції Кобба-Дугласа (1.12). Загальна характеристика моделі полягає в тому, що вона ілюструє важливість демографічної структури у визначенні динаміки економічного зростання і накопичення капіталу. Модель показує можливість існування множини стаціонарних станів, а також нестабільних динамічних траєкторій, які не завжди ведуть до оптимального рівня капіталоозброєності (Рис. 1.4). Вона також відкриває шлях до аналізу проблем міжпоколінних перерозподілів, ролі пенсійних систем і впливу демографічних змін на макроекономічну стабільність.

Динамічне рівняння моделі можна записати як:

$$k = \frac{s}{(1+n)(1+g)} (1-\alpha) A k_{-1}^{\alpha}, \quad (1.18)$$

де s – норма накопичення, яка знаходиться за формулою:

$$s = \frac{(1-r)^{(1-\theta)/\theta}}{(1-\rho)^{1/\theta}(1+r)^{(1-\theta)/\theta}}, \quad (1.19)$$

де θ – еластичність споживання від часу,

ρ – швидкість дисконтування споживання,

r – ринкова відсоткова ставка.

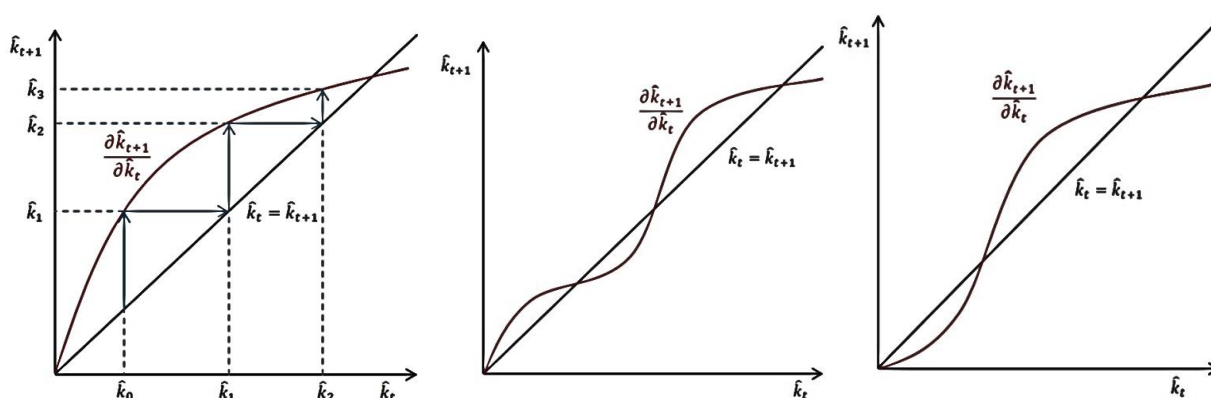


Рис. 1.4 Рівновага за моделлю Даймонда-Самуельсона.

Джерело: [100-101]

Модель Даймонда-Самуельсона передбачає конвергенцію економік лише за схожих початкових запасів капіталу та демографічних параметрів. За значних відмінностей можливе виникнення дивергенції, коли бідні економіки потрапляють у «пастку низького

зростання», а розвинені – продовжують випереджати. Це підкреслює роль міжпоколінних заощаджень і демографічних чинників у формуванні динаміки розвитку.

Стаціонарний стан характеризується стабільним рівнем капіталу на одного працівника, за якого економіка зростає темпом екзогенного технологічного прогресу. У цьому стані інвестиції молодих поколінь компенсують амортизацію та демографічне оновлення. Рівновага може бути стабільною або нестабільною, що відображає складність міжпоколінних взаємодій.

Перевагою моделі є урахування вікової структури населення та обмеженої тривалості життя, що робить її аналіз реалістичнішим. Вона дозволяє досліджувати пенсійні системи, міжпоколінні перерозподіли й вплив демографічних трендів, а також демонструє можливість множинних рівноваг і перехідних динамік.

Недоліками є екзогенність технологічного прогресу й демографії, гомогенність агентів і відсутність держави чи зовнішньої торгівлі. Крім того, припущення про двоперіодне життя створює дискретну динаміку, що спотворює коротко- та середньострокові процеси накопичення капіталу й споживання.

Модель Менк'ю-Ромера-Вейла (Mankiw-Romer-Weil) була запропонована у 1992 році як розширення неокласичної моделі Солоу-Свана. Її автори – Г. Менк'ю, Д. Ромер і Д. Вейл [102] – поставили за мету усунути емпіричні обмеження базової моделі, зокрема невідповідність між передбаченими та фактичними темпами зближення (конвергенції) доходів на душу населення у країнах з різним рівнем розвитку (Рис. 1.5). Використовуючи дані міжнародних порівнянь, вони показали, що включення людського капіталу як окремого фактора виробництва дозволяє значно підвищити пояснювальну силу моделі.

Передумови моделі Менк'ю-Ромера-Вейла у стислому викладі наступні:

- Закрита економіка – відсутність зовнішньої торгівлі та міжнародного руху капіталу.
- Два види капіталу – фізичний та людський, що нагромаджуються окремо через відповідні норми заощаджень.
- Екзогенний технологічний прогрес – рівень технології $A(t)$ зростає з фіксованим темпом g .

- Постійна віддача від масштабу за сукупними факторами виробництва (фізичний капітал, людський капітал, ефективна праця).
- Зменшувана гранична віддача кожного фактора окремо, але не сукупності факторів.
- Постійні норми заощаджень для фізичного (s_k) і людського (s_h) капіталу.
- Однакова швидкість вибуття (деградації) фізичного та людського капіталу d .
- Постійний темп зростання населення n .
- Повна зайнятість ресурсів – увесь фізичний та людський капітал використовується у виробництві.
- Відсутність урядового сектора та податків, що спрощує модель.
- Однакова технологія для всіх країн, відмінності у доході пояснюються різними нормами заощаджень та початковими умовами.

Модель Менк'ю-Ромера-Вейла (Рис. 1.5) фактично являє собою розширення моделі Солоу шляхом включення людського капіталу (H) як окремого фактора виробництва. У результаті виробнича функція набула такого вигляду:

$$Y = AK^\alpha H^\beta L^{1-\alpha-\beta}. \quad (1.20)$$

Загалом, модель Менк'ю-Ромера-Вейла є логічним кроком від класичної неокласичної теорії до врахування якісних характеристик виробничих факторів. Вона демонструє, що довгострокові темпи економічного зростання визначаються не лише обсягами накопиченого фізичного капіталу та технологічним прогресом, але й інтенсивністю та ефективністю інвестицій у людський капітал. Це робить модель більш адекватною для аналізу реальних відмінностей між країнами, особливо у контексті порівнянь розвинених та країн, що розвиваються.

Сама динамічна модель має вигляд системи рівнянь:

$$\begin{aligned} k^* &= s_k A k^\alpha h^\beta - (d + n)k, & k_0 &= k(t_0), \\ h^* &= s_h A k^\alpha h^\beta - (d + n)h, & h_0 &= h(t_0), \end{aligned} \quad (1.21)$$

де s_k – норма накопичення фізичного капіталу,

s_h – норма накопичення людського капіталу,

h – людський капітал на одиницю праці.

У межах моделі Менк'ю-Ромера-Вейла конвергенція є умовною: країни з подібними нормами заощаджень, темпами зростання населення й технологічного прогресу поступово зближуються за рівнем доходу на душу населення, незалежно від початкових умов. Водночас відмінності у нагромадженні фізичного та людського капіталу спричиняють стійку дивергенцію між країнами з різними інвестиційними стратегіями, що пояснює значну частину глобальних відмінностей у рівнях доходів.

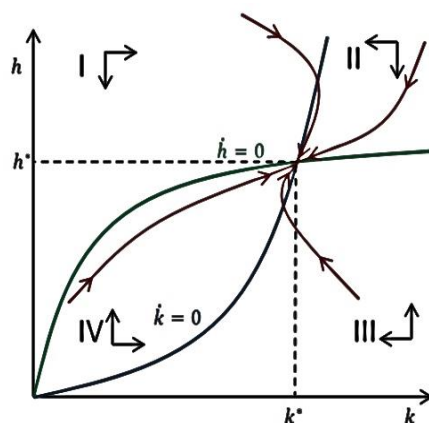


Рис. 1.5 Модель Менк'ю-Ромера-Вейла у фазовій площині.

Джерело: [102]

Стаціонарний стан у моделі визначається як такий рівень нагромадження фізичного та людського капіталу, за якого темпи зростання виробництва на ефективного працівника дорівнюють нулю, а економіка зростає лише за рахунок екзогенного технологічного прогресу та приросту населення. У цьому стані співвідношення між факторами залишається сталим, а відхилення від нього з часом зменшуються через дію механізмів умовної конвергенції.

Стаціонарний стан для капіталомісткості виробництва у моделі можна знайти як:

$$k^* = \left[\left(\frac{s_k}{s_h} \right)^\beta \frac{s_k A}{d + n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \quad (1.22)$$

а для запасів людського капіталу на одиницю праці:

$$h^* = \left[\left(\frac{s_h}{s_k} \right)^\alpha \frac{s_h A}{d + n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \quad (1.23)$$

Серед переваг моделі слід відзначити її здатність емпірично пояснювати міждержавні відмінності у рівнях доходу значно краще, ніж базова модель Солоу,

завдяки введенню людського капіталу. Вона також надає теоретичне підґрунтя для обґрунтування політики інвестицій в освіту та розвиток навичок як ключових чинників довгострокового зростання.

До недоліків належить збереження припущення про екзогенність технологічного прогресу, що обмежує пояснювальну силу моделі у довгостроковій перспективі. Також модель не враховує впливу інституцій, зовнішньої торгівлі та міжнародного руху капіталу, що знижує її придатність для аналізу відкритих економік.

Модель Удзави-Лукаса (*Uzawa-Lucas model*) (Рис. 1.6) сформувалася у межах ендогенної теорії зростання як розвиток ідей накопичення людського капіталу, закладених у працях Х. Удзави [17] та пізніше вдосконалених Р. Лукасом [16]. Лукасу вдалося інтегрувати у формалізм ендогенного зростання механізм безперервного вдосконалення кваліфікаційних характеристик робочої сили через інвестиції в освіту та навчання.

Загалом передумови моделі Удзави-Лукаса можна сформулювати так:

- Два сектори економіки – сектор виробництва товарів та сектор нагромадження людського капіталу.
- Розподіл робочого часу: частка u використовується для виробництва, а $1-u$ – для навчання та підвищення кваліфікації.
- Постійна віддача від масштабу за сукупними факторами виробництва.
- Відсутність зменшуваної граничної віддачі від людського капіталу на макрорівні.
- Ендогенне зростання – технологічний прогрес не задається зовні, а виникає як результат накопичення людського капіталу.
- Еластичність випуску за фізичним капіталом менша за одиницю ($0 < \alpha < 1$).
- Людський капітал зростає пропорційно часу, витраченому на навчання та поточному рівню H .
- Постійний темп приросту населення n .
- Постійна норма амортизації фізичного та людського капіталу d .
- Повна зайнятість – усі наявні ресурси праці, фізичного та людського капіталу використовуються максимально.

- Закрита економіка – відсутність міжнародної торгівлі та руху капіталу.
- Раціональні очікування економічних агентів і максимізація міжчасової корисності за нескінченного горизонту планування.

Виробнича функція у моделі Лукаса зазвичай має вигляд:

$$Y = K^{\alpha} [uhL]^{\beta} h_{at}^{\delta}, \quad (1.24)$$

де u – частка витрат праці на людський капітал;

H – запас людського капіталу;

h_{at} – середній рівень людського капіталу в економіці на період часу t .

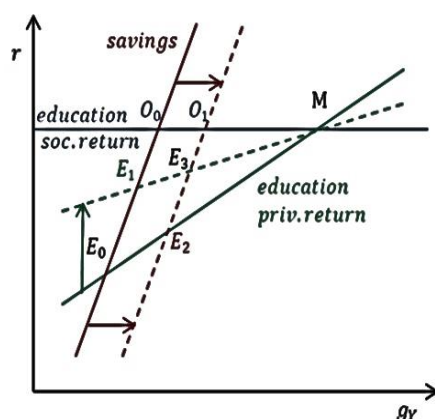


Рис. 1.6 Рівновага за моделлю Удзави-Лукаса.

Джерело: [16-17]

Основне рівняння моделі:

$$\begin{aligned} k^* &= sk^{\alpha} h^{1-\alpha+\delta} u^{1-\alpha} - nk, \quad k_0 = k(t_0), \\ h^* &= \phi h(1-u), \quad h_0 = h(t_0), \end{aligned} \quad (1.25)$$

де ϕ – ефективність навчання.

У моделі Удзави-Лукаса конвергенція є умовною: країни з однаковими параметрами – нормами амортизації, темпами приросту населення, еластичністю виробництва та ефективністю освіти – зближуються за рівнем доходу, навіть за різних початкових умов. Натомість відмінності в інвестиціях у людський капітал зумовлюють сталу дивергенцію, що формує довготривалі розриви у продуктивності та темпах зростання.

Стаціонарний стан характеризується сталим темпом зростання фізичного й людського капіталу та стабільним співвідношенням між ними. Економіка може

підтримувати стійке зростання навіть без екзогенного технологічного прогресу, оскільки накопичення людського капіталу саме генерує підвищення продуктивності.

Перевагами моделі є те, що вона ендогенізує джерела зростання, показуючи роль освіти та професійного навчання як ключових чинників довготривалого розвитку. Вона дозволяє пояснити, чому країни з високими інвестиціями у людський капітал демонструють стійкі темпи зростання, та дає аналітичні підстави для економічної політики, орієнтованої на підвищення якості трудових ресурсів.

Недоліками моделі є спрощеність припущень – зокрема, ігнорування інституційних факторів, зовнішньої торгівлі та міжнародної міграції, а також припущення про однакову ефективність освіти для всіх економічних агентів. Крім того, модель не враховує можливі зворотні зв'язки між економічним зростанням і структурними змінами у ринку праці.

Модель Ерроу-Ромера (*learning-by-doing model*) поєднує ідеї, висунуті Кеннетом Ерроу про «навчання через діяльність» (*learning by doing*) [103], з подальшими розробками П. Ромера [104], спрямованими на формалізацію ендогенного технологічного прогресу. Ерроу підкреслював, що накопичення досвіду у процесі виробництва підвищує продуктивність праці та капіталу, а Ромер інтегрував цей підхід у модель ендогенного зростання, де технологічні знання зростають пропорційно масштабам економічної діяльності.

Передумови моделі Ерроу-Ромера базуються на концепції зовнішніх ефектів, що виникають у процесі накопичення фізичного капіталу:

- Наявність зовнішніх ефектів знань – накопичення фізичного капіталу створює позитивні впливи на загальну продуктивність економіки.
- Конкурентна структура ринку – окремі фірми не враховують вплив власних інвестицій на технологічний прогрес.
- Ендогенний рівень технології – технологічний прогрес зростає пропорційно загальному обсягу капіталу в економіці.
- Зменшувана гранична віддача від капіталу на рівні фірми, але постійна або зростаюча віддача на макrorівні через зовнішні ефекти.

- Закрита економіка – відсутність зовнішньої торгівлі та міжнародного руху капіталу.
- Постійний темп зростання населення n .
- Постійна норма амортизації капіталу d .
- Повна зайнятість ресурсів – усі фактори виробництва максимально використовуються.
- Відсутність державного сектора – без податків та державних інвестицій.
- Раціональні очікування агентів та максимізація міжчасової корисності.

Виробнича функція в агрегованому вигляді має модифіковану форму Кобба–Дугласа з ефектом знань:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, A = BK^{\phi} \quad (1.26)$$

де B – ефективність капіталу в генеруванні знань,

ϕ - еластичність капіталу в генеруванні знань.

Основне рівняння моделі приймає вигляд:

$$K^{\bullet} = sB^{1-\alpha}K^{\alpha+\phi(1-\alpha)}L^{1-\alpha} - dK, \quad K_0 = K(t_0). \quad (1.27)$$

Модель Ерроу-Ромера показує, що економічне зростання може підтримуватися безперервно завдяки позитивним зовнішнім ефектам від накопичення знань у виробництві. Вона стала однією з перших формалізованих моделей ендогенного технологічного прогресу, де інновації, навчання й інвестиції у знання виступають внутрішніми рушіями розвитку.

Конвергенція у моделі є умовною й залежить від спільності таких параметрів, як норми заощаджень, темпи приросту населення та ефективність капіталу. Через зовнішні ефекти накопичення капіталу країни з різною інтенсивністю інвестицій демонструють стійку дивергенцію продуктивності та доходів, що пояснює розриви між розвиненими й тими, що розвиваються.

Стаціонарний стан характеризується сталим темпом зростання, підтримуваним ендогенним технологічним прогресом, зумовленим накопиченням капіталу. Продуктивність праці зростає завдяки поширенню знань, що дозволяє уникнути обмежень неокласичної теорії зі спадною віддачею.

Перевага моделі полягає у поясненні стійкого зростання без екзогенного прогресу та у висвітленні ролі знань і масштабів виробництва як ключових факторів розвитку.

До недоліків належать припущення про закриту економіку, відсутність державного сектора й інституційних чинників, а також надмірна залежність зростання від розміру трудових ресурсів. Це передбачає швидше зростання великих економік, що не підтверджується емпірично, тому модель потребує врахування різного ступеня поширення знань між країнами.

Модель Ребело (AK model). Спрощена модель Ребело [105] виникла як розвиток ендогенної теорії економічного зростання і є варіацією моделі Лукаса, спрямованою на аналіз ролі капіталу у забезпеченні сталого зростання без необхідності екзогенного технологічного прогресу. С. Ребело у своїх роботах показав, що за умови лінійної виробничої функції з відсутністю зменшуваної граничної віддачі від капіталу можливо досягти стабільного економічного зростання лише за рахунок нагромадження капіталу.

Важливим кроком у напрямку ендогенності стало розширене розуміння капіталу, яке охоплює не лише фізичний капітал, але й людський капітал – сукупність знань, умінь і навичок, що застосовуються для задоволення різноманітних потреб як окремої особи, так і суспільства в цілому. Іншими передумовами стали:

- Закрита економіка без зовнішньої торгівлі та руху капіталу.
- Постійний темп зростання населення.
- Повна зайнятість ресурсів – всі фактори виробництва максимально використовуються.
- Раціональна поведінка економічних агентів із максимізацією міжчасової корисності.
- Відсутність або нейтральний вплив амортизації капіталу.
- Виробнича функція є лінійною за капіталом, що забезпечує постійну граничну віддачу від нього.
- Відсутність людського капіталу як окремого фактора у моделі.
- Відсутність екзогенного технологічного прогресу або його ігнорування.
- Ігнорування інституційних, соціальних та зовнішніх економічних факторів.

Спрощена модель є односекторною, виробнича функція набуває вигляду:

$$Y = AK. \quad (1.28)$$

Така лінійна форма гарантує, що приріст капіталу прямо пропорційний приросту виробництва, що сприяє сталому зростанню.

Функція корисності зазнала деяких змін у порівнянні з моделлю Рамсея-Касса-Купманса:

$$U = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-(\rho-n)t} dt, \quad (1.29)$$

де c – споживання на одного працівника,

$\rho > 0$ – норма міжчасових переваг (дисконтний коефіцієнт),

$\theta > 0$ – коефіцієнт відносної міжчасової еластичності заміщення.

Така специфікація належить до класу функцій CRRA (Constant Relative Risk Aversion) і забезпечує аналітичну зручність, оскільки дозволяє отримати замкнені формули для рівноважних траєкторій зростання. Вона також відображає припущення, що економічні агенти прагнуть максимізувати зважену суму корисності від споживання протягом нескінченного горизонту часу, балансуючи короткострокове споживання та довгострокове зростання через інвестиції в людський капітал.

У такому випадку основне рівняння моделі набуло вигляду:

$$k^* = sAk - (d + n)k, \quad k_0 = k(t_0), \quad (1.30)$$

а норма накопичення розраховується за формулою:

$$s = \sigma + \frac{(d + n) - \sigma(d + \rho)}{A}, \quad (1.31)$$

де σ – постійна ставка заміщення.

З виразу (1.30) існує пряма залежність між постійною ставкою заміщення (еластичністю заміщення одного фактора іншим) та нормою заощадження: при високій ставці заміщення заміна одного фактора виробництва іншим відбувається легко, тобто капітал може ефективно замінювати працю, що призводить до швидшого зростання капіталомісткості виробництва.

Спрощена модель Ребело показує можливість сталого розвитку без зовнішніх технологічних шоків, завдяки внутрішнім механізмам накопичення капіталу. Водночас її спрощеність обмежує здатність пояснювати складні процеси, пов'язані з інноваціями, людським капіталом і інституційними факторами.

Конвергенція у моделі є обмеженою та залежить від норми заощаджень і властивостей виробничої функції. Через лінійність функції з постійною граничною віддачею великі економіки можуть зростати швидше, що спричиняє дивергенцію доходів, хоча за однакових параметрів можлива умовна конвергенція.

Стаціонарний стан характеризується сталим темпом зростання виробництва, визначеним нормою нагромадження та продуктивністю капіталу. Відсутність спадної віддачі забезпечує неперервне зростання, що відрізняє модель від неокласичної парадигми.

Переваги моделі полягають у простоті та здатності пояснити стійке ендогенне зростання без екзогенного технологічного прогресу, а також у наголошенні на ролі капіталу як рушія розвитку. Недоліки – ігнорування людського капіталу, інновацій і ресурсних обмежень, що робить результати надто оптимістичними для великих економік.

Оригінальна модель Ребело була запропонована С. Ребело [105] як важливе розширення ендогенної теорії зростання, спрямоване на подолання обмежень класичної моделі Солоу. Ребело акцентував увагу на можливості сталого економічного зростання за рахунок нагромадження капіталу навіть у відсутності екзогенного технологічного прогресу, пропонуючи модель із лінійною виробничою функцією, яка має постійну граничну віддачу від капіталу.

Передумови оригінальної моделі Ребело відрізняються від спрощеної версії тим, що вона передбачає існування не лише постійної граничної віддачі від капіталу, але й враховує динаміку накопичення капіталу в умовах оптимальної поведінки агентів, які максимізують міжчасову корисність. На відміну від спрощеної моделі, оригінальна версія допускає більш гнучку структуру функції заощаджень і інвестицій, а також передбачає, що темпи зростання залежать від рішення агентів, що забезпечує більш реалістичний опис динаміки економіки. Як і спрощена модель, оригінальна також

передбачає закриту економіку, повну зайнятість ресурсів, сталий приріст населення і решту передумов.

Оригінальна модель є двосекторною: сектор споживання та сектор інвестицій. Сектор споживання має виробничу функція Кобба-Дугласа вигляду:

$$C = BK_C^\alpha L^\beta, \quad (1.32)$$

а сектор інвестицій має виробничу функцію вигляду:

$$I = AK_S, \quad (1.33)$$

де A та B – технологічні параметри,

K_C та K_S – капітал у споживчому та інвестиційному секторах відповідно.

Для оригінальної моделі основне рівняння формується за схожим принципом, як і в спрощеній версії:

$$k^\bullet = s(Bk_C^\alpha + Ak_S) - (d + n)k, \quad k_0 = k(t_0). \quad (1.34)$$

У оригінальній моделі Ребело конвергенція чи дивергенція доходів між країнами залежить від оптимальних рішень агентів щодо заощаджень і інвестицій, що відрізняє її від спрощеної версії, де норма заощаджень є екзогенною і стала. Завдяки ендогенній нормі заощаджень, моделі властива більша гнучкість у поясненні різних траєкторій економічного розвитку, включно зі стійкою дивергенцією через відмінності в поведінці економічних агентів і параметрах економік. Це дозволяє моделі враховувати вплив політичних, інституційних та соціальних чинників на темпи зростання.

В оригінальній моделі Ребело стаціонарний стан визначається рівновагою між накопиченням капіталу та оптимальним розподілом ресурсів, де темп зростання є ендогенним і формується через взаємодію економічних агентів. На відміну від спрощеної версії, зростання тут залежить не лише від параметрів виробничої функції, а й від політики заощаджень та інвестицій, що забезпечує більш реалістичну динаміку економіки.

Перевагою моделі є простота й відсутність складної перехідної динаміки, що робить її зручною для аналітичного аналізу сталого зростання. Водночас поняття «капітал» охоплює широкий спектр – від фізичного й людського до інноваційного, що ускладнює точне розмежування чинників розвитку та знижує деталізацію моделювання.

Серед недоліків – відсутність явного технологічного прогресу й опису цілеспрямованої поведінки агентів щодо інновацій, що обмежує застосування моделі у сучасних економіках, де технологічні зміни є ключовими драйверами зростання. Це знижує її емпіричну адекватність і підкреслює потребу подальшого теоретичного вдосконалення.

Виробнича функція Діксіта-Штігліца була запропонована А. Діксітом і Д. Штігліцем [106] в межах дослідження проблеми оптимального рівня диверсифікації продуктів у присутності монополістичної конкуренції. Її поява була зумовлена необхідністю формалізації впливу різноманіття товарів і послуг на добробут споживачів та ефективність виробництва, що не могло бути адекватно описано класичними виробничими функціями з однорідною продукцією.

Загалом виробнича функція Діксіта-Штігліца описує агрегування великої кількості диференційованих товарів в єдиний індекс випуску з використанням постійної еластичності заміщення (CES). Вона виходить з припущення, що споживачі або виробники надають перевагу різноманіттю та готові заміщувати один різновид продукції іншим, але в обмежених межах. Ключовим параметром моделі є еластичність заміщення, яка визначає ступінь взаємозамінності між різновидами товарів.

Виробнича функція Діксіта-Штігліца має вигляд:

$$Y = AL^{1-\alpha} \int_0^N x_j^\alpha dj = AL^{1-\alpha} (N\bar{X})^\alpha N^{1-\alpha} \quad (1.35)$$

де x – об'єм проміжного продукту j ,

N – загальна кількість проміжних продуктів,

$\bar{X}$ – середній обсяг проміжного продукту.

При моделюванні, зазвичай, використовується спрощена степенева форма виробничої функції. Серед переваг моделі слід відзначити її універсальність, аналітичну зручність та здатність враховувати як кількісний, так і якісний аспект економічного розвитку. Вона забезпечує можливість формалізації ефекту зростання добробуту за рахунок розширення асортименту продукції, а також є придатною для побудови моделей міжнародної торгівлі, інновацій та економічного зростання.

Водночас модель має низку недоліків, серед яких – припущення про однаковість фірм та симетричність різновидів товарів, що спрощує реальні ринкові процеси. Також еластичність заміщення у функції вважається сталою, що обмежує можливість адекватного опису змін споживчих уподобань або технологічних зрушень у динаміці.

Модель Пола Ромера (*product variety model*) [5-6] – одна з ключових розробок ендогенної теорії економічного зростання, що стала вагомим альтернативним неокласичним підходом, зокрема моделі Солоу-Свана. Ромер запропонував теоретичну конструкцію, у якій інновації та накопичення знань формуються всередині економіки внаслідок цілеспрямованої дослідницької діяльності.

Передумови моделі Пола Ромера можна узагальнити таким чином:

- Знання як фактор виробництва — вони мають властивості невиключності (неможливість обмежити доступ до вже створених ідей) та невичерпності (їх використання одним агентом не зменшує можливості використання іншими).
- Зростаюча віддача від масштабу у сфері знань – поєднання наявних ідей створює умови для появи нових, що забезпечує прискорення технологічного прогресу.
- Поділ економіки на два сектори – виробничий (створює товари та послуги) і дослідницький (створює нові знання та технології).
- Ендогенний характер технологічного прогресу – темпи зростання технологій визначаються внутрішніми економічними механізмами, насамперед обсягами ресурсів, спрямованих на R&D.
- Позитивний зворотний зв'язок між секторами – інновації підвищують продуктивність виробництва, а зростання випуску забезпечує ресурси для нових досліджень.
- Людський капітал як ключовий ресурс дослідницької діяльності – рівень освіти та кваліфікації визначає ефективність створення нових ідей.
- Міжнародна дифузія знань – створені інновації можуть поширюватися за межі національної економіки, стимулюючи глобальний прогрес.

- Наявність недосконалої конкуренції – створювачі нових технологій мають тимчасову монопольну ренту завдяки патентному захисту чи унікальності продукту.

Модель Пола Ромера, як виробничу функцію використовує рівняння Діксіта-Штігліца (1.35).

Основне рівняння моделі приймає вигляд:

$$K^* = K^\alpha A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} - C, \quad K_0 = K(t_0), \quad (1.36)$$

а темпи зростання основних макроекономічних показників можна знайти з формули:

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\pi}{\mu} - p \right), \quad (1.37)$$

де π – прибуток фірми,

μ – витрати сектору R&D,

p – вартість промислової продукції,

$\theta > 0$ – еластичність споживання з часом.

Модель Пола Ромера формалізує ідею, що довгострокове економічне зростання зумовлене накопиченням знань та інновацій, а головним механізмом його підтримання є взаємодія між виробництвом і науковими дослідженнями. Вона пояснила стійке зростання без екзогенних факторів і заклала основу для політики, спрямованої на розвиток R&D, людського капіталу та інноваційних інституцій.

У моделі не відбувається традиційна конвергенція, адже темпи зростання визначаються внутрішніми чинниками — інвестиціями в дослідження, знання та людський капітал. Тому країни з потужнішою інноваційною базою демонструють вищі темпи розвитку, що спричиняє дивергенцію рівнів добробуту.

Стаціонарний стан характеризується стабільними темпами зростання випуску на душу населення, підтримуваними безперервним приростом технологічного рівня. Для цього необхідна сталість частки ресурсів, спрямованих на R&D, оскільки саме діяльність дослідницького сектора забезпечує постійне підвищення продуктивності.

Переваги моделі: ендогенізація технологічного прогресу, пояснення тривалого зростання без зовнішніх чинників, інтеграція ролі інновацій і людського капіталу, а також

чіткі рекомендації для економічної політики. Серед недоліків: припущення про постійну віддачу від факторів виробництва та зростаючу у сфері знань, що переоцінює потенціал безперервного зростання. Модель ігнорує обмеження фінансування R&D, інституційні бар'єри, міжнародний трансфер технологій і залежність темпів зростання від трудових ресурсів, що знижує її емпіричну адекватність.

Відсутність урахування якості продукції долається у моделі її якісного вдосконалення, яка за своєю структурою майже повністю збігається з результатами Пола Ромера, але доповнена коефіцієнтом якості q . Основне рівняння при цьому набуває вигляду:

$$K^* = K^\alpha A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} q^\alpha - C, \quad K_0 = K(t_0). \quad (1.38)$$

Модель Мартіна-Барро (technology diffusion model) була розроблена Робертом Барро та Хав'єром Сала-і-Мартіном [18] наприкінці 1990-х років як розвиток ендогенних моделей економічного зростання. Вона поєднує ідеї створення технологій у країнах-лідерах та їх поширення серед країн-послідовників, забезпечуючи теоретичне пояснення умов конвергенції і дивергенції економік на різних стадіях розвитку. Основна мета моделі – показати, як дифузія технологій впливає на темпи економічного зростання та відставання між країнами (Рис. 1.7).

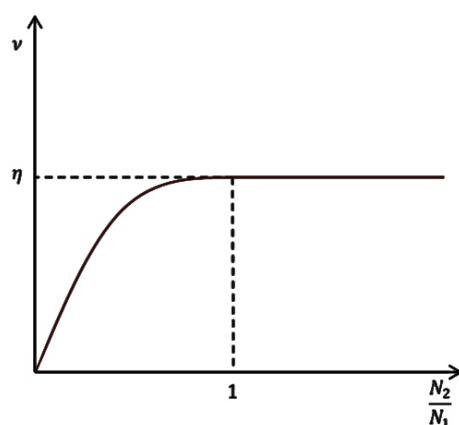


Рис. 1.7 Функція витрат на імітацію продукту.

Джерело: [18]

Передумови моделі Пола Мартіна-Барро (technology diffusion model) можна сформулювати наступним чином:

- Поділ економік на дві групи – країни-лідери, які створюють нові технології, та країни-послідовники, що можуть копіювати або адаптувати існуючі технології.

- Імітація дешевша за інновації – для країн-послідовників копіювання технологій дешевше, ніж розробка власних, що стимулює швидке скорочення технологічного відставання.
- Зростання витрат на копіювання з часом – із підвищенням власного технологічного рівня країни-послідовники стикаються зі збільшенням витрат на впровадження нових технологій, що створює ефект зменшеної віддачі.
- Три сектори в економіці – сектор кінцевих продуктів (конкурентний), сектор проміжних товарів (монополістична конкуренція) та R&D сектор (створення патентів і нових технологій).
- Роль технологічної дифузії – економічне зростання країни залежить не лише від власних інновацій, а й від імплементації технологій лідерів.
- Лімітовані ресурси на інновації – країни мають обмежені ресурси, які можуть бути спрямовані на створення власних технологій або на копіювання чужих.
- Взаємозв'язок між кількістю технологій і виробництвом – випуск продукції залежить від наявної кількості проміжних товарів та технологічного рівня країни.

Модель Мартіна-Барро застосовує виробничу функцію у формі рівняння Діксіта-Штігліца (1.35). Основне рівняння моделі має вигляд:

$$K^* = K^\alpha A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} - C, \quad K_0 = K(t_0). \quad (1.39)$$

Відповідно до моделі, економіки класифікуються як країни-лідери та країни-послідовники. Для лідерів модель повністю збігається з підходом Пола Ромера, тоді як для послідовників темпи зростання ключових макроекономічних показників визначаються за формулою:

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\pi}{v} + \frac{v^*}{v} - p \right), \quad (1.40)$$

де $v = \frac{N_2}{N_1}$ – витрати на копіювання технологій.

Ці витрати, як правило, нижчі за витрати на повноцінну розробку, тому країни-послідовники мають потенціал для швидшого економічного зростання. Водночас темпи їхнього зростання поступово знижуються в міру наближення до рівня розвитку країн-лідерів.

Модель описує умовну конвергенцію, за якої країни-послідовники зростають швидше за лідерів, поки технологічний розрив великий і витрати на копіювання низькі. У довгостроковій перспективі темпи зростання вирівнюються з темпом технологічного прогресу лідерів, а зменшувана віддача копіювання обмежує повну конвергенцію. Модель підкреслює роль технологічної дифузії та інституційної спроможності у досягненні сталого розвитку й пояснює відмінності у траєкторіях країн із різним рівнем інноваційної активності.

Стаціонарний стан досягається, коли витрати на копіювання технологій зростають, а можливості швидкого скорочення технологічного розриву вичерпуються, після чого темпи зростання збігаються з темпом технологічного прогресу лідерів.

До переваг моделі належать урахування механізму технологічної дифузії, пояснення умовної конвергенції та відмінностей у темпах зростання з огляду на інституційні й технологічні фактори. Вона також поєднує ендогенний прогрес із впливом зовнішніх знань, створюючи основу для аналізу політики підтримки технологічного трансферу.

Серед недоліків – спрощене поділення країн на лідерів і послідовників, ігнорування внутрішніх відмінностей технологічного розвитку та соціально-економічних бар'єрів, а також неврахування можливих негативних ефектів від швидкого впровадження технологій.

Модель Агійона-Хоувіта (quality ladder model) [20] була запропонована як розвиток ендогенних моделей економічного зростання, зокрема для пояснення ролі інновацій та «заміни старих технологій новими». Основна мета моделі – формалізувати механізм ендогенного технологічного прогресу через інновації, які витісняють застарілі технології, та показати, як цей процес впливає на довгострокове економічне зростання.

Загалом, передумови моделі Агійона-Хоувіта можна сформулювати наступним чином:

- Творче знищення – економічне зростання відбувається через заміну старих технологій новими інноваційними рішеннями, які забезпечують тимчасову монопольну ренту винахіднику.

- Ендогенність технологічного прогресу – темпи зростання продуктивності визначаються внутрішніми економічними механізмами, зокрема обсягом ресурсів, спрямованих на дослідження та розробки (R&D).
- Нерівномірний ефект інновацій – лише значні технологічні прориви суттєво впливають на темпи економічного зростання, дрібні вдосконалення не відіграють ключової ролі.
- Конкуренція між фірмами – нові технології витісняють старі, а їх впровадження залежить від ринкових можливостей та інституційних умов.
- Стимули для інновацій – наявність економічних вигод і монопольної ренти стимулює фірми та винахідників вкладати ресурси у розробку нових технологій.
- Монополістична конкуренція у проміжних товарах – виробничі функції враховують різноманітність проміжних товарів, і ефективність виробництва зростає зі впровадженням нових технологій.

Модель Агійона-Хоувіта демонструє, що довгострокове економічне зростання визначається швидкістю інновацій та ефективністю ринку у впровадженні нових технологій. Вона поєднує елементи монополістичної конкуренції та творчого знищення, підкреслюючи роль інституцій, прав власності та стимулів для R&D. Модель пояснює, чому інноваційно активні країни зростають швидше, а економіки з низьким рівнем стимулів до інновацій ризикують відставати, і стала важливою основою для сучасних досліджень ендогенного зростання.

Модель акцентує увагу на постійній та поступовій заміні старих товарів новими. Під час впровадження нових технологій старі продукти витісняються, тому життєвий цикл інновацій обмежений, а монопольна влада, що виникає після створення нового продукту, носить тимчасовий характер. Математично це відображається у тому, що функція корисності споживача приймає наступну форму:

$$U = \int_0^{\infty} y_{\tau} e^{-r\tau} d\tau, \quad (1.41)$$

де r – норма міжчасової переваги споживача, яка рівна відсотковій ставці.

У моделі функція корисності споживача обрана таким чином, щоб міжчасові переваги мали лінійний характер. Виробнича функція представлена функцією Діксіта-Штігліца (1.34) з умовою лінійності коефіцієнта A , а кількість проміжних продуктів N є сталою. Основне рівняння моделі відповідає виразу:

$$K^* = K^\alpha A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} q^\alpha - C, \quad K_0 = K(t_0). \quad (1.42)$$

Загальним недоліком цих моделей є те, що темпи зростання залежать від масштабів економіки. У цьому випадку йдеться про вплив чисельності кваліфікованих працівників на підвищення якості продукції: чим більше таких фахівців задіяно в економіці, тим швидше відбувається економічне зростання.

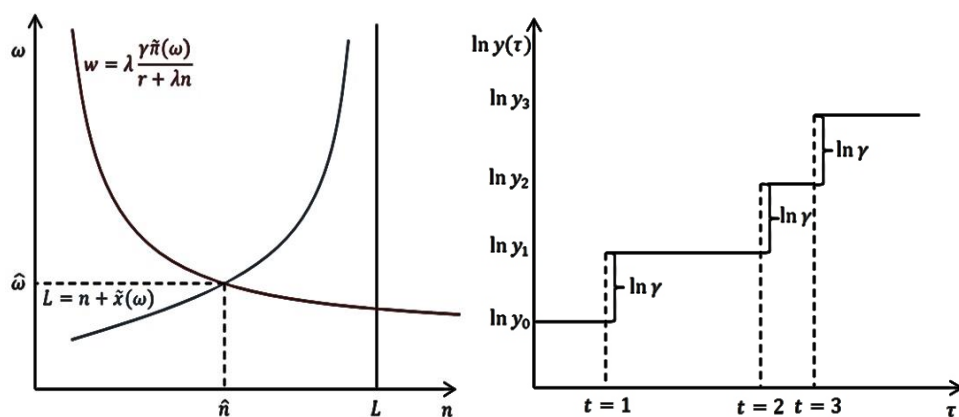


Рис. 1.8 Рівновага на ринку праці та зростання випуску за моделлю Агійона-Хоувіта.

Джерело: [20]

У моделі Агійона-Хоувіта рівновага на ринку праці визначається взаємодією попиту на кваліфіковану працю в секторі інновацій і пропозиції робочої сили. Підприємства, що створюють нові технології, конкурують за обмежену кількість висококваліфікованих працівників, пропонуючи вищу оплату. Працівники обирають між традиційним виробництвом і сектором R&D, орієнтуючись на рівень заробітку та очікувану монопольну ренту від інновацій. Рівновага встановлюється тоді, коли заробітна плата забезпечує оптимальний розподіл робочої сили між секторами, що сприяє ефективній концентрації ресурсів у сфері інновацій і підтримує сталий довгостроковий економічний розвиток.

Рівновага на ринку праці в моделі представлена графічно (Рис. 1.8). На осі абсцис відкладено зайнятість у секторі R&D n , а на осі ординат — ефективну заробітну плату

ω. Червона крива відображає сукупність точок, у яких виконується арбітражна рівновага заробітної плати між виробничим та науково-дослідним секторами. Синя крива відображає рівноважні стани на ринку праці. Оскільки червона крива має негативний нахил, а синя — позитивний, існує єдине рівноважне положення. Рівноважний рівень зайнятості в секторі R&D n^* , від якого залежать темпи зростання у моделі, збільшується при зниженні процентної ставки r , а також при зростанні величини інновацій γ , продуктивності праці в секторі R&D λ та загальної кількості трудових ресурсів L .

Модель Агійона-Хоувіта передбачає умовну конвергенцію, що залежить від здатності країни впроваджувати інновації. Економіки, які активно інвестують у R&D та людський капітал, зростають швидше, тоді як країни з низькою інноваційною активністю стикаються з уповільненням розвитку. Таким чином, модель пояснює можливість як часткової конвергенції, так і дивергенції між країнами (Рис. 1.8).

Стаціонарний стан настає, коли темпи зростання стабілізуються внаслідок рівноваги між появою нових технологій і витісненням старих. У цьому стані частота інновацій досягає рівня, за якого подальші інвестиції у R&D не підвищують довгострокові темпи зростання, а тривалість монопольних переваг винахідників обмежується життєвим циклом технологій.

До переваг моделі належить інтеграція механізму творчого знищення, що відображає реальні процеси технологічного оновлення, а також врахування ролі інституцій, прав власності й кваліфікованої робочої сили у стимулюванні інновацій. Модель дає цілісне пояснення ендогенного технологічного прогресу. Серед недоліків — спрощені припущення щодо однорідності фірм і технологій, обмежена увага до бар'єрів поширення інновацій, міжсекторальних зв'язків і міжнародної дифузії технологій, що знижує її застосовність до складних сучасних економік.

Квартальні прогнозні моделі (QPM). Поява кварталних прогнозних моделей пов'язана з розвитком монетарної політики, коли центральні банки потребували поєднання теоретично обґрунтованих моделей із прикладним прогнозуванням. Перші QPM були створені для підтримки таргетування інфляції й швидко поширилися завдяки здатності інтегрувати макроекономічну теорію, статистичні дані та практичні потреби регуляторів. Сьогодні QPM використовуються центральними банками та міжнародними

фінансовими організаціями для аналізу макродинаміки, прогнозування ВВП, інфляції, процентних ставок та валютного курсу, а також оцінки ефектів монетарної і фіскальної політики. Вони поєднують структурні елементи макроекономічної теорії з емпіричними співвідношеннями, забезпечуючи баланс між складністю DSGE-моделей та прикладними потребами прогнозування.

Математично QPM базуються на системі стохастичних рівнянь, що описують взаємозв'язки між ключовими макроекономічними змінними. Моделі відзначаються простішою структурою порівняно з DSGE, гнучкі у калібруванні та швидко адаптуються до нових даних, забезпечуючи надійні коротко- та середньострокові прогнози.

Обмеження QPM полягає у відсутності повної мікрофундації, що знижує здатність пояснювати довгострокові структурні зміни, а ефективність моделі залежить від якості даних і коректності калібрування. Водночас вони дозволяють аналізувати траєкторії економічного зростання, враховуючи шоки та сценарії політики, інтегруючи коротко- та середньострокові прогнози із стратегічними оцінками довгострокових тенденцій.

Динамічні стохастичні моделі загальної рівноваги (DSGE) виникли у другій половині XX століття на базі моделей реального ділового циклу (RBC) і подальшого розвитку нової класичної та нової кейнсіанської макроекономіки. Початково вони пояснювали економічні коливання технологічними шоками, а пізніше були вдосконалені з урахуванням номінальних жорсткостей, інституційних особливостей і політичних правил, що розширило їх застосування для сучасних економік.

DSGE широко використовуються центральними банками та дослідницькими інститутами для аналізу макродинаміки, прогнозування ВВП, інфляції, інвестицій і споживання, а також оцінки ефективності монетарної та фіскальної політики. Моделі ґрунтуються на раціональній поведінці агентів, міжчасовій оптимізації та загальній рівновазі на ринках, поєднуючи мікрофундацію з практичними завданнями макроекономічного аналізу.

Математично DSGE формалізуються як система стохастичних різницевих рівнянь, що описують взаємодію макроекономічних змінних. Основними перевагами є строгість, внутрішня узгодженість і здатність пояснювати як коротко-, так і довгострокові процеси, включаючи реакції економіки на шоки та політичні заходи.

Обмеження моделей пов'язані зі складністю, високими вимогами до даних, необхідністю калібрування або байєсівської оцінки, а також жорсткими припущеннями (раціональні очікування, репрезентативний агент), що знижує гнучкість і прозорість для практичного використання.

У порівнянні з QPM, які є більш гнучкими й адаптивними для короткострокового прогнозування, DSGE-моделі вирізняються вищою теоретичною строгістю та здатністю відображати довгострокову динаміку. QPM зручніші для оперативного прийняття рішень у політиці завдяки простішій структурі, тоді як DSGE забезпечують більш глибоке пояснення фундаментальних процесів, але є менш прозорими й складнішими у застосуванні. Таким чином, ці два підходи радше взаємодоповнюють одне одного: QPM – у прогнозуванні та сценарному аналізі, а DSGE – у стратегічному дослідженні чинників економічного зростання.

Методи машинного навчання та штучного інтелекту. Сучасний розвиток цифрових технологій значно розширює інструментарій економічного аналізу та прогнозування, особливо у сфері моделювання економічного зростання. Використання нейронних мереж і штучного інтелекту (ШІ) дозволяє враховувати складні нелінійні залежності, багатовимірні факторні структури та високу динамічність макроекономічних процесів. На відміну від класичних моделей, ШІ здатний навчатися на великих обсягах даних, виявляти приховані закономірності та точно апроксимувати нелінійні функції. Глибинні нейронні мережі дозволяють інтегрувати кількісні й якісні дані, включно з текстовими та візуальними, що відкриває можливості для комплексного аналізу економічного зростання з урахуванням цифровізації, інституційної якості, екологічної стійкості та соціального розвитку.

Серед ключових переваг ШІ та нейронних мереж виділяють здатність обробляти великі масиви даних і виявляти складні взаємозв'язки між економічними змінними, що дозволяє моделювати економічне зростання в багатовимірному контексті. Інструментарій ШІ є універсальним і гнучким: його застосовують для прогнозування ключових макроекономічних показників, оцінки кризових ризиків та ефективності політики, а рекурентні мережі (RNN, LSTM) враховують часову динаміку процесів. Інтегративність методів дозволяє поєднувати структуровані та неструктуровані дані та

створювати гібридні моделі, які поєднують аналітичну інтерпретованість класичних моделей (DSGE, QPM) із високою прогностичною точністю.

Водночас застосування нейронних мереж супроводжується низкою обмежень. Основними є низька інтерпретованість моделей, ризик перенавчання та висока залежність результатів від якості і обсягу даних. Недостатньо повні або нерегулярні статистичні бази можуть призводити до нестабільних прогнозів, а навчання глибинних мереж вимагає значних обчислювальних ресурсів. Ці фактори обмежують застосування ІІІ у державних органах і наукових установах з обмеженими ресурсами.

Узагальнюючи, нейронні мережі та ІІІ відкривають новий етап розвитку економічної науки, дозволяючи точніше моделювати економічне зростання, враховувати складні нелінійні та багатовимірні залежності та підвищувати якість прогнозів. Водночас їхнє ефективне застосування потребує поєднання сучасних методів аналізу даних із класичною економічною теорією, розвитку методів пояснюваного ІІІ та вдосконалення інформаційної інфраструктури. Нейронні мережі і ІІІ слугують не заміною, а органічним доповненням традиційних моделей економічного зростання, забезпечуючи більш обґрунтовану наукову та політичну практику.

Висновки до розділу 1

Економічне зростання як фундаментальна категорія економічної науки постає багатовимірним і складним явищем, яке має як теоретичне, так і практичне значення. Вивчення його сутності виявляє різноманіття підходів, що сформувались у різні історичні періоди. На початкових етапах розвитку економічної думки воно ототожнювалося із суто кількісним збільшенням виробництва, проте поступово було усвідомлено, що зростання є не лише результатом нагромадження ресурсів, а й відображенням якісних трансформацій у структурі економіки. Сучасне розуміння економічного зростання охоплює як традиційні виробничі детермінанти, так і широкий спектр соціально-економічних, інституційних та інноваційних чинників.

Класична політична економія заклала теоретичні основи дослідження економічного зростання. Праці А. Сміта, Д. Рікардо та їхніх послідовників визначили роль капіталу,

праці, землі й поділу праці у розвитку виробництва. Водночас підходи класичної школи були переважно статичними та недостатньо враховували технологічний прогрес, інституційні чинники й еволюційні зміни, що зумовило подальший розвиток теорій економічного зростання.

Неокласична економічна школа зробила вагомий внесок у формалізацію дослідження економічного зростання. Модель Солоу-Свана вперше інтегрувала технологічний прогрес у структуру аналітичної моделі, однак трактувала його як зовнішній, екзогенний фактор. Це дало змогу пояснити довгострокові тенденції конвергенції та дивергенції економік, проте обмежило розуміння внутрішніх механізмів інноваційного розвитку. Незважаючи на ці недоліки, неокласичний підхід створив міцне підґрунтя для емпіричних оцінок та моделювання траєкторій економічного зростання.

Подальший розвиток економічної теорії привів до формування ендогенних моделей зростання, які по-новому пояснюють технологічний прогрес. У них ключову роль відіграють людський капітал, знання, інновації та науково-технічна діяльність як результат інвестицій і політики. Економічне зростання розглядається як внутрішній процес, зумовлений розвитком самої економіки. Такі підходи поєднали макро- та мікрорівень аналізу, поглибивши розуміння механізмів зростання.

Інституційні, еволюційні та посткейнсіанські концепції розширили рамки аналізу, наголошуючи на історичній обумовленості та різноманітності траєкторій розвитку. Вони підкреслюють, що темпи й якість економічного зростання значною мірою залежать від ефективності інститутів, адаптивності економічних систем та політичних рішень. Інституційний підхід вказує на необхідність формування сприятливого правового середовища, захисту прав власності, прозорості ринкових відносин, тоді як еволюційні підходи роблять акцент на процесах навчання, кумулятивності знань та технологічній дифузії. Посткейнсіанські підходи акцентують на проблемах нестабільності, нерівноваги та ролі ефективного попиту, що розширює уявлення про зростання як складний, нерівномірний і циклічний процес.

Комплексний аналіз факторів і детермінант зростання засвідчив, що класичні виробничі змінні – капітал, праця та технології – залишаються центральними, проте їхня ефективність визначається ширшими соціально-економічними та інституційними

параметрами. Емпіричні дослідження підтверджують, що відмінності у якості інституцій, рівні освіти, соціальній згуртованості та політичній стабільності можуть зумовлювати кардинально різні траєкторії економічного розвитку навіть за подібних ресурсних передумов. Це свідчить про необхідність системного підходу до вивчення економічного зростання.

Методологія оцінки економічного зростання істотно еволюціонувала. Валовий внутрішній продукт як основний агрегований показник доповнюється системою індикаторів продуктивності, ефективності використання ресурсів, капіталомісткості виробництва та інноваційної активності. Впровадження інтегральних методів оцінювання дозволяє враховувати не лише кількісні параметри, а й якісні аспекти розвитку, що забезпечує більш адекватне відображення реальних тенденцій економічної динаміки.

Ключовим висновком є визнання адаптації як визначального фактора довгострокової траєкторії зростання. Економічні системи, що здатні швидко реагувати на структурні зміни, технологічні виклики й глобальні трансформації, демонструють вищий рівень стійкості та перспектив розвитку. Роль адаптації полягає у забезпеченні гнучкості, мобілізації інноваційних ресурсів та збереженні соціально-економічної стабільності в умовах невизначеності. У цьому контексті особливого значення набувають людський капітал, інноваційна діяльність та якість інституцій.

Інновації виступають безпосереднім механізмом технологічної трансформації, сприяючи оновленню виробництва, підвищенню продуктивності та зниженню витрат. Вони є каталізатором структурних зрушень і створення нових секторів економічної активності, забезпечуючи здатність системи пристосовуватися до глобальних змін.

Важливою складовою є інституції, що формують правила й норми економічної взаємодії. Їхня здатність до реформування – через удосконалення правового середовища, регуляторної системи, захист прав власності та протидію корупції – створює передумови для розвитку інновацій і людського капіталу. Стабільні інституції зміцнюють довіру, знижують невизначеність і стимулюють довгострокові інвестиції.

Взаємодія людського капіталу, інновацій та інституцій створює синергію, що підвищує адаптивну спроможність економіки та формує її конкурентні переваги у

глобальному середовищі. Ослаблення будь-якої з цих складових знижує ефективність розвитку. Людський капітал, інновації та інституції є взаємодоповнюючими детермінантами адаптивності економіки. Їх гармонійне поєднання формує основу стратегій, спрямованих на підвищення гнучкості, інноваційності та стійкості національних економік у добу швидких трансформацій.

Узагальнюючи результати аналізу, можна констатувати, що сучасна теорія економічного зростання постає інтегративною системою знань, яка поєднує класичні уявлення, неокласичні моделі, ендогенні концепції, інституційні та еволюційні підходи. Вона демонструє еволюцію від пояснення зростання як процесу нагромадження ресурсів до його розуміння як комплексного явища, що формується під впливом інновацій, інституційної якості, соціальних факторів та адаптивності економіки. Сучасні підходи спрямовані не лише на пояснення історичних закономірностей, а й на формування методологічної бази для прогнозування майбутніх траєкторій розвитку в умовах глобалізації, структурних трансформацій та зростаючих викликів сталості.

Основні результати розділу опубліковано в наукових працях автора: [107-110]

РОЗДІЛ 2

СУЧАСНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

2.1. Якісний та кількісний аналіз моделей економічного зростання

У процесі наукового дослідження важливим завданням стало визначення математичної бази для системного моделювання економічного зростання. Сучасна економічна наука пропонує різноманітні підходи, серед яких класичні моделі економічного зростання, економетричні методи, квартальні-прогнозні моделі (QPM), динамічні стохастичні моделі загальної рівноваги (DSGE) та методи штучного інтелекту, включно з нейронними мережами і глибинним навчанням. Кожен підхід має власні теоретичні передумови, інструменти та прикладну доцільність, що потребує їх критичного аналізу.

Економетричні методи забезпечують високий рівень формалізації взаємозв'язків між макроекономічними змінними, дозволяючи оцінювати вплив факторів на динаміку. Перевагами є використання великих емпіричних баз і перевірені алгоритми оцінки параметрів, однак вони обмежені у описі нелінійних процесів, структурних змін і екзогенних шоків. QPM орієнтовані на прогнозування, враховують політичні та інституційні обмеження, проте їх точність сильно залежить від коректності вихідних припущень. DSGE мають міцне мікроекономічне підґрунтя та дозволяють моделювати реакцію економіки на випадкові шоки, але відзначаються складністю калібрування, чутливістю до параметрів та труднощами у врахуванні нелінійних і поведінкових аспектів. Методи штучного інтелекту, зокрема нейронні мережі та алгоритми глибинного навчання, здатні розпізнавати складні нелінійні залежності та самонавчатися на великих обсягах даних, що актуально для багатфакторних економічних систем. Проте їх застосування ускладнене високими вимогами до даних, проблемами інтерпретованості результатів та відсутністю чіткого теоретичного підґрунтя для інтеграції в традиційні економічні дослідження.

Порівняльний аналіз показує, що економетричні методи добре підходять для прикладних досліджень, QPM ефективні для коротко- і середньострокових прогнозів, DSGE забезпечують глибоке теоретичне обґрунтування, а нейронні мережі демонструють високу точність прогнозів при багатofакторності, але їх результати важко інтерпретувати економічно.

У цьому контексті класичні моделі економічного зростання обрано як оптимальну математичну базу дослідження. Вони поєднують теоретичну строгість із гнучкістю адаптації, здатні відображати довгострокові траєкторії розвитку та інтегрувати результати інших методологічних підходів. Обрана база забезпечує баланс між абстрактністю та практичною корисністю, формалізує процеси нагромадження капіталу, розвитку людських ресурсів, інновацій та інституційних перетворень. Її адаптивність проявляється у здатності інтегрувати додаткові параметри, коригуватися під зміни зовнішнього середовища та поєднуватися з іншими аналітичними інструментами для багатовимірної аналізу макроекономіки.

Методологія якісного аналізу моделей економічного зростання ґрунтується на комплексному підході, що поєднує теоретичні, логічні та порівняльні методи. Її мета полягає у визначенні відповідності моделей сучасним економічним реаліям, здатності пояснювати динаміку розвитку та формувати практичні орієнтири економічної політики.

Першим етапом є визначення критеріїв оцінки, серед яких: теоретична узгодженість, пояснювальна сила, урахування інституційних і технологічних змін, а також адаптивність до різних соціально-економічних умов. Від вибору критеріїв залежить об'єктивність інтерпретації результатів та можливість зіставлення моделей.

Другим кроком виступає структурний аналіз, спрямований на виявлення логіки взаємодії змінних, вихідних припущень і результатів моделі. Він дозволяє ідентифікувати сильні й слабкі сторони, рівень абстракції та відповідність моделі реальним економічним процесам.

Важливим елементом є систематизація переваг і недоліків, що формує «матрицю релевантності» – узагальнену оцінку відповідності моделей сучасним завданням науки і практики. Це допомагає визначати напрями їх подальшого вдосконалення.

Важливою складовою є порівняльний підхід, який оцінює моделі у взаємозв'язку. Наприклад, зіставлення неокласичних і ендогенних моделей дає змогу простежити різні трактування ролі інвестицій у людський капітал чи інновації, що визначає межі їхньої практичної застосовності. На етапі логічно-дедуктивного аналізу перевіряється внутрішня узгодженість і стійкість моделі, виявляються потенційні суперечності чи нереалістичні припущення. Це забезпечує оцінку надійності та прогностної придатності моделі. Значну роль відіграє інституційна релевантність, яка відображає відповідність моделей реальним соціально-економічним умовам. Оцінюється здатність моделі враховувати недосконалу конкуренцію, поведінкові чинники та роль державних інститутів.

Історико-економічний підхід дозволяє оцінити, наскільки модель зберігає актуальність поза контекстом свого створення та чи може бути адаптована до сучасних викликів – цифровізації, кліматичних змін чи глобальної нерівності. Методологія якісного аналізу передбачає також міждисциплінарний підхід, який поєднує економічні, соціальні, політичні та демографічні аспекти, що забезпечує більш комплексне розуміння процесів зростання. Додаткову аналітичну глибину забезпечує експертна оцінка, яка ґрунтується на науковому консенсусі та критичному обговоренні моделей у професійних колах.

Зрештою, практичне значення якісного аналізу полягає у визначенні того, які моделі є найбільш придатними для конкретних країн або регіонів, а також у розробці рекомендацій щодо їх модифікації для підвищення ефективності використання в економічних дослідженнях.

Передумови моделей економічного зростання формують їх теоретичний каркас і визначають здатність адекватно відображати економічну динаміку. Вони задають систему базових припущень, що спрощують складну реальність до аналітичних конструкцій і забезпечують можливість формалізації та подальшого аналізу, хоч часто мають ідеалізований характер (Табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Передумови моделей економічного зростання

✓ – передумова стосується моделі ✗ – передумова не стосується моделі

Передумова / Модель	Харрод-Домар	Солоу-Сван	Рамсей-Касс-Купманс	Даймонд-Самуельсон	Менк'ю-Ромер-Вейл	Удзава-Лукас	Ерроу-Ромер (LBD)	Ребело (AK)	Ромер (Product Variety)	Мартін-Барро (Diffusion)	Агійон-Хойвіт (Quality Ladder)
Постійна норма заощаджень	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Екзогенний технічний прогрес	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Оптимізація споживання	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Перекриття поколінь	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Людський капітал як окремий фактор	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Навчання через практику	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
Постійна віддача від масштабу	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Зростаюча віддача від масштабу	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Відсутність спадної віддачі від капіталу	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Ендогенна інноваційна активність	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓
Міжнародна дифузія технологій	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Лідер-послідовник у технологіях	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Нескінченний часовий горизонт	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓
Однорідність капіталу	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Ідеальна конкуренція	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Недосконала конкуренція	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓
Роль державної політики	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Раціональні очікування	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓
Абстрагування від інституційних факторів	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗

Джерело: узагальнено автором на основі [2-3,5-6,12-20,98-105]

Спільними для класичних і неокласичних моделей є припущення досконалої конкуренції, раціональності агентів, відсутності асиметрій інформації та трансакційних витрат, що забезпечує строгість аналізу, але обмежує його реалістичність. Демографічні передумови у моделях Солоу-Свана й Даймонда-Самуельсона визначають потенціал нагромадження капіталу, роблячи економіку чутливою до змін чисельності населення. Інституційні фактори переважно не враховуються, проте передбачається їх стабільне функціонування – ефективний розподіл ресурсів і захист власності. У реальності це не завжди виконується, що знижує пояснювальну силу моделей. Ключовим є й характер технологічного прогресу: у ранніх моделях він екзогенний (Солоу-Сван), у нових – ендогенний (Ромер, Лукас, Агійон-Хоувіт), тобто зумовлений інноваціями та навчанням. Більшість моделей ґрунтуються на агрегуванні економіки, що дозволяє узагальнити капітал, працю й технології у межах єдиної функції, спрощуючи аналіз, але втрачаючи структурні деталі. Також передбачається нейтральність грошей у довгостроковому періоді – реальне зростання визначається фізичними факторами, а монетарні впливи вважаються короткостроковими. До того ж, більшість моделей абстрагується від зовнішніх шоків, політичних чи соціальних криз, аналізуючи «чисту» економічну динаміку. Такий підхід створює ідеалізовану, але аналітично прозору картину зростання.

Таблиця 2.1 показує, що моделі економічного зростання відрізняються насамперед за системою вихідних передумов, які визначають їх аналітичний потенціал. Класичні та неокласичні моделі (Харрод-Домар, Солоу-Сван, Рамсей-Касс-Купманс) базуються на спрощених припущеннях – екзогенності технічного прогресу, однорідності капіталу та досконалій конкуренції. Це забезпечує математичну строгість, але обмежує здатність пояснювати реальні економічні процеси.

Ендогенні моделі (Ребело, Ромер, Агійон-Хоувіт, Мартін-Барро тощо) розширюють підхід, акцентуючи на ролі інновацій, людського капіталу, навчання через практику та дифузії технологій. Їхні припущення є гнучкішими, проте вони ускладнюють модель і потребують ширшої емпіричної бази для перевірки. Відмінності у передумовах безпосередньо визначають пояснювальну здатність моделей щодо сучасної економічної динаміки.

Отже, жодна модель не відображає повною мірою багатогранність економічних процесів: класичні підходи забезпечують аналітичну простоту, тоді як ендogenous моделі дають змогу досліджувати інноваційний розвиток, але вимагають компромісу між формалізованістю та реалістичністю.

Моделі економічного зростання є важливим інструментом формалізації процесів довгострокового розвитку, оскільки дозволяють узагальнити складні економічні взаємозв'язки у вигляді систем рівнянь. Вони забезпечують можливість проведення кількісного аналізу та побудови прогнозів на основі гіпотез (Табл. 2.2).

Моделі економічного зростання мають ключову перевагу у здатності спрощувати складні економічні процеси до формалізованих співвідношень, що забезпечує можливість прогнозування та розробки економічної політики. Простота таких моделей, як Харрода-Домара чи Ребело, робить їх ефективними інструментами для виявлення базових закономірностей розвитку, особливо у країнах із обмеженим аналітичним потенціалом. Центральне місце в більшості підходів займає інвестиційна складова, яка підкреслює значення заощаджень і капіталовкладень у прискоренні зростання. Це має особливу вагу для економік, що проходять етап індустріалізації, оскільки дозволяє безпосередньо пов'язати політику нагромадження капіталу з довгостроковими темпами розвитку.

Технологічний прогрес і інновації виступають ключовими факторами сталого зростання навіть за умов спадної віддачі від фізичного капіталу. Саме включення інновацій у моделі дає змогу пояснити довготривалі позитивні тенденції економічного розвитку та робить їх особливо релевантними для економік знань, де важливу роль відіграють людський капітал і науково-технічний прогрес. Важливою перевагою є також пояснення умовної конвергенції, що дозволяє інтерпретувати глобальну динаміку як процес поступового вирівнювання доходів між країнами. Це створює аналітичну основу для формування міжнародних стратегій розвитку, стимулювання інновацій та подолання економічної нерівності. Крім того, такі підходи підкреслюють значення інвестицій у освіту, дослідження та розвиток сучасних технологій для забезпечення конкурентоспроможності економіки.

Таблиця 2.2

Переваги моделей економічного зростання

✓ – перевага властива моделі ✗ – нехарактерна для моделі

Перевага / Модель	Харрод-Домар	Солоу-Сван	Рамсей-Касс-Купманс	Даймонд-Самуельсон	Менк'ю-Ромер-Вейл	Удзава-Лукас	Ерроу-Ромер (LBD)	Ребело (AK)	Ромер (Product Variety)	Мартін-Барро (Diffusion)	Агійон-Ховіт (Quality Ladder)
Простота та зрозумілість моделі	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Наголос на інвестиціях як рушій зростання	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Роль технологічного прогресу	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Умовна конвергенція між країнами	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Оптимізаційна поведінка домогосподарств	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Демографічні фактори, міжпоколінні зв'язки	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Аналіз боргової та пенсійної політики	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Врахування людського капіталу	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Ендогенність зростання	✗	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Роль навчання та досвіду	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
Простота пояснення сталого зростання	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Роль інновацій та R&D сектору	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓
Зростання різноманіття продукції	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
Поширення технологій між країнами	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Еволюційність інновацій	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Політична релевантність	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗

Джерело: узагальнено автором на основі [2-3,5-6,12-20,98-105]

Ендогенізація поведінки агентів та врахування демографічних чинників значно розширюють аналітичні можливості моделей. Моделі міжчасового вибору демонструють, як індивідуальні рішення щодо споживання та заощаджень формують макродинаміку, роблячи аналіз реалістичнішим. Врахування міжпоколінних зв'язків і демографічних структур дозволяє досліджувати пенсійні системи, боргову політику та фінансову стійкість у довгостроковій перспективі. Водночас інтеграція людського капіталу як повноцінного фактора виробництва пояснює відмінності у темпах зростання між країнами з подібними обсягами фізичних інвестицій, підкреслюючи стратегічну роль освіти, науки та охорони здоров'я.

Ендогенний характер зростання є однією з найцінніших властивостей сучасних моделей, адже він дозволяє пояснювати розвиток без зовнішніх шоків, спираючись на внутрішні рушії – інновації, навчання та нагромадження знань. До цього блоку належать підходи, що враховують ефекти навчання через діяльність (*learning-by-doing*), коли накопичення досвіду саме по собі підвищує продуктивність. Такі моделі особливо корисні для економік, які перебувають у стані структурних змін або швидкої індустріалізації. Простота АК-моделі демонструє можливість сталого зростання без технологічних шоків завдяки постійному нагромадженню капіталу, що має прикладне значення для інвестиційної політики.

Інноваційні, дифузійні та еволюційні моделі розширюють межі аналізу економічного розвитку. Вони пояснюють роль досліджень і розробок, розмаїття продукції та передачі технологій між країнами як рушіїв зростання у глобалізованій економіці. Ці підходи демонструють взаємозв'язок між науковим прогресом, попитом і конкурентоспроможністю, розглядаючи зростання як безперервний процес якісного вдосконалення. Загалом моделі економічного зростання набувають практичної релевантності, оскільки дозволяють оцінювати вплив податкової, інвестиційної та інноваційної політики, перетворюючись на дієвий інструмент стратегічного планування сталого розвитку.

Попри значний внесок у теорію, моделі економічного зростання мають низку істотних обмежень. Головною проблемою є спрощеність припущень, які забезпечують формальну строгість, але знижують реалістичність (Табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Недоліки моделей економічного зростання

✗ – недолік властивий моделі ✓ – модель уникає цього недоліку

Недолік / Модель	Харрод-Домар	Солоу-Сван	Рамсей-Касс-Купманс	Даймонд-Самуельсон	Менк'ю-Ромер-Вейл	Удзава-Лукас	Ерроу-Ромер (LBD)	Ребело (AK)	Ромер (Product Variety)	Мартін-Барро (Diffusion)	Агійон-Хойвіт (Quality Ladder)
Жорсткість припущень, низька гнучкість	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Надмірна простота, спрощене трактування капіталу	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
Ігнорування ролі людського капіталу	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Залежність від екзогенного технічного прогресу	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Відсутність мікроекономічних основ	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
Потенційна нестабільність рівноваги	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Складність аналітичного розв'язання	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Неврахування інституційних факторів	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Обмеженість пояснення дивергенції між країнами	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗
Надмірна абстрактність, відірваність від практики	✗	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Проблеми з динамікою перехідних процесів	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
Обмежене трактування інновацій	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Ризик «надто сильного» зростання	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Проблеми емпіричної перевірки	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Вузька інтерпретація інноваційного процесу	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Висока складність калібрування	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Неврахування екологічних обмежень	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Надмірна ідеалізація раціональності агентів	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Ігнорування фінансових ринків і криз	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗

Джерело: узагальнено автором на основі [2-3,5-6,12-20,98-105]

Ключовим недоліком моделей економічного зростання є жорсткість припущень. Більшість із них спираються на сталі норми заощаджень, фіксовану продуктивність факторів і досконалу конкуренцію, що забезпечує формальну зручність, але знижує реалістичність висновків. Така надмірна формалізація унеможливорює врахування структурних шоків, інституційних змін чи нераціональної поведінки агентів, обмежуючи адаптивність моделей до сучасних динамічних процесів.

Другим суттєвим обмеженням є спрощене трактування капіталу. У багатьох моделях фізичний, людський і інтелектуальний капітал об'єднуються в єдину категорію, що нівелює відмінності між джерелами зростання. Це особливо спотворює результати для економік, де ключову роль відіграють нематеріальні інвестиції – освіта, інновації та технологічні компетенції. Ігнорування людського капіталу також знижує пояснювальну силу моделей, оскільки вони не враховують вплив освіти, охорони здоров'я й інноваційної активності на довгострокові темпи розвитку.

Серйозною вадою більшості моделей залишається залежність від екзогенного технічного прогресу. Інновації розглядаються як зовнішні чинники, що не підлягають поясненню, тому зростання подається як «даність», а не як результат рішень економічних агентів і державної політики. Відсутність мікроекономічних основ посилює проблему: макромоделі, позбавлені поведінкової логіки домогосподарств і фірм, мають обмежену практичну застосовність. Крім того, потенційна нестабільність рівноваги, властива деяким моделям, знижує їх прогностичну цінність, адже навіть малі збурення можуть вивести систему зі стану збалансованого зростання.

Теоретична складність і аналітична непрактичність становлять ще одне обмеження. Сучасні ендогенні моделі з інноваційними механізмами вимагають складних математичних конструкцій, що ускладнює інтерпретацію результатів і створює розрив між академічною теорією та прикладними дослідженнями. Водночас у більшості моделей недостатньо враховується роль інституцій — якості державного управління, правової системи, політичної стабільності — що робить їх занадто абстрактними для реальних економік. Недооцінка цих чинників зменшує релевантність моделей у країнах із різними інституційними траєкторіями розвитку.

Інші критичні недоліки пов'язані з обмеженим поясненням дивергенції між країнами, надмірною абстрактністю та слабким відображенням перехідних процесів. Моделі часто орієнтовані на довгострокову рівновагу, нехтуючи коротко- і середньостроковими фазами, які визначають ефективність реформ. Спрощене трактування інновацій ігнорує їхню взаємодію із соціальними та політичними факторами, а припущення АК-моделей про постійну віддачу від капіталу створює ризик нереалістичного «безмежного» зростання.

Практичні обмеження включають складність емпіричної перевірки та калібрування моделей: для їх верифікації потрібні великі обсяги даних і умовні припущення. Недооцінка екологічних обмежень веде до трактування зростання як нескінченного процесу, що суперечить концепції сталого розвитку. Надмірна ідеалізація раціональності агентів, ігнорування фінансових ризиків і кризових механізмів також знижують прикладну цінність теорій, особливо в умовах глобалізованих ринків.

Отже, моделі економічного зростання створюють узагальнену аналітичну основу для пояснення накопичення капіталу, ролі заощаджень та інвестицій у динаміці розвитку, що робить їх ефективним інструментом прогнозування. Проте їхня слабкість полягає у спрощеннях – припущеннях про досконалі ринки й раціональність агентів, які часто не відповідають реальності.

Сучасні моделі економічного зростання є гнучкими та придатними для аналізу довгострокових тенденцій, інвестицій, заощаджень і ролі людського капіталу. Вони створюють теоретичну основу для формування економічної політики, оцінки перспектив розвитку та порівняння економік різних країн. Їхньою перевагою є можливість кількісного аналізу й систематизації основних факторів економічного зростання.

Водночас такі моделі часто базуються на спрощених та ідеалізованих припущеннях, через що недостатньо враховують інституційні, культурні й історичні особливості окремих держав. Надмірна формалізація обмежує здатність моделей відображати складні соціально-економічні процеси та короткострокові економічні коливання. Попри це, моделі економічного зростання залишаються важливим

інструментом економічної теорії та основою для подальших досліджень і вдосконалення підходів до аналізу розвитку економіки.

Моделі економічного зростання поєднують переваги й недоліки, які взаємно врівноважують одна одну. Їхня універсальність і прогностичний потенціал забезпечують високу теоретичну цінність, але водночас обмежують практичне застосування через абстрактність і складність. Ефективність використання таких моделей зростає за умови врахування інституційних, соціальних і політичних особливостей конкретної економіки (Табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Співвідношення переваг та недоліків моделей

Переваги	Недоліки
Забезпечують узагальнену аналітичну рамку для аналізу процесів накопичення капіталу, заощаджень та інвестицій	Ґрунтуються на спрощеннях (досконалі ринки, раціональні агенти), що не завжди відповідає реальності
Інтегрують людський капітал, інновації та технологічний прогрес у пояснення економічного розвитку	Ускладнюються математично та втрачають прозорість для практичного використання
Дають змогу формувати довгострокові прогнози та сценарії розвитку	Не завжди здатні передбачати короткострокові коливання та кризи
Є адаптивними — враховують ендегенні фактори та дозволяють оновлювати підхід	Наявний ризик надмірної формалізації та абстрагування від реальності
Сприяють розробці політико-економічних рекомендацій	Рекомендації базуються на ідеалізованих припущеннях і часто ігнорують інституційні особливості
Універсальні — придатні для аналізу як розвинених країн, так і тих, що розвиваються	Недостатньо враховують культурні, історичні та інституційні відмінності
Дають можливість кількісних оцінок і побудови сценаріїв	Часто не охоплюють якісні суспільні зміни (соціальні, політичні, екологічні аспекти)
Систематизують знання про механізми економічного зростання	Мають тенденцію до редукції складних процесів
Стимулюють розвиток економічної теорії та нових напрямів досліджень	Частина моделей залишається суто академічною, без прикладної реалізації
Забезпечують основу для стратегічного планування та глобальних прогнозів	Ефективність знижується у країнах з нестабільними інститутами чи високими ризиками

Джерело: узагальнено автором на основі [2-3,5-6,12-20,98-105]

Проблематика вимірювання адаптивності економічних моделей полягає у поєднанні теоретичної обґрунтованості з можливістю емпіричної перевірки. Адаптивність визначається як здатність моделі відтворювати реальні економічні процеси з мінімальними відхиленнями від фактичних даних і коригувати параметри відповідно до зміни зовнішніх умов. Її рівень характеризується не лише точністю

апроксимації історичних даних, а й стабільністю прогнозів за умов структурних змін середовища.

Кількісна оцінка адаптивності ґрунтується на системі метрик, що вимірюють похибку та узгодженість моделі з емпіричними спостереженнями. Використовуються похідні від середньої абсолютної та квадратичної похибки, а також модифіковані показники, чутливі до масштабу й розподілу даних, що забезпечує комплексну оцінку якості моделі.

Однією з найпоширеніших є відносне відхилення моделі від тренду, яке показує частку варіації залежної змінної, пояснену моделлю. Значення метрики (0–1) характеризує точність моделі: чим ближче до 1, тим краще відтворюються реальні дані. Її переваги – простота інтерпретації та можливість швидкого порівняння моделей. Недоліки полягають у нечутливості до індивідуальних помилок і тенденції до зростання при збільшенні кількості змінних, що може спричиняти переобладнання. Низькі значення не завжди означають погану якість, особливо за високої стохастичності даних.

MAE (Mean Absolute Error) відображає середнє абсолютне відхилення прогнозів від фактичних значень і показує, наскільки в середньому модель помиляється у натуральних одиницях. Її сильні сторони – простота, інтерпретованість і стійкість до поодиноких викидів. Водночас MAE не враховує розподіл похибок і залежить від масштабу даних, що ускладнює порівняння різних рядів; також вона менш придатна для аналізу великих відхилень, де доцільніші квадратичні метрики.

MRE (Mean Relative Error) вимірює середню відносну похибку між прогнозом і фактичним значенням, незалежну від масштабу даних. Це робить її корисною для міжгалузевих чи міжнародних порівнянь. Її інтерпретація у відсотках є інтуїтивною, але метрика нестабільна при малих фактичних значеннях і може спотворювати результати за неоднорідності вибірки або за наявності екстремальних значень.

MSE (Mean Squared Error) визначає середній квадрат відхилень прогнозу від реальних значень і чутлива до великих похибок. Її переваги – висока точність виявлення варіацій і зручність для математичної оптимізації, тому вона є стандартом у машинному навчанні. Недолік полягає у надмірній чутливості до аномалій та

залежності від масштабу, що обмежує інтерпретацію, тому MSE часто поєднують з MAE або RMSE.

MSLE (Mean Squared Logarithmic Error) застосовується для даних з експоненціальним зростанням чи великою варіативністю. Вона оцінює точність за логарифмами прогнозів і фактичних значень, зменшуючи вплив великих величин і фокусуючись на відносних темпах зростання. MSLE корисна для прогнозів попиту, фінансових потоків чи чисельності населення, але не придатна для від'ємних або нульових даних і може недооцінювати великі абсолютні похибки.

RMSE (Root Mean Squared Error) – квадратний корінь із MSE, що виражає похибку у тих самих одиницях, що й вихідні дані. Вона поєднує інформативність квадратичних метрик із зручністю інтерпретації та є «золотою серединою» у прогнозуванні. Проте RMSE чутлива до викидів і залежить від масштабу, тому часто доповнюється відносними показниками (MRE, RMSLE).

RMSLE (Root Mean Squared Logarithmic Error), аналог RMSE з логарифмічним перетворенням, акцентує увагу на пропорційності змін і пом'якшує вплив великих відхилень. Вона ефективна для прогнозів, орієнтованих на темпи зростання, проте не застосовується до нульових чи від'ємних значень і може недооцінювати великі похибки у високих масштабах.

Важливою інтегральною характеристикою виступає величина ризику, що відображає імовірність відповідності прогнозу фактичним даним у межах довірчого інтервалу. Вона поєднує варіативність похибок і ступінь узгодженості моделі з реальністю, дозволяючи кількісно оцінити надійність прогнозу. Недолік показника – залежність від ширини довірчого інтервалу та вибраного рівня значущості, що може спотворювати оцінку надійності.

Для узагальнення результатів застосовується метод ранжування, який інтегрує всі метрики. Моделі отримують позиції за кожним критерієм — від найкращого до найгіршого – з подальшим підсумовуванням позицій. Менша сума означає вищу адаптивність. Такий підхід забезпечує збалансовану, об'єктивну й комплексну оцінку ефективності моделей, враховуючи абсолютні, відносні та ризикові характеристики.

Таблиця 2.5

Показники точності моделей економічного зростання

Показник	Назва показника	Формула
R	Коефіцієнт відносного відхилення модельних значень до тренду	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2$
MAE	Середня абсолютна помилка	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{y}_i $
MRE	Середня відносна помилка	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{ y_i - \hat{y}_i }{ y_i }$
MSE	Середній квадрат помилки	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
$MSLE$	Логарифмований середній квадрат помилки	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(y_i + 1) - \ln(\hat{y}_i + 1))^2$
$RMSE$	Середньоквадратичне відхилення	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$
$RMSLE$	Логарифмічне середньоквадратичне відхилення	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log(y_i + 1) - \log(\hat{y}_i + 1))^2}$
$RISK$	Ризик	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - t_s \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \hat{y}_i \leq y_i + t_s \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Джерело: узагальнено автором.

Методологія, заснована на інтеграції комп'ютерного моделювання з теоретичними розробками, вирізняється інноваційністю та аналітичною глибиною. Вона долає обмеження традиційних підходів, дозволяє моделювати різні сценарії розвитку, виявляти причинно-наслідкові зв'язки між показниками й оцінювати ефекти структурних трансформацій. Такий підхід підвищує надійність і відтворюваність результатів, роблячи дослідження більш релевантним для наукової та прикладної економіки. Завдяки цьому було реалізовано симуляції для дослідження сценаріїв розвитку, оцінки впливу ключових факторів і прогнозування наслідків структурних змін. Використання програмних засобів підвищило точність розрахунків і швидкість обробки великих масивів даних.

Комп'ютерне моделювання створює віртуальне середовище економічного експерименту, де можливо досліджувати альтернативні траєкторії розвитку,

інтегруючи численні фактори, недосяжні для класичних аналітичних методів. Це забезпечує точніші прогнози, дозволяє виявляти неочікувані взаємозв'язки та розширює можливості для формування ефективних стратегій розвитку.

Поєднання теоретичних концепцій і цифрового моделювання формує сучасну методологічну основу для оцінки економічних процесів, розробки нових підходів до прогнозування та підвищення обґрунтованості рішень. Інтегрований підхід підсилює надійність висновків і відкриває перспективи для подальшого розвитку економічної науки й практики.

Алгоритм експерименту з моделями економічного зростання полягає у:

1. Визначення переліку моделей, що беруть участь в експерименті.
2. Зведення обраних моделей економічного зростання до порівнюваної форми.
3. Пошук та обробка необхідних даних. Заміна пробілів у даних.
4. Проведення числового експерименту та обчислення показників якості моделей.
5. Отримання та інтерпретація результатів.

У попередньому розділі було розглянуто моделі економічного зростання, які найчастіше зустрічаються у науковій літературі. Хоча ці моделі мають багато спільних рис, кожна з них у певній мірі відрізняється за передумовами, підходами до тлумачення економічних процесів та способами їх пояснення. Порівнювати моделі між собою у простій шкалі «гірша/краща» було б некоректно, оскільки кожна модель має власні передумови та специфіку, які часто перетинаються в різних аспектах економічного аналізу. Натомість під порівнянням у даному дослідженні розуміється встановлення причинно-наслідкових зв'язків між модифікаціями моделі та динамікою практичних похибок її прогнозів. Такий підхід дозволяє оцінювати ефективність моделей не через узагальнене ранжування, а через аналіз того, як конкретні характеристики та параметри впливають на точність відтворення економічних процесів у реальних умовах.

Для коректності моделювання і можливості коректної інтерпретації результатів описані моделі потрібно звести до «спільного знаменника». Таким «спільним знаменником» є відповідність наступним пунктам (результати приведені у табл. 2.6):

1. Розгляд неперервних моделей економічного зростання, оскільки на практиці економічна природа є неперервною. До того ж неперервні моделі більш корисні для дослідження довгострокових тенденцій та сталого розвитку. Згідно з цим з дослідження було виключено модель Даймонда-Самуельсона, у зв'язку з тривалим дискретним періодом, через що не можна коректно і в повному обсязі оцінити практичну ефективність її основних аспектів.

2. Економіка є нелінійною і тільки нелінійною. Тому змісту розглядати лінійні моделі немає. Такі моделі дають високу помилку та є малоефективними при прогнозуванні. Виключено модель Харрода-Домара, вона є лінійною, а її передумови є застарілими для оцінки сучасних економічних систем.

3. Включення амортизації фізичного капіталу до моделей. При ігноруванні амортизації та лише зосередженні на нових інвестиціях в моделі зростання капіталу, можуть отримуватися перебільшені оцінки зростання економіки.

4. Зведення моделей до спільного показника для коректності обчислень. Таким показником може бути величина зростання фізичного капіталу, або величина зростання капіталомісткості. приведення до єдиної форми усіх розглянутих моделей проведено за допомогою наступного перетворення:

$$k^* = \left(\frac{K}{L}\right)^* = \frac{K^*L - KL^*}{L^2} = \frac{K^*L}{LL} - \frac{KL^*}{L^2} = \frac{K^*}{L} - \frac{K}{L} \left(\frac{L^*}{L}\right) = \frac{K^*}{L} - nk. \quad (2.1)$$

Показники зростання капіталу та капіталомісткості розглядаються як еквівалентні з точки зору основних цілей даного дослідження, що дозволяє обирати будь-який із них для аналізу. У цьому дослідженні переважно використовується показник капіталомісткості, оскільки він має більш компактний та зручний для обробки вигляд, що спрощує представлення та інтерпретацію результатів. Такий вибір не впливає на сутність аналізу, але забезпечує більшу наглядність і логічну структурованість представлення даних у статті.

5. Розгляд моделей відбувається на часовому проміжку від 1960 до 2021 року. На даному проміжку необхідною умовою є повнота даних для усіх компонентів моделі.

Таблиця 2.6

Зведені моделі економічного зростання

№	Назва моделі	Виробнича функція	$K^* =$	$k^* =$
A	Солоу-Сван	$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$	$sAK^\alpha L^{1-\alpha} - dK$	$sAk^\alpha - (d+n)k$
B	Рамсей-Касс-Купманс	$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$	$AK^\alpha L^{1-\alpha} - C - dK$	$Ak^\alpha - c - (d+n)k$
C	Ребело (спрощена)	$Y = AK$	$sAK - dK$	$sAk - (d+n)k$
D	Ребело (оригінальна)	$Y = BK_c^\alpha L^{1-\alpha} + AK_s$	$s(BK_c^\alpha L^{1-\alpha} + AK_s) - dK$	$s(Bk_c^\alpha + Ak_s) - (d+n)k$
E	Менк'ю-Ромер-Вейл	$Y = AK^\alpha H^\beta L^{1-\alpha-\beta}$	$sAK^\alpha H^\beta L^{1-\alpha-\beta} - dK$	$s_k Ak^\alpha h^\beta - (d+n)k$
F	Удзава-Лукас	$Y = K^\alpha [uhL]^{1-\alpha} h_{at}^\delta$	$sK^\alpha [uhL]^{1-\alpha} h_{at}^\delta - dK$	$sk^\alpha h^{1-\alpha+\delta} u^{1-\alpha} - (d+n)k$
G	Ерроу-Ромер (LBD)	$Y = B^{1-\alpha} K^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L^{1-\alpha}$	$B^{1-\alpha} K^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L^{1-\alpha} - C - dK$	$B^{1-\alpha} K^{\phi(1-\alpha)} k^\alpha - c - (d+n)k$
H	Ромер (Product Variety)	$Y = AL^{1-\alpha} \int_0^N x_j^\alpha dj$	$K^\alpha AL^{1-\alpha} N^{1-\alpha} - C - dK$	$AN^{1-\alpha} k^\alpha - c - (d+n)k$
I	Покращення якості продукції	$Y = AL^{1-\alpha} \int_0^N x_j^\alpha q_j^\alpha dj$	$K^\alpha q^\alpha AL^{1-\alpha} N^{1-\alpha} - C - dK$	$AN^{1-\alpha} k^\alpha q^\alpha - c - (d+n)k$
J	Барро	$Y = AK^\alpha G^{1-\alpha} L^{1-\alpha}$	$sAK^\alpha G^{1-\alpha} L^{1-\alpha} - dK$	$sAk^\alpha G^{1-\alpha} - (d+n)k$
K	Барро-Мартін (Diffusion)	$Y = AL^{1-\alpha} \int_0^N x_j^\alpha dj$	$K^\alpha AL^{1-\alpha} N^{1-\alpha} - C + \frac{v^*}{v\phi} K - dK$	$AN^{1-\alpha} k^\alpha - c - \left(d+n - \frac{v^*}{v\phi}\right)k$
L	Агійон-Хоувіт Quality Ladder)	$Y = A\gamma^t L^{1-\alpha} \int_0^N x_j^\alpha dj$	$K^\alpha \gamma^t AL^{1-\alpha} N^{1-\alpha} - C - dK$	$AN^{1-\alpha} k^\alpha \gamma^t - c - (d+n)k$
M	Модифікація з сектором R&D	$Y = A[(1-A_K)K]^\alpha [(1-A_L)L]^\beta$	$sA(1-A_K)^\alpha (1-A_L)^{1-\alpha} K^\alpha L^{1-\alpha} - dK$	$sA(1-A_K)^\alpha (1-A_L)^{1-\alpha} k^\alpha - (d+n)k$
N	Модифікація з міжн. торгівлею	$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$	$sAK^\alpha L^{1-\alpha} - dK - \hat{a}$	$sAk^\alpha - (d+n)k - \hat{a}$
O	Модифікація з держ. капіталом	$Y = AK_p^\alpha K_g^\beta L^{1-\alpha-\beta}$	$sAK_p^\alpha K_g^\beta L^{1-\alpha-\beta} - dK$	$s_k Ak_p^\alpha k_g^\beta - (d+n)k$
P	Модифікація з факт. землі	$Y = AK^\alpha N^\beta L^{1-\alpha-\beta}$	$sAK^\alpha N^\beta L^{1-\alpha-\beta} - dK$	$s_k Ak^\alpha n_N^\beta - (d+n)k$
Q	Модифікація з податками	$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$	$sAK^\alpha L^{1-\alpha} - G - dK$	$sAk^\alpha - g - (d+n)k$
R	Модифікація з часовим лагом	$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$	$sAK^\alpha L^{1-\alpha} - dK$	$sAk^\alpha - (d+a-bL_b)k$
S	Багатосекторна модифікація	$Y = AK_1^\alpha L_1^{1-\alpha} + \dots$	$sAK_1^\alpha L_1^{1-\alpha} - dK + \dots$	$L_1/L(sAk_1^\alpha - (d+n)k_1) + \dots$

Джерело: узагальнено автором на основі [2-3,5-6,12-20,98-105].

Додатково в дослідження були включені деякі модифікації моделі Солоу:

- Модель Барро, модифікація моделі Солоу з державними видатками (модель J в таблиці 2.6).
- Модель з сектором R&D, де економіка виробляє блага з використанням деяких часток $(1-A_L)$ і $(1-A_K)$ ресурсів праці та капіталу відповідно, і сектор, що виробляє знання (науково-технічні інновації) з використанням часток A_L і A_K ресурсів праці та капіталу (модель M в таблиці 2.6).
- Модель з зовнішньою торгівлею. Суть полягає в коригуванні швидкості економічного зростання на показник $\hat{a} = ak$, де a – це торгівельне сальдо на одиницю праці (модель N в таблиці 2.6).
- Модель з державним капіталом полягає у тому, що загальний капітал поділяється на два фактори: державний (інфраструктура, суспільні блага) та приватний (модель O в таблиці 2.6).
- Модель з фактором землі – формули аналогічні моделі Менк'ю-Ромера-Вейла (модель P в таблиці 2.6).
- Модель з податками – податкове навантаження уповільнює економічне зростання на величину g – податки на одиницю праці (модель Q в таблиці 2.6).
- Модель з часовим лагом, де коефіцієнт зростання праці рівний $n = a - bL_b$, де L_b – праця у одному з попередніх періодів (модель R в таблиці 2.6).

Під час моделювання економічного зростання застосовуються різні методики розрахунку показників і параметрів, тому стандартизація є необхідною для забезпечення об'єктивності та порівнянності результатів. Вона уніфікує обчислення показників, дозволяючи зіставляти результати різних моделей без викривлень, підвищує достовірність аналізу та точність оцінки впливу факторів на динаміку економічного зростання.

Дані є фундаментом дослідження економічного зростання, адже від їхньої якості залежить достовірність результатів. Ключовим етапом є відбір джерел інформації за критеріями достовірності, актуальності та доступності, що забезпечує об'єктивність і точність висновків.

Перевага надавалась офіційній статистиці, результатам наукових досліджень та базам даних міжнародних організацій і національних урядових установ. Такий підхід гарантує узгодженість і порівнянність даних, необхідних для побудови моделей, що відображають реальні економічні процеси. Основним джерелом виступав Світовий банк [111], а допоміжними – інші авторитетні бази даних, узгоджені між собою [112-114]. Це забезпечило комплексність, надійність і репрезентативність інформаційної бази.

У дослідженні використано ключові макроекономічні показники: ВВП, інвестиції, рівень зайнятості, споживання, заощадження, капітал, валове нагромадження капіталу та амортизацію. Їхній вибір зумовлений здатністю відображати основні фактори економічної динаміки. Через відсутність централізованої статистики щодо проміжних продуктів їх замінено показником кількості підприємств, виходячи з припущення, що кожен проміжний продукт виробляється окремою фірмою. Такий підхід зберігає концептуальну логіку моделі та дозволяє уникнути прогалин у даних, забезпечуючи баланс між доступністю та точністю.

Період дослідження охоплює 1960-2022 роки, що дає змогу аналізувати довгострокові тенденції економічного розвитку. Основними ризиками роботи з даними є помилки та неповнота інформації (Додаток Б, рис. Б.1). Навіть офіційні джерела можуть містити випадкові неточності, які знижують точність моделювання. Для мінімізації цих ризиків використовувалися перевірені статистичні бази, що гарантують надійність і зменшують вплив «шуму». Проте певна неповнота даних, особливо щодо інвестицій, технологічного прогресу та рівня освіти, залишається проблемою, що може впливати на адекватність моделей і отриманих висновків.

Дані можуть характеризуватися різним рівнем неповноти, що проявляється як у відсутності окремих спостережень, так і у пропуску значної частини часових рядів. При цьому різні економічні показники мають неоднакову повноту даних, що безпосередньо впливає на можливість побудови моделей. Наприклад, умовно кажучи, модель Солоу може бути застосована на основі 75% доступних даних, тоді як її модифікація з урахуванням податків – лише на 30% даних.

У таких умовах результати моделей стають несумісними між собою, оскільки аналіз проводиться на різних підмножинах інформації, що порушує узгодженість висновків. Як

наслідок, будь-які спроби порівняння або інтеграції результатів можуть призвести до некоректних висновків, зменшуючи надійність і достовірність дослідження. Тому забезпечення максимальної повноти та узгодженості даних є критично важливим етапом підготовки інформаційної бази для моделювання економічного зростання.

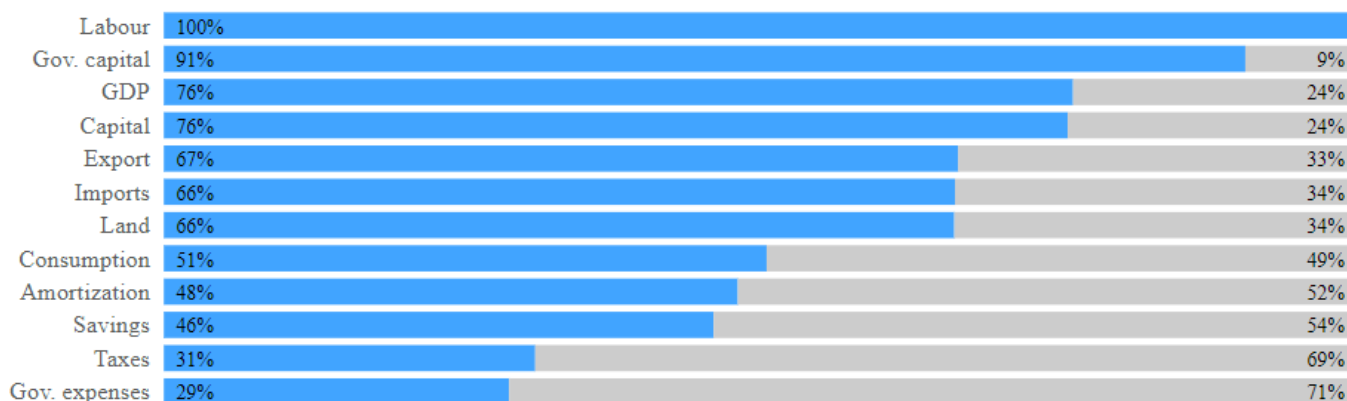


Рис. 2.1 Повнота даних у період з 1960-2021 р.

Джерело: складено автором на основі [111]

Такі дані можна замінити використавши наступні методи:

- інтервальний аналіз;
- математичне моделювання;

Інтервальний аналіз – метод, який дозволяє працювати з даними, що мають пропуски або невизначеність, шляхом представлення значень у вигляді інтервалів замість точних чисел. Це забезпечує оцінку діапазону можливих результатів та зменшує ризик помилок через неповні дані.

У сучасній глобальній економіці, що характеризується волатильністю, технологічними змінами та частими шоками, невизначеність стає ключовим викликом. Для підвищення точності прогнозів необхідні адаптивні моделі, здатні інтегрувати інформацію про непередбачувані фактори. У науковій літературі розрізняють повну та часткову невизначеність. Повна виникає за відсутності будь-якої інформації про майбутнє, що робить прогнозування неможливим. Часткова – коли дані неповні, але дозволяють формувати ймовірні сценарії з обмеженою точністю. Для її врахування застосовують ймовірнісні моделі, методи нечіткої логіки та симуляційні підходи, які формалізують невизначеність і забезпечують обґрунтовані висновки.

Для повної невизначеності використовують стохастичні моделі [115], що інтегрують випадкові фактори у процес моделювання. Найпоширенішим є метод Монте-Карло [116], який за допомогою випадкових вибірок оцінює ризики та ймовірні результати розвитку подій. У разі часткової невизначеності, крім стохастичних методів, застосовують теорію нечітких множин [117], що враховує експертні оцінки, а також Байєсівський підхід [118], який оновлює ймовірності на основі нових даних.

У цьому дослідженні акцент зроблено на інтервальному аналізі динамічних моделей, який є універсальним інструментом роботи з невизначеними або неточними даними. Його суть полягає у використанні інтервалів замість точкових значень, що дозволяє охопити весь спектр можливих результатів і підвищити надійність моделювання.

Інтервальний аналіз моделює економічні показники з урахуванням варіацій і непередбачуваних факторів. Наприклад, прогнозування ВВП чи інфляції може здійснюватися у вигляді діапазонів значень, що забезпечує гнучкіші оцінки та знижує ризик помилок. Перевагою методу є збереження інформації про невизначеність на всіх етапах розрахунків, що особливо важливо у фінансовому прогнозуванні, аналізі ризиків і макроекономічному моделюванні.

Разом із тим інтервальний підхід має недоліки: результати можуть бути надто консервативними через широкий діапазон значень, а розрахунки – обчислювально складними та ресурсомісткими. Крім того, метод не надає інформації про ймовірності всередині інтервалів, що обмежує його застосування за наявності точних даних.

Методика інтервального аналізу включає кілька етапів:

1. Визначення інтервалів для змінних відповідно до рівня невизначеності.
2. Проведення обчислень, у яких усі операції виконуються над інтервалами, зберігаючи межі можливих значень.
3. Аналіз отриманих результатів для оцінки сценаріїв розвитку та ризиків.
4. Інтерпретація інтервалів для прийняття обґрунтованих управлінських рішень.

Для підвищення точності часто використовується спеціалізоване програмне забезпечення, що автоматизує розрахунки та обробку великих обсягів даних.

Основні арифметичні операції над інтервалами – додавання, віднімання, множення та ділення – виконуються з урахуванням нижньої та верхньої межі інтервалів, що дозволяє зберегти інформацію про невизначеність та можливий діапазон значень результату.

При додаванні або відніманні інтервалів новий інтервал формується шляхом відповідного додавання або віднімання меж вихідних інтервалів. Такий підхід дозволяє моделювати всі потенційні сценарії розвитку подій та оцінювати їхню невизначеність.

Наприклад, якщо інтервал $[a_1, b_1]$ додається до інтервалу $[a_2, b_2]$ результатом буде:

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2], \quad (2.2)$$

для віднімання аналогічно:

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - a_2, b_1 - b_2]. \quad (2.3)$$

При множенні інтервалів процес трохи складніший, оскільки необхідно враховувати всі можливі комбінації меж. Для двох інтервалів $[a_1, b_1]$ та $[a_2, b_2]$ результатом множення буде інтервал, що охоплює всі можливі добутки меж:

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [\min(a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, b_1 \cdot b_2), \max(a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1, b_1 \cdot b_2)]. \quad (2.4)$$

Ділення інтервалів є ще більш складним, оскільки потрібно уникати поділу на нуль і враховувати всі можливі варіанти. Якщо ділимо інтервал $[a_1, b_1]$ на інтервал $[a_2, b_2]$, де a_2, b_2 не включають нуль, результат буде інтервалом, що містить всі можливі частки:

$$[a_1, b_1] / [a_2, b_2] = [\min(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}), \max(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{b_1}{b_2})]. \quad (2.5)$$

Якщо ж одна із меж a_2 або b_2 є досить мала величина (може перебувати в околі нуля), то операцію ділення потрібно здійснювати з особливою обережністю.

Виконання операцій над інтервалами потребує точного врахування їхніх меж і всіх можливих комбінацій значень, що забезпечує коректність результатів. Такий підхід дозволяє зберігати невизначеність на всіх етапах аналізу й гарантує врахування всіх можливих сценаріїв навіть за неповних даних.

Ефективність інтервальних операцій визначається їх основними властивостями. Монотонність означає, що якщо один інтервал міститься в іншому, це відношення

зберігається і в результатах обчислень. Замкнутість гарантує, що результат будь-якої арифметичної операції також є інтервалом, забезпечуючи узгодженість обчислень.

Інтервальний аналіз розширює можливості економічного моделювання, дозволяючи працювати з діапазонами значень і враховувати невизначеність. Це особливо важливо для прогнозування економічного зростання, де існує багато непередбачуваних факторів, оскільки дає змогу оцінювати не один результат, а спектр можливих сценаріїв.

Для практичної ілюстрації застосування інтервального аналізу у моделюванні економічного зростання в цьому дослідженні буде використана класична модель економічного зростання Солоу (19).

Ураховуючи вирази (2.2) - (2.5) та (1.12), ми отримаємо наступне рівняння для інтервальної оцінки функції Кобба - Дугласа:

$$[Y_1, Y_2] = [A_1, A_2] \cdot [K_1^{\alpha_1}, K_2^{\alpha_2}] \cdot [L_1^{1-\alpha_2}, L_2^{1-\alpha_1}]. \quad (2.6)$$

Також ми можемо переписати вираз (2.6), ураховуючи властивості степенів, той момент, що $\alpha_1 \leq \alpha_2$, а також факт того, що капітал, праця, ВВП та коефіцієнт A не можуть бути від'ємними, як:

$$[Y_1, Y_2] = [A_1 K_1^{\alpha_1} L_1^{1-\alpha_2}, A_2 K_2^{\alpha_2} L_2^{1-\alpha_1}]. \quad (2.7)$$

Аналогічним чином перетворимо вираз (1.14):

$$[k^{\bullet}_1, k^{\bullet}_2] = [s_1 A_1 k_1^{\alpha_1} - [d_1 + n_1, d_2 + n_2] \cdot [k_1, k_2], \\ s_2 A_2 k_2^{\alpha_2} - [d_1 + n_1, d_2 + n_2] \cdot [k_1, k_2]]. \quad (2.8)$$

Отже, була отримана узагальнена версія моделі Солоу, яка дозволяє враховувати невизначеність у ключових економічних змінних, таких як рівень капіталу, чисельність робочої сили та технологічний прогрес.

Математичне моделювання – включає класичні статистичні методи, такі як регресія та прогнозування часових рядів, що дозволяють відновлювати пропущені значення або прогнозувати майбутні тенденції на основі наявних даних.

У дослідженнях економічних процесів широко використовуються часові ряди, що відображають динаміку показників, таких як ВВП, інвестиції, споживання чи зайнятість.

Одним із класичних способів відновлення пропусків у таких даних є математична інтерполяція та екстраполяція, які використовують відомі значення для оцінки відсутніх.

Інтерполяція заповнює пропуски всередині часового ряду, будуючи функцію, що проходить через відомі точки спостережень. Найчастіше застосовуються лінійна, поліноміальна, сплайн-інтерполяція та локальні апроксимації. Лінійна інтерполяція проста та швидка, проте не враховує кривизну тренду. Поліноміальні та сплайнові методи точніше відтворюють коливання, що важливо для нелінійної динаміки економічних показників.

Екстраполяція використовується для оцінки значень поза межами наявного ряду – наприклад, прогнозування майбутніх інвестицій чи темпів зростання. Вона базується на побудові трендової функції, що описує загальну тенденцію, і її продовженні за межі спостережуваних даних.

Переваги цих методів полягають у простоті реалізації, наочності та ефективності при малих обсягах даних, коли складніші алгоритми є нестійкими. Водночас інтерполяція та екстраполяція мають обмеження: вони передбачають плавну зміну показників і не враховують різких коливань чи шоків. Екстраполяційні прогнози особливо чутливі до вибору тренду — помилкове припущення про динаміку може спричинити систематичні похибки.

Для заміни пропусків методом регресійного аналізу пропонується використати модель:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + E, \quad (2.9)$$

де x_1 – порядковий номер тренду,

x_2 – населення країни,

x_3 – середньо груповий цільовий показник,

x_4 – схожий за змістом відомий показник для країни, що розглядається,

x_5 – попереднє/наступне значення показника, що розглядається (за наявності).

Порядковий номер тренду приймає групу значень, які у результаті дають найменшу сукупну абсолютну помилку: лінійний зв'язок ($y = x$), параболічний зв'язок ($y = x^2$, $y = \sqrt{x}$), гіперболічний зв'язок ($y = \frac{1}{x}$) та логарифмічний зв'язок ($y = \ln x$).

Порядковий номер тренду відображає загальну динаміку показника в часі, що дозволяє моделі враховувати довгострокові тенденції зростання або спаду. Його включення забезпечує точніше відтворення базового руху ряду та зменшує систематичні зсуви прогнозу під час заповнення пропусків.

Демографічний фактор є ключовим детермінантом макроекономічних показників: обсяг ВВП, рівень споживання й капіталовкладень безпосередньо залежать від чисельності населення. Врахування цієї змінної підвищує точність прогнозів і відображає структурні особливості країни.

Середньо-груповий показник відображає середнє значення певного параметра для групи країн тієї ж економічної категорії (наприклад, середній ВВП на душу населення). Він дозволяє використовувати інформацію про схожі економіки, компенсуючи відсутність власних даних і підвищуючи стабільність оцінок.

Відомий споріднений показник (проксі-змінна) використовується для урахування структурних взаємозв'язків між показниками. Наприклад, ВВП може виступати заміником капіталу через їхню високу кореляцію, що покращує точність відновлення даних.

Авторегресійна складова враховує попередні або наступні значення показника, відтворюючи локальну часову динаміку. Це особливо важливо для рядів із плавними коливаннями чи інерційними процесами.

Використання всіх п'яти змінних робить модель комплексною й адаптивною: вона охоплює трендові, структурні, групові, корельовані та часові фактори. Така специфікація забезпечує адекватне та інтерпретоване відновлення пропущених значень у макроекономічних часових рядах.

У процесі відновлення пропущених значень у макроекономічних даних важливо обрати метод, який поєднує точність прогнозів, обчислювальну ефективність і стійкість до обмеженого обсягу вибірки. Серед сучасних підходів виділяють інтервальний аналіз, методи машинного навчання (нейронні мережі, випадковий ліс, градієнтний бустинг) та класичні статистичні підходи, зокрема регресійний аналіз.

Інтервальний аналіз враховує невизначеність і неточність даних, працюючи з діапазонами значень. Водночас його застосування до великих масивів макроекономічних

показників супроводжується різким зростанням обчислювальної складності: кожна операція потребує врахування всіх можливих комбінацій меж інтервалів, що призводить до експоненційного збільшення витрат ресурсів. Це суттєво обмежує придатність методу для великих часових рядів і багатовимірних моделей економічного зростання.

У порівнянні з цим підходом, регресійний аналіз є найбільш збалансованим методом для відновлення пропусків у макроекономічних часових рядах, особливо за умов обмежених даних. Регресійні моделі поєднують простоту реалізації, прозорість результатів і можливість кількісного оцінювання впливу змінних на прогнозовану величину. Вони забезпечують адекватні оцінки пропусків без експоненційного росту обчислень і залишаються стабільними при малих вибірках.

Гнучкість регресійного підходу дозволяє використовувати лінійні, поліноміальні чи мультифакторні моделі для точнішого відтворення економічних закономірностей. Поєднання точності прогнозів і наукової інтерпретованості робить його оптимальним інструментом для аналізу динаміки економічного зростання. Таким чином, враховуючи обмеження інтервального аналізу та складність методів машинного навчання, регресійний аналіз є найбільш ефективним, надійним і практично обґрунтованим методом для заміни пропусків у макроекономічних часових рядах.

Ризик економічного зростання – це кількісна характеристика, що відображає ймовірність відхилення фактичної динаміки розвитку від прогнозованої траєкторії під впливом внутрішніх (структурні дисбаланси, політична нестабільність, слабкі інститути) та зовнішніх чинників (глобальні кризи, коливання ринкової кон'юнктури, геополітичні ризики). Він виражає невизначеність щодо здатності економіки підтримувати стабільне зростання та макроекономічну рівновагу.

У ширшому сенсі ризик охоплює відхилення не лише макропоказників, а й структурних пропорцій, динаміки інвестицій, продуктивності праці та якості людського капіталу. Тобто він відображає не лише кількісні зміни, а й якісні характеристики системи, що визначають її потенціал довгострокового розвитку.

Ризик економічного зростання є багатфакторним явищем, яке поєднує економічні, соціально-політичні та зовнішньоекономічні аспекти. Його оцінювання є ключовим

елементом економічного аналізу, оскільки воно сприяє формуванню реалістичних прогнозів, розробленню антикризових механізмів і забезпеченню стійкості розвитку.

Зовнішні чинники включають глобальні шоки, коливання цін на сировину й енергоносії, зміни кон'юнктури ринків, фінансову нестабільність, геополітичну напруженість і торговельні конфлікти, що обмежують доступ до ринків, інвестицій і технологій. Внутрішні чинники охоплюють макродисбаланси (борг, дефіцит бюджету, структурну неефективність виробництва), низьку інноваційну активність, технологічне відставання, політичну нестабільність і корупцію, які підривають довіру до економічної політики. Соціально-демографічні фактори – старіння населення, міграція, низька якість трудових ресурсів – також підвищують ризики, обмежуючи інвестиційні можливості та модернізацію.

Підвищений рівень ризику зумовлює нестабільність макропоказників, посилення циклічності, зростання ймовірності рецесій, що ускладнює прогнозування розвитку. Він також погіршує інвестиційний клімат: невизначеність знижує схильність підприємств і домогосподарств до інвестування, що стримує модернізацію та інновації. Це веде до зниження продуктивності, конкурентоспроможності та закріплення структурних дисбалансів. Зростання ризику підвищує вартість фінансування, оскільки кредитори враховують премію за ризик, що обмежує доступ до ресурсів. У соціальному вимірі це проявляється падінням доходів, зростанням безробіття, бідності та міграції, що підриває людський капітал і стійкість розвитку. Високий рівень ризику визначається за частими коливаннями темпів виробництва, відсутністю стійкої тенденції до рівноваги, зниженням стабільності інвестицій і споживання. Повторювані цикли піднесення та спаду без тривалої стабілізації свідчать про глибокі внутрішні чи зовнішні дисбаланси, що перешкоджають сталому економічному розвитку.

Для прикладу моделювання економічного ризику послідовно розглянемо моделі Солоу-Свона (1.14), Рамсея-Касса-Купманса (1.17) та Менк'ю-Ромера-Вейла (1.21).

Остаточне рівняння Солоу приймає вигляд рівняння (1.14). Стаціонарний стан у моделі Солоу описується рівнянням (1.16). Відповідно до формули (1.16), s – чим більша частка заощадження, тим більше ресурсів для інвестицій – більш стійкий капітал; A – рівень технологій: чим ефективніше виробництво, тим більше можна виробити на

одиницю капіталу; $d+n$ – «тягар», який треба покривати інвестиціями. Таким чином, дріб $\frac{sA}{d+n}$ є чиста норма інвестування на одного ефективного працівника, яка покриває втрати і приріст. Величина дробу зростає тоді, коли збільшується чисельник, і зменшується зі збільшенням знаменника. Це відображає баланс між тим, скільки економіка може інвестувати (завдяки заощадженням і технологічному розвитку), та тим, який обсяг ресурсів необхідний для покриття зносу капіталу, забезпечення приросту населення і врахування впливу технічного прогресу. Отже, вища норма заощаджень або швидший технологічний розвиток сприяють зростанню стаціонарного рівня капіталу. Натомість зростання норми амортизації, темпів приросту населення чи швидкості технічного прогресу знижує сталий рівень капіталу.

Інтегруванням диференціального рівняння (1.14) записується його аналітичний розв'язок:

$$k(t) = \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n})e^{-(d+n)t} + \frac{sA}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.10)$$

Рівняння (2.10) також можна переписати як:

$$k(t) = \left[(k_0^{1-\alpha} - k^{*1-\alpha})e^{-(d+n)t} + k^{*1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.11)$$

або:

$$k(t) = \left[(k_0^{1-\alpha} e^{-(d+n)t} + k^{*1-\alpha} (1 - e^{-(d+n)t})) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.12)$$

де $k_0^{1-\alpha}$ – відповідає за початковий рівень капіталомісткості, який скоригований на еластичність,

$k^{*1-\alpha}$ – відповідає за стаціонарний рівень капіталомісткості, що також скоригована на еластичність

$(k_0^{1-\alpha} - k^{*1-\alpha})$ – означає початкове відхилення від стаціонарного стану,

$e^{-(d+n)t}$ – швидкість зближення до стаціонарного стану.

Оцінка економічного ризику на основі капіталомісткості передбачає використання діапазону значень цього показника за поточний період. Для цього потрібно визначити очікувану верхню межу $k(t)_{max}^i$ та нижню межу $k(t)_{min}^i$. Цей інтервал відображає

відповідно найбільш оптимістичний та найбільш песимістичний сценарії рівня капіталомісткості, показуючи мінімальні та максимальні значення, які може приймати цей показник за поточних умов економічного розвитку. У цьому підході економічний ризик визначається як відносний розмах інтервалу капіталомісткості щодо його середнього значення і обчислюється за формулою:

$$R^i = \frac{k(t)_{max}^i + k(t)_{min}^i}{(k(t)_{max}^i - k(t)_{min}^i)/2}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) відображає рівень невизначеності капіталомісткості у конкретний момент часу. Чим ширший розрив між максимальною та мінімальною оцінками, тим вищий економічний ризик, оскільки це свідчить про більшу мінливість або непередбачуваність ресурсного забезпечення на одного працівника. Такий підхід дозволяє кількісно оцінювати ризик як функцію розкиду прогнозів ключового параметра моделі зростання, що сприяє більш обґрунтованому аналізу надійності економічних прогнозів і розробці політики з урахуванням можливих коливань.

Очікувану верхню межу можна розрахувати як:

$$k(t)_{max} = \left[(k_0^{1-\alpha}) e^{-(d+n)t} + \frac{sA}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.14)$$

У формулі (2.14) перший доданок ілюструє, як початковий рівень капіталомісткості з часом зменшується під впливом амортизації капіталу та приросту населення. Чим довший проміжок часу та вищі величини d і n , тим швидше знижується внесок початкового капіталу. Другий доданок відображає рівноважний внесок заощаджень і продуктивності, який підтримує капітал на одного працівника. Ця «стаціонарна» частина демонструє той рівень капіталомісткості, до якого економіка прагне у довгостроковій перспективі.

Таким чином, формула (2.14) показує максимально можливий рівень капіталомісткості на одного працівника за умов ідеальної реалізації економікою свого інвестиційного потенціалу та відсутності негативних відхилень чи зовнішніх шоків.

Очікувана нижня межа знаходиться за рівнянням:

$$k(t)_{min} = \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n}) e^{-(d+n)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) описує сценарій економічного розвитку за менш сприятливих умов порівняно з базовим або «оптимістичним» сценарієм. На відміну від формули верхньої межі, де другий доданок із заощадженнями додається і підвищує капіталомісткість, тут він віднімається, що відображає зниження фактичного рівня інвестицій або їх ефективності порівняно з максимально можливим розрахунковим значенням.

Зокрема, вираз у дужках $(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n})$ означає, що початковий рівень капіталомісткості частково «скориговано вниз» на величину рівноважного внеску заощаджень. Економічно це відповідає ситуації, коли частина потенційних інвестиційних ресурсів залишається невикористаною через різні фактори – низьку ефективність фінансового ринку, втрати внаслідок інституційних проблем або вплив зовнішніх шоків.

Множення на експоненту $e^{-(d+n)t}$ показує, як цей знижений запас капіталу ще й додатково зменшується у часі під впливом амортизації та приросту населення. Отже, формула відображає траєкторію розвитку капіталомісткості за мінімально можливим сценарієм – у випадку, коли економіка не здатна повністю компенсувати амортизацію капіталу та приріст населення за рахунок власних заощаджень.

Враховуючи формули (2.14) та (2.15) ризик економічного зростання для моделі Солоу можна визначити за формулою:

$$R = \frac{\left[(k_0^{1-\alpha}) e^{-(d+n)t} + \frac{sA}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n}) e^{-(d+n)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\left[(k_0^{1-\alpha}) e^{-(d+n)t} + \frac{sA}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n}) e^{-(d+n)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) / 2}. \quad (2.16)$$

Але з урахуванням нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для додатних чисел a, b матиме місце наближена оцінка міри ризику:

$$R \leq \sqrt{\frac{\left[(k_0^{1-\alpha})e^{-(d+n)t} + \frac{sA}{d+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n})e^{-(d+n)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}}, \quad (2.17)$$

або:

$$R \leq \left[\frac{(k_0^{1-\alpha})e^{-(d+n)t} + \frac{sA}{d+n}}{(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{d+n})e^{-(d+n)t}} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}. \quad (2.18)$$

Модель Менк'ю-Ромера-Вейла (MRW) має вигляд рівняння (1.21). Модель Менк'ю-Ромера-Вейла має стаціонарний стан, який можна знайти за формулами (1.22) та (1.23). Інтегрувавши систему (1.21), можна отримати межі (табл. 2.7) аналітичні розв'язки для $k(t)$ і $h(t)$ відповідно:

$$k(t) = \left[(k_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{(s_k + s_h)A}{d+n})e^{-(d+n)t} + \frac{(s_k + s_h)A}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}; \quad (2.19)$$

$$h(t) = \left[(h_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{(s_k + s_h)A}{d+n})e^{-(d+n)t} + \frac{(s_k + s_h)A}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \quad (2.20)$$

Таблиця 2.7

Верхня та нижня межі для моделі Менк'ю-Ромера-Вейла

Показник	Нижня межа	Верхня межа
k	$\left[(k_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{(s_k + s_h)A}{d+n})e^{-(d+n)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$	$\left[(k_0^{1-\alpha-\beta})e^{-(d+n)t} + \frac{(s_k + s_h)A}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$
h	$\left[(h_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{(s_k + s_h)A}{d+n})e^{-(d+n)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$	$\left[(h_0^{1-\alpha-\beta})e^{-(d+n)t} + \frac{(s_k + s_h)A}{d+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$

Джерело: побудовано автором

Тоді наближений ризик буде розраховуватися за формулами:

$$R_k \leq \left[\frac{(k_0^{1-\alpha-\beta})e^{-(d+n)t} + \frac{(s_k + s_h)A}{d+n}}{(k_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{s(s_k + s_h)A}{d+n})e^{-(d+n)t}} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}}, \quad (2.21)$$

та:

$$R_h \leq \left[\frac{(h_0^{1-\alpha-\beta})e^{-(d+n)t} + \frac{(s_k + s_h)A}{d+n}}{(h_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{s(s_k + s_h)A}{d+n})e^{-(d+n)t}} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}}, \quad (2.22)$$

для запасів фізичного та людського капіталів на одиницю працю відповідно.

Модель Рамсея-Касса-Купманса (2.17) можна представити більш детально у вигляді системи:

$$\begin{aligned} k^* &= Ak^\alpha - c - (d+n)k, \quad k_0 = k(t_0), \\ c^* &= \frac{1}{\theta}(\alpha Ak^{\alpha-1} - r - \rho)c, \quad c_0 = c(t_0), \end{aligned} \quad (2.23)$$

де θ – постійна еластичність заміщення

r – швидкість зменшення активів на одиницю праці,

ρ – коефіцієнт міжчасової переваги споживача.

Стаціонарний стан для капіталомісткості рівний:

$$k^* = \left[\frac{\alpha A}{r + \rho} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.24)$$

а для споживання на одиницю праці:

$$c^* = A \left[\frac{\alpha A}{r + \rho} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (n + d) \left[\frac{\alpha A}{r + \rho} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.25)$$

Аналітичне розв'язання моделі Рамсея-Касса-Купманса у загальному вигляді (тобто отримання повного закритого розв'язку) практично неможливе через значну нелінійність та взаємозалежність динаміки капіталу і споживання. Рівняння моделі формують нелінійну систему диференціальних рівнянь, де зміни споживання визначаються граничною продуктивністю капіталу, а динаміка капіталу — поточним рівнем споживання. У практичному аналізі це обмеження долається шляхом використання стаціонарних характеристик моделі, які дозволяють оцінити довгострокові рівноважні показники, або застосування чисельних методів інтегрування для побудови траєкторій зближення економіки до рівноважного стану. Такий підхід дає змогу досліджувати поведінку системи в динаміці та оцінювати ефекти різних параметрів на процеси накопичення капіталу та споживання.

Формально розв'язок можна записати як нелінійний інтеграл:

$$\int \frac{dc}{c} = \int \frac{\frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} - r - \rho)c}{A k^{\alpha} - c - (d+n)k} dk. \quad (2.26)$$

Проте, якщо задати, що c – екзогенна змінна та записати її як $c_i k$, де $c_i = c/k$, то стаціонарний стан можна знайти за формулою:

$$k^* = \left[\frac{A}{d+n+c_i} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.27)$$

Тоді аналітичним розв'язком буде:

$$k(t) = \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{A}{d+n+c_i})e^{-(d+n+c_i)t} + \frac{A}{d+n+c_i} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.28)$$

а верхньою та нижньою межами стануть вирази:

$$k(t)_{max} = \left[(k_0^{1-\alpha})e^{-(d+n+c_i)t} + \frac{A}{d+n+c_i} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (2.29)$$

та

$$k(t)_{min} = \left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{A}{d+n+c_i})e^{-(d+n+c_i)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.30)$$

Відповідно до формул (2.29) та (2.30) наближено числова міра економічного ризику обчислюється за формулою:

$$R \leq \frac{\left[(k_0^{1-\alpha})e^{-(d+n+c_i)t} + \frac{A}{d+n+c_i} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}}{\left[(k_0^{1-\alpha} - \frac{A}{d+n+c_i})e^{-(d+n+c_i)t} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}}. \quad (2.31)$$

Результати числового експерименту. Моделі економічного зростання мають міцне теоретико-методологічне підґрунтя, оскільки спираються на фундаментальні економічні закони та принципи функціонування господарських систем. Вони розглядають економіку як багаторівневу систему взаємодії праці, капіталу, технологій і ресурсів, що дозволяє описати механізми розвитку, виявити причинно-наслідкові зв'язки й оцінити роль окремих факторів у довгостроковому зростанні. Такі моделі є

інструментом ідентифікації факторів, що стимулюють або гальмують економічне піднесення, визначення структурних дисбалансів і ефективності використання ресурсів. Вони дають змогу оцінити вплив інновацій, демографічних змін, зовнішньої торгівлі чи інституційної політики на розвиток економіки. На їхній основі формуються державні стратегії та програми соціально-економічного розвитку, здійснюється прогнозування траєкторій зростання й оцінювання ефектів від інвестицій у людський капітал, інфраструктуру чи технології. У підсумку, моделі сприяють розробленню політик сталого розвитку, підвищенню продуктивності та добробуту населення.

Разом із тим, практичне застосування моделей обмежується нереалістичними припущеннями, що поділяються на ідеальні та обмежуючі. Ідеальні стосуються гіпотетичних умов — повної конкуренції, сталого технічного прогресу чи стабільного приросту населення. Вони корисні для аналітичних узагальнень, але знижують прикладну цінність через змінність політичних, технологічних і демографічних факторів. Обмежуючі припущення спрощують економічну структуру, ігноруючи ключові взаємозв'язки. Найпоширеніші — це закритість економіки, відсутність ролі держави та міжнародної торгівлі. Їхній вплив є критичнішим, оскільки спотворює прогнози й робить моделі малопридатними для аналізу відкритих і глобалізованих економік. Релевантність таких моделей визначається ступенем інтегрованості країни у світову систему та ефективністю державного регулювання.

Отже, з рис. 2.2 випливає, що всі розглянуті моделі економічного зростання демонструють відносно низьку точність відтворення реальних даних. Це підтверджується від'ємними значеннями коефіцієнта відносної помилки до тренду (R), які вказують на те, що моделі пояснюють варіацію показників гірше, ніж проста оцінка на основі їх середнього значення. Іншими словами, середня похибка моделей є вищою за похибку, яка виникає при використанні базового підходу без моделювання, що свідчить про їхню обмежену прогностичну ефективність у даному випадку.

Моделі економічного зростання можна умовно розділити на дві групи залежно від ключових змінних. Перша група — це моделі, у яких центральне місце займає норма накопичення; вони демонструють суттєво нижчий рівень похибки. Друга група — моделі, що базуються на показнику споживання на одиницю праці, і саме вони виявляють значно

вищу неточність. Подібна різниця пояснюється тим, що хоча норма заощаджень і рівень споживання перебувають у тісному взаємозв'язку, їхня кореляція в реальній економіці є неповною. Класичні припущення закритої економіки, де тотожності $Y = C + S$ та $S = I$ виконуються автоматично, на практиці порушуються. Це зумовлено кількома факторами: активною мобільністю капіталів, товарів, послуг та робочої сили у глобальному масштабі, інтеграцією національних економік у світову систему, а також наявністю «сірих» і «тіньових» секторів, що істотно впливають на динаміку як накопичення, так і споживання. У результаті, моделі на основі споживання мають нижчу адекватність, тоді як моделі з урахуванням норми накопичення краще відображають реальні закономірності економічного розвитку.

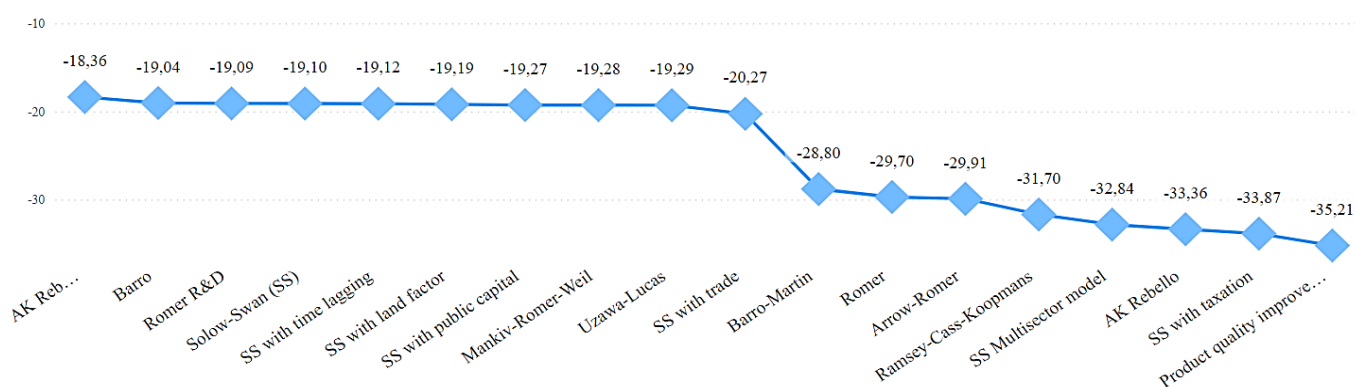


Рис. 2.2 Коефіцієнт R у розрізі моделей економічного зростання.

Джерело: складено автором

З одного боку, валові заощадження не відображають повною мірою потенціал капітального зростання, оскільки залежать від зовнішніх і внутрішніх чинників — припливу іноземних інвестицій, державних витрат, імпорту капіталомістких товарів і послуг. Унаслідок цього офіційна статистика часто занижує рівень заощаджень, тоді як валове нагромадження може перевищувати їхній обсяг, особливо у країнах із низьким рівнем розвитку, де важливим джерелом інвестицій є зовнішній капітал.

З іншого боку, збільшення періоду розрахунку у моделях зростання підвищує похибку прогнозів через ускладнення економічної динаміки, зростання кількості впливових факторів і поступове зниження рівня тінізації економіки, що зменшує адекватність спрощених моделей (рис. 2.3). Водночас глобалізація частково компенсує ці ефекти, забезпечуючи додаткові джерела фінансування та інтеграцію національних економік у світову систему.

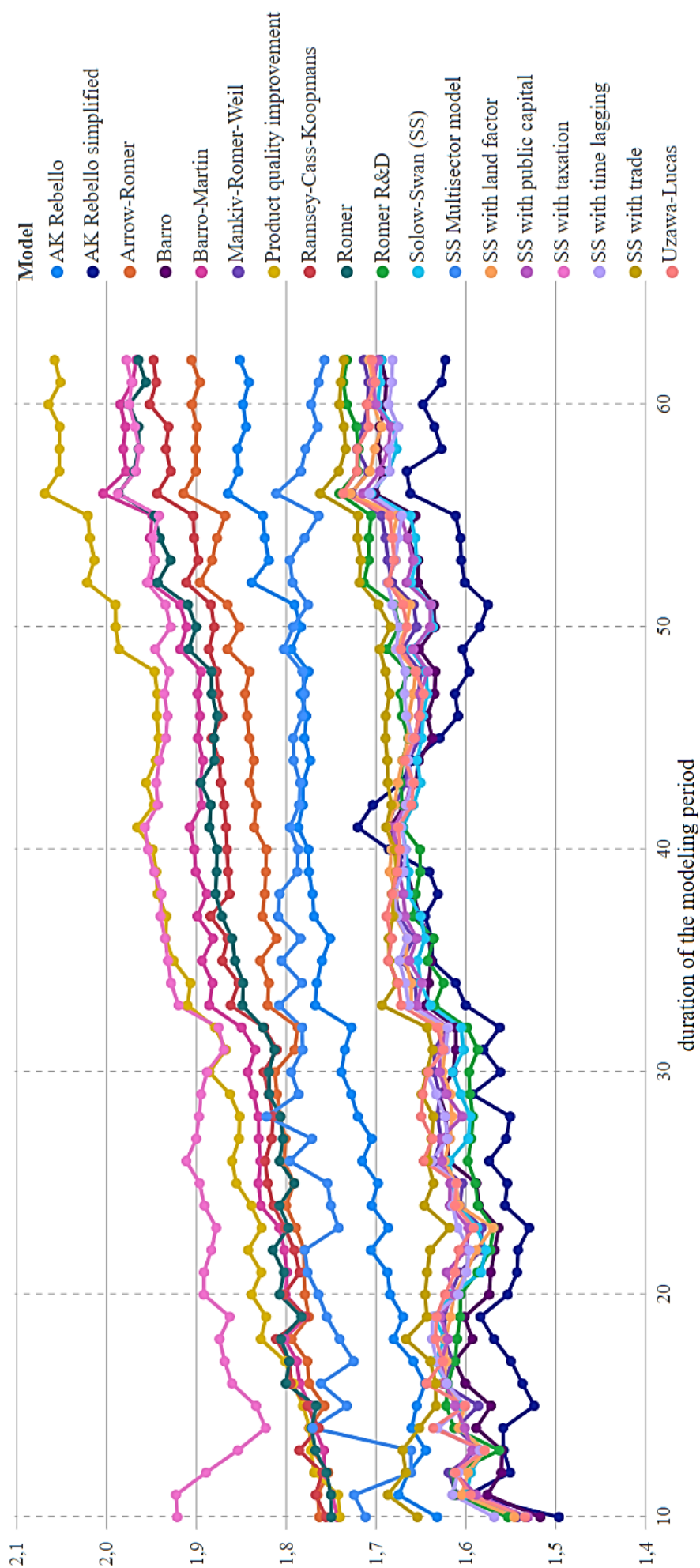


Рис 2.3 Показник $RMSLE$ за зростанням тривалості періоду моделювання у розрізі моделей економічного зростання.

Джерело: складено автором

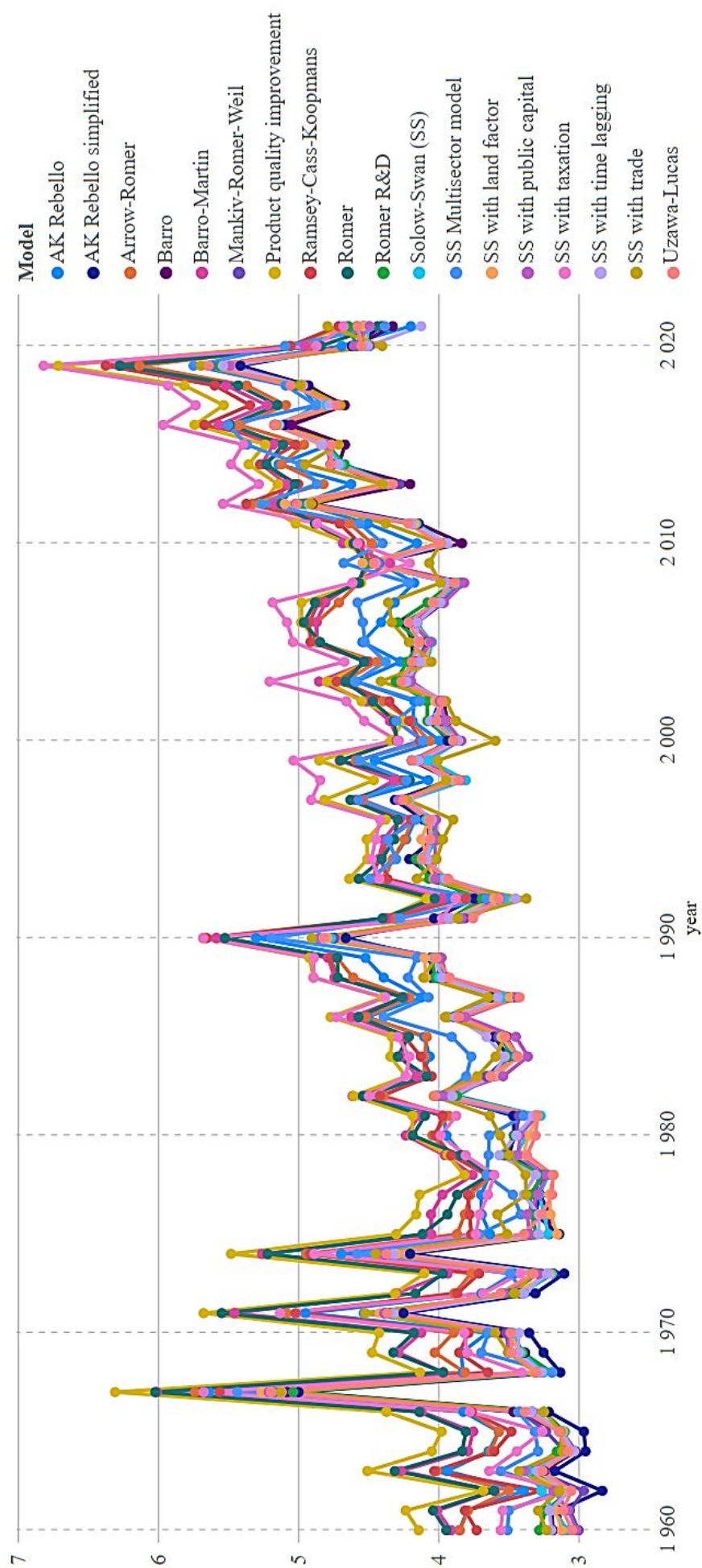


Рис 2.4 Показник $RMSLE$ у розрізі моделей економічного зростання.

Джерело: складено автором

Після усунення впливу тіньової економіки та побудови статичних моделей для кожного окремого року (рис. 2.4) спостерігається чітка тенденція до зростання похибки моделей у часовій динаміці. Це є додатковим підтвердженням гіпотези про те, що посилення глобалізаційних процесів, зростання обсягів міжнародної торгівлі та інвестицій поступово знижують ефективність класичного припущення про закритість економіки.

Найбільші стрибки похибки спостерігаються у періоди активного пожвавлення та інвестиційних бумів, коли рух капіталів, товарів і послуг досягає максимуму, а моделі зі застарілими припущеннями втрачають здатність точно відображати економічну реальність. Натомість під час криз і депресій, коли міжнародні потоки інвестицій і торгівлі скорочуються, точність моделей зростає, оскільки вплив зовнішніх чинників послаблюється, а економіка частково наближається до умов відносної закритості.

Як показано на рис. 2.5, відносна похибка моделей є вищою для країн із низьким рівнем доходу через поєднання внутрішніх структурних обмежень і високої чутливості до зовнішніх впливів.

По-перше, такі економіки мають обмежений доступ до капіталу, слабку інфраструктуру та низький інноваційний потенціал, що ускладнює стабільне зростання й знижує точність моделей, побудованих на універсальних припущеннях. По-друге, вони вразливі до зовнішніх шоків — коливань світових цін, фінансових криз, змін у торгівлі, а також до внутрішньої політичної та інституційної нестабільності, яка підсилює невизначеність. По-третє, великий тіньовий сектор погіршує якість статистики й, відповідно, достовірність прогнозів.

Нарешті, домінування первинного сектору (сільське господарство, видобуток сировини) спричиняє структурні диспропорції та монополізацію ринків. Сукупність цих чинників пояснює, чому моделі економічного зростання для країн із низьким доходом демонструють вищу середню похибку, ніж для розвинених економік.

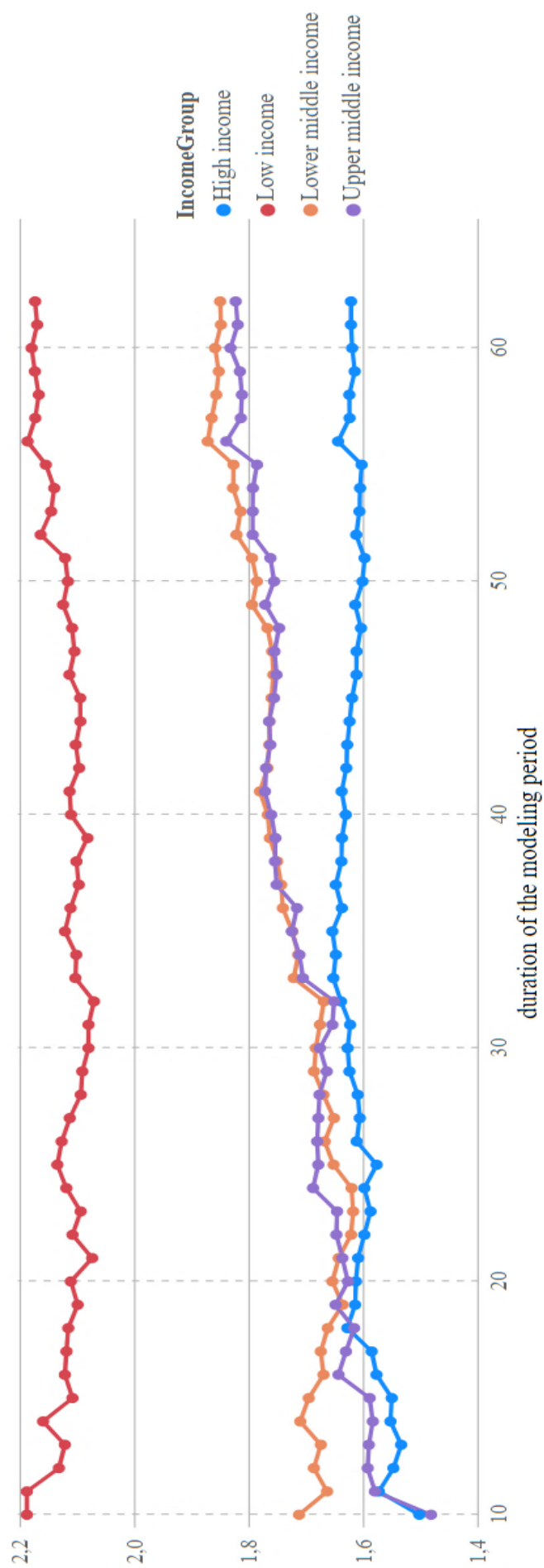


Рис 2.5 Показник $RMSLE$ у розрізі груп країн за доходом (за методикою Світового банку).

Джерело: складено автором

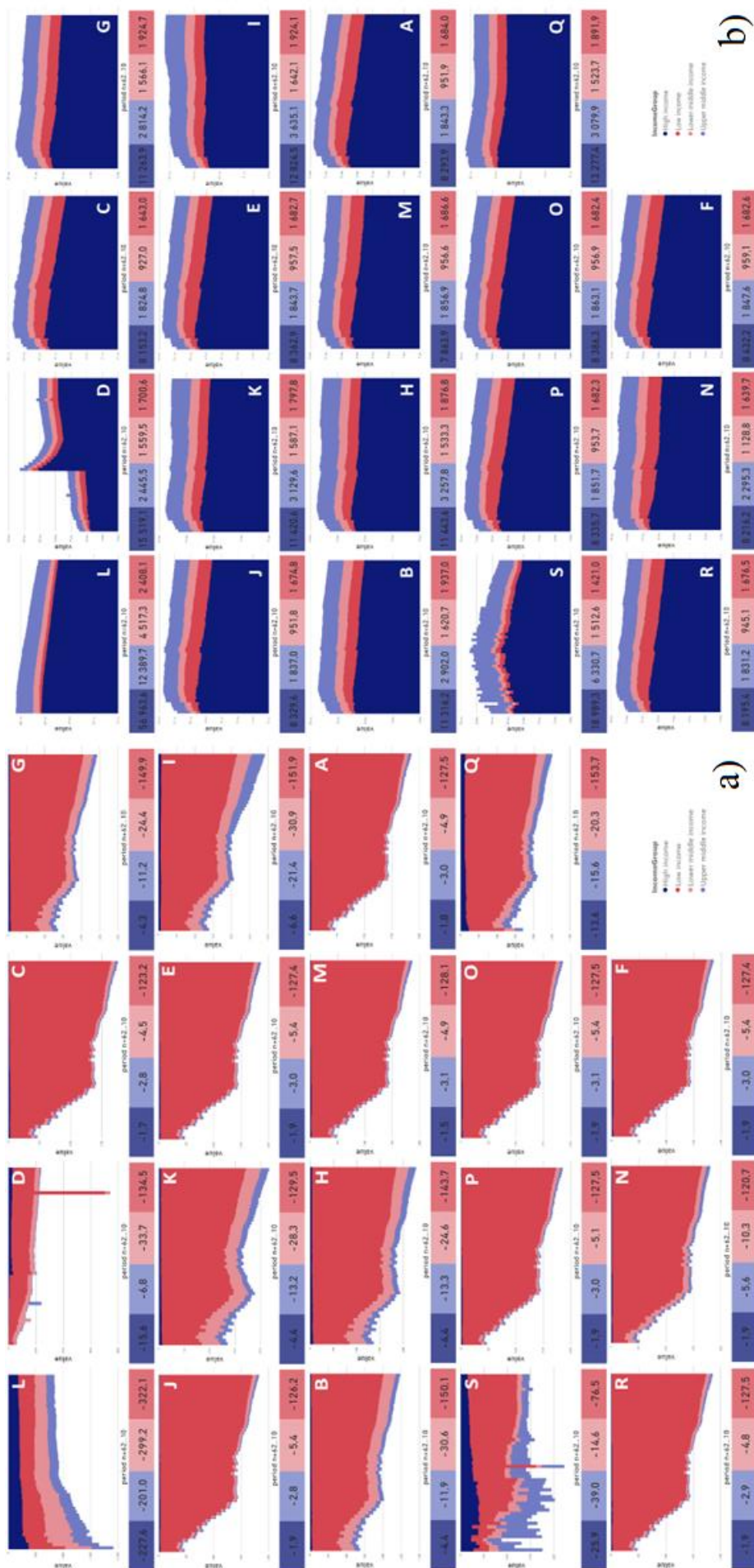


Рис 2.6 Коефіцієнт R у розрізі груп країн за доходом (а) показник $RMSE$ у розрізі груп країн за доходом (б) (за методикою Світового банку) – літери у відповідності до табл. 2.б.

Джерело: складено автором

Згідно рис. 2.6а відносна помилка у більшості моделей є значно більшою для країн з низьким рівнем доходу. Основними причинами цього є те, що:

- країни з низьким рівнем доходу часто стикаються зі складнішими економічними умовами, включаючи відсутність доступу до достатнього капіталу, недостатню інфраструктуру та обмежені можливості для інновацій;
- економіки країн з низьким рівнем доходу можуть бути більш вразливими до зовнішніх шоків, таких як коливання цін на сировинні товари, міжнародні фінансові кризи або зміни в світовій торгівлі, а також бути вразливими до внутрішніх політичних криз;
- тіньова економіка у малорозвинених країнах має значно вищу долю у порівнянні з високорозвиненими країнами;
- структура та організація таких економік значно відрізняється від розвинених країн у плані непропорційного переважання первинного сектору економіки і роботі при монополії чи олігополії, на відміну від монополістичної конкуренції та ідеальної конкуренції.

Проте багатосекторна модифікація моделі Солоу значно краще моделює країни з низьким рівнем доходу за рахунок розподілу на первинний, вторинний та третинний сектори (рис. 2.6а). Але при цьому помилка залишається суттєвою, оскільки проблема «тіньової» економіки та якості статистичних даних залишається. А останнє може стосуватися навіть розвинених країн.

У абсолютному вираженні помилка вища для країн з високим рівнем доходу (рис. 2.6b), оскільки в абсолюті значення капіталомісткості для розвинених країн значно вищі, більш залежні від міжнародної торгівлі та інвестицій, а також, в середньому зростають швидше за малорозвинені країни (відбувається явище дивергенції).

Для порівняння ефективності моделей економічного зростання застосовано ранжувальний підхід, за яким кожна модель отримала оцінку від 1 до 19 — від найнижчої до найвищої якості. Таке порівняння має умовний характер, оскільки не враховує вплив зовнішніх шоків, інституційних факторів, тіньової економіки та міжнародної інтеграції. Ранжування слід розглядати як інструмент для виявлення загальних тенденцій, а не як абсолютну оцінку ефективності моделей.

Згідно рис. 2.7 окрім розриву між моделями, що використовують норму заощадження та моделями, що використовують споживання можна виділити три основні моменти.

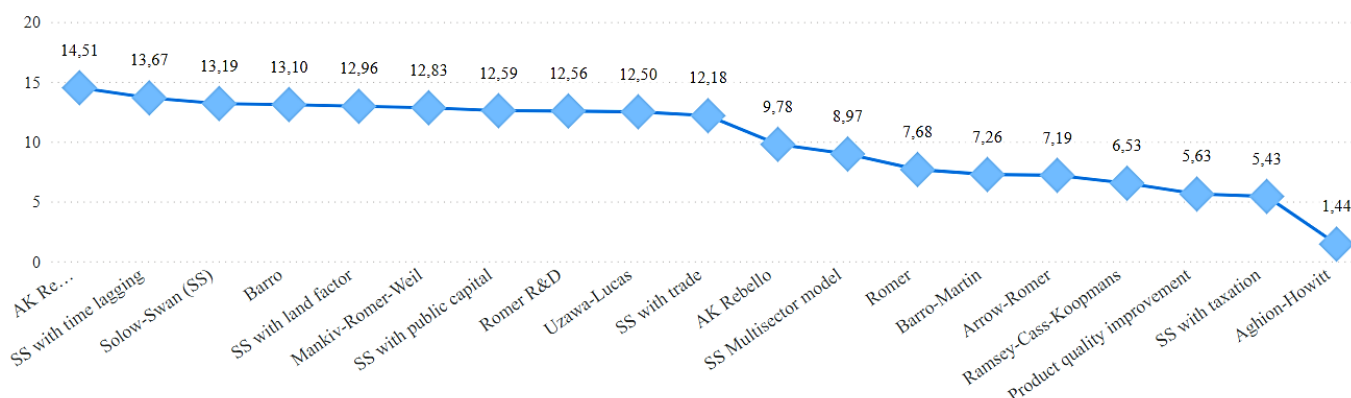


Рис. 2.7 Усереднений ранг у розрізі моделей економічного зростання.

Джерело: складено автором

По-перше, моделі з простішими виробничими функціями у середньому демонструють кращі результати, ніж складніші. Це не означає їх більшої адекватності, а свідчить про те, що зростання складності алгоритмів підвищує похибку через нереалістичні припущення та надмірну кількість гіпотез, слабо узгоджених із реальними процесами.

Важливим чинником є часовий лаг між заощадженнями та інвестиціями, який зазвичай триває кілька років і змінюється залежно від фази економічного циклу: у рецесії інвестиційна активність знижується, у фазі піднесення – зростає. Під час криз збільшується частка внутрішніх інвестицій, оскільки міжнародні капітальні потоки скорочуються.

У розвинених країнах значна частина національних заощаджень спрямовується за кордон через вищу дохідність інвестицій у країнах із нижчими витратами. Унаслідок цього зв'язок між внутрішніми заощадженнями та інвестиціями послаблюється, що знижує точність моделей економічного зростання.

З рис. 2.8 можна зробити кілька додаткових спостережень щодо впливу окремих компонентів виробничої функції на якість моделі:

- позитивний ефект на точність моделі спостерігається при включенні факторів людського капіталу, землі, а також при розділенні капіталу на державний та

приватний, що свідчить про важливість деталізації ключових ресурсів для кращого відображення економічних процесів;

- кожен виробничий фактор має власний, індивідуальний вплив на валовий випуск, спроба об'єднати кілька факторів під одним узагальнюючим параметром часто призводить до зниження точності моделі, оскільки втрачається інформація про їхні специфічні ефекти;
- наявність у виробничій функції факторів-констант або факторів-трендів помітно зменшує якість моделі, що пояснюється їхньою неспроможністю адекватно відображати динамічні зміни в економіці;
- включення сектору інновацій у виробничу функцію демонструє лише мінімальний позитивний вплив на кінцеву якість моделі, що може бути пов'язано з труднощами кількісного вимірювання інноваційної активності та її впливу на валовий випуск у коротко- та середньостроковій перспективі.

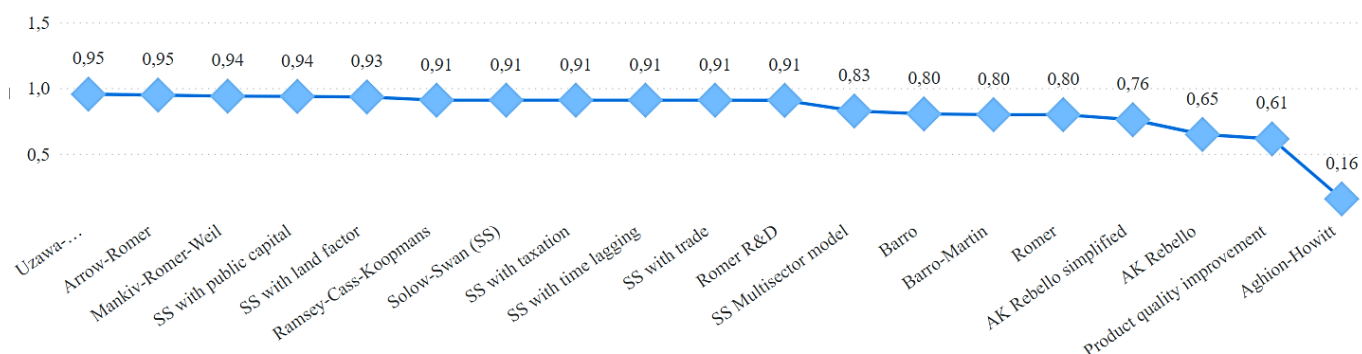


Рис. 2.8 Середній коефіцієнт детермінації виробничої функції у розрізі моделей економічного зростання.

Джерело: складено автором

По-друге, декомпозиція економіки на сектори не має однозначного впливу на точність моделей: багатосекторні моделі зазвичай демонструють вищу похибку, ніж односекторні. Водночас у слаборозвинених країнах багатосекторність може підвищувати точність через домінування первинного й вторинного секторів, для яких функція Кобба-Дугласа ефективно відображає вплив капіталу та праці. У високорозвинених економіках, де переважає сектор послуг, двох факторів – капіталу й праці – недостатньо: необхідно враховувати людський і публічний капітал, що визначають продуктивність. Для промислових секторів характерне зменшення ролі праці

через автоматизацію, що підвищує прогнозну похибку. Крім того, взаємозалежність секторів через потоки товарів і послуг потребує врахування міжсекторних зв'язків, ігнорування яких знижує точність моделювання.

По-третє, вплив зовнішньої торгівлі на динаміку капіталу проявляється через різні канали: імпорт переважно впливає на рівень споживання, тоді як експорт визначає обсяги заощаджень. У результаті додатній торгівельний баланс сприяє зростанню національних заощаджень, що, у свою чергу, збільшує обсяг внутрішніх інвестицій і стимулює накопичення капіталу.

Практичні результати свідчать, що включення міжнародної торгівлі до моделі впливає на її якість по-різному залежно від часових рамок: у довгостроковій перспективі це покращує точність моделі, тоді як у короткостроковому періоді часто спостерігається погіршення результатів (рис. 2.9). Високий рівень інтеграції країни у світову торгівлю підвищує її чутливість до зовнішніх криз і шоків, що нерідко призводить до неадекватного відтворення взаємозв'язку між внутрішнім інвестуванням і зовнішньоекономічними потоками.

Країни з різною структурою експорту реагують на зовнішні коливання по-різному. Якщо експорт переважно складається зі сировинної продукції, такі економіки виявляються менш вразливими до глобальних ризиків. Натомість країни, де головну частку експорту займає кінцева технологічна продукція, демонструють підвищену чутливість до зовнішніх змін, що обумовлює більшу нестабільність їхніх економічних показників у короткостроковій динаміці.

Модифікація моделі Солоу із врахуванням податків базується на припущенні, що податки компенсують заощадження. Проте в реальності податки впливають не лише на заощадження, а й на державні витрати, інвестиції та споживання, що робить таке спрощення недосконалим. Більш ефективним підходом є інтеграція податків безпосередньо у виробничу функцію, що дозволяє збалансувати вплив на приватний і державний капітал та точніше відтворювати економічні процеси.

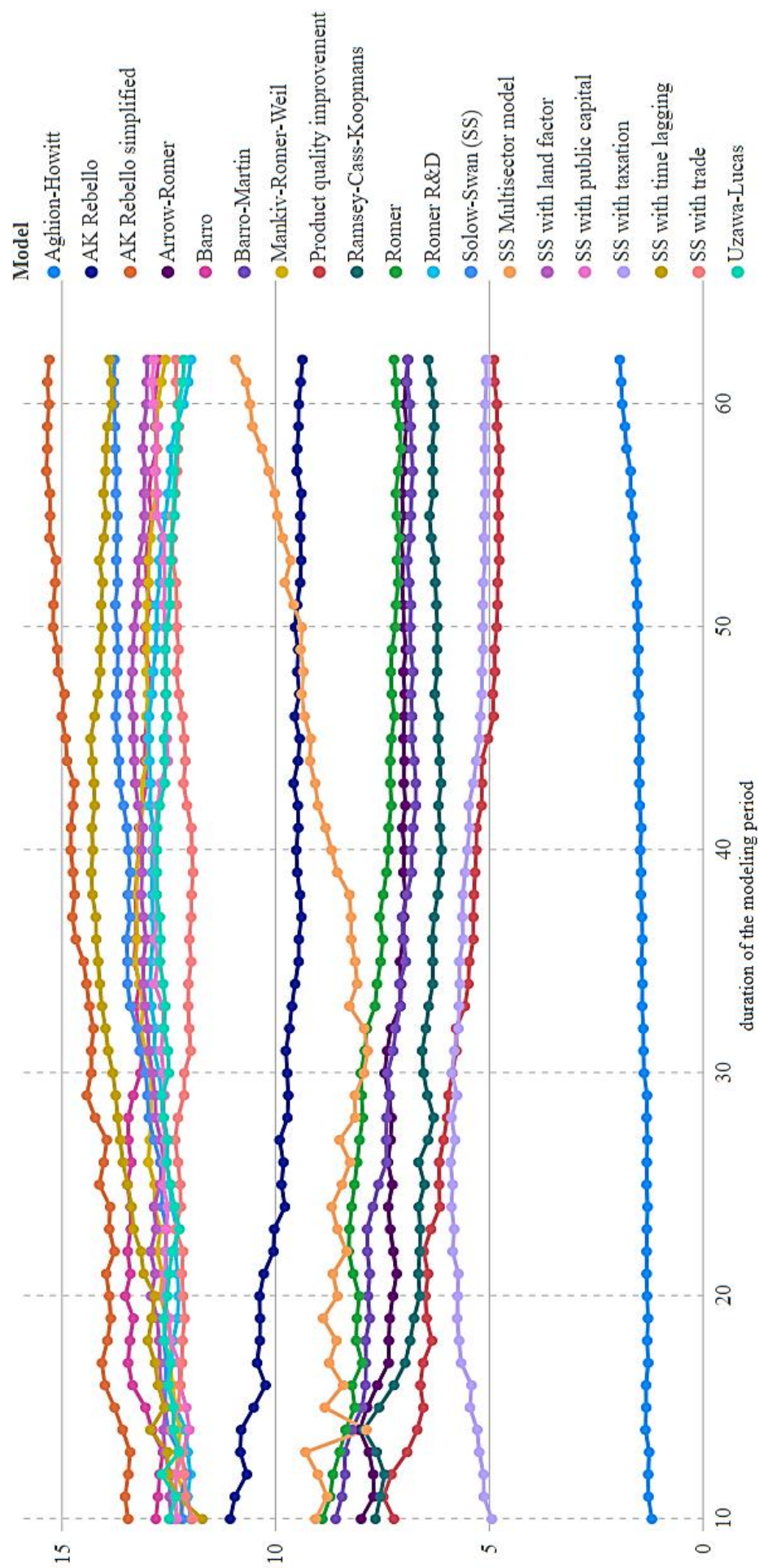


Рис 2.9 Усереднений ранг моделей економічного зростання за тривалістю періоду.

Джерело: складено автором

Крім того, аналіз модифікованої моделі дозволяє виділити низку важливих висновків щодо впливу окремих факторів на економічне зростання:

- інноваційний сектор має визначальний вплив, особливо у високорозвинених країнах, здатних імпортувати та адаптувати нові технології;
- первинний та вторинний сектори визначальні для країн із низьким та середнім рівнями доходів, оскільки вони формують основу економічної діяльності;
- фактор людського капіталу є критично важливим для розвинених країн, де виробництво потребує високого рівня освіти та кваліфікації працівників;
- для малорозвинених країн ключовим є фактор якості продукції, що пояснюється значними розривами у стандартах і технологічному рівні виробництва;
- державний капітал відіграє суттєву роль у країнах із низьким рівнем доходу, особливо у перехідних або авторитарних системах, де держава контролює значну частку економічних ресурсів і може впливати на розвиток інфраструктури та інвестицій.

У підсумку, модифікація моделі Солоу із врахуванням податків та диференціацією факторів виробництва дозволяє більш адекватно відображати специфіку економічного зростання різних груп країн та підвищує точність прогнозування.

Згідно з рис. 2.10, найнижчий рівень ризику – тобто ймовірність того, що прогнозне значення за моделлю економічного зростання не потрапить у довірчий інтервал із заданою ймовірністю помилки II роду – спостерігається у багатосекторній модифікації моделі Солоу. Це свідчить про високу надійність методу декомпозиції економічної системи на сектори у зменшенні прогнозного ризику. Багатосекторні моделі, завдяки своїм розширеним можливостям врахування численних факторів та взаємозв'язків між ними, дозволяють більш точно відтворювати складну структуру економіки. У результаті багатосекторна модифікація моделі Солоу забезпечує більш стабільні та надійні прогнози порівняно з одnoseкторними моделями.

Підсумовуючи усе вище зазначене, серед переваг розглянутих моделей можна виділити такі: інтеграція у модель факторів людського та публічного капіталу, землі,

окрім традиційних праці та фізичного капіталу; декомпозиція економічної системи на окремі сектори, включно з основними виробничими та інноваційним сектором; врахування міжнародної торгівлі при моделюванні динаміки капіталу; динамічність показників та виробничих факторів; а також можливість легкої модифікації існуючих моделей для адаптації до різних умов аналізу.

Серед основних обмежень розглянутих моделей можна виділити такі: припущення про закриту економіку є нереалістичним в умовах посилення глобалізації та міжнародного поділу праці; більшість моделей є одновимірними, тоді як багатовимірні підходи здатні точніше відтворювати економічні процеси; заощадження у конкретний період не збігаються з інвестиціями, навіть за умов закритої економіки; моделі ігнорують іноземні інвестиції та державні й міжнародні трансферти; не враховується явище тіньової економіки; економічні цикли, які суттєво впливають на обсяг капіталу, у моделях не враховані; податкові механізми застосовуються некоректно, а вплив податків на публічний капітал не моделюється; нарешті, типологія ринку, яка визначає формування попиту і пропозиції, практично не розглядається у сучасних моделях економічного зростання.

Враховуючи переваги та обмеження моделей економічного зростання, можна зробити висновок про їх обмежене практичне застосування, зумовлене високим рівнем похибки та наявністю нереалістичних передумов. Разом з тим, аналіз факторів у процесі оцінювання економіки дозволяє точніше враховувати складні взаємозв'язки, що впливають на розвиток країни, підвищуючи практичну значущість моделей. Для подальшого розвитку дослідження необхідно усунути нереалістичні припущення та розробити системні моделі, які базуються на строгій математичній обґрунтованості.

2.2. Адаптивна математична модель економічного зростання для відкритої економіки

Серед основних обмежень існуючих моделей економічного зростання можна виокремити кілька аспектів, що знижують їхню прикладну цінність і здатність адекватно відображати сучасні економічні процеси. По-перше, припущення про закриту економіку

не відповідає умовам глобалізації, інтеграції фінансових ринків і міжнародного поділу праці, через що результати таких моделей часто віддалені від реальності. По-друге, попри потенціал багатовимірних моделей точніше описувати взаємозв'язки між факторами виробництва, у практиці переважають спрощені одновимірні підходи, що обмежує їх пояснювальну силу. Також більшість моделей спрощено трактують заощадження, не враховуючи зв'язок з інвестиціями, іноземним капіталом і фінансовими потоками, які мають ключовий вплив на розвиток економіки, особливо у країнах, що розвиваються.

Крім того, часто ігнорується вплив тіньової економіки, яка може становити значну частку виробництва та впливати на розподіл ресурсів, а також циклічність розвитку, що визначає коливання капіталу у середньо- й довгостроковому періоді. Недостатньо враховується роль податкової системи, яка у більшості моделей розглядається поверхово або зовсім відсутня, попри її суттєвий вплив на формування публічного капіталу та стимулювання економічної активності. Нарешті, у моделях здебільшого не враховується структура ринку — рівень конкуренції, монополізації та особливості формування попиту й пропозиції. Відсутність цих елементів призводить до спрощеного уявлення про механізми функціонування економіки та знижує можливість практичного застосування моделей економічного зростання у реальних умовах національних господарств.

Переважає більшість відомих моделей економічного зростання характеризуються значною похибкою, що зумовлено як їхніми методологічними обмеженнями, так і складністю відображення реальних економічних процесів. Хоча окремі макроекономічні показники демонструють певну кореляцію, на практиці вона є неповною та нестійкою, що призводить до викривлень у прогнозах. Особливо суттєвою проблемою є те, що базові припущення класичних моделей, зокрема рівняння закритої економіки $Y = C + S$ та умова рівності заощаджень і інвестицій $S = I$, не відповідають сучасним реаліям.

Причиною цього є активний міжнародний рух капіталів, товарів, послуг та робочої сили, що формує глобалізоване середовище, де економіки перебувають у постійній взаємодії. Відтік або приплив інвестицій, значна роль зовнішньої торгівлі та міграційних процесів зумовлюють відхилення від умов закритої економіки, які передбачають автаркію та внутрішню збалансованість. Таким чином, спроби застосувати традиційні

моделі до аналізу відкритих економік неминуче призводять до високої похибки, оскільки вони ігнорують ключові зовнішні фактори, що визначають сучасну динаміку економічного зростання.

Щодо першої передумови, ми пропонуємо, що у випадку відкритої економіки споживчі витрати вже не обмежуються лише товарами та послугами внутрішнього виробництва. Вони формуються з двох ключових складових: по-перше, з обсягу товарів і послуг, створених у національній економіці та спожитих населенням чи підприємствами (C_d), а по-друге — з імпортованих товарів і послуг (Im), які надходять із зовнішніх ринків і задовольняють додатковий попит. Таким чином, загальний обсяг споживання у відкритій економіці можна представити у вигляді:

$$C = C_d + Im. \quad (2.32)$$

Аналогічно, у відкритій економіці формування заощаджень не обмежується лише внутрішнім ринком. До традиційної складової — заощаджень, що утворюються внаслідок реалізації продукції та послуг на внутрішньому ринку (S_d) — додається ще один важливий елемент, а саме доходи від експорту (Ex). Таким чином, загальний обсяг заощаджень можна подати у вигляді:

$$S = S_d + Ex. \quad (2.33)$$

Згідно методики розрахунку ВВП за витратами та врахуванням виразів (2.32) та (2.33), ми отримали:

$$\begin{aligned} Y &= C + S_d + Xn + G = C_d + Im + S_d + Ex - Im + G = \\ &= C_d + S_d + Ex + G = Y_p + G, \end{aligned} \quad (2.34)$$

де $Xn = Ex - Im$ — чистий експорт (різниця між експортом та імпортом),

G — державні витрати,

$Y_p = C_d + S_d + Ex$ — виробництво.

Припущення про рівність заощаджень та інвестицій не є повністю коректним, оскільки на практиці між ними часто існує значний розрив. По-перше, економіка є нелінійною системою, де неможливо забезпечити миттєве перетворення всіх накопичень у реальні інвестиції. Частина заощаджень зберігається у вигляді фінансових активів, резервів чи ліквідності, що знижує їх інвестиційний потенціал. По-друге, на

інвестиційну активність впливають фази економічного циклу: під час піднесення зростає готовність до вкладень, а у періоди спаду чи кризи невизначеність стримує інвестиції, навіть за наявності великих заощаджень. По-третє, вирішальне значення має рівень розвитку фінансових ринків. У країнах із слабкою фінансовою інфраструктурою частина заощаджень не перетворюється на інвестиції через обмежену доступність кредитів, нестачу надійних інструментів і неефективність банківської системи. Це створює інституційні бар'єри для спрямування фінансових ресурсів у виробництво.

Таким чином, рівність $S = I$, яка лежить в основі багатьох класичних моделей, у реальних умовах рідко виконується, що істотно знижує точність і практичну релевантність таких моделей економічного зростання.

У моделі ми пропонуємо використати показник сукупних заощаджень (M), який відображає загальний обсяг фінансових ресурсів, доступних в економіці, та враховує не лише заощадження поточного періоду, але й накопичення попередніх років. Таким чином, цей показник виступає інтегрованим виміром здатності економіки до нагромадження капіталу у довгостроковій перспективі.

Механізм його формування можна описати так: сукупні заощадження зростають на величину заощаджень, створених у поточному періоді (S), та зменшуються на величину інвестицій (I), які можуть мати як внутрішнє, так і зовнішнє походження. У спрощеному вигляді цей процес відображається схемою інвестиційних потоків:

$$S \rightarrow M \rightarrow I. \quad (2.35)$$

Тобто поточні заощадження спершу збільшують запас сукупних заощаджень, після чого з нього фінансуються інвестиційні витрати. Важливо підкреслити, що такий підхід дозволяє врахувати часовий лаг між моментом утворення заощаджень і їх фактичним перетворенням в інвестиції.

Найближчим емпіричним макроекономічним показником, який може бути використаний для оцінювання динаміки сукупних заощаджень, є грошова маса, оскільки вона відображає обсяг ліквідних ресурсів, доступних для використання в економіці, та слугує індикатором накопиченого фінансового потенціалу.

Інвестиції можна класифікувати на внутрішні I_{in} , зовнішні I_{out} та іноземні I_f відповідно до їхнього напрямку та джерела, при чому $I = I_{in} + I_{out}$.

Внутрішні інвестиції формуються тоді, коли кошти із заощаджень національних економічних суб'єктів — підприємств, домогосподарств чи державних інституцій — спрямовуються на фінансування проєктів у межах власної країни. Це може включати як розширення виробництва, модернізацію обладнання, так і розвиток інфраструктури чи інші напрями, що безпосередньо сприяють економічному зростанню.

Зовнішні інвестиції виникають у випадку, коли національні заощадження спрямовуються за кордон, тобто капітал використовується для фінансування підприємств, проєктів чи фінансових активів інших країн. Для внутрішньої економіки це означає відтік ресурсів, які могли б бути використані на національному рівні, проте для інвестора — це спосіб диверсифікувати ризики або отримати вищий дохід.

Іноземні інвестиції, своєю чергою, відображають зворотний процес — надходження капіталу з-за кордону у внутрішню економіку. Вони можуть здійснюватися у формі прямих іноземних інвестицій (створення підприємств, придбання активів, участь у бізнесі) або портфельних (купівля цінних паперів, інструментів фондового ринку). Такі інвестиції збільшують фінансові ресурси країни, стимулюють розвиток виробництва та сприяють інтеграції у світову економіку.

У сукупності ці три типи інвестицій формують складну систему руху капіталу, що визначає інтенсивність розвитку економіки та її взаємодію з глобальними фінансовими потоками.

Інші передумови збігаються з положеннями моделі Солоу-Свана та споріднених з нею моделей. Узагальнюючи наведене вище, у даній моделі враховуються такі передумови:

- економіка країни виробляє тільки один продукт Y , який використовується як для споживання C_d і для заощаджень S , так і на міжнародному ринку;
- економіка є відкритою для руху капіталів, робочої сили, товарів і послуг з іншими економіками;

- підприємства функціонують в умовах досконалої конкуренції та максимізують свій прибуток;
- економіка поділяється на виробничий та інноваційний сектори, причому виробничий сектор може поділятися на первинний (видобувна промисловість та сільське господарство), вторинний (промисловість та будівництво) та третинний (сфера послуг), інноваційний сектор займається створенням знань;
- споживання C складається з внутрішнього споживання C_d (витрати зі споживання товарів і послуг, що вироблені і реалізовані на внутрішньому ринку) та імпорту Im ;
- заощадження S складаються з внутрішніх заощаджень S_d (прибутки від реалізації товарів і послуг на внутрішньому ринку) та експорту Ex ;
- основним чинником економічного зростання є інвестиції I , які поділяються на внутрішні I_{in} , зовнішні I_{out} та іноземні I_f ;
- заощадження не автоматично трансформуються у інвестиції, а їх перехід залежить від економічних умов і може затягнутися в часі (інвестиційний лаг);
- час t змінюється неперервно.

Фактори виробництва – це ключові елементи економічної системи, від яких залежать обсяг, структура та ефективність створення благ і послуг. Їхня взаємодія – праці, капіталу, землі, підприємницьких здібностей і технологій – забезпечує перетворення ресурсів у продукцію, задоволення потреб суспільства та формує основу продуктивності, розвитку й конкурентоспроможності економіки. У нашій моделі основними факторами виробництва є приватний капітал K_{pr} , публічний капітал K_{gov} , людський капітал (знання) H , праця L та змінний фактор R .

Капітал являє собою сукупність матеріальних ресурсів, які забезпечують процес виробництва товарів і послуг, виступаючи одним із ключових факторів економічного зростання. У сучасній економічній теорії та практиці він поділяється на приватний та публічний.

Приватний капітал K_{pr} охоплює виробничі ресурси та основні засоби, що належать приватним особам і підприємствам. Його значення полягає у безпосередньому впливі на масштаби виробництва, рівень продуктивності та конкурентоспроможність бізнесу.

Саме приватні інвестиції в оновлення обладнання, розвиток технологій чи розширення виробництва здатні істотно підвищити ефективність господарської діяльності.

Публічний капітал K_{gov} , у свою чергу, формується за рахунок ресурсів, що перебувають у розпорядженні держави. Він спрямовується на розвиток інфраструктури, транспортних систем, енергетики, освіти, охорони здоров'я та інших сфер, які створюють умови для стабільного функціонування економіки. Вкладення держави в ці напрями не лише підвищують якість життя населення, а й опосередковано стимулюють економічну активність приватного сектору, забезпечуючи комплексний розвиток країни.

Приватний і публічний капітал взаємодіють у єдиній економічній системі: перший забезпечує безпосереднє виробництво, а другий створює середовище для його стійкого й ефективного розвитку.

Людський капітал H визначається як сукупність знань, навичок, компетенцій, досвіду та інтелектуального потенціалу, якими володіє населення. Він виступає одним із найважливіших факторів економічного розвитку, оскільки забезпечує можливості для інновацій, підвищення продуктивності праці та поліпшення загальної якості життя.

У рамках економічних моделей людський капітал розглядається як накопичення знань та інформації, наявних в економіці. Його обсяг зростає пропорційно інноваційній діяльності в секторі досліджень та розробок (R&D), оскільки саме ця діяльність стимулює генерацію нових знань і технологій. Важливо зазначити, що у моделі людський капітал не підлягає амортизації, тобто не зменшується автоматично з часом.

Обсяг інновацій у конкретному періоді прямо залежить від вкладень капіталу та праці в R&D-сектор. Чим більші інвестиції в дослідження та розвиток та активніші зусилля робітників, тим швидше зростає людський капітал, створюючи умови для стійкого економічного зростання та підвищення конкурентоспроможності економіки.

Праця L виступає одним із базових факторів виробництва і відображає фізичний та інтелектуальний внесок людини у процес створення товарів і послуг. Вона включає як кількісні аспекти — чисельність та тривалість робочого часу, так і якісні — професійні навички, досвід та продуктивність працівників. Ефективне використання праці безпосередньо впливає на обсяги виробництва, продуктивність та

конкурентоспроможність підприємств, а також формує основу для економічного зростання в масштабах країни.

Змінний фактор R у односекторній виробничій моделі відповідає за використання земельних ресурсів N . У цьому контексті фактор землі включає сукупність сільськогосподарських угідь, природних ресурсів та інших земельних активів, що можуть бути використані у виробництві, і вимірюється у грошовому вираженні. Він визначає потенціал економіки для виробництва сільськогосподарської продукції та інших товарів, залежних від природних ресурсів, і впливає на масштаб і ефективність виробничого процесу.

У моделі застосовується аналог функції Кобба–Дугласа, що обумовлено її простотою, універсальністю використання та високими статистичними характеристиками, що забезпечують точне відображення взаємозв'язку між факторами виробництва та обсягом виробництва. Така функція дозволяє ефективно моделювати залежність продукції від капіталу, праці, людського капіталу та земельних ресурсів, а також враховувати вплив інноваційної діяльності на економічний результат. Отже, у нашому випадку виробнича функція може бути записана у вигляді:

$$Y_p = AK_{pr}^{\alpha} K_{gov}^{\beta} H^{\gamma} N^{\varphi} L^{1-\alpha-\beta-\gamma-\varphi}, \quad (2.36)$$

де α – це коефіцієнт еластичності приватного капіталу,

β – коефіцієнт еластичності публічного капіталу,

γ – коефіцієнт еластичності людського капіталу,

φ – еластичність змінного фактору, у даному випадку – землі.

Вираз (2.36) узагальнює ортодоксальну виробничу функцію Кобба–Дугласа.

У багатосекторній моделі значення фактора RRR варіюється залежно від конкретного сектору економіки.

Для первинного сектору Y_{agr} , який охоплює галузі, що безпосередньо використовують природні ресурси — такі як сільське господарство, лісове господарство, рибне господарство та видобувна промисловість — фактором є земля, аналогічно до односекторної моделі. Земля визначає потенціал цих галузей для виробництва сировини та природних благ.

Для вторинного сектору Y_{ind} , що включає галузі переробки сировини та виробництва промислової продукції (металургія, хімічна, легка та харчова промисловість, машинобудування, будівництво), фактором є випуск первинного сектору Y_{agr} . Це підкреслює залежність промислового виробництва від обсягу сировинної бази, створеної аграрним та природоресурсним секторами.

Для третинного сектору Y_{serv} , який охоплює галузі надання послуг населенню та бізнесу (торгівля, транспорт, фінанси тощо), фактором є випуск вторинного сектору Y_{ind} . Таким чином, розвиток сфери послуг безпосередньо залежить від обсягів промислового виробництва, що забезпечує матеріальну та технологічну базу для надання послуг.

Для багатосекторної моделі виробнича функція набуває вигляду:

$$\begin{aligned} Y_p = & A_1 K_{agr}^{\alpha_1} K_{gov}^{\beta_1} H_{agr}^{\gamma_1} N^{\varphi_1} L_{agr}^{1-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1-\varphi_1} \\ & + A_2 K_{ind}^{\alpha_2} K_{gov}^{\beta_2} H_{ind}^{\gamma_2} Y_{agr}^{\varphi_2} L_{ind}^{1-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2-\varphi_2} \\ & + A_3 K_{serv}^{\alpha_3} K_{gov}^{\beta_3} H_{serv}^{\gamma_3} Y_{ind}^{\varphi_3} L_{serv}^{1-\alpha_3-\beta_3-\gamma_3-\varphi_3}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

причому $Y_p = Y_{agr} + Y_{ind} + Y_{serv}$, аналогічно $K_{pr} = K_{agr} + K_{ind} + K_{serv}$ та $H = H_{agr} + H_{ind} + H_{serv}$, $L = L_{agr} + L_{ind} + L_{serv}$.

Інноваційний сектор економіки має вирішальне значення для стимулювання довгострокового економічного зростання, оскільки він виступає джерелом нових ідей, технологій та ефективних підходів до вирішення економічних та соціальних проблем. Саме завдяки діяльності цього сектору формуються нові ринки, створюються робочі місця та активізується виробнича діяльність у різних галузях економіки.

Інновації охоплюють розробку нових продуктів, процесів або послуг, а також впровадження сучасних методів управління, організаційних структур і виробничих технологій. Вони дозволяють підприємствам підвищувати продуктивність, зменшувати витрати та покращувати якість продукції, що, у свою чергу, зміцнює їхню конкурентоспроможність на національних та міжнародних ринках.

Крім того, інновації створюють додаткову економічну вартість для суспільства, сприяють підвищенню рівня життя населення та стимулюють розвиток суміжних секторів економіки. Таким чином, інноваційний сектор є не лише джерелом технологічного прогресу, а й ключовим чинником стійкого економічного розвитку.

У моделі інноваційний сектор генерує нові знання за виробничою функцією:

$$\Delta H = BK_{rd}^v L_{rd}^{1-v}, \quad (2.38)$$

де K_{rd} – капітал, залучений в інноваційному секторі,

L_{rd} – праця, залучена в інноваційному секторі,

v – еластичність капіталу в інноваційному секторі.

Загальний капітал в економіці K_{full} можна знайти за формулою: $K_{full} = K_{rd} + K_{pr} + K_{gov}$, аналогічно з працею: $L_{full} = L_{rd} + L$.

Базове рівняння моделі Солоу є центральним інструментом теорії економічного зростання, що описує довгострокову динаміку економіки. Воно відображає зміни в обсязі капіталу під впливом інвестицій, які поповнюють ресурси, та амортизації, що їх зменшує. Це рівняння демонструє взаємозв'язок між накопиченням капіталу і темпами зростання, показуючи, як інвестиційна активність впливає на продуктивність і виробництво. Для зручності аналізу його часто виражають у питомих показниках, наприклад, через капіталомісткість — співвідношення капіталу до обсягу виробництва або чисельності працівників.

У класичній формі рівняння Солоу відображає баланс між інвестиціями та зносом капіталу, визначаючи механізми довгострокового зростання та умови досягнення стаціонарного стану. Воно є основою для розвитку модифікованих моделей, що аналізують політику стимулювання інвестицій і технологічного прогресу.

У багатовимірних моделях (зокрема, у моделі Менк'ю-Ромера-Вейла) ці принципи зберігаються, але доповнюються урахуванням взаємодії кількох факторів — капіталу, праці, технологій та ресурсів. Система диференціальних рівнянь описує динаміку кожного компонента, що забезпечує гнучкіший і реалістичніший аналіз економічного зростання, враховуючи міжсекторні зв'язки, інвестиції та технічний прогрес.

Оскільки в моделі капітал поділено на приватний та публічний, а процес інвестування здійснюється через загальні накопичення економіки, динаміку капіталу доцільно описувати через кілька взаємопов'язаних показників. Зокрема, це капіталомісткість приватного сектору, яка відображає обсяг капіталу, що припадає на одиницю праці у приватних підприємствах; капіталомісткість публічного сектору, що

характеризує вклад державних інвестицій на одиницю праці; та сукупні заощадження на одиницю праці, які інтегрують внески обох секторів у формуванні загального капіталу.

Такий підхід дає змогу точніше моделювати взаємодію приватних і державних інвестицій, оцінювати ефективність розподілу ресурсів між секторами та прогнозувати вплив політики стимулювання капіталу на довгострокове зростання. Використання питомих показників капіталомісткості забезпечує єдину основу для порівняння ефективності економік або секторів у межах країни.

Капіталомісткість приватного сектору, тобто співвідношення капіталу до кількості праці, є ключовим показником ефективності використання капіталу. Високе її значення свідчить про технологічну розвиненість і інвестиційну привабливість економіки, тоді як низьке – про недостатнє інвестування, неефективне використання ресурсів або низький рівень розвитку.

Приватний капітал зростає завдяки інвестиціям, як внутрішнім, так і іноземним, і зменшується через амортизацію основного капіталу. Такий підхід дозволяє аналізувати динаміку капіталу в часі та робити висновки щодо ефективності інвестиційної політики і перспектив довгострокового розвитку приватного сектору.

У формі рівняння це можна записати як:

$$k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \quad (2.39)$$

де $k_{pr} = \frac{K_{pr}}{L}$ – капіталомісткість приватного сектору,

d_{pr} – коефіцієнт амортизації приватного капіталу,

n – середній темп зростання зайнятої робочої сили,

$i_{in} = \frac{I_{in}}{L}$ – внутрішні інвестиції на одиницю праці,

$i_f = \frac{I_f}{L}$ – іноземні інвестиції на одиницю праці.

Капіталомісткість публічного сектору визначає, яка частка капіталу на одиницю праці використовується для забезпечення громадських послуг та інфраструктури, що надаються державними органами або установами. Вона відображає рівень інвестицій і ефективність управління капітальними ресурсами у сфері громадського сектору, включаючи будівлі, дороги, школи, медичні заклади та інші об'єкти суспільного

значення. Висока капіталомісткість публічного сектору може свідчити про значні інвестиції в розвиток громадських послуг і інфраструктури, що сприяє підвищенню якості життя населення та стимулює економічний розвиток у довгостроковій перспективі.

Зростання цього показника відбувається, головним чином, за рахунок надходжень у державний бюджет, таких як податки, тоді як зменшення капіталу публічного сектору відбувається через його вибуття або амортизацію. Окремо варто зазначити, що державні міжнародні трансферти, включаючи міжнародну допомогу та кредити, можуть впливати на капіталомісткість як у бік її збільшення, так і зменшення, залежно від умов використання та ефективності управління цими ресурсами.

Рівняння для капіталомісткості публічного сектору наступне:

$$k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \quad (2.40)$$

де $k_{gov} = \frac{K_{gov}}{L}$ – капіталомісткість публічного сектору,

$g = \frac{G}{L}$ – податки на одиницю праці,

d_{gov} – коефіцієнт амортизації для публічного капіталу,

tx – чисті державні міжнародні трансферти.

При чому $d_{pr} + d_{gov} = d$.

Сукупні заощадження на одиницю праці визначаються як обсяг заощаджень, що припадає на одного найманого працівника. Цей показник відображає загальну кількість коштів, які накопичуються працівниками після сплати податків та інших обов'язкових витрат, включаючи особисті заощадження, інвестиції у пенсійні фонди, акції та інші фінансові інструменти. Сукупні заощадження на одиницю праці є важливим індикатором фінансової стабільності економіки та визначають здатність економічних агентів здійснювати інвестиції для підтримки та розвитку виробництва.

Зростання цього показника відбувається за рахунок виробничої діяльності та відповідного розподілу доходів між споживанням і заощадженням. Одночасно сукупні заощадження можуть зменшуватися через інвестування у фізичний капітал як всередині економіки, так і за її межами, а також через сплату податків і інших обов'язкових

платежів. Такий підхід дозволяє комплексно оцінити фінансові ресурси, доступні для підтримки економічного зростання та розвитку як приватного, так і публічного сектору.

У математичному вигляді:

$$m^* = sAk_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \quad (2.41)$$

де $m = \frac{M}{L}$ – сукупні заощадження на одиницю праці,

s – норма накопичення,

$n_N = \frac{N}{L}$ – фактор землі на одиницю праці,

$i_{out} = \frac{I_{out}}{L}$ – зовнішні інвестиції на одиницю праці.

Людський капітал на одиницю праці відображає рівень навичок, знань та кваліфікації працівників, які використовуються в економічному процесі. Він інтегрує освіту, професійне навчання, досвід та інші форми інвестицій у розвиток людського потенціалу, що підвищують продуктивність праці. Показник людського капіталу на одиницю праці є важливим індикатором довгострокового економічного зростання, оскільки високий рівень кваліфікації працівників сприяє більш ефективному використанню фізичного капіталу, інноваційному розвитку та підвищенню конкурентоспроможності економіки.

Ріст людського капіталу відбувається за рахунок інвестицій у освіту та навчання, науково-дослідну діяльність, а також професійний розвиток працівників. Водночас він може зменшуватися через природне вибуття працівників, старіння кадрів або втрату навичок, що робить необхідним постійне оновлення та підтримку людського потенціалу. Моніторинг людського капіталу на одиницю праці дозволяє оцінювати ефективність політик у сфері освіти, професійного навчання та розвитку людських ресурсів, а також прогнозувати їхній вплив на загальний економічний розвиток.

Враховуючи вирази (2.38) та (1.21), аналогічне рівняння для моделі набуватиме вигляду:

$$h^* = Bk_{rd}^{\nu}l - nh, \quad (2.42)$$

де $k_{rd} = \frac{K_{rd}}{L_{rd}}$ – капіталомісткість у інноваційному секторі,

$l = \frac{L_{rd}}{L}$ - коефіцієнт залученості праці в інноваційному секторі.

Поєднавши вирази (2.39) – (2.42), отримуємо загальний вигляд моделі:

$$\begin{cases} k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^{\bullet} = sf(k) - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \\ h^{\bullet} = Bk_{rd}^v l - nh. \end{cases} \quad (2.43)$$

Для одnoseкторної моделі система рівнянь буде наступною:

$$\begin{cases} k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^{\bullet} = sAk_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \\ h^{\bullet} = Bk_{rd}^v l - nh. \end{cases} \quad (2.44)$$

Для багатосекторної модифікації $f(k) = A_1 \frac{L_{agr}}{L} k_{agr}^{\alpha_1} k_{gov}^{\beta_1} h_{agr}^{\gamma_1} n_N^{\varphi_1} + A_2 \frac{L_{ind}}{L} k_{ind}^{\alpha_2} k_{gov}^{\beta_2} h_{ind}^{\gamma_2} y_{arg}^{\varphi_2} + A_3 \frac{L_{serv}}{L} k_{serv}^{\alpha_3} k_{gov}^{\beta_3} h_{serv}^{\gamma_3} y_{ind}^{\varphi_3}$.

Врахування економічних циклів. Для коректного моделювання економічного зростання необхідно враховувати економічні цикли, які визначають динаміку розвитку та темпи зростання на різних етапах. Економічний цикл – це періодичні коливання економічної активності, що відображаються через зміни обсягів виробництва, зайнятості, цін та інвестиційної активності.

Їх поява зумовлена взаємодією численних чинників: коливанням споживчого попиту, що залежить від доходів і довіри населення; інвестиційними циклами, пов'язаними з очікуваннями прибутковості; змінами у грошовому обігу та кредитних умовах, що впливають на доступність фінансування. Значну роль відіграють і зовнішні фактори – фінансові кризи, зміни світового попиту, технологічні інновації, які трансформують виробничу структуру.

Економічний цикл охоплює чотири фази: підйом (експансію), пік, спад (рецесію) і кризу (Рис. 2.11). Підйом характеризується зростанням виробництва, зайнятості та доходів, що стимулює інвестиції й розвиток технологій. На піку економіка досягає максимального рівня активності, після чого настає рецесія – період сповільнення, зниження виробництва та скорочення зайнятості. Фаза кризи є найглибшою точкою

спаду, але водночас створює передумови нового циклу, оскільки зниження цін і оптимізація витрат відкривають нові інвестиційні можливості.

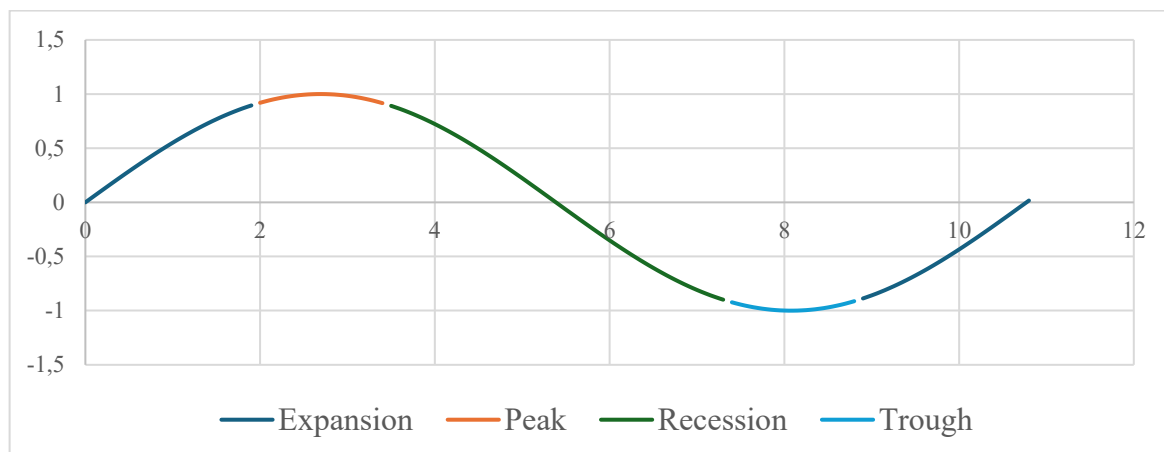


Рис 2.11 Фази економічного циклу.

Джерело: побудовано автором.

За тривалістю економічні цикли поділяють на кілька типів, що різняться механізмами формування та часовими масштабами (рис. 2.12). Така класифікація дає змогу глибше зрозуміти джерела коливань економічної активності та їхній вплив на макропроцеси.

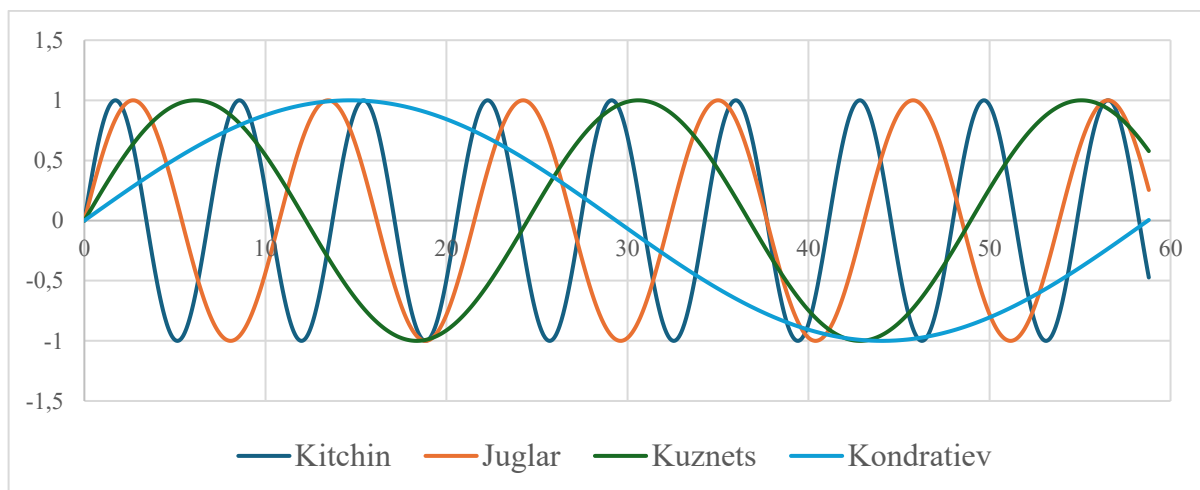


Рис 2.12 Економічні цикли за тривалістю.

Джерело: побудовано автором на основі [4,119-121]

Цикл Кітчина [119] (підприємницький) триває 3-7 років і відображає короткострокові коливання ділових настроїв. Його детермінують зміни споживчих уподобань, технологічні новації, інвестиційна активність та кредитні умови для малого й середнього бізнесу. Цей цикл пояснює реакцію економіки на короткострокові шоки та допомагає прогнозувати динаміку інвестицій.

Цикл Жюгляра [120] (зворотний) охоплює 7-11 років і характеризується коливаннями виробництва та зайнятості. Його зумовлюють зміни попиту й пропозиції, кредитна політика, динаміка цін і витрат. Цей тип циклу відображає середньострокові тенденції та вплив макроекономічних шоків на промисловість.

Цикл Кузнеця [4] (діловий) триває 15-25 років і пов'язаний зі структурними зрушеннями у виробництві, розвитком технологій, оновленням інфраструктури й посиленням конкуренції. Він відображає довгострокові тенденції економічного розвитку й важливий для стратегічного планування.

Цикл Кондратьєва [121] триває 40-60 років і відображає глибокі структурні та соціально-економічні трансформації, зумовлені інноваційними проривами, демографічними зрушеннями та глобальними процесами. Він дозволяє досліджувати довгострокові закономірності розвитку та оцінювати вплив великих реформ і технологічних змін на економічне зростання.

Економічні цикли суттєво впливають на темпи та стійкість економічного зростання, відображаючи періодичні коливання економічної активності й зміни макропоказників. У фазі експансії зростають інвестиції, виробництво та зайнятість, що підвищує ВВП, сприяє накопиченню капіталу, технологічному оновленню та зростанню продуктивності. Таким чином, підйом створює мультиплікативний ефект і посилює довгостроковий потенціал розвитку. Під час спаду чи кризи зниження виробництва, скорочення зайнятості й попиту зменшують інвестиційну активність і довіру бізнесу, що стримує оновлення технологій і перерозподіл ресурсів. Водночас рецесія виконує коригувальну функцію – усуває дисбаланси попереднього підйому, сприяє оптимізації витрат і раціональному перерозподілу капіталу.

Вплив циклів на економічне зростання залежить від їхньої тривалості. Короткі цикли Кітчина впливають на оперативні виробничо-інвестиційні рішення, середні цикли Жюгляра й Кузнеця формують тенденції промислового розвитку та зайнятості, а довгі цикли Кондратьєва визначають технологічні та соціально-економічні трансформації. Таким чином, циклічні коливання впливають не лише на короткострокову динаміку ВВП, а й на довгострокові тренди розвитку.

Прогнозування економічних показників із кількома циклічними компонентами різної тривалості є складним завданням, оскільки коливання циклів можуть накладатися або зміщуватися у часі, ускладнюючи виокремлення їхнього впливу на загальну динаміку. Основною метою моделювання в таких умовах є декомпозиція часового ряду на модельовану складову, що залежить від зовнішніх факторів, та циклічну — внутрішні періодичні коливання економічної системи.

Частково цю проблему розв'язують класичні моделі часових рядів, зокрема методи Хольта-Вінтерса [122,123] та Тейла-Вейджа [124], які враховують сезонні та циклічні коливання при прогнозуванні короткострокових тенденцій. Вони дозволяють виділяти трендову й циклічну компоненти на основі повторюваних патернів, але ефективні переважно тоді, коли цикли мають подібні періоди й лінійний характер взаємодії.

Якщо ж економічна система характеризується нелінійною динамікою або ефектом масштабу, адитивні моделі стають неадекватними, оскільки не відображають пропорційного впливу циклів на тренд і спотворюють результати для показників із великими амплітудами. У таких випадках доцільно використовувати моделі з мультиплікативною циклічною складовою, які забезпечують інтеграцію кількох циклічних компонент, визначення їхнього відносного внеску в загальну динаміку та адаптивне моделювання з урахуванням змін амплітуд і періодів у часі.

Модифікуємо модель з мультиплікативною складовою наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{t+h|t} &= (l_t + hb_t)s_{t+h+(k+1)} \\
 l_t &= \alpha(y_t/s_t) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
 b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\
 s_t &= s_{t1} * s_{t2} * \dots * s_{tn}, \\
 s_{t1} &= \gamma_1(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})) + (1 - \gamma_1)s_{t1-m1} \\
 &\dots \\
 s_{tn} &= \gamma_n(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})s_{t1} * \dots * s_{tn}) + (1 - \gamma_n)s_{tn-mn},
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

де l_t — рівняння рівня часового ряду,

b_t — рівняння тренду,

$s_{t1}, s_{t2}, \dots, s_{tn}$ — рівняння сезонностей/циклічностей,

коефіцієнти α , β та $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ є ступенями згладжування часового ряду, тренду та сезонностей/циклічностей відповідно, які можуть приймати значення від 0 до 1, $m_1, m_2, \dots, m_n$ – тривалість періодів сезонності.

Оскільки основних циклів існує 4, тому модель матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{t+h|t} &= (l_t + hb_t)s_{t+h+(k+1)} \\
 l_t &= \alpha(y_t/s_t) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\
 b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\
 s_t &= s_{t1} * s_{t2} * s_{t3} * s_{t4}, \\
 s_{t1} &= \gamma_1(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})) + (1 - \gamma_1)s_{t1-m1} \\
 s_{t2} &= \gamma_2(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})s_{t1}) + (1 - \gamma_2)s_{t2-m2} \\
 s_{t3} &= \gamma_3(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})s_{t1}s_{t2}) + (1 - \gamma_3)s_{t3-m3} \\
 s_{t4} &= \gamma_4(y_t/(l_{t-1} + b_{t-1})s_{t1}s_{t2}s_{t3}s_{t4}) + (1 - \gamma_4)s_{t4-m4},
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

де s_{ti} відповідає за цикл Кітчина, Жюгляра, Кузнеця, та Кондратьєва відповідно.

У сучасній економіці спостерігається явище, коли під час рецесій виробництво більшості країн не скорочується, але й не демонструє помітного зростання. Це зумовлено тим, що інвестиції залишаються на рівні, достатньому лише для компенсації зношення капіталу й підтримання існуючих потужностей, не створюючи надлишкових ресурсів для розвитку. Відтак саме інвестиційна недостатність стає головним обмеженням економічного зростання.

Тому при моделюванні економічної динаміки доцільно зосередитися на циклічності інвестицій, які виступають ключовим каналом передачі економічних коливань у виробництво. Їхні цикли відображають зміну ділової активності, очікувань прибутковості, рівня ризику та швидкість адаптації економіки до змін попиту й зовнішніх шоків.

На інвестиційну активність також впливають макроекономічні чинники: рівень відсоткової ставки, що визначає вартість капіталу, довіра до економічних перспектив, обсяг заощаджень і очікувана прибутковість проєктів. Урахування цих детермінантів у моделях дає змогу точніше прогнозувати інвестиційні потоки та їхній вплив на темпи зростання, а також оцінювати сценарії розвитку в умовах ринкових коливань і змін монетарної політики.

Врахувавши дані фактори, інвестиційна функція для внутрішніх інвестицій виглядатиме:

$$i_{in} = \frac{s_t \omega_{in} m}{(1+r)}, \quad (2.47)$$

де ω_{in} – готовність економічних агентів робити внутрішні інвестиції,
 r – відсоткова ставка.

Врахувавши вираз (2.47) та циклічність інвестицій у рівнянні (2.44), отримаємо:

$$\begin{cases} k_{pr}^* = \frac{s_t \omega_{in} m}{(1+r)} + s_t i_f - (d_{pr} + n) k_{pr}, \\ k_{gov}^* = g - (d_{gov} + n) k_{gov} + tx, \\ m^* = s A k_{pr}^{\alpha} k_{gov}^{\beta} h^{\gamma} n_N^{\varphi} - \left(g + nm + \frac{s_t \omega_{in} m}{(1+r)} + s_t i_{out} \right), \\ h^* = B k_{rd}^{\nu} l - nh. \end{cases} \quad (2.48)$$

Економічний ризик за адаптивною моделлю. Аналітичне розв’язання адаптивної моделі у загальному вигляді неможливе через нелінійність та взаємозалежність компонент основної системи рівнянь. У практиці це обмеження обходять, використовуючи стаціонарні характеристики моделі для оцінки довгострокових рівноважних показників.

При умові, що i_{in} , i_{out} , i_f , tx , k_{rd} та g будуть екзогенними, то їх стаціонарні величини будуть такими, як у таблиці 2.8.

Таблиця 2.8

Стаціонарні величини адаптивної моделі за умови екзогенності параметрів

k_{pr}^*	k_{gov}^*	m^*	h^*
$\left[\frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n} \right]$	$\left[\frac{g^* + tx^*}{d_{gov} + n} \right]$	$\left[\frac{s A k_{pr}^{*\alpha} k_{gov}^{*\beta} h^{*\gamma} n_N^{\varphi} - (g^* + i_{in}^* + i_{out}^*)}{n} \right]$	$\left[\frac{B k_{rd}^{*\nu}}{n} \right]$

Джерело: побудовано автором

Стаціонарний розмір приватного капіталу визначає рівень накопичень, за якого приріст капіталу компенсує амортизацію та зростання робочої сили. У моделях із приватним і публічним капіталом він є ключовим для оцінки потенціалу зростання. Його величина прямо залежить від сукупних інвестицій і обернено — від амортизації та демографічного приросту. Вищі інвестиції підвищують стаціонарний капітал і

продуктивність, тоді як швидке зростання населення чи високий знос зменшують його рівень.

Стаціонарний розмір публічного капіталу характеризує довгострокову стабільність інфраструктури та ефективність державного сектора. Він прямо пропорційний державним інвестиціям і податковим надходженням, а обернено – амортизації та приросту населення. Збільшення державних витрат чи податків сприяє розвитку інфраструктури, тоді як висока амортизація або демографічний тиск знижують капітал на душу населення.

Стаціонарний рівень сукупних заощаджень відображає частку доходу, спрямовану на відтворення приватного, публічного й людського капіталу. Він визначає стабільність і потенціал довгострокового розвитку, залежачи від продуктивності, наявних запасів капіталу та робочої сили. Державні витрати й зовнішні інвестиційні потоки зменшують частку доходу для накопичення. Нормування за темпом приросту населення дозволяє оцінити заощадження на працівника.

Стаціонарний людський капітал відображає рівень знань і навичок, що забезпечують сталість продуктивності. Він є окремим фактором виробництва, взаємодіє з приватним і публічним капіталом та залежить від інвестицій у науку й освіту. Чим більші ці інвестиції, тим вищий стаціонарний рівень людського капіталу; поділ на темп приросту населення дає змогу оцінити його на одного працівника.

Наступним етапом знайдемо усі аналітичні розв'язки компонент моделі, при аналогічній умові про екзогенні параметри i_{in} , i_{out} , i_f , tx , k_{rd} та g (табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Аналітичні розв'язки адаптивної моделі за умови екзогенності параметрів

Показник	Формула
$k_{pr}(t)$	$\left[(k_{pr0} - \frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n}) e^{-(d_{pr} + n)t} + \frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n} \right]$
$k_{gov}(t)$	$\left[(k_{gov0} - \frac{g^* + tx^*}{d_{pr} + n}) e^{-(d_{gov} + n)t} + \frac{g^* + tx^*}{d_{gov} + n} \right]$
$m(t)$	$e^{-nt} \left[m_0 + \int_0^t (s A k_{pr}^\alpha k_{gov}^\beta h^\gamma n_N^\varphi - (g + nm + i_{in} + i_{out})) e^{-nr} dr \right]$
$h(t)$	$\left[(h_0 - \frac{B l k_{rd}^{*v}}{n}) e^{-nt} + \frac{B l k_{rd}^{*v}}{n} \right]$

Джерело: побудовано автором

Нижні та верхні межі можна знайти за формулами у таблиці 2.10.

Таблиця 2.10

Нижні та верхні межі адаптивної моделі за умови екзогенності параметрів

Показник	Нижня межа	Верхня межа
$k_{pr}(t)$	$\left[(k_{pr0} - \frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n}) e^{-(d_{pr} + n)t} \right]$	$\left[k_{pr0} e^{-(d_{pr} + n)t} + \frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n} \right]$
$k_{gov}(t)$	$\left[(k_{gov0} - \frac{g^* + tx^*}{d_{pr} + n}) e^{-(d_{gov} + n)t} \right]$	$\left[k_{gov0} e^{-(d_{gov} + n)t} + \frac{g^* + tx^*}{d_{gov} + n} \right]$
$m(t)$	$e^{-nt} \left[m_0 + \int_0^t (s A k_{pr}^\alpha k_{gov}^\beta h^\gamma n_N^\varphi - (g + nm + i_{in} + i_{out})) e^{-nr} dr \right] - m^*$	$e^{-nt} \left[m_0 + \int_0^t (s A k_{pr}^\alpha k_{gov}^\beta h^\gamma n_N^\varphi - (g + nm + i_{in} + i_{out})) e^{-nr} dr \right] + e^{-nt} m^*$
$h(t)$	$\left[(h_0 - \frac{Blk_{rd}^{*v}}{n}) e^{-nt} \right]$	$\left[h_0 e^{-nt} + \frac{Blk_{rd}^{*v}}{n} \right]$

Джерело: побудовано автором

Наближений ступінь ризику розраховуватиметься за формулами в таблиці 2.11.

Таблиця 2.11

Наближений ступінь ризику адаптивної моделі за умови екзогенності параметрів

Показник	Формула
$R(k_{pr})$	$\sqrt{\frac{\left[k_{pr0} e^{-(d_{pr} + n)t} + \frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n} \right]}{\left[(k_{pr0} - \frac{i_{in}^* + i_f^*}{d_{pr} + n}) e^{-(d_{pr} + n)t} \right]}}$
$R(k_{gov})$	$\sqrt{\frac{\left[k_{gov0} e^{-(d_{gov} + n)t} + \frac{g^* + tx^*}{d_{gov} + n} \right]}{\left[(k_{gov0} - \frac{g^* + tx^*}{d_{pr} + n}) e^{-(d_{gov} + n)t} \right]}}$
$R(m)$	$\sqrt{\frac{e^{-nt} \left[m_0 + \int_0^t (s A k_{pr}^\alpha k_{gov}^\beta h^\gamma n_N^\varphi - (g + nm + i_{in} + i_{out})) e^{-nr} dr \right] + e^{-nt} m^*}{e^{-nt} \left[m_0 + \int_0^t (s A k_{pr}^\alpha k_{gov}^\beta h^\gamma n_N^\varphi - (g + nm + i_{in} + i_{out})) e^{-nr} dr \right] - m^*}}$
$R(h)$	$\sqrt{\frac{\left[h_0 e^{-nt} + \frac{Blk_{rd}^{*v}}{n} \right]}{\left[(h_0 - \frac{Blk_{rd}^{*v}}{n}) e^{-nt} \right]}}$

Джерело: побудовано автором

Покоординатний ризик відображає рівень невизначеності окремих факторів, що впливають на стаціонарні показники — приватний, публічний і людський капітал, а також сукупні заощадження. Його економічне значення полягає у визначенні найбільш чутливих елементів системи та формуванні пріоритетів політики управління ризиками.

Для приватного капіталу він показує чутливість накопичень до змін інвестицій, демографічного приросту та амортизації. Високий ризик свідчить про уразливість

капіталу до навіть незначних коливань цих параметрів. Для публічного капіталу ризик відображає залежність від державних витрат, податків і амортизації. Його зростання вказує на потребу у фінансовій стійкості та збалансованій бюджетній політиці для підтримки стабільності державного сектору. У людському капіталі покоординатний ризик визначає вплив змін у R&D, освіті, чисельності та якості робочої сили. Високі значення означають чутливість економіки до коливань інвестицій у знання та інновації. Для сукупних заощаджень ризик відображає залежність від усіх видів капіталу, темпу приросту населення, державних витрат і інвестиційних потоків. Високий рівень свідчить про можливу нестачу ресурсів для підтримання зростання, що підкреслює важливість стабільної фінансової та інвестиційної політики.

Метод оцінювання коефіцієнтів циклічності. Оцінювання впливу економічних циклів на зростання є складним через неоднорідність макроструктур різних країн. Традиційні підходи, засновані на усереднених показниках, не враховують специфіки національних коливань, тому кластерний аналіз споріднених економік дає ефективніші результати. Він дозволяє групувати країни за схожими характеристиками динаміки та оцінювати вплив циклів окремо для кожного кластера.

Такий підхід ґрунтується на виділенні економік із подібними патернами динаміки — амплітудою, тривалістю фаз і реакцією на шоки. Для кластеризації застосовуються показники зростання ВВП, зайнятості, інвестиційної активності, цін, експорту й імпорту. Це дає змогу усунути випадкові відхилення та сформувати однорідні групи для точнішого аналізу. Далі здійснюється економетричне оцінювання впливу циклів на економічне зростання шляхом моделювання часових рядів із виділенням циклічної складової. Отримані коефіцієнти відображають реальні механізми передачі коливань у межах структурно схожих економік, а не усереднені значення глобальних вибірок.

Даний підхід також враховує взаємозв'язки між країнами: держави з тісною торгівлею чи спільною фінансовою політикою демонструють синхронні коливання. Це дозволяє оцінювати ефект спільних шоків і простежувати, як циклічні фактори однієї країни впливають на інші в межах того самого кластера. Водночас він враховує структурні відмінності: економіки з високою інвестиційною активністю та технологічним потенціалом сильніше реагують на підйоми, тоді як менш розвинені —

слабше. Визначені коефіцієнти кількісно фіксують ці відмінності й підвищують точність моделей зростання. Це також покращує прогнозування динаміки виробництва, інвестицій і впливу спільних шоків для подібних економік, роблячи макропрогнози точнішими. Крім того, він дає змогу проводити стрес-тестування, оцінюючи, як зміна амплітуди чи тривалості циклу позначається на зростанні різних груп країн.

Проведення кластерного аналізу потребує глибокого розуміння статистичних методів і ретельної підготовки даних. Важливими етапами є стандартизація – приведення показників до єдиної шкали для коректного порівняння, і зменшення розмірності, що виділяє найінформативніші змінні, запобігаючи перевантаженню моделі та підвищуючи ефективність обробки.

При виборі змінних для кластерного аналізу необхідно враховувати специфіку країн. Перевагу варто надавати відносним показникам, наприклад, темпам зростання ВВП на душу населення, проте частково можуть використовуватись і абсолютні, якщо вони суттєво впливають на результати. Важливо забезпечити диверсифікацію змінних, що відображають різні аспекти економічної діяльності, та враховувати динаміку показників у часі, оскільки тенденції зростання мають ключове значення.

Враховуючи вимоги до даних для кластеризації та їх наявність у базі даних Світового банку [111], найбільш повними для аналізу економічного зростання країн світу ми обрали наступні показники: ВВП та приріст ВВП для відображення загального масштабу економіки та його динаміки; ВВП на душу населення та його приріст для врахування рівня розвитку без впливу розміру економіки; частки основних секторів економіки (с/г, промисловості та сфери послуг) для врахування спеціалізації країни та типу суспільства (доіндустріальне, індустріальне, постіндустріальне); капіталомісткість як основний показник економічного зростання, що використовується у відповідних моделях; показники, що ілюструють забезпеченість основними факторами виробництва, такими як капітал, праця та земля; приріст населення та його вікова структура, які визначають людський капітал; рівень інтеграції у світову торгівлю та характер інтеграції (експортер чи імпортер) пояснюються такими показниками, як частка зовнішньої торгівлі у ВВП та відношення імпорту до експорту; за аналогією додаємо індекси споживання та заощаджень, які характеризують внутрішнього споживача; а також

податкове навантаження, рівень інфляції, рівень витрат та доходів в економіці для врахування рівня управління. Детальний перелік змінних можна побачити в додатку И.

Зменшення розмірності важливо не тільки для оптимізації обчислювальних процесів, але й для уникнення проблеми мультиколінеарності. Мультиколінеарність виникає, коли атрибути є взаємозалежними, що може призвести до нестабільності та некоректних результатів кластеризації. Зменшення розмірності дозволяє усунути непотрібні залежності та посилити важливі зв'язки, тим самим полегшуючи процес виявлення однорідних груп об'єктів.

Існує велика кількість алгоритмів зменшення розмірності, але в дослідженні були протестовані алгоритми, які найчастіше згадуються в літературі: Аналіз головних компонент (PCA), Інкрементний PCA, Розріджений PCA, Ядерний PCA [125], Сингулярне розкладання (SVD) [126], Розріджена випадкова проекція (SRP) [127], Аналіз незалежних компонент (ICA) [128], ISOMAP [129], Багатовимірне масштабування (MDS) [130], Локальне лінійне вбудовування (LLE) [131] та t-SNE [132]. Короткий опис цих алгоритмів наведено в таблиці 2.12.

Для оцінки ефективності процесу зменшення розмірності використаємо показник кумулятивної поясненої дисперсії (2.49), який показує частку варіації вихідних даних, що залишилася після зменшення розмірності. Чим вищою залишається кумулятивна пояснена дисперсія, тим більше важливих інформаційних характеристик зберігається, і тим ефективнішим є зменшення розмірності.

$$var_c = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (2.49)$$

де m – кількість обраних факторів (вихідні ознаки, головні компоненти тощо), n – загальна кількість факторів, λ_i – власне значення коваріаційної матриці для обраного фактора i .

Таблиця 2.12

Алгоритми зменшення розмірності

Алгоритм	Короткий опис
1	2
Метод головних компонент	Статистичний метод зменшення розмірності даних, який шукає нові ортогональні змінні, так звані головні компоненти, що відображають найбільшу дисперсію в даних. Цей метод дозволяє виразити складні дані у вигляді меншої кількості компонентів, зберігаючи при цьому якомога більше інформації. Головні компоненти обираються таким чином, щоб відобразити максимальну варіацію вихідних даних, зменшуючи розмірність даних і спрощуючи їх аналіз [125]. Недоліком методу PCA може бути його чутливість до викидів та нелінійних залежностей у даних. PCA припускає лінійні зв'язки між ознаками, тому він може бути неефективним у випадках, коли зв'язки між даними не відповідають лінійним моделям. Крім того, важливо пам'ятати, що головні компоненти, отримані за допомогою PCA, не завжди легко інтерпретувати в термінах вихідних ознак.
Інкрементний PCA	Варіант методу головних компонент, призначений для ефективної обробки великих обсягів даних, коли неможливо вмістити весь набір даних в оперативну пам'ять. Замість того, щоб обчислювати коваріаційну матрицю для всього набору даних, Інкрементний PCA дозволяє обчислювати головні компоненти інкрементно, оптимізуючи використання пам'яті та ресурсів [125]. Недоліком Інкрементного PCA може бути деяка втрата точності порівняно з традиційним PCA, оскільки модель поступово адаптується до нових даних, і це може призвести до невеликих змін у головних компонентах. Слід також враховувати, що Інкрементний PCA вимагає додаткових обчислювальних ресурсів для підтримання моделі в актуальному стані, і в цьому випадку інтерпретація головних компонент може бути складнішою. Інкрементний PCA також може працювати гірше у випадках, коли структура даних суттєво змінюється з часом.
Розріджений PCA	Варіація методу головних компонент, яка враховує розрідженість (наявність багатьох нульових коефіцієнтів у векторах головних компонент). Основна мета - виділити лише невелику кількість значущих головних компонент, що дозволяє ефективно представити розріджені дані [125]. Недоліком Розрідженого PCA може бути складність налаштування параметрів для досягнення оптимального рівня розрідженості. Визначення правильного рівня розрідженості може бути нетривіальним завданням і вимагати додаткових експериментів. Крім того, у випадку недостатньої кількості даних або неправильного підбору параметрів Розріджений PCA може призвести до втрати важливої інформації або недооцінки реальної структури даних. Слід також враховувати, що Розріджений PCA може бути вимогливим до обчислювальних ресурсів, особливо при роботі з великими обсягами даних.
Ядерний PCA	Різновид аналізу головних компонент, який використовує ядра для перетворення даних у простір вищої розмірності, щоб лінійно нероздільні дані стали роздільними. Замість простого лінійного перетворення Ядерний PCA використовує функції ядра для відображення даних у вищий вимір, що дозволяє ефективно враховувати нелінійні зв'язки між ознаками. Різноманітні ядра, такі як поліноміальні, гаусові (RBF), сигмоїдні, косинусні тощо, можуть бути використані для виявлення різних форм нелінійних зв'язків у даних [125]. Недоліком Ядерного PCA можуть бути високі обчислювальні витрати, особливо при роботі з великими обсягами даних і складними функціями ядра. Вибір відповідного ядра також може бути нетривіальним завданням, а неправильний вибір може призвести до неадекватного зменшення розмірності та втрати важливої інформації. Інша проблема полягає в тому, що результати Ядерного PCA можуть бути менш інтерпретованими, оскільки нові головні компоненти представлені як комбінації функцій ядра, які не завжди зрозумілі з точки зору вихідних ознак.

Таблиця 2.12 (продовження)

1	2
Розкладання сингулярного значення	Це математичний алгоритм для розкладання вихідної матриці даних на добуток трьох матриць: матриці лівих сингулярних векторів, діагональної матриці сингулярних значень і матриці правих сингулярних векторів. Така декомпозиція дозволяє представити вихідну матрицю як добуток цих трьох компонент, що дозволяє виявити структурні властивості та взаємозв'язки в даних. SVD широко використовується в рекомендаційних системах, обробці зображень та інших сферах, де важливо виділити основні аспекти великих обсягів даних [126]. Недоліками методу SVD є вимога значних обчислювальних ресурсів і пам'яті, особливо при роботі з великими і розрідженими матрицями. Також важливо пам'ятати, що SVD може бути чутливим до викидів у даних, що може призвести до неадекватного представлення головних компонент.
Розріджена випадкова проекція	Метод зменшення розмірності даних, який використовує розріджені матриці проекцій для перетворення вхідних векторів у простір меншої розмірності. Цей метод ефективний для великих обсягів даних, оскільки він застосовує випадкову проекцію до вхідних ознак, створюючи компактне та обчислювально ефективне представлення даних [127]. Недоліком методу розрідженої випадкової проекції може бути втрата точності порівняно з іншими методами зменшення розмірності, такими як PCA або t-SNE. Оскільки вибір проекцій є випадковим, SRP не завжди може ефективно враховувати особливості та структуру конкретних даних. Слід також мати на увазі, що залежно від розмірності та структури даних, SRP може потребувати додаткового налаштування параметрів для досягнення оптимальних результатів, що може бути проблемою при використанні методу в практичних додатках..
Незалежний компонентний аналіз	Метод обробки сигналів та аналізу даних, спрямований на виявлення незалежних компонентів, з яких складається вхідний сигнал або набір даних. Ідея полягає в тому, щоб розділити загальний сигнал або дані на набір незалежних компонент, що дозволяє виявити приховані фактори, які спричиняють вихідний сигнал [128]. Недоліками методу аналізу незалежних компонент можуть бути високі обчислювальні витрати, особливо при роботі з великими обсягами даних. Також важливо пам'ятати, що МНК чутливий до припущень про нормальний розподіл даних та незалежність компонент. У випадках, коли ці умови не виконуються, результати ІКА можуть бути менш ефективними або потребувати додаткової обробки. Крім того, інтерпретація отриманих незалежних компонент може бути складною, особливо якщо статистичні властивості даних не є чітко відомими.
ISOMAP	ISOMAP розшифровується як ізометричне картографування. Це нелінійний метод зменшення розмірності даних, який зберігає геодезичні відстані (враховує кривизну простору, дозволяючи точніше вимірювати відстані між точками, які не можуть бути адекватно описані прямими евклідовими відстанями) між усіма парами точок у вихідному просторі [129]. На відміну від лінійних методів, таких як PCA, ISOMAP фіксує нелінійні зв'язки, які можуть бути критичними для наборів даних зі складною структурою. Недоліками методу ISOMAP можуть бути високі обчислювальні витрати, особливо при роботі з великими обсягами даних, оскільки він вимагає обчислення геодезичних відстаней між усіма парами точок. Це може призвести до значного збільшення часу обчислень і вимог до ресурсів. Слід також враховувати, що ISOMAP чутливий до шуму в даних і впливу викидів, що може вплинути на якість результату. Крім того, вибір параметрів алгоритму, таких як кількість найближчих сусідів для розрахунку геодезичних відстаней, може потребувати ретельного налаштування для досягнення оптимальних результатів.

Таблиця 2.12 (продовження)

1	2
Багатовимірне масштабування	Метод зменшення розмірності, який відображає відстані між об'єктами у вихідному просторі в їхні нові, низькорозмірні координати. Основна мета MDS - зберегти подібність відстаней між об'єктами у вихідному та зменшеному просторах. MDS намагається зберегти евклідові відстані між точками даних. Він мінімізує різницю між відстанями у високowymірному просторі та відповідними відстанями у зведеному просторі [130]. Недоліками методу багатовимірного масштабування можуть бути обчислювальні витрати, особливо при роботі з великими обсягами даних, оскільки він вимагає обчислення всіх можливих пар відстаней між об'єктами. Це може призвести до значного збільшення часу обчислень і вимог до ресурсів. Слід також враховувати, що MDS може бути чутливою до шуму та викидів у даних, що може вплинути на точність результатів. Вибір метрики відстані та інших параметрів MDS може вимагати ретельного налаштування для досягнення оптимальних результатів у конкретному контексті аналізу.
Локальне лінійне вбудовування	Метод нелінійного зменшення розмірності даних, який зберігає локальні лінійні структури в даних. LLE розглядає кожен приклад даних як лінійну комбінацію параметрів його найближчих сусідів і знаходить оптимальні вагові коефіцієнти для представлення цього прикладу в низьковимірному просторі. Основна ідея полягає у збереженні локальних зв'язків між сусідніми точками при зменшенні розмірності, що дозволяє врахувати нелінійні структури в даних [131]. Недоліками методу локального лінійного вбудовування може бути чутливість до вибору параметрів, таких як кількість сусідів та розмірність низьковимірного простору. Неправильно вибрані параметри можуть призвести до неадекватного представлення даних і втрати важливої інформації. Важливо також пам'ятати, що LLE може бути обчислювально інтенсивним, особливо при роботі з великою кількістю даних або в задачах з великою кількістю сусідів для кожної точки. Іншим недоліком може бути те, що LLE менш ефективний у випадках, коли глобальна структура даних є більш важливою, ніж локальні зв'язки.
t-SNE	Метод вбудовування для зменшення розмірності даних, який має на меті відобразити схожі об'єкти, розташовані близько один до одного, у низькорозмірному просторі. t-SNE працює, намагаючись зберегти сусідство між точками у вихідному та зменшеному просторі. Основна ідея полягає у збереженні схожості між точками шляхом збільшення ймовірності сусідства для схожих точок та зменшення її для несхожих точок [132]. Недоліками методу t-SNE можуть бути його обчислювальна складність і час виконання, особливо при роботі з великими обсягами даних. Також важливо враховувати, що t-SNE може вибірково відображати відстані між точками у високowymірному просторі, що може призвести до надмірного фокусування на локальних структурах. Також t-SNE має властивість змінювати схожість об'єктів, що може призвести до спотворення деяких відстаней і структур при зменшенні розмірності. Крім того, вибір параметрів алгоритму може потребувати досліджень та експериментів для досягнення оптимальних результатів.

Джерело: побудовано автором на основі [125-132].

Тепер перейдемо до якісного аналізу методів кластеризації, які дозволяють виявити внутрішню структуру даних і згрупувати об'єкти на основі їхньої схожості. Розглянемо основні підходи до кластеризації, їх переваги та недоліки, а також критерії, за якими оцінюється якість отриманих кластерів.

Для дослідження нами було обрано такі алгоритми кластеризації: К-середніх, Міні-вибірка К-середніх [133], Спектральна кластеризація [134], Метод Уорда [135], BIRCH [136], Агломеративна кластеризація [137], Метод гауссової суміші (GMM) [138], Поширення спорідненості [139], Середній зсув [140], DBSCAN [141], HDBSCAN [142] та OPTICS [143]. Короткий опис цих алгоритмів наведено в табл. 2.13.

Після ознайомлення з основними методами кластеризації виникає потреба обрати найоптимальніший з них. Експертна думка не завжди допоможе в цьому питанні, оскільки існує багато нюансів з предметною областю та даними дослідження, тому є ризик, що не буде обрано найоптимальнішого методу. З цієї причини виникає потреба в числовій оцінці якості результатів кластеризації. У цьому дослідженні було використано агреговану оцінку якості кластеризації на основі 3 показників, а саме: індексу Девіса-Болдіна [144], індексу Калінського-Харабаша [145] та коефіцієнту Силуету [146].

Індекс Девіса-Болдіна [144] - це метрика для оцінки якості кластеризації в машинному навчанні. Цей індекс враховує відстані всередині кластерів та між центроїдами кластерів, щоб визначити, наскільки добре визначені та відокремлені кластери в задачі кластеризації. Зокрема, індекс Девіса-Болдіна розраховується як відношення середньозваженого значення внутрішніх відстаней між точками в одному кластері до зовнішніх відстаней між кластерами. Чим нижчий індекс, тим краще відокремлені та визначені кластери. Індекс розраховується за формулою:

$$DBI = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_{j \neq i} \frac{S_i + S_j}{M_{i,j}}, \quad (2.50)$$

де N – кількість кластерів,

S_i – середня відстань від кожної точки в кластері C_i до центроїда кластера A_i ,

$M_{i,j}$ – відстань між центроїдами A_i та A_j кластерів C_i та C_j , відповідно.

S_i обчислюється як:

$$S_i = \frac{1}{T_i} \sum_{l=1}^{T_i} \|X_i^l - A_i\|, \quad (2.51)$$

де T_i розмір кластера C_i ,

X_i^l є точкою l що належить кластеру C_i ,

$\|X_i^l - A_i\|$ позначає евклідову відстань між векторами точки X_i^l і центроїд кластера A_i .

$M_{i,j}$ обчислюється як евклідова відстань між центроїдами кластерів C_i та C_j :

$$M_{i,j} = \|A_i - A_j\|. \quad (2.52)$$

Індекс Калінського-Харабаша [145] базується на внутрішньо- та міжкластерних відстанях у просторі ознак і використовується для визначення того, наскільки добре визначені та відокремлені кластери. Вищі значення індексу свідчать про кращу якість кластеризації. Індекс розраховується за формулою:

$$CH = \frac{\sum_{i=1}^N T_i \|A_i - A\|}{N - 1} \cdot \frac{T - N}{\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{T_i} \|X_i^l - A_i\|}, \quad (2.53)$$

де T – розмір всього набору даних,

A – центроїд всього набору даних.

У формулі (2.53) перший множник відповідає міжкластерній дисперсії, а другий множник - величині, оберненій до внутрішньокластерної дисперсії.

Коефіцієнт Силуету [146] враховує ступінь відокремленості між кластерами та однорідності всередині кластерів і виражається числовим значенням від -1 до 1. Високе значення коефіцієнта Силуету вказує на те, що об'єкти в кожному кластері добре відокремлені один від одного і належать до однорідної групи, тоді як низьке значення вказує на неузгодженість і перекриття між кластерами. Коефіцієнт Силуету розраховується за формулою:

$$SC = \max_i \frac{1}{T_i} \sum_{l=1}^{T_i} \frac{b(X_i^l) - a(X_i^l)}{\max\{a(X_i^l), b(X_i^l)\}}, \quad (2.54)$$

де $a(X_i^l)$ середня відстань між точками X_i^l кластера C_i та всі інші пункти цього кластера:

$$a(X_i^l) = \frac{1}{T_i - 1} \sum_{k=1, k \neq l}^{T_i} \|X_i^l - X_i^k\|, \quad (2.55)$$

де $b(X_i^l)$ мінімальна середня відстань між точками X_i^l кластера C_i і всіх точок кожного з інших кластерів:

$$b(X_i^l) = \min_{j \neq i} \frac{1}{T_j} \sum_{k=1}^{T_j} \|X_i^l - X_j^k\|. \quad (2.56)$$

Після розрахунку показників ефективності (2.50), (2.53) та (2.54) ми матимемо їх масив даних у розрізі кожного методу кластеризації та кожного змінного параметру методу (зокрема, кількість кластерів тощо). Оскільки всі розраховані індекси мають різні порядки величини, то складати їх між собою або вираховувати середнє значення некоректно. Тому запропоновано агрегований показник (2.57), який буде враховувати величину та напрямок кожного з індексів якості кластеризації (чим вищі індекси SC та CH, тим кращі результати, і навпаки з індексом DBI):

$$AV = \frac{SC - \overline{SC}}{\sigma_{SC}} + \frac{CH - \overline{CH}}{\sigma_{CH}} - \frac{DBI - \overline{DBI}}{\sigma_{DBI}}, \quad (2.57)$$

де $\overline{SC}$ – середнє значення індексу SC серед усіх експериментів (для різних алгоритмів та їх параметрів),

σ_{SC} – стандартне відхилення індексу SC для всіх проведених експериментів,

$\overline{CH}$ – середнє значення індексу CH,

σ_{CH} – стандартне відхилення індексу CH,

$\overline{DBI}$ – середнє значення індексу DBI,

σ_{DBI} – стандартне відхилення індексу DBI.

Таблиця 2.13

Алгоритми кластеризації

Алгоритм	Короткий опис
1	2
К-середніх	Алгоритм кластеризації К-середніх є одним з найпоширеніших методів групування в машинному навчанні. Він заснований на поділі набору даних на К кластерів, де К - це наперед визначена кількість кластерів. Починаючи з початкових центроїдів кластерів, алгоритм ітеративно оновлює приналежність об'єктів до кластерів та розташування центроїдів, щоб мінімізувати суму квадратів відстаней між об'єктами та призначеними їм центроїдами. Процес продовжується до збіжності, коли склад кластерів і розташування центроїдів перестають суттєво змінюватися. Алгоритм К-середніх є ефективним і швидким, але він чутливий до початкових точок, а його результати залежать від заданої кількості кластерів [133]. Недоліками методу К-середніх можуть бути чутливість до початкового розташування центроїдів, що може вплинути на кінцевий результат і варіації кластеризації при нових запусках алгоритму. Крім того, К-середні припускають, що кластери однорідні і мають сферичну форму, що може зробити його менш ефективним для деяких типів даних, де кластери можуть мати складну форму або нерівномірну щільність. Крім того, алгоритм чутливий до викидів і шуму в даних, що може призвести до неточної кластеризації. Вибір кількості кластерів також може бути нетривіальним завданням і вимагати попередньої експертизи або використання додаткових методів для його визначення.
Міні-вибірка К-середніх	Це варіант К-середніх, призначений для обробки великих обсягів даних з використанням міні-вбірок замість повного набору даних. Алгоритм базується на випадковому виборі невеликих підмножин даних і використанні їх для оновлення центроїдів кластерів та належності об'єктів до кластерів на кожній ітерації. Це робить алгоритм швидшим і масштабованішим, добре підходить для великих наборів даних, демонструючи при цьому точність, подібну до звичайних К-середніх [133]. Недоліком Міні-вбірки К-середніх може бути втрата точності порівняно з повною версією К-середніх. Оскільки центроїди оновлюються на основі підвбірок даних, це може вплинути на стабільність і збіжність алгоритму, особливо в ситуаціях, коли в даних є великі або розріджені кластери. Також слід враховувати, що через використання випадкових підвбірок результати Міні-вбірки К-середніх можуть бути менш детальними і чутливими до початкових умов порівняно з повною версією алгоритму. Вибір параметрів, таких як розмір підвбірок (розмір партії), може потребувати додаткового налаштування для досягнення оптимальних результатів у конкретному випадку.
Спектральна кластеризація	Метод групування даних, заснований на використанні властивостей спектральної теорії графів. Алгоритм базується на перетворенні матриці подібності між об'єктами у структуру графа, де вершини представляють об'єкти, а ребра відображають рівні їхньої подібності. Аналізуючи власні вектори матриці графа, об'єкти поділяються на кластери за допомогою методу власних значень та власних векторів. Спектральна кластеризація ефективна для виявлення нестандартних і нелінійних структур у даних [134]. Недоліками методу спектральної кластеризації можуть бути високі обчислювальні витрати, особливо при роботі з великою кількістю даних або простором високої розмірності. Обчислення власних векторів та власних значень може бути ресурсномістким завданням. Крім того, вибір параметрів, таких як кількість кластерів або тип подібності між об'єктами, може вимагати експертних оцінок і ретельного налаштування для досягнення оптимальних результатів. У випадку великих обсягів зашумлених даних або викидів спектральна кластеризація може працювати менш ефективно, оскільки вона може намагатися включити шум у структуру кластерів.

Таблиця 2.13 (продовження)

1	2
Метод Уорда	Метод ієрархічної кластеризації Уорда - метод, заснований на мінімізації внутрішньокластерної дисперсії в процесі групування даних. Суть методу полягає в обчисленні дисперсії об'єктів всередині кластерів і об'єднанні тих кластерів, які призводять до мінімізації збільшення загальної внутрішньокластерної дисперсії після їх об'єднання [135]. Недоліками методу Уорда можуть бути його чутливість до викидів та складність обчислень на великих обсягах даних. За наявності викидів або шуму цей метод може давати некоректні або менш стійкі кластери. Також важливо пам'ятати, що метод Уорда не завжди ефективний для даних зі складною нееліптичною формою кластерів. Крім того, вибір відстані або міри подібності між кластерами може вплинути на результат, і навіть при ретельному виборі цих параметрів метод Уорда може виявитися гіршим за інші методи кластеризації в деяких сценаріях.
BIRCH	Це метод, призначений для ефективної кластеризації великих обсягів даних. Алгоритм базується на побудові дерева, відомого як CF-дерево (Дерево ознак кластеризації), де кожен вузол представляє кластер, а листя - групу об'єктів. BIRCH використовує техніку обчислення вектора головних характеристик (CF-значень) для кожного вузла дерева, що дозволяє ефективно обробляти та оновлювати кластери навіть при великому обсязі даних [136]. Недоліком методу BIRCH може бути нижча точність кластеризації порівняно з деякими іншими методами, особливо в ситуаціях, коли кластери мають складну форму або розташовані в ієрархічній структурі. Через використання глобальних та локальних порогових значень для визначення кластерів, BIRCH не завжди може ефективно розпізнавати та відокремлювати кластери з різною щільністю та формою. Крім того, вибір таких параметрів, як радіус впливу та поріг розділення, може вимагати значного налаштування для досягнення оптимальних результатів у конкретному контексті.
Агломеративна кластеризація	Суть методу агломеративної (ієрархічної) кластеризації полягає в послідовному об'єднанні об'єктів у кластери на основі міри їх подібності або відстані між ними. На початковому етапі кожен об'єкт вибірки розглядається як окремий кластер. Далі алгоритм ітеративно об'єднує між собою два найбільш схожі (тобто найближчі за обраною метрикою — наприклад, евклідовою відстанню) кластери. Після кожного об'єднання кількість кластерів зменшується на один, і цей процес триває доти, доки всі об'єкти не будуть об'єднані в один спільний кластер [137]. Важливою особливістю методу є використання різних способів обчислення відстані між кластерами (методів зв'язку), таких як: метод найближчого сусіда (single linkage), метод найдальшого сусіда (complete linkage), метод середнього зв'язку (average linkage). Для визначення оптимальної кількості кластерів аналізують дендрограму. Зокрема, шукають найбільший “стрибок” (тобто найбільшу вертикальну відстань) між рівнями об'єднання кластерів. Це означає, що на цьому етапі відбувається об'єднання досить різних кластерів, тому його бажано уникати. У середині цього найбільшого вертикального проміжку проводять горизонтальну лінію. Кількість кластерів визначається як кількість вертикальних гілок дендрограми, які перетинає ця горизонтальна лінія.. Перевагами агломеративної кластеризації є простота реалізації, відсутність необхідності визначати кількість кластерів перед початком аналізу, можливість використовувати різні метрики подібності. До недоліків можна віднести високу обчислювальну складність, особливо при великій кількості об'єктів, та вразливість до викидів або неправильно обраних метрик подібності, що може призвести до неоптимальних результатів [131].

Таблиця 2.13 (продовження)

1	2
Метод гауссової суміші	Це статистичний підхід, який моделює набір даних як суму кількох гаусівських (нормальних) розподілів. Суть методу полягає в тому, що кожен кластер асоціюється з гауссовим розподілом зі своїми параметрами - середнім значенням, коваріаційною матрицею та вагою. Використовуючи алгоритм ЕМ (Очікування-Максимізація), GMM намагається знайти найбільш ймовірний набір параметрів, які найкраще пояснюють спостережувані дані. Однією з ключових особливостей GMM є те, що кожен об'єкт може належати до кількох кластерів з різною ймовірністю [138]. Недоліком методу гауссової суміші можуть бути високі обчислювальні витрати, особливо при роботі з великими обсягами даних і високою розмірністю простору. Оскільки алгоритм ЕМ, який використовується для оцінки параметрів моделі, є ітеративним, велика кількість даних може призвести до збільшення часу обчислень. Крім того, GMM може бути чутливим до вибору початкових параметрів, що може вплинути на стабільність і збіжність алгоритму. У випадках, коли розподіл даних не відповідає гаусівській функції, або коли кластери мають нелінійні зв'язки, GMM може не давати оптимальних результатів, оскільки припускає лише гаусівські компоненти.
Поширення спорідненості	Замість заздалегідь визначеної кількості кластерів, як це характерно для багатьох інших алгоритмів, Розмноження спорідненості визначає кластери шляхом вибору набору "епіцентрів" - представників з міжоб'єктною "спорідненістю", що визначається матрицею подібності між об'єктами. Під час ітераційного процесу епіцентри вибираються та оновлюються на основі взаємодії між об'єктами, а кількість кластерів визначається автоматично. Алгоритм дозволяє ефективно виявляти нестандартні та нерегулярні структури даних [139]. До недоліків методу Поширення спорідненості можна віднести високу обчислювальну складність, особливо при роботі з великими обсягами даних. Алгоритм вимагає обчислення та оновлення матриці подібності між усіма парами об'єктів, що може призвести до збільшення часу виконання для великих наборів даних. Також важливо враховувати, що поширення за спорідненістю схильне до утворення багатьох кластерів у випадках, коли інші методи можуть об'єднати їх у більш агреговані групи. Вибір параметрів, таких як оцінка схильності, може вимагати досліджень та експериментів для досягнення оптимальних результатів у конкретному випадку.
Середній зсув	Метод, який ідентифікує кластери шляхом знаходження максимуму функції щільності ймовірності в просторі ознак. Алгоритм ґрунтується на виборі початкової точки (зазвичай випадкової) у просторі даних, а потім розрахунку середнього значення (середнього зсуву) всіх точок, які знаходяться в певному вікні навколо початкової точки. Цей процес повторюється ітеративно, переміщуючи вибрані точки в напрямку зсуву, поки точки не зійдуться в локальному максимумі функції щільності. Таким чином, коли точки сходяться до стабільних положень, або зсув стає занадто малим, області зближення точок будуть визначені як кластери [140]. Недоліками методу середнього зсуву можуть бути високі обчислювальні витрати, особливо при обробці великих обсягів даних або простору високої розмірності. Оскільки Середній зсув вимагає параметра ширини ядра, вибір правильного значення може бути нетривіальним завданням і впливати на якість кластеризації. Крім того, алгоритм може бути чутливим до початкових умов, і результати можуть відрізнятися залежно від заданої початкової точки. У випадках, коли кластери мають неоднакову щільність або знаходяться на різних рівнях ієрархії, метод середнього зсуву може давати менш оптимальні результати порівняно з іншими методами кластеризації.

Таблиця 2.13 (продовження)

1	2
DBSCAN	Метод, який ідентифікує кластери в просторі даних на основі їхньої щільності. Алгоритм базується на тому, що для кожного об'єкта визначається кількість його сусідів за допомогою радіуса та мінімальної кількості сусідів. Об'єкти, які мають достатню кількість сусідів в межах заданого радіуса, утворюють кластери. Важливою особливістю DBSCAN є можливість виявлення кластерів будь-якої форми та виявлення шумових точок, які не входять до жодного кластера [141]. До недоліків DBSCAN можна віднести його чутливість до вибору параметрів, таких як радіус та мінімальна кількість точок у сусідній області. Неправильний вибір цих параметрів може призвести до неправильної кластеризації або злиття кластерів. Особливо важко визначити оптимальні значення параметрів у просторах високої розмірності. DBSCAN також може мати проблеми з виявленням кластерів різної щільності. Крім того, варіативність форм і розмірів кластерів може призвести до труднощів у виборі відповідних значень параметрів для конкретного набору даних.
HDBSCAN	Суть алгоритму полягає у використанні щільності та відстані між об'єктами для визначення кластерів, але HDBSCAN додає можливість визначати ієрархічні структури в даних. Використовуючи параметр "мінімальна щільність" і різні рівні щільності, алгоритм формує кластери та їхню ієрархію. Він також враховує шумові точки та об'єкти, які не можуть бути однозначно віднесені до жодного кластера [142]. Недоліком методу HDBSCAN може бути висока обчислювальна складність, особливо при роботі з великими обсягами даних або простором високої розмірності. Алгоритм вимагає побудови та аналізу ієрархічної структури для кластеризації, що може вплинути на час виконання. Вибір параметрів, таких як мінімальна кількість об'єктів у кластері та радіус, може бути нетривіальним завданням і залежати від конкретного набору даних. HDBSCAN також може працювати гірше на ділянках, де кластери мають різну щільність і форму і потребують ретельного налаштування параметрів для досягнення оптимальних результатів.
OPTICS	Це метод, призначений для виявлення структури кластерів у наборі даних без наперед визначеної кількості кластерів. Суть OPTICS полягає у відображенні простору даних на так звану "діаграму досяжності", подібну до дендрограми, на якій об'єкти розташовуються відповідно до їхньої "досяжності" від інших об'єктів. На основі цієї дендрограми можна визначити кластери та їхню ієрархію, а також викиди. OPTICS може виявляти кластери різної щільності та форми, адаптуючись до складних структур даних [143]. Недоліком методу OPTICS може бути висока обчислювальна складність, особливо при роботі з великими обсягами даних або простором високої розмірності. Оскільки алгоритм залежить від побудови та аналізу графа взаємозв'язків між точками, це може призвести до значного збільшення часу виконання для великих даних. OPTICS також може виявитися складним у випадках, коли кластери мають різну щільність і розміри, або коли простір даних має велику кількість вимірів. Крім того, не завжди легко визначити оптимальні параметри, такі як радіус і мінімальна кількість об'єктів у кластері, для досягнення найкращих результатів для конкретного набору даних.

Джерело: побудовано автором на основі [133-143].

Після формування переліку змінних та очищення даних для продовження дослідження необхідно провести підготовку даних, яка включає стандартизацію даних та зменшення розмірності, перед кластеризацією. Стандартизація проводиться для того, щоб змінні з різними величинами (наприклад, ВВП у мільярдах доларів і споживання у відсотках від ВВП) мали однаковий вплив на результат кластеризації. А зменшення розмірності спрямоване на те, щоб позбутися мультиколінеарності змінних (наприклад, коли високий ВВП на душу населення корелює з часткою послуг у ВВП, оскільки обидва показники часто свідчать про розвинену економіку і якщо це явище не усунути, то певні характеристики країн впливатимуть на результати набагато більше, ніж інші).

Для стандартизації даних ми використовували метод Z-стандартизації. Для зменшення розмірності було протестовано 11 алгоритмів з таблиці 2.12 та 5 варіантів кастомізації алгоритмів, повний перелік яких наведено на рис. 2.13. На рисунку показано кумулятивну пояснену дисперсію, розраховану за формулою (2.49) для кожного з методів зменшення розмірності залежно від кількості головних компонент, що показує, який відсоток інформації зберігається від початкового обсягу. Було виявлено, що найефективнішим методом є ядерний аналіз головних компонент із сигмоїдними ядрами, як видно з рис. 2.13. Будь-який метод зменшення розмірності не може уникнути втрати інформації, але зазвичай втрата 5% інформації є прийнятною. Наведений вище метод дозволяє зменшити розмірність до 15 головних компонент зі збереженням 95,76% інформації.

Після завершення попереднього етапу дані готові до кластеризації. Однак спочатку необхідно відфільтрувати алгоритми, які завідомо не дадуть високих результатів, а також вибрати необхідну кількість кластерів. Це робиться для того, щоб скоротити час і обчислювальні потужності, необхідні для дослідження. Автоматичний вибір кількості кластерів у нашому випадку є недоліком, оскільки спостереження в даних дуже розкидані і часто важко провести чітку межу між ними. Тому використання автоматичних алгоритмів призведе до нерепрезентативних результатів. Таким чином, цей фактор призвів до відмови від алгоритмів Поширення спорідненості та Середнього зсуву.

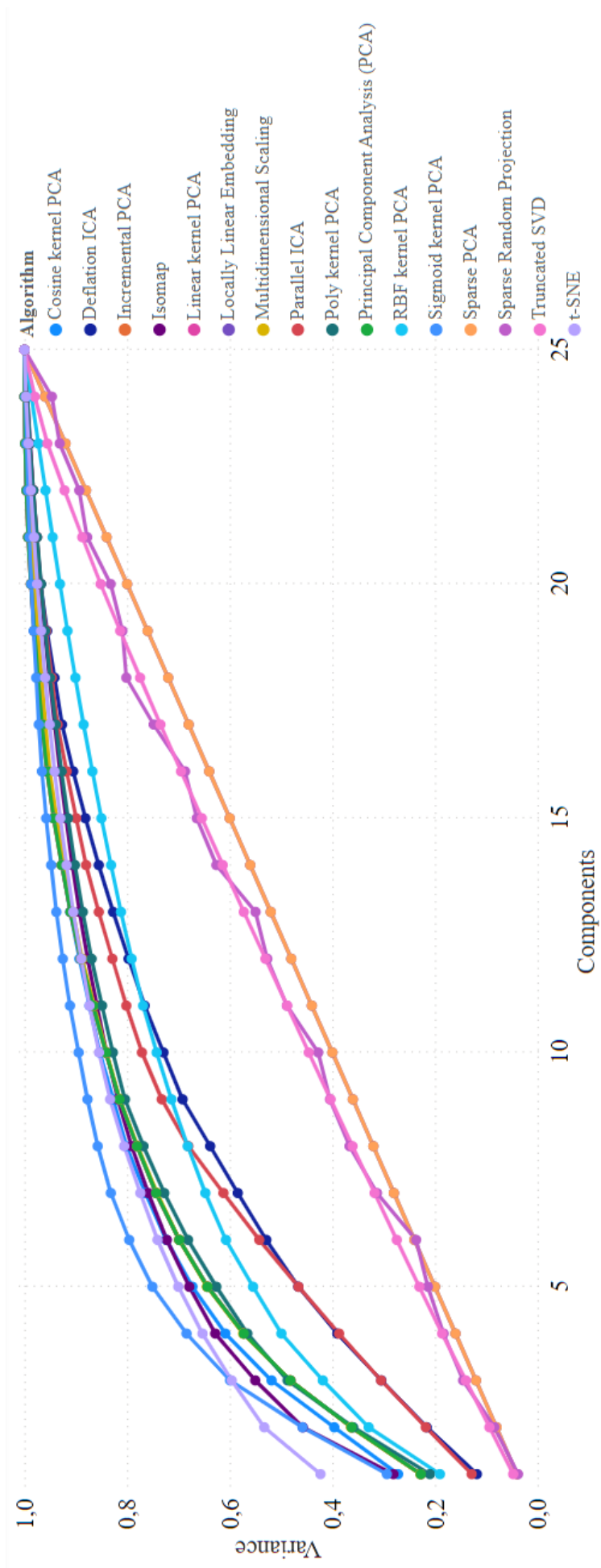


Рис 2.13 Результати тестування алгоритмів зменшення розмірності на даних дослідження.

Джерело: складено автором

Оскільки дане дослідження стосується насамперед аналізу економіки України, необхідно забезпечити кластеризацію всіх без винятку спостережень, інакше існує ризик того, що українська економіка не потрапить до жодного з кластерів. У тестовому наборі даних дослідження [147], представленому на рис. 2.14, який є найбільш подібним до даних цього дослідження, чорні точки відповідають некластеризованим спостереженням. Щоб уникнути такої ситуації, ми виключили алгоритми DBSCAN, HDBSCAN та OPTICS.

Оптимальну кількість кластерів визначатимемо за агрегованим показником, наведеним у формулі (2.57). Варто зазначити, що ми вирішили встановити оптимальну кількість кластерів у діапазоні від 7 до 20, по-перше, для скорочення часу, витраченого на розрахунки, а по-друге, немає сенсу розглядати менше 7 кластерів через занадто великі групи країн, які можуть включати дуже різні спостереження. Якщо кластерів буде більше 20, то такі дані складно коректно візуалізувати, до того ж багато кластерів будуть незбалансованими і складатимуться з 1-2 спостережень.

На цьому етапі все готово для проведення кластерного аналізу, вхідними даними для якого будуть макроекономічні показники з табл. 2.14, усереднені за період з 1991 по 2020 роки, нормалізовані та зведені до 15 головних компонент. Найкращі 20 результатів кластеризації, оцінені за формулою (2.57), представлені в табл 2.15.

Таблиця 2.14

Змінні для кластерного аналізу

Ім'я змінної	Опис змінної
1	2
<i>average_gdp</i>	Середній* ВВП (у доларах США в постійних цінах 2015 року)
<i>gdp_growth</i>	Середнє зростання ВВП (річний %)
<i>gdp_per_capita</i>	Середній ВВП на душу населення (в постійних цінах 2015 року)
<i>gdp_per_capita_growth</i>	Середнє зростання ВВП на душу населення (річний %)
<i>gdp_agriculture_perc</i>	Середнє сільське, лісове та рибне господарство, додана вартість (% від ВВП)
<i>gdp_industry_perc</i>	Середня промисловість (включаючи будівництво), додана вартість (% від ВВП)
<i>gdp_services_perc</i>	Середній показник доданої вартості у сфері послуг (% від ВВП)
<i>capital_intensity</i>	Відношення валового капіталу (постійні ціни 2015 року) до робочої сили (всього)
<i>capital_intensity_growth</i>	Середні темпи зростання співвідношення валового капіталу (в постійних цінах 2015 року) до робочої сили (всього)
<i>capital_capacity</i>	Відношення валового капіталу (постійні ціни 2015 року) до ВВП (постійні ціни 2015 року)
<i>capital_private_rate</i>	Відношення валового державного капіталу (% ВВП) до валового приватного капіталу (% ВВП)

Таблиця 2.14 (продовження)

1	2
<i>population</i>	Середня чисельність населення (загальна)
<i>land</i>	Середня площа сільськогосподарських угідь (кв. км)
<i>population growth</i>	Середній приріст населення (річний %)
<i>population_asymmetry</i>	Співвідношення населення у віці 0-14 років (% від загальної кількості населення) до населення у віці 65 років і старше (% від загальної кількості населення)
<i>trade rate</i>	Середній обсяг торгівлі (% від ВВП)
<i>trade_asymmetry</i>	Відношення імпорту товарів та послуг (% ВВП) до експорту товарів та послуг (% ВВП)
<i>consumption rate</i>	Середні витрати на кінцеве споживання (% ВВП)
<i>savings rate</i>	Середні валові заощадження (% ВВП)
<i>consumption_asymmetry</i>	Відношення витрат на кінцеве споживання (% ВВП) до валових заощаджень (% ВВП)
<i>tax burden</i>	Середні податкові надходження (% ВВП)
<i>inflation</i>	Середня інфляція, споживчі ціни (річний %)
<i>expense level</i>	Середні витрати (% від ВВП)
<i>revenue level</i>	Середній дохід, за винятком грантів (% ВВП)
<i>res outturn</i>	Середня загальна рента на природні ресурси (% від ВВП)

Джерело: побудовано автором.

Таблиця 2.15

ТОП-20 найефективніших алгоритмів кластеризації на даних дослідження

Алгоритм	N	DBI	CH	SC	AV
К-середніх	17	1,00657	18,43062	0,18542	2,18810
BIRCH	20	1,01926	18,20109	0,17919	1,95720
Агломеративна кластеризація	20	1,01926	18,20109	0,17919	1,95720
Метод Уорда	20	1,01926	18,20109	0,17919	1,95720
К-середніх	16	1,04798	17,93731	0,17993	1,79440
К-середніх	20	1,08612	18,52437	0,18057	1,77329
BIRCH	19	1,07294	18,35439	0,17595	1,69737
Агломеративна кластеризація	19	1,07294	18,35439	0,17595	1,69737
Метод Уорда	19	1,07294	18,35439	0,17595	1,69737
Міні-вибірка К-середніх	18	1,06567	17,92405	0,17800	1,67745
К-середніх	18	1,08950	17,74273	0,18115	1,60237
BIRCH	17	1,08250	18,53183	0,16927	1,55808
Агломеративна кластеризація	17	1,08250	18,53183	0,16927	1,55808
Метод Уорда	17	1,08250	18,53183	0,16927	1,55808
К-середніх	7	1,24845	20,37201	0,18181	1,51237
BIRCH	18	1,08840	18,44755	0,16782	1,48533
Агломеративна кластеризація	18	1,08840	18,44755	0,16782	1,48533
Метод Уорда	18	1,08840	18,44755	0,16782	1,48533
Міні-вибірка К-середніх	16	1,12667	18,98103	0,16914	1,46594
К-середніх	10	1,14692	19,03277	0,17030	1,41546

Джерело: побудовано автором на основі власних розрахунків.

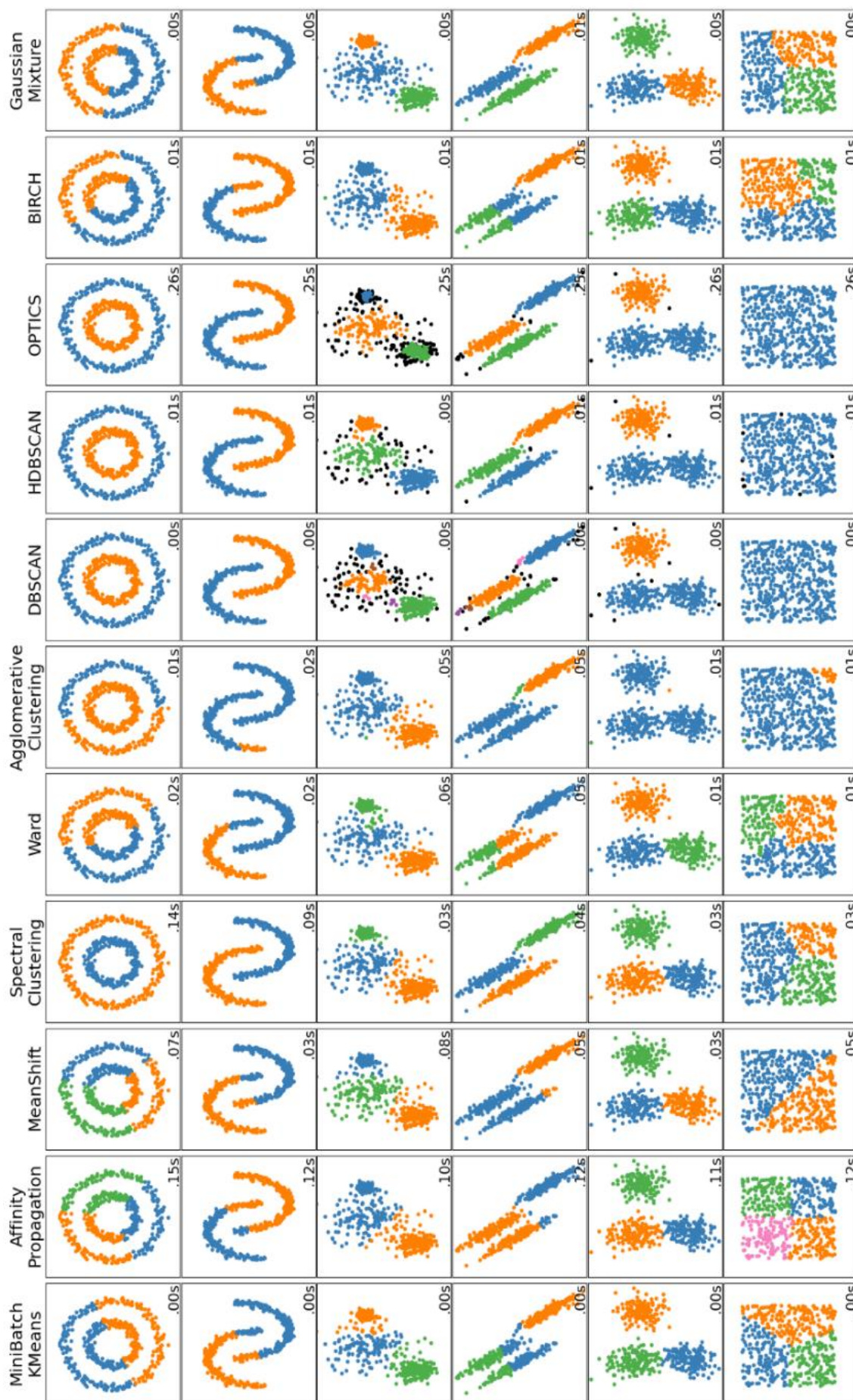


Рис 2.14 Тестування алгоритмів кластеризації на різних типах вибірок даних.

Джерело: [147]

Обравши найефективніший метод з оптимальними параметрами (К-середні з поділом на 17 кластерів), перейдемо до опису результатів кластерного аналізу. Спочатку ми проведемо кластеризацію країн за весь період дослідження - на основі середніх значень за 30 років: з 1991 по 2020 рік. На рис. 2.15 (як і на всіх наступних цього розділу) показано 2 карти світу: на більшій виділено кластер, до якого належить Україна, а на карті в правому нижньому куті – всі 17 кластерів різними кольорами.

Загалом Україна потрапляє в кластер країн, з якими має дуже мало спільного, оскільки період усереднення був занадто довгим, а періоди економічного зростання накладалися на періоди нестабільної військово-політичної ситуації та економічних криз, що певною мірою спотворювало результати. До цього кластеру разом з Україною потрапили Беліз, Еквадор, Йорданія, Киргизстан, Північна Македонія, Південна Африка, Туніс, Уругвай, Венесуела та низка інших країн Африки та Центральної Америки (рис. 2.15).

Аналіз результатів кластеризації (рис. 2.15) показує, що усереднення показників не забезпечує достатнього розмежування між кластерами. Основна причина полягає у високій варіативності даних за тривалий період, через що втрачається деталізація, а ключові події та структурні зміни можуть бути недооцінені.

Для усунення цього ефекту доцільно розділити загальний період на коротші часові інтервали та проводити кластеризацію окремо для кожного з них. У межах дослідження 30-річний період поділено на шість п'ятирічних інтервалів. На рис. 2.16 представлено результати кластеризації першого з них (1991–1995 рр.). Для всіх інтервалів застосовано єдиний метод - К-середніх із розбиттям на 17 кластерів, що забезпечує порівнюваність отриманих результатів. З рис. 2.16 видно, що у 1991-1995 рр. Україна належала до пострадянського кластеру, характерного для перехідних економік із високою інфляцією, спадом ВВП, низькими заощадженнями та складнощами адаптації до ринкової економіки.

За аналогією проведемо кластерний аналіз наступного 5-річного періоду з 1996 по 2000 роки (рис. 2.17). Як видно, у 1996-2000 рр. Україна входила до кластера країн із прискореним економічним зростанням, до якого належать держави Латинської Америки, Південно-Східної Європи, Казахстан і розвинуті країни Африки. Це

зростання зумовлене ефектом низької бази та активним упровадженням ринкових механізмів у національній економіці.

Наступний період кластеризації - з 2001 по 2005 рік, результати якого наведено на рис. 2.18. Україна належить до кластера балканських, балтійських, кавказьких країн та Казахстану, які об'єднує курс на інтеграцію у світовий ринок, проведення реформ і лібералізацію економіки. Це свідчить про прагнення України подолати економічні труднощі шляхом активної участі у глобальних процесах.

Далі, як і в попередні періоди, ми кластеризуємо країни на основі середніх показників з 2006 по 2010 роки (рис. 2.19). У період 2006-2010 років Україна була частиною кластеру, який об'єднує більшість країн Східної Європи (рис. 2.19). Цей кластер визначається такими характеристиками, як проведення економічних реформ, активна участь у європейській інтеграції та схожа реакція на світову кризу 2008 року.

Після цього наступним інтервалом для кластеризації є період з 2011 по 2015 роки (рис. 2.20). Протягом 2011-2015 років Україна є частиною кластеру, до якого входять переважно країни Східної та Південно-Східної Європи (рис. 2.20). У цей період ці країни демонстрували певні спільні характеристики, такі як структурні реформи, економічні зміни та реакція на вплив глобальних подій на їхній розвиток.

Останній 5-річний період для кластеризації – з 2016 по 2020 рік, результати якого показані на рис. 2.21. У 2016-2020 рр. Україна входила до кластера країн Східної Європи (рис. 2.21), які характеризувалися активним економічним розвитком. Для цієї групи притаманні швидке зростання ВВП, низький або від'ємний приріст населення, помірна інфляція, швидке нагромадження капіталу, домінування сфери послуг і високий рівень людського капіталу. Економічне піднесення зумовлювалося реалізацією структурних і політичних реформ, що підвищили ефективність та стабільність регіону. Як і інші країни кластера, Україна продемонструвала стійке зростання, що сприяло відновленню після кризи 2014 року.

Далі ми об'єднуємо головні компоненти для всіх 6 п'ятирічних періодів і повторно кластеризуємо країни за весь період (загалом 90 факторів). З 1991 по 2020 рік Україна демонструвала тісні економічні та політичні зв'язки з країнами Східної Європи, більшу частину часу перебуваючи в одному кластері з більшістю цих країн

(рис. 2.22). Основні тенденції розвитку цього кластеру визначалися кількома ключовими аспектами, які вплинули на економічний ландшафт регіону та знаменували перехід від соціалістичної до ринкової економіки.

У цей період країни кластера активно впроваджували економічні реформи, спрямовані на лібералізацію ринків, приватизацію державних підприємств і розвиток підприємництва, що мало забезпечити гнучкість і конкурентоспроможність економік та подолати спадщину соціалістичної системи.

Важливим напрямом стала європейська інтеграція. Більшість країн, зокрема й Україна, зміцнювали економічні та політичні зв'язки з ЄС, адаптували національні стандарти до європейських, розвивали торговельно-економічну співпрацю та обмін досвідом. Цей процес сприяв поглибленню взаємодії між державами регіону, формуванню спільних стратегій розвитку й утвердженню єдиного європейського економічного простору.

Як видно з рис. 2.23, велика кількість кластерів об'єднує сусідні країни, що можна пояснити насамперед схожими природними умовами, спільними історичними подіями, які мали вплив на соціально-економічне життя, а також тим, що завдяки торгівлі та культурному взаємопроникненню рівень життя в сусідніх країнах поступово вирівнюється. Великі країни часто мають великі запаси природних ресурсів і відповідну економічну спеціалізацію (кластер 2 у табл. 2.16), і подібна ситуація може бути характерною для сусідніх країн, які розташовані на великих родовищах природних ресурсів (як у нафтовидобувному кластері 12 у табл. 2.16).

Короткий опис кластерів з рис. 2.23 наведено в табл. 2.16, де деякі кластери об'єднані між собою. Необхідність групування країн у певні кластери впливає з практичної цілеспрямованості та зручності аналізу при дослідженні міжнародних відносин та економічних процесів. При великій кількості кластерів може виникнути ситуація, коли деякі країни утворюють власні ізольовані кластери, що складаються лише з однієї держави. З метою комплексного аналізу та отримання більш репрезентативної інформації важливо згрупувати такі кластери, які демонструють схожі економічні, політичні або соціокультурні характеристики.

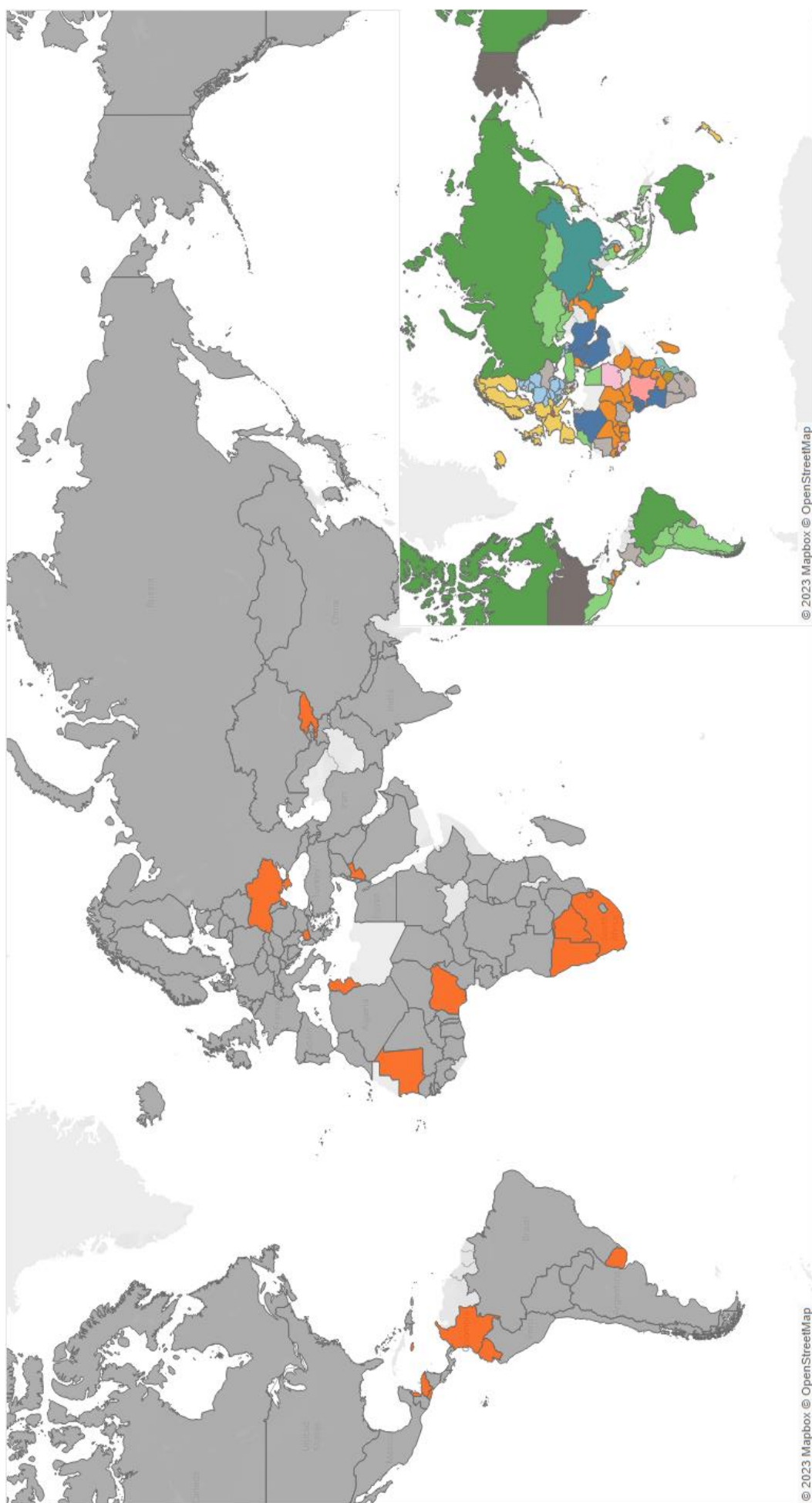


Рис 2.15 Результати кластеризації країн на основі середніх значень показників за весь період (1991-2020).

Джерело: складено автором

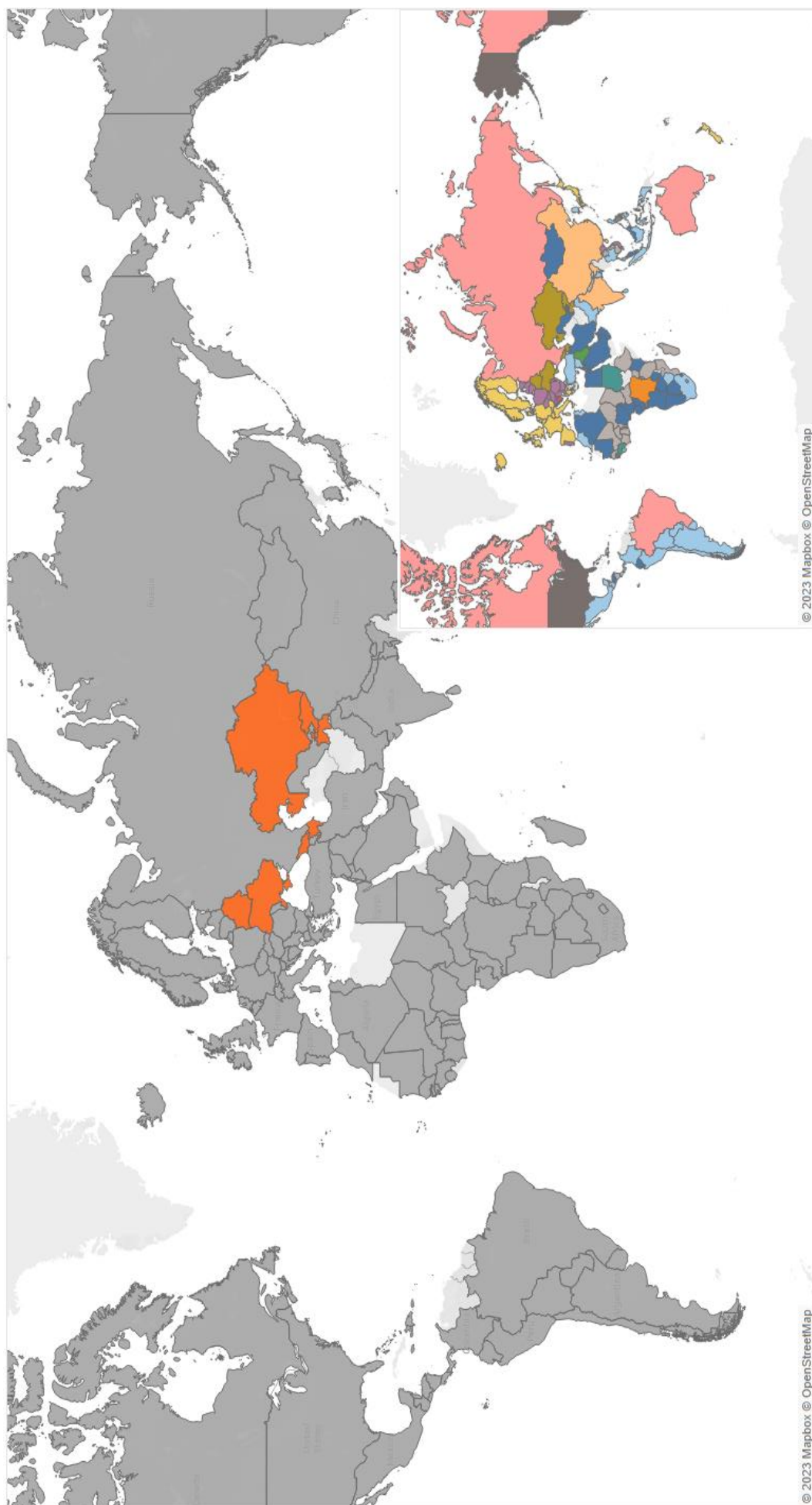


Рис 2.16 Результати кластеризації країн на основі даних за період 1991-1995 рр.

Джерело: складено автором

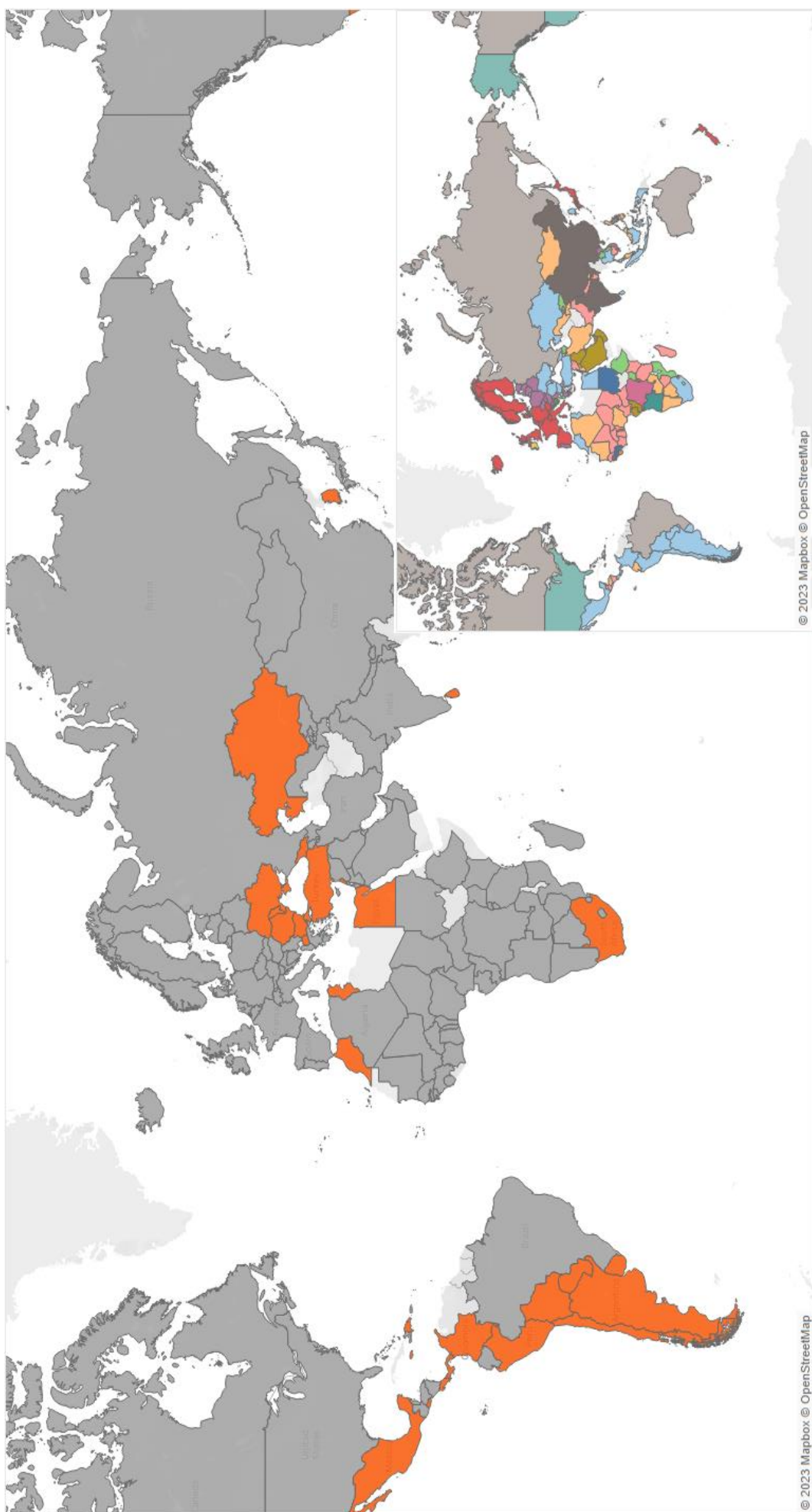


Рис 2.17 Результати кластеризації країн на основі даних за період 1996-2000 рр.

Джерело: складено автором

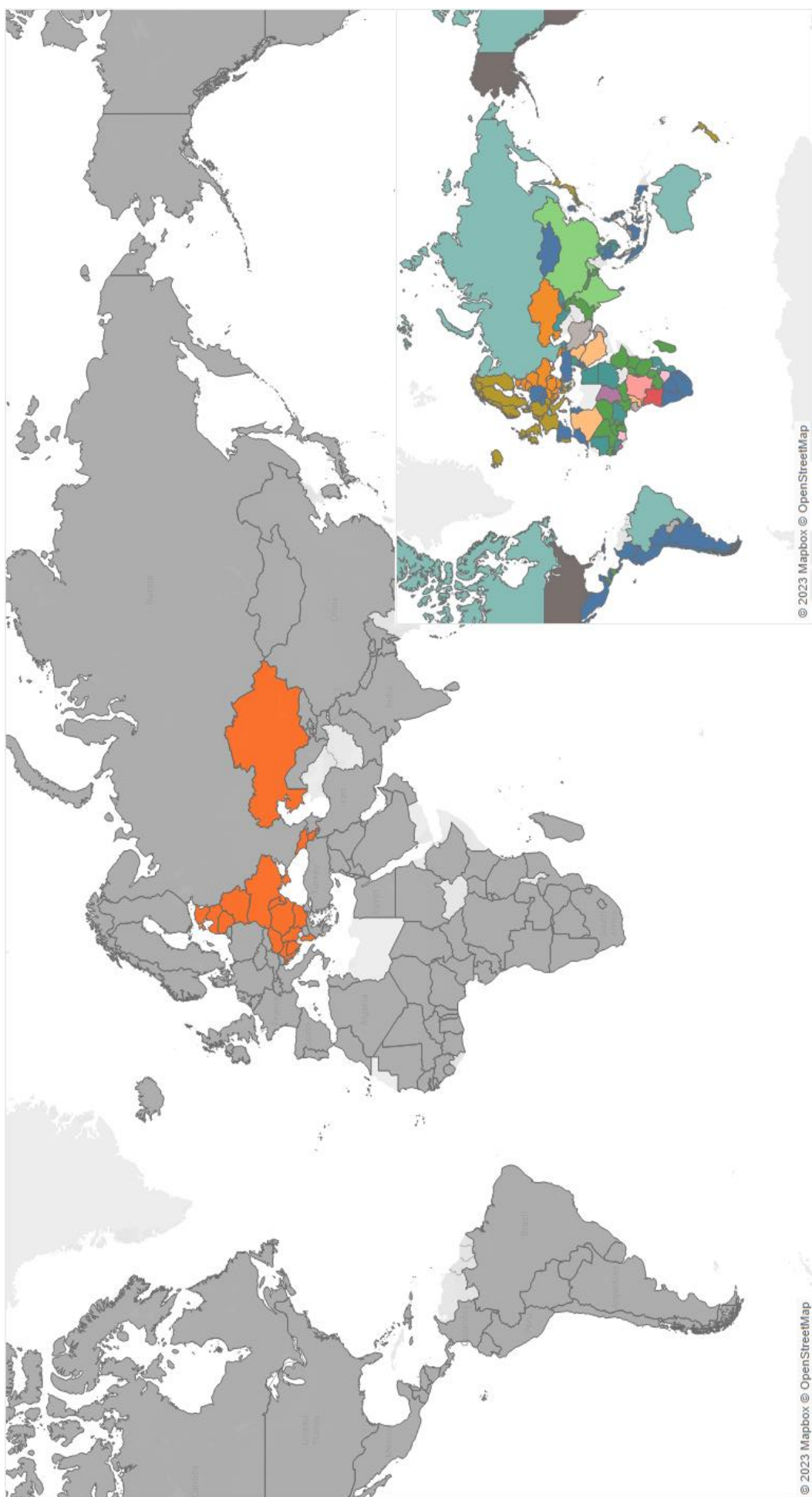


Рис 2.18 Результати кластеризації країн на основі даних за період 2001-2005 рр.

Джерело: складено автором

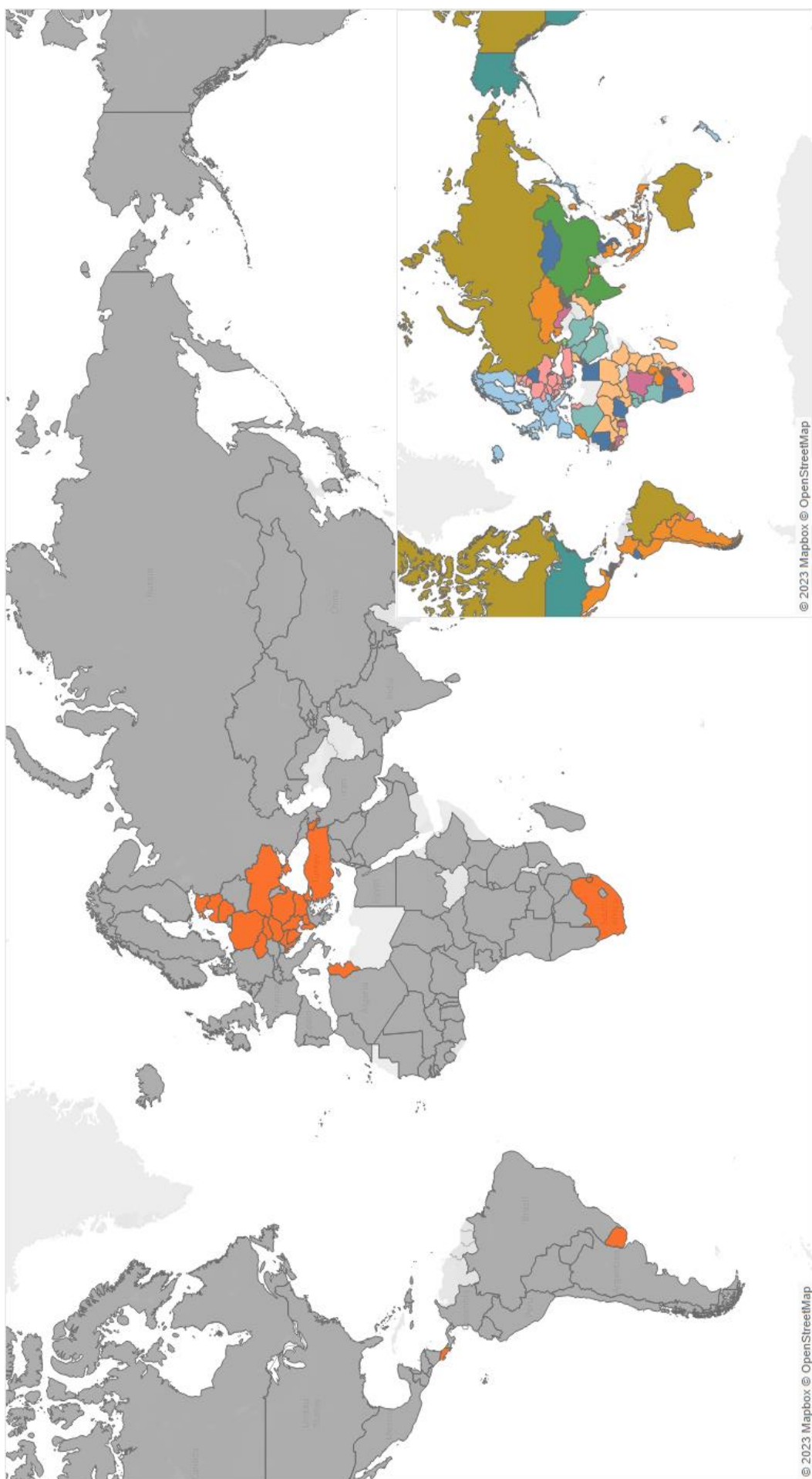


Рис 2.19 Результати кластеризації країн на основі даних за період 2006-2010 рр.

Джерело: складено автором

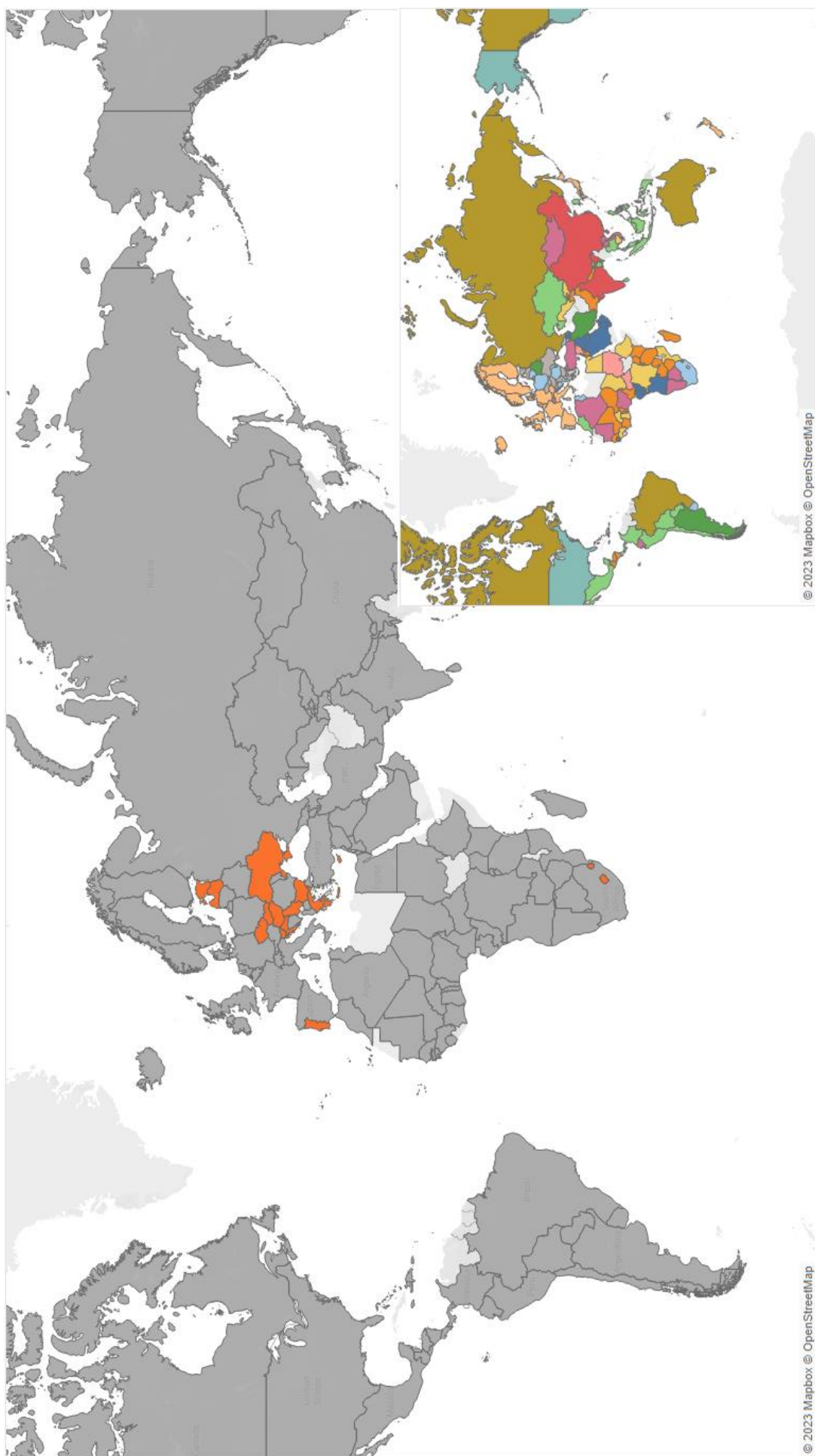


Рис 2.20 Результати кластеризації країн на основі даних за період 2011-2015 рр.

Джерело: складено автором

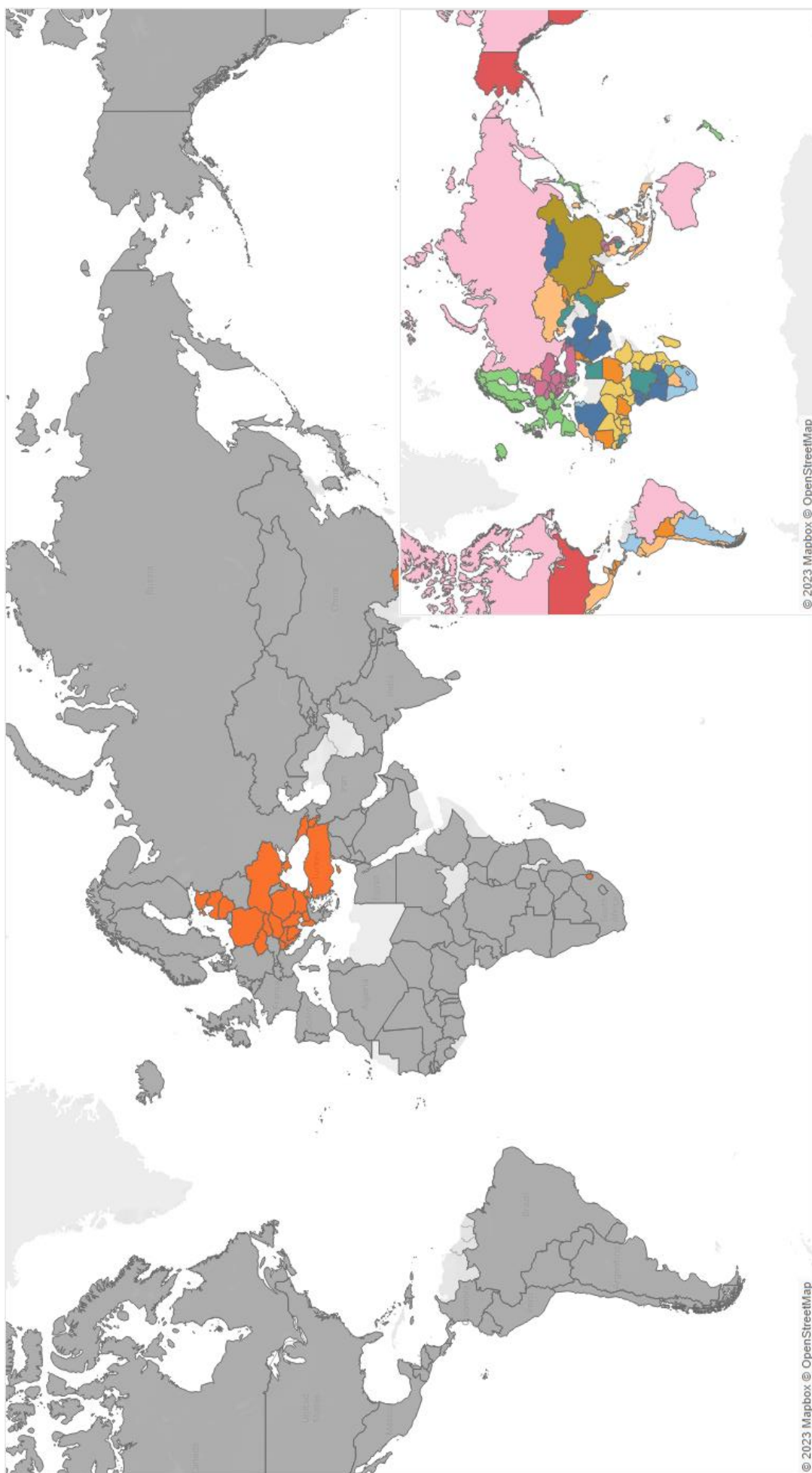


Рис 2.21 Результати кластеризації країн на основі даних за період 2016-2020 рр.

Джерело: складено автором



Рис 2.22 Результати кластеризації країн на основі даних, усереднених за періодами 1991-2020 рр. (кластер України).

Джерело: складено автором

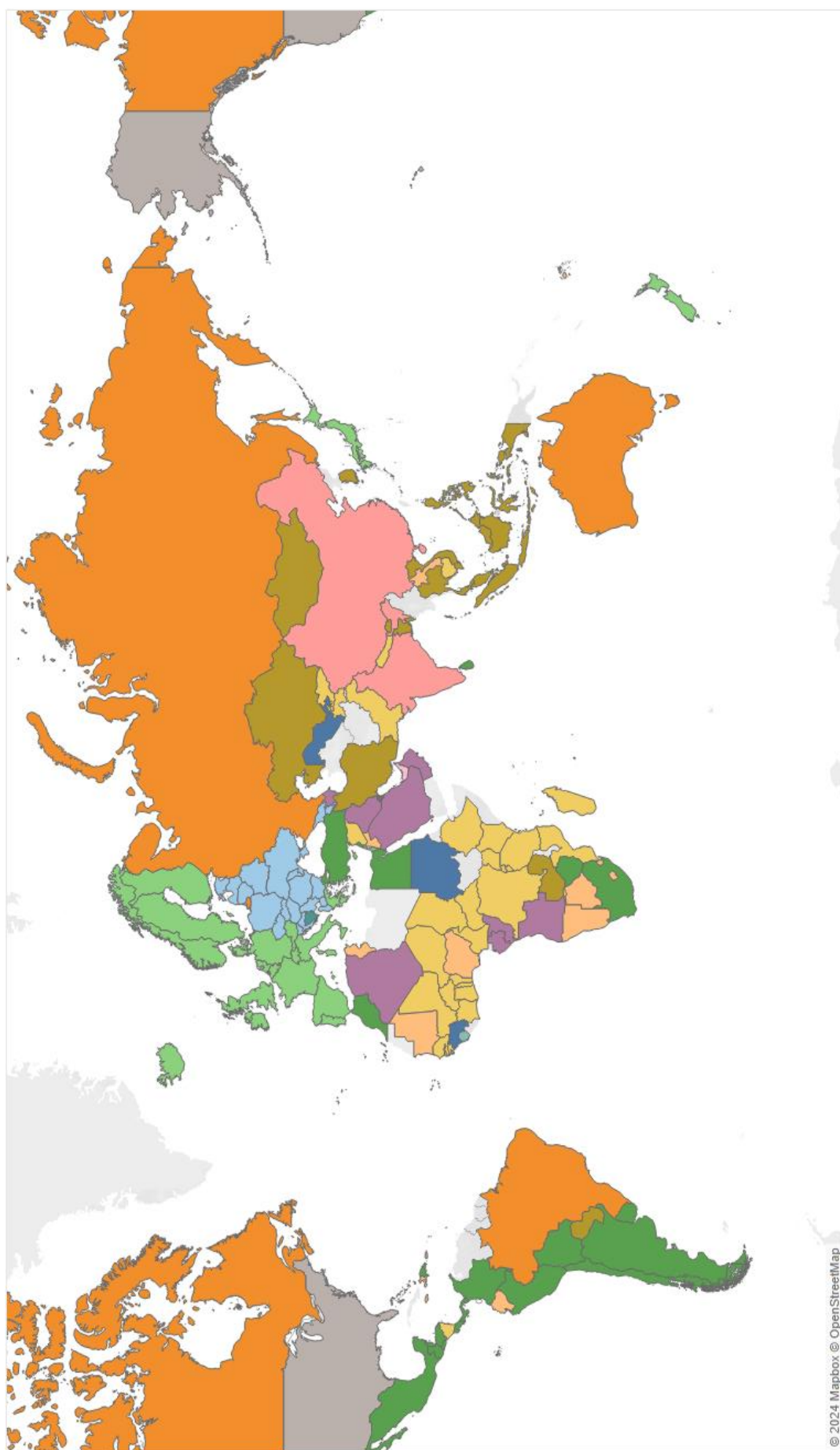


Рис 2.23 Результати кластеризації країн на основі даних, усереднених за періодами 1991-2020 рр.

Джерело: складено автором

Таблиця 2.16

Склад кластерів на основі усереднених 5-річних періодів за 1991-2020 роки

№	Перелік країн у кластерах	Характеристики кластерів
1	2	3
1, 8	Албанія, Вірменія, Боснія і Герцеговина, Білорусь, Болгарія, Хорватія, Чехія, Естонія, Грузія, Угорщина, Латвія, Литва, Мальта, Молдова, Північна Македонія, Польща, Румунія, Сербія, Словаччина, Словенія, Україна	Перехід до ринкової економіки, залучення до глобальних ринків, прагнення до європейської інтеграції, стратегія модернізації інфраструктури та диверсифікації економіки. Деякі з країн цього списку є членами Європейського Союзу, інші розвивають свої економіки в умовах геополітичних викликів, але загальні тенденції свідчать про те, що вони взаємно адаптуються до вимог сучасного глобального економічного середовища.
2	Австралія, Бразилія, Канада, Росія	Об'єднані в економічному контексті великою територією та значними природними ресурсами, вони відомі своєю значною роллю на світовому ринку виробництва сировини, включаючи енергоносії, сільськогосподарську продукцію та метали.
3	Ботсвана, Кабо-Верде, Коморські острови, Еквадор, Есватіні, Фіджі, Гаїті, Ямайка, Йорданія, Лаос, Лесото, Мавританія, Намібія, Нігерія, Сейшельські острови, Туніс, Ямайка	Багато з цих країн, що значною мірою залежать від сільського господарства та імпорту товарів, стикаються з соціально-економічними проблемами, такими як бідність та нерівність доходів. Ці країни працюють над розвитком і реформами для стимулювання економічного зростання.
4, 14	Антигуа і Барбуда, Аргентина, Багамські острови, Беліз, Болівія, Чилі, Колумбія, Коста-Ріка, Домініканська Республіка, Єгипет, Сальвадор, Гватемала, Гондурас, Ліван, Маврикій, Мексика, Марокко, Панама, Перу, Південна Африка, Шрі-Ланка, Туреччина, Уругвай, Зімбабве	Характеризуючись різноманітністю виробництва та значним внеском в економіку таких секторів, як сільське господарство, туризм, промисловість та експорт природних ресурсів, країни цих двох кластерів, переважна більшість з яких є країнами Латинської Америки та Близького Сходу, взаємодіють на світових ринках, і їхні економіки часто зазнають впливу глобальних економічних та торговельних тенденцій.
5	Австрія, Барбадос, Бельгія, Кіпр, Данія, Фінляндія, Франція, Німеччина, Греція, Ісландія, Ірландія, Ізраїль, Італія, Японія, Нідерланди, Нова Зеландія, Норвегія, Португалія, Іспанія, Швеція, Швейцарія, Велика Британія	Країни цього кластеру мають високорозвинені економіки, що характеризуються високим рівнем життя, ефективною соціально-економічною інфраструктурою та розвиненим галузевим поділом праці. Основою економіки цих країн є високі технології, інновації, фінанси та торгівля. Вони активно співпрацюють на міжнародному рівні, здійснюючи важливий вплив на світову економіку.

Таблиця 2.16 (продовження)

1	2	3
6	Бангладеш, Бутан, Індонезія, Іран, Казахстан, Малайзія, Монголія, Парагвай, Філіппіни, Таїланд, В'єтнам, Замбія	Країни цього кластеру часто визначають як країни з перехідною економікою або ті, що розвиваються. Вони активно працюють на світових ринках, зосереджуючись на промисловому виробництві, експортних стратегіях, залученні іноземних інвестицій та впровадженні інноваційних програм для підтримки економічного зростання.
0, 7, 9	Бенін, Буркіна-Фасо, Бурунді, Камбоджа, Камерун, Центральноафриканська Республіка, Чад, Демократична Республіка Конго, Ефіопія, Гамбія, Гана, Гвінея, Гвінея-Бісау, Берег Слонової Кістки, Кенія, Киргизстан, Мадагаскар, Малі, Мозамбік, Непал, Нікарагуа, Нігер, Пакистан, Руанда, Сенегал, Судан, Суринам, Сирія, Таджикистан, Танзанія, Уганда, Узбекистан	Країни, що розвиваються, з такими спільними рисами, як низький рівень індустріалізації, висока залежність від сільського господарства, а також проблеми з бідністю та нерівністю.
10	Гонконг, Люксембург, Сінгапур, Південна Корея, Тайвань, Південна Корея	Ці держави об'єднує високий рівень економічного розвитку, який був досягнутий за відносно короткий історичний період завдяки активній індустріалізації, впровадженню інновацій та інтеграції у світову економіку. Вони характеризуються орієнтацією на експорт, значною роллю високотехнологічних галузей, таких як електроніка та інформаційні технології, а також розвиненим фінансовим сектором. Таким чином, ці країни поєднують риси індустріального та постіндустріального розвитку, демонструючи високу конкурентоспроможність, ефективну інфраструктуру та значний рівень інвестицій у науку й технології.
11	Китай, Індія	Ці держави характеризуються надзвичайно великим населенням, що формує потужні внутрішні ринки споживання. Завдяки цьому вони мають значний економічний потенціал і здатні підтримувати стабільне зростання навіть за умов змін у світовій економіці. В обох країнах спостерігаються високі темпи економічного розвитку, що зумовлено активною індустріалізацією, розвитком технологій та залученням іноземних інвестицій. Країни значно інвестують у розвиток інфраструктури (транспорт, енергетику, міське будівництво) та сучасних технологій, що сприяє підвищенню їхньої конкурентоспроможності на глобальному рівні. Таким чином, Китай і Індія виступають ключовими гравцями світової економіки.
13	Сполучені Штати Америки	Це найбільша економіка світу, що характеризується високим рівнем індустріалізації, розвинутою технологічною базою та широким розмаїттям галузей і послуг. Лідер у багатьох ключових секторах, таких як інформаційні технології, фінанси, наука та інновації.
12, 15, 16	Алжир, Ангола, Азербайджан, Бахрейн, Габон, Ірак, Кувейт, Оман, Катар, Саудівська Аравія, Об'єднані Арабські Емірати	Володіючи значними запасами енергоресурсів, зокрема нафти і газу, країни цих кластерів спеціалізуються на виробництві та експорті енергоносіїв, що робить їх ключовими гравцями на світових енергетичних ринках.

Джерело: побудовано автором на основі власних розрахунків.

Підсумовуючи результати кластеризації, можна зазначити, що багато в чому країни-сусіди мають спільні моделі розвитку, значною мірою завдяки зовнішній торгівлі та взаємній інтеграції. Винятком можуть бути країни, які мають власні унікальні характеристики з точки зору забезпеченості природними ресурсами або існуючого політичного режиму в країні. Чисельність робочої сили та розмір території країни також є важливими факторами, що визначають позицію країн у кластерах.

2.3. Практична апробація моделі та її порівняння з іншими моделями економічного зростання

Було побудовано модель на основі даних, що відображають динаміку економіки України (рис. 2.24). Вибір України зумовлений її унікальністю та складністю моделювання, адже в 1991-2021 рр. країна пройшла шлях від планової до ринкової системи, переживши масштабні структурні зміни у виробництві, фінансах і зайнятості. Додаткову складність створюють циклічні соціально-політичні події з періодичністю 4-5 років, що впливають на інвестиції, ВВП і платіжний баланс. Поєднання інституційних трансформацій і періодичних криз формує нестандартне економічне середовище, роблячи моделювання складним, але надзвичайно цінним для виявлення закономірностей і прогнозування розвитку.

За результатами моделювання зростання капіталомісткості приватного сектору України отримано коефіцієнт $R = -0,93$, що вказує на значне відхилення модельних розрахунків від фактичних даних. Для порівняння, середній показник для аналогічних моделей становить $R = -0,40$. У публічному секторі $R = -0,15$, для зростання заощаджень на одиницю праці $R = 0,2$, а для людського капіталу $R = -0,3$. Це свідчить про специфіку української економіки, де стандартні моделі не повністю відображають реальну динаміку процесів.

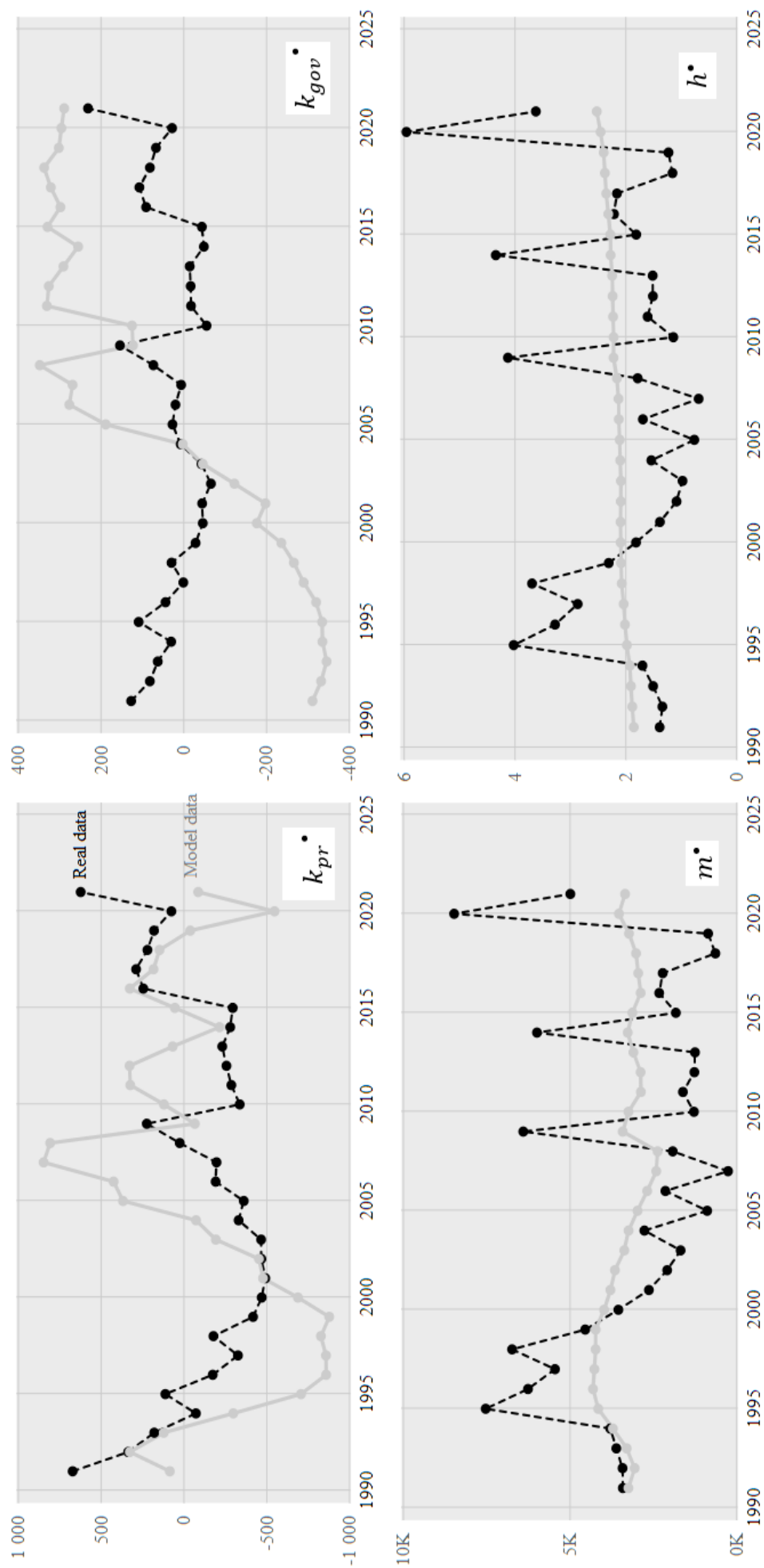


Рис 2.24 Результати моделювання адаптивної моделі на даних по Україні.

Джерело: складено автором

Основні причини невідповідності пов'язані з низкою структурних чинників: великою часткою тіньової економіки, нестабільністю трансформаційного періоду 1990-х років і непослідовністю державної економічної політики, що змінювалася з політичними циклами. Додатково динаміку ускладнили кризові явища – глобальна фінансова криза 2008-2009 рр., політичні потрясіння та початок війни у 2014-2015 рр., а також пандемія COVID-19 у 2020-2021 рр. Ці події спричинили структурні розриви й нетипові коливання у часових рядах, що знижує точність класичних моделей.

Для порівняння, моделі Польщі, Угорщини, Чехії та Румунії (рис. 2.25) показують вищу відповідність між прогнозами та фактичними даними, що пояснюється стабільнішою інституційною базою та послідовною інтеграцією до європейського економічного простору, які забезпечили передбачуваність макроекономічних процесів.

Для економіки Угорщини спостерігається значне розходження між модельними та фактичними даними (рис. 2.25). Хоча загальний тренд динаміки збережено, масштаб відхилень свідчить про неповну адекватність моделі реальним процесам. Основними причинами цього є висока залежність від фінансування ЄС, що зумовлює нерівномірні інвестиційні коливання, а також неефективність економічної політики, спричинена авторитарними тенденціями, орієнтованими на короткострокові політичні цілі.

Згідно з результатами (рис. 2.26, рис. 2.27), модель економічного зростання відкритого ринку демонструє високу ефективність для високорозвинених країн зі стабільною економікою, тоді як Китай є винятком через специфічну структуру розвитку. Відкрита модель забезпечує найточніше відтворення фактичних даних завдяки кільком ключовим чинникам.

По-перше, вона базується на технологічному прогресі та поширенні знань, що є основою економічного розвитку в розвинених країнах. По-друге, модель враховує інтеграцію у міжнародну торгівлю та участь у глобальних потоках капіталу й трудових ресурсів, що створює додаткові джерела економічного зростання. По-третє, важливою її перевагою є врахування інвестиційної реакції на фази економічного циклу, що наближає модельні результати до реальної макроекономічної динаміки.

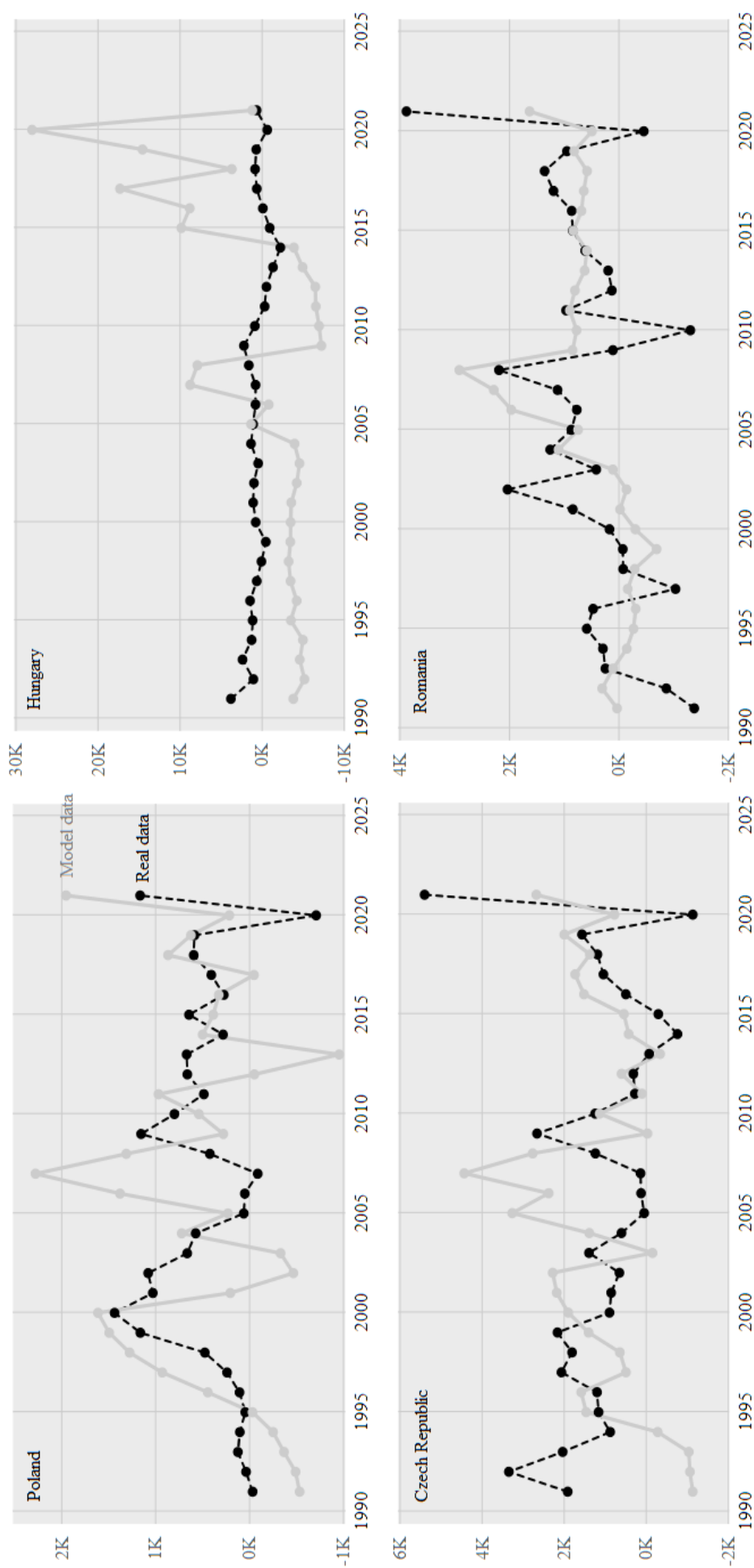


Рис 2.25 Адаптивна модель (k_{pr}) на даних по вибраних країнах Східної Європи.

Джерело: складено автором

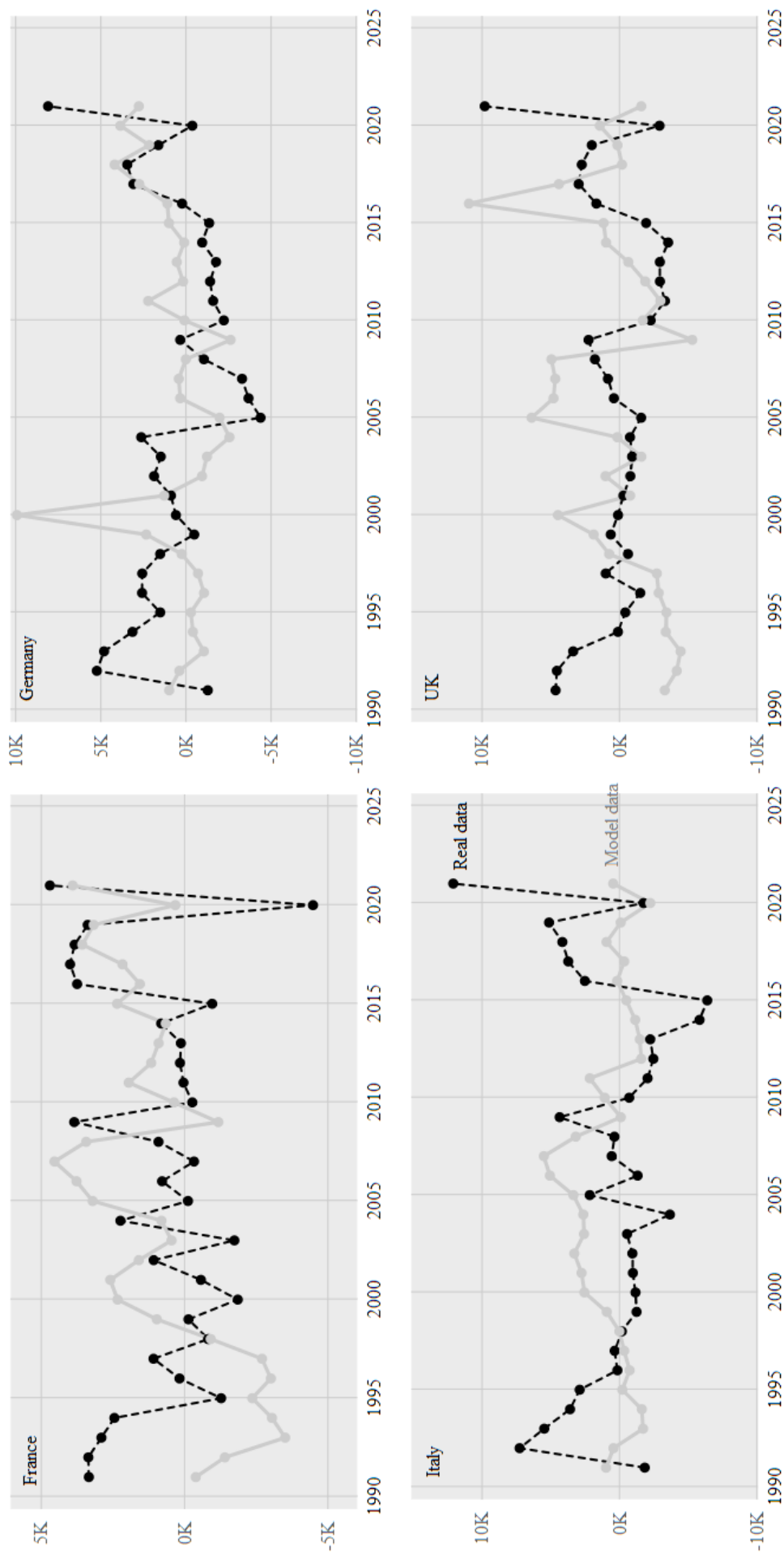


Рис 2.26 Адаптивна модель (k_{pr}^*) на даних по вибраних країнах Західної Європи.

Джерело: складено автором

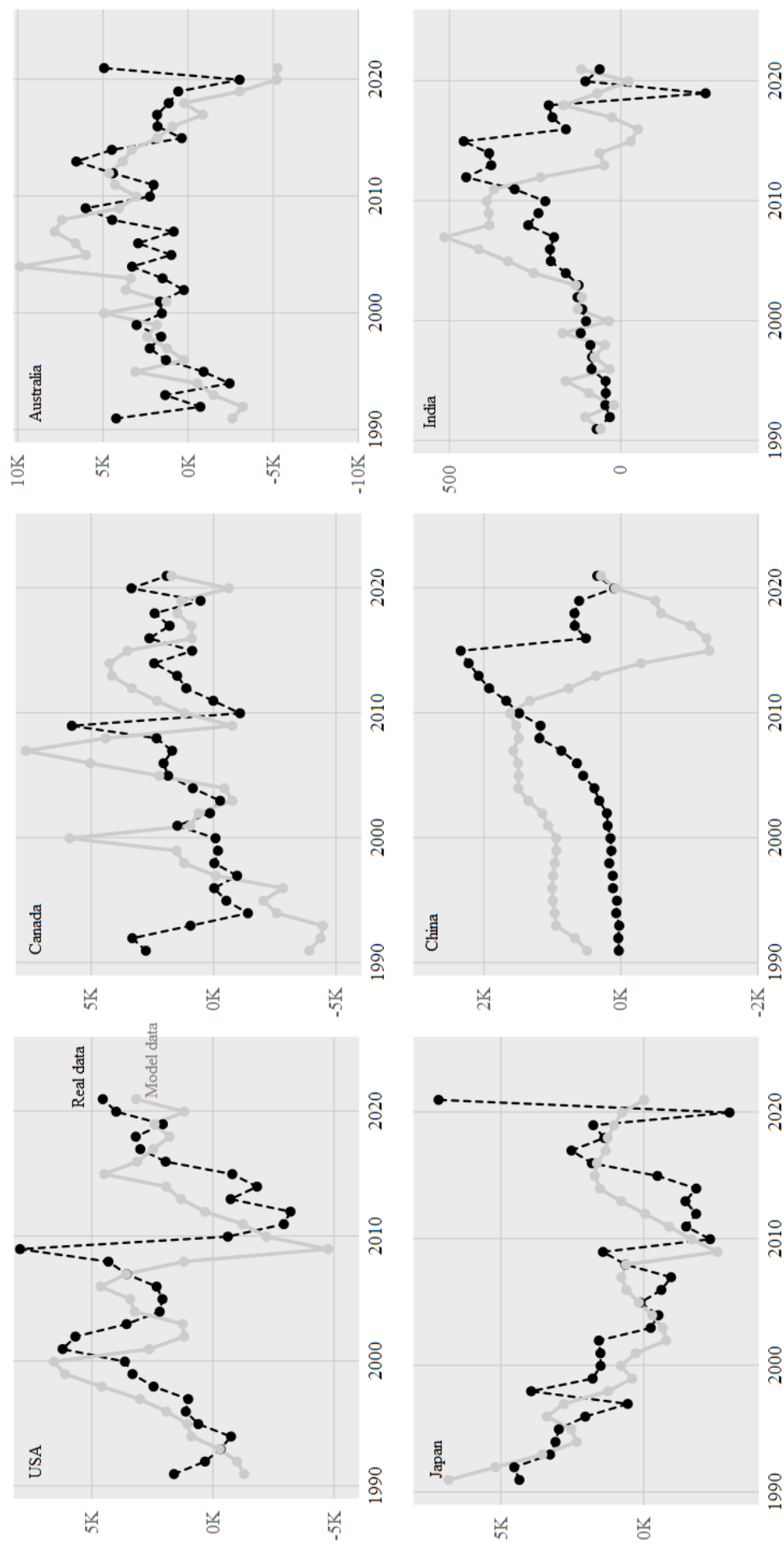


Рис 2.27 Адаптивна модель (k_{pr}^*) на даних по вибраних країнах решти світу.

Джерело: складено автором

Щодо Китаю, результати свідчать, що офіційні темпи економічного зростання можуть не відповідати реальним, про що свідчать дослідження [148], де темпи зростання порівнювалися з рівнем освітленості територій. Це вказує на вибірковість або маніпуляції статистичними даними, що спотворює результати моделювання. Оскільки побудовані моделі ґрунтуються на припущеннях функціонування ринкової економіки, використання неповних чи спотворених даних призводить до некоректних прогнозів і унеможливорює адекватне відтворення економічної динаміки Китаю.

На рис. 2.26 та 2.27 простежується ситуація, коли кризові явища істотно впливають на точність моделювання, підвищуючи похибку результатів. На відміну від циклічних коливань, кризи мають раптовий і непередбачуваний характер, виходять за межі звичних економічних закономірностей і створюють серйозні труднощі для відтворення економічної динаміки. Їхні причини можуть бути різними – фінансові дисбаланси, політична нестабільність, воєнні конфлікти, глобальні епідемії чи природні катаклізми, які характеризуються нелінійністю процесів і непередбачуваними наслідками, що складно формалізувати в межах стандартних моделей.

Моделювання кризових явищ потребує врахування ширшого кола чинників, ніж традиційні макроекономічні змінні. Важливими стають поведінкові реакції економічних агентів, міжгалузеві та регіональні зв'язки, а також зовнішні впливи – глобальні фінансові й геополітичні процеси. Крім того, ефективне моделювання криз вимагає постійного оновлення та адаптації моделей, адже кожна нова криза має власну специфіку та форми прояву. Це підкреслює необхідність гнучких і адаптивних підходів, здатних відображати не лише стабільні закономірності розвитку, а й екстремальні, непередбачувані події економічного середовища.

Моделювання кризових шоків є окремим завданням прогнозування, яке зазвичай не інтегрується у класичні моделі економічної динаміки. Включення кризових факторів суттєво ускладнює моделі та, через обмеженість і неточність даних, може знижувати якість результатів у періоди стабільності. Кризи мають схильність до поступового нівелювання в середньо- та довгостроковій перспективі, тому їхнє пряме врахування у моделях часто створює додаткові ризики та викривлення, а не підвищує точність прогнозів.

Водночас аналіз якості побудованих моделей (рис. 2.28), де зображено результати моделювання за відносним коефіцієнтом R (табл 2.5), засвідчує їхню перевагу над традиційними підходами, що підтверджує гіпотезу про нереалістичність базових припущень закритих економічних моделей – рівності інвестицій і заощаджень та відсутності інвестиційного лагу. Отримані результати доводять доцільність переходу до гнучкіших моделей, які враховують відкритість економіки й механізми інвестиційної динаміки, забезпечуючи більш реалістичне відображення економічного розвитку.

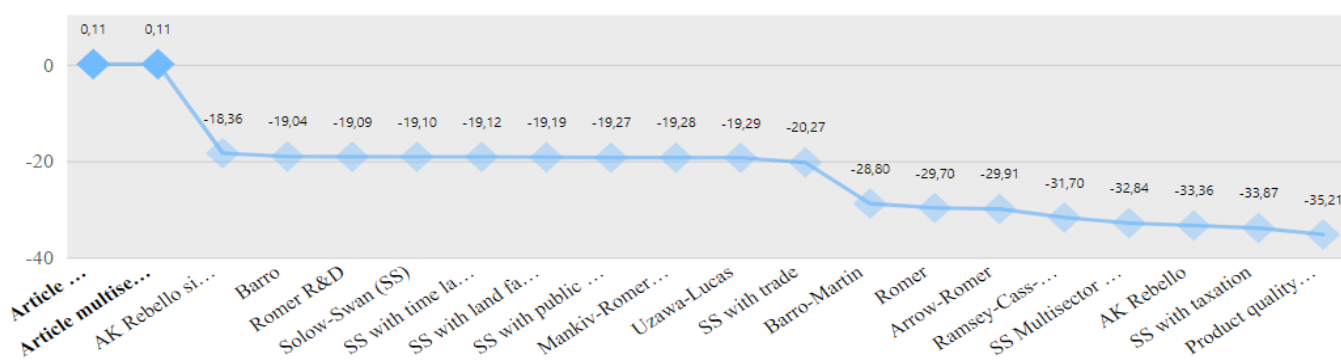


Рис 2.28 Усереднений коефіцієнт R у розрізі моделей економічного зростання з урахуванням адаптивної моделі.

Джерело: складено автором

Аналіз рис. 2.29 підтверджує ефективність моделі: за показником RMSLE (табл 2.5) вона демонструє нижчу похибку, що свідчить про кращу здатність відтворювати відносні темпи змін економічних показників. Водночас для метрик RMSE та MSE похибка залишається відносно високою, що вказує на обмежену точність у відтворенні абсолютних значень.

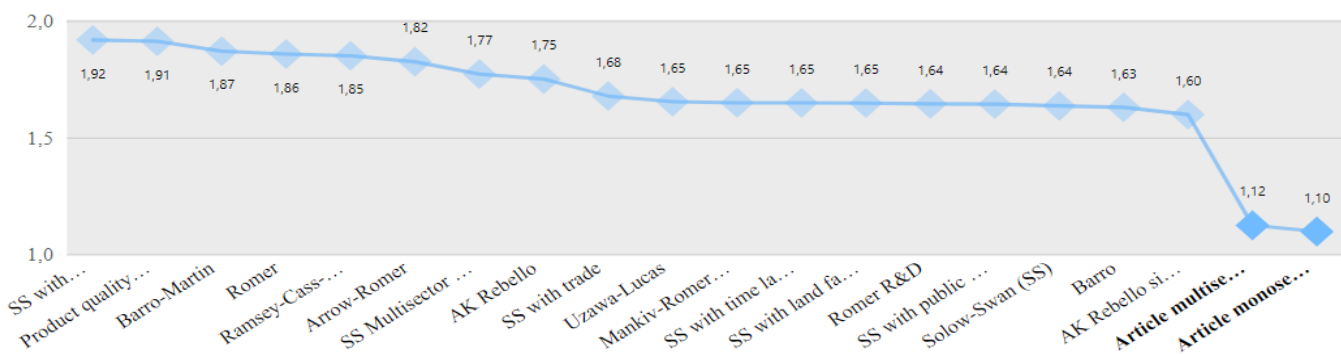


Рис 2.29 Усереднений показник $RMSLE$ у розрізі моделей економічного зростання з урахуванням адаптивної моделі.

Джерело: складено автором

Для окремих економік, переважно слаборозвинених країн Африки та Азії, підвищення складності моделі спричинило зростання розбіжностей між розрахунками та фактичними даними. Це пов'язано з нестабільністю управління, високою часткою тіньового сектору, військовими конфліктами, корупційними ризиками та низькою якістю статистичних даних, що знижує достовірність вхідної інформації. Сукупність цих чинників робить модельні передумови менш реалістичними та пояснює значні відхилення результатів у таких країнах.

Якість моделей економічного зростання є вищою у короткостроковому періоді, ніж у середньо- та довгостроковій перспективі (рис. 2.30), де n – тривалість моделювання від 10 до 60 років). Це пояснюється відносною стабільністю економічних умов на короткому горизонті, коли вплив зовнішніх і внутрішніх факторів є менш вираженим, а структурні зрушення — незначними. У таких умовах моделі точніше відтворюють динаміку економіки, оскільки ключові змінні – виробничі потужності, споживчі витрати, валютні курси — залишаються відносно сталими.

У середньо- та довгостроковому вимірі точність моделей знижується через вплив технологічних інновацій, структурних і демографічних змін, глобальних криз та політичних подій, які змінюють траєкторію розвитку економіки. Це зумовлює необхідність адаптивних підходів і регулярного оновлення параметрів, щоб зберегти прогностичну достовірність моделей.

Багатосекторна модель економічного зростання виявляє вищу ефективність за умов значних структурних трансформацій між секторами економіки, оскільки точніше відображає взаємозв'язки між галузями та їхній неоднаковий внесок у загальну динаміку. На відміну від агрегованих підходів, вона дозволяє простежити, як зміни в окремих секторах впливають на розвиток економіки в цілому.

У довгостроковій перспективі цей підхід особливо важливий, адже враховує перехід до постіндустріальної моделі, зростання ролі послуг та інновацій. Це забезпечує глибший аналіз впливу структурних змін на продуктивність праці, інвестиційні потоки, попит і пропозицію, а також підвищує точність прогнозів економічного розвитку.

Приклад прогнозування за моделлю економічного зростання можна побачити на рис. 2.31.

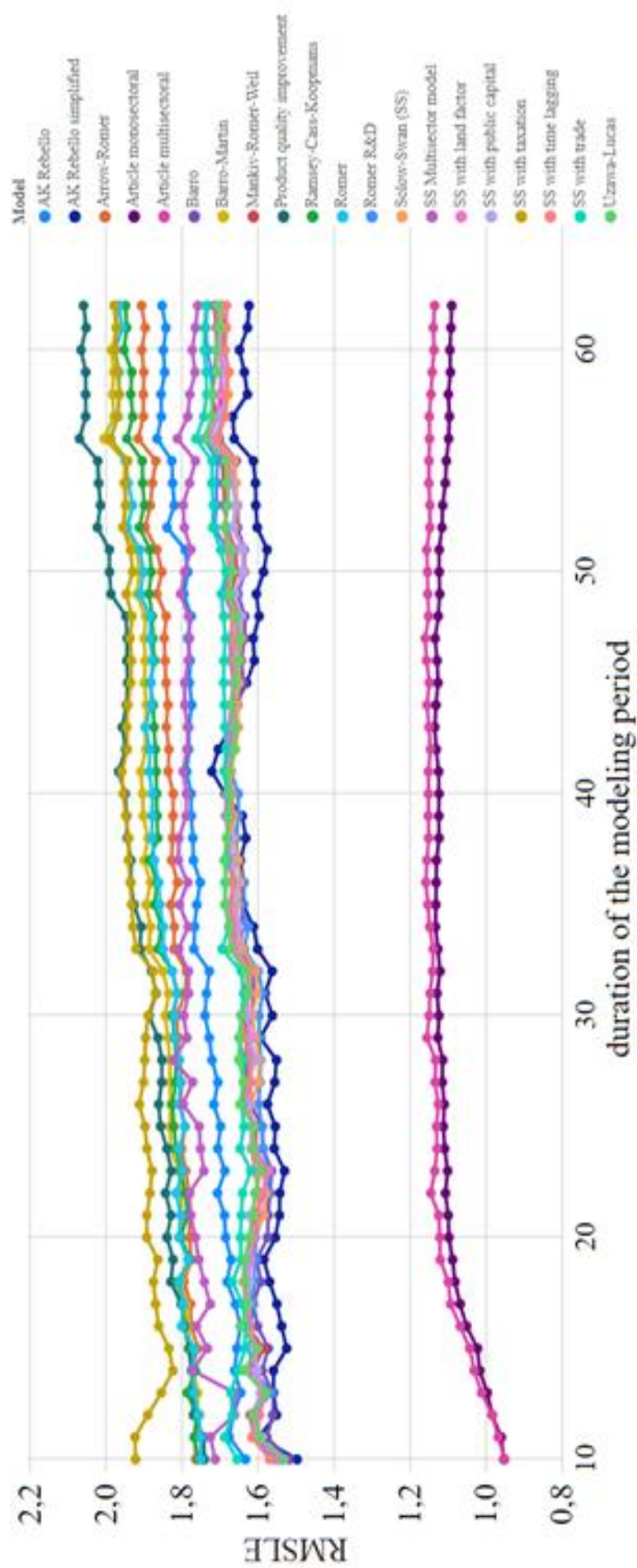


Рис 2.30 Середній показник $RMSLE$ у розрізі тривалості періоду моделювання та моделей економічного зростання з урахуванням адаптивної моделі.

Джерело: складено автором

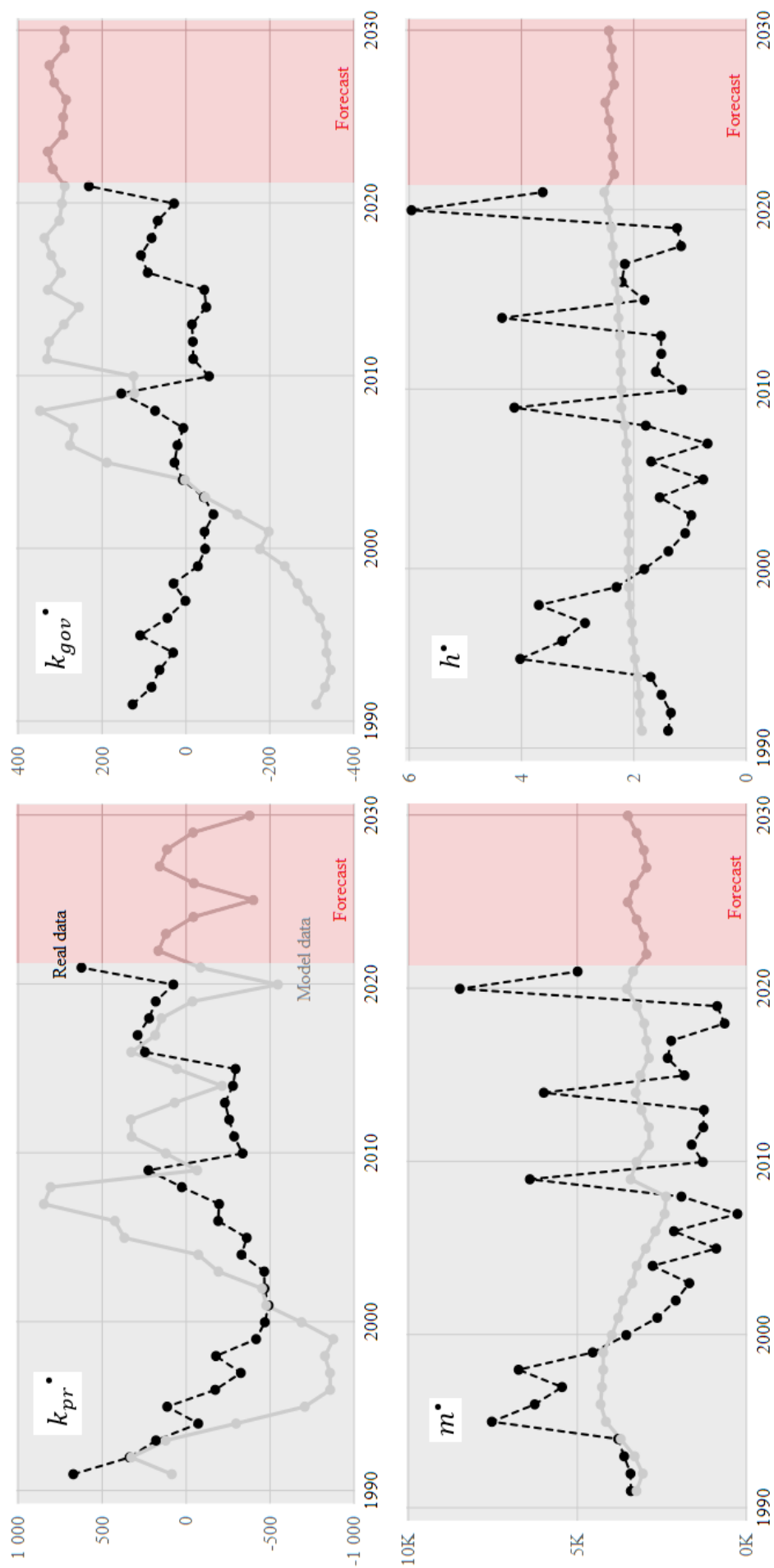


Рис 2.31 Реальні (чорний пунктирний графік), модельні (сірий графік) дані та прогноз (червона зона сфрого графіка)

для економіки України за адаптивною моделлю.

Джерело: складено автором

На початковому етапі дослідження важливо зіставити модельні показники – зокрема зростання капіталомісткості та рівень заощаджень – із фактичними економічними даними. Таке порівняння дозволяє оцінити точність і адекватність моделей, сформувати базу для налаштування параметрів і коректного тлумачення впливу окремих факторів на динаміку зростання. Крім того, рання верифікація моделі дає змогу виявити її слабкі сторони та підвищити надійність прогнозів у коротко-, середньо- й довгостроковій перспективі, забезпечуючи обґрунтованість подальших аналітичних висновків.

Спершу доцільно порівняти темпи зростання капіталомісткості приватного сектору в реальних даних (рис. 2.32а) та відповідні показники, отримані за допомогою моделі (рис. 2.32с).

Чим вищий рівень розвитку економіки, тим значніші коливання спостерігаються у темпах зростання капіталомісткості приватного сектору (рис. 2.32а). Це зумовлено ефектом масштабу та складністю економічної системи, у якій зростає різноманітність і взаємозв'язок виробничих процесів. Розвинені економіки потребують більших інвестицій у високотехнологічні та інноваційні сектори, тому динаміка капіталомісткості стає більш мінливою під впливом технологічних змін і глобальних ринкових тенденцій. Постійна адаптація капіталовкладень до нових умов посилює варіації темпів зростання приватного сектору в часі.

Модельні дані демонструють вищу волатильність, ніж фактичні показники (рис. 2.32с). Це пояснюється тим, що у розвинених економіках із численними взаємопов'язаними факторами моделі не завжди здатні повністю врахувати динамічні зміни та структурну складність, що призводить до посилення коливань у прогнозах. Зокрема, моделі можуть переоцінювати вплив окремих змінних, що збільшує амплітуду прогнозованих коливань. Натомість реальні дані зазвичай коригуються під впливом політичних рішень, інституційних змін і зовнішніх чинників, які згладжують динаміку, роблячи фактичні коливання менш вираженими порівняно з модельними результатами.

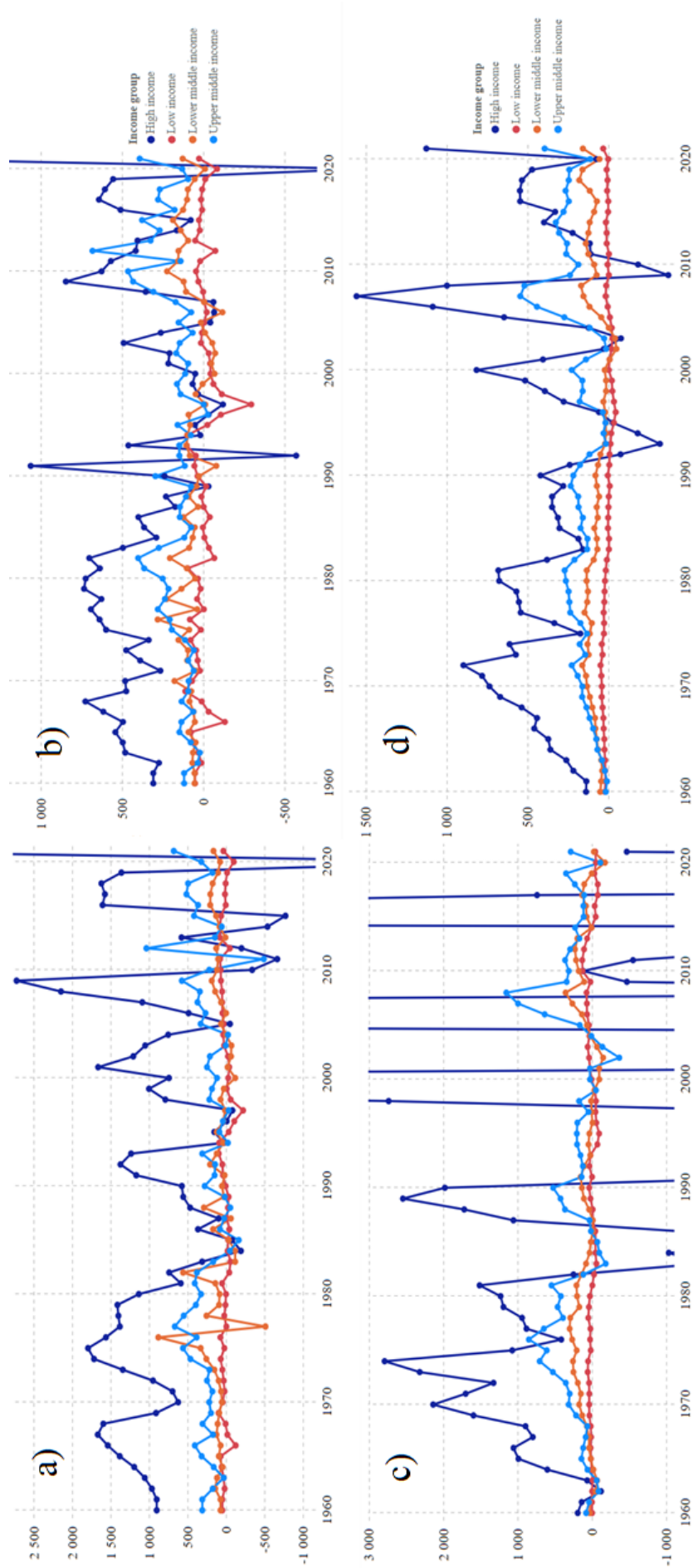


Рис 2.32 Усереднений показник реальних та модельних темпів зростання капіталомісткості приватного (а, с відповідно) та публічного (b, d відповідно) сектору.

Джерело: складено автором

Подібним чином доцільно провести порівняння темпів зростання капіталомісткості публічного сектору (рис. 2.32b, рис. 2.32d). Модельні дані щодо темпів зростання капіталомісткості публічного сектору демонструють рідші, але більш виражені коливання порівняно з реальними показниками (рис. 2.32b, рис. 2.32d). Це пов'язано з тим, що модель передбачає сталі або регульовані обсяги капіталовкладень, що знижує частоту змін, але не враховує усіх фактичних економічних флуктуацій і тимчасових корекцій державної політики. У результаті модель формує меншу частоту, але більшу амплітуду коливань, оскільки великі та стабільні інвестиції у публічний сектор створюють різкіші зміни в капіталомісткості, ніж це спостерігається у реальній економіці.

Далі буде проведено окремий розгляд параметрів моделі економічного зростання. Аналіз здійснювався у двох вимірах: по-перше, з урахуванням тривалості періоду моделювання – будувалися моделі за останні 10-62 роки (повний період); по-друге, з урахуванням часу – створювалися моделі з інтервалом у 10 років, починаючи з 1960 року, з кроком один рік.

Першим розглянемо параметр A з формули (2.36), який відображає вплив технологічного прогресу на економіку (рис. 2.33). Параметр A зменшується та стає стабільнішим зі збільшенням тривалості періоду моделювання (рис. 2.33). Це зумовлено адаптацією економіки до нових технологій і поступовим насиченням технологічних процесів. На коротких інтервалах окремі інновації можуть спричиняти різкі коливання продуктивності, однак із часом їхній вплив згладжується, і технологічний прогрес стабілізується.

У секторному розрізі значення параметра A (2.36) є найвищим у сфері послуг, нижчим – у промисловості та найменшим у сільському господарстві (рис. 2.33). Це пояснюється різною швидкістю впровадження інновацій: послуги швидко інтегрують інформаційні технології, промисловість потребує значних капіталовкладень і модернізації, тоді як сільське господарство характеризується повільним оновленням через консервативність виробничих практик.

Далі буде проведено аналіз параметрів еластичності факторів виробництва (рис. 2.34 - 2.41).

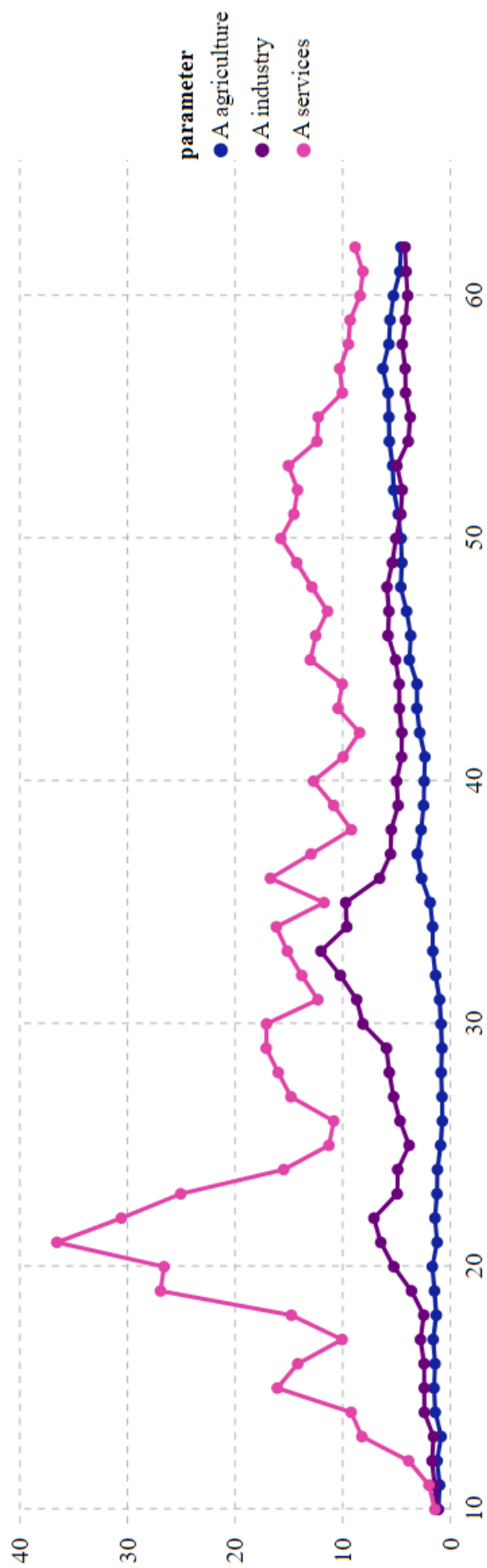


Рис 2.33 Усереднений параметр A у розрізі секторів економіки за тривалістю періоду.

Джерело: складено автором

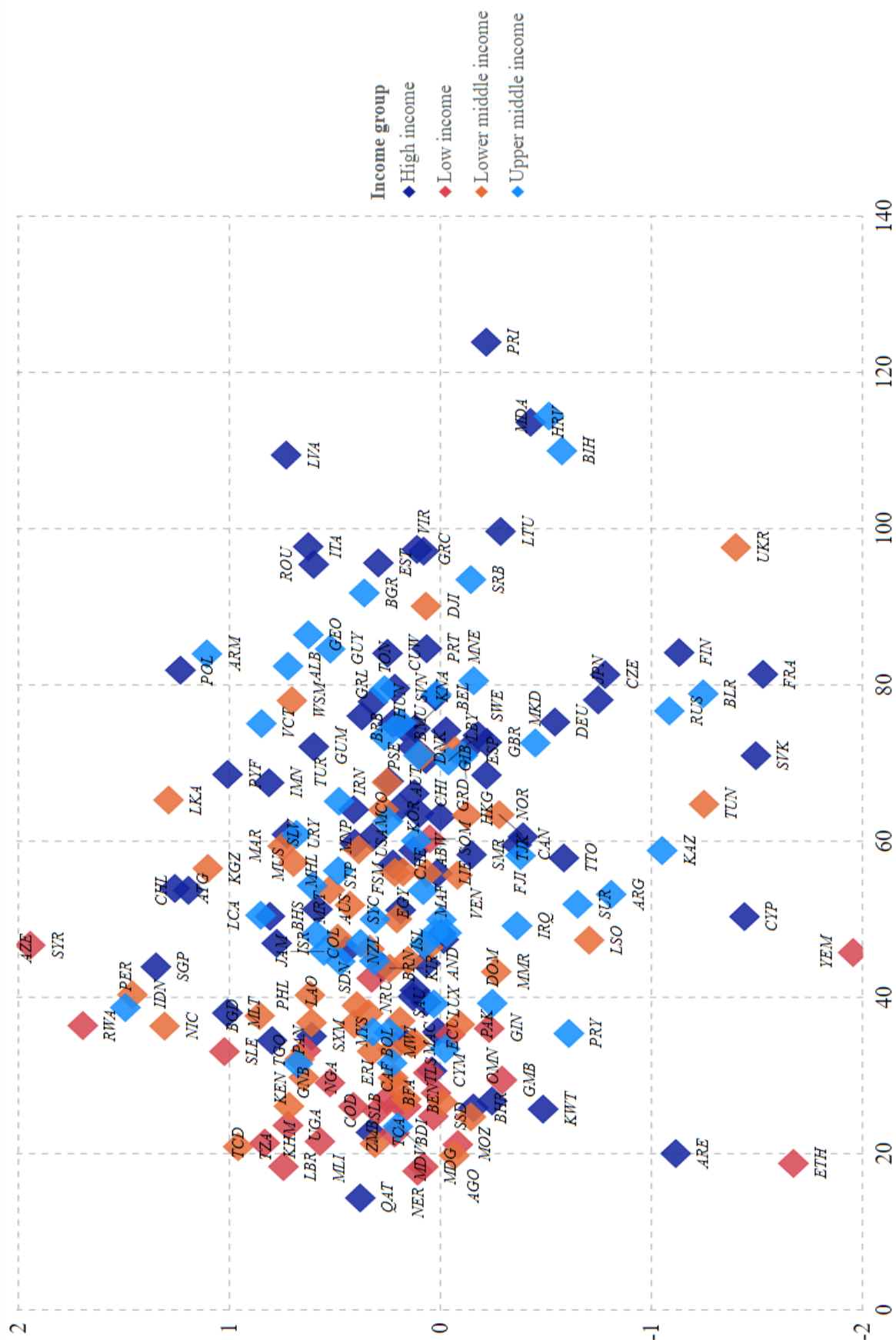


Рис 2.34 Залежність параметру α до темпів зростання людського капіталу на одиницю праці.

Джерело: складено автором

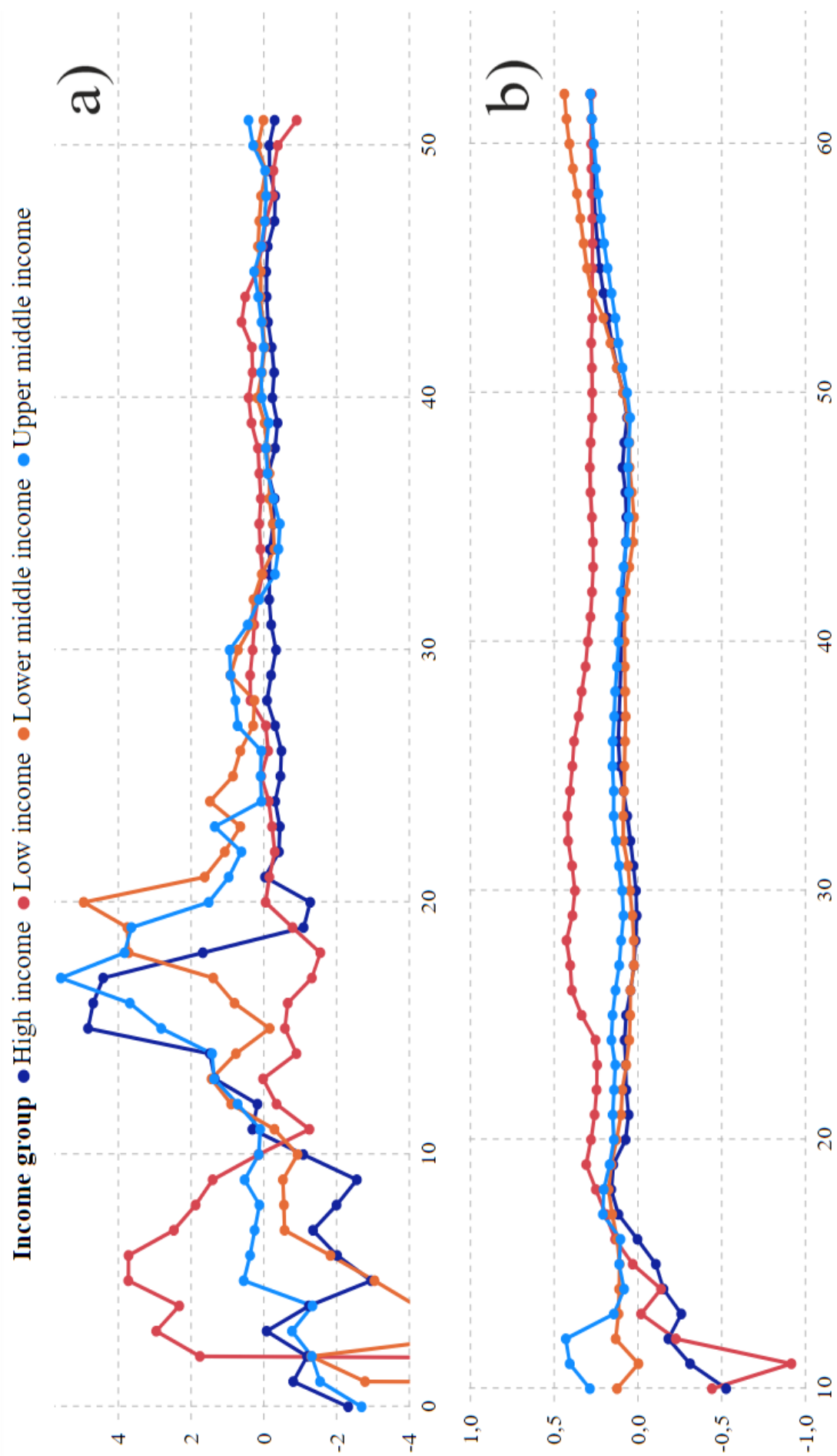


Рис 2.35 Усредненный параметр α за часом (a) та за тривалістю періоду (b).

Джерело: складено автором

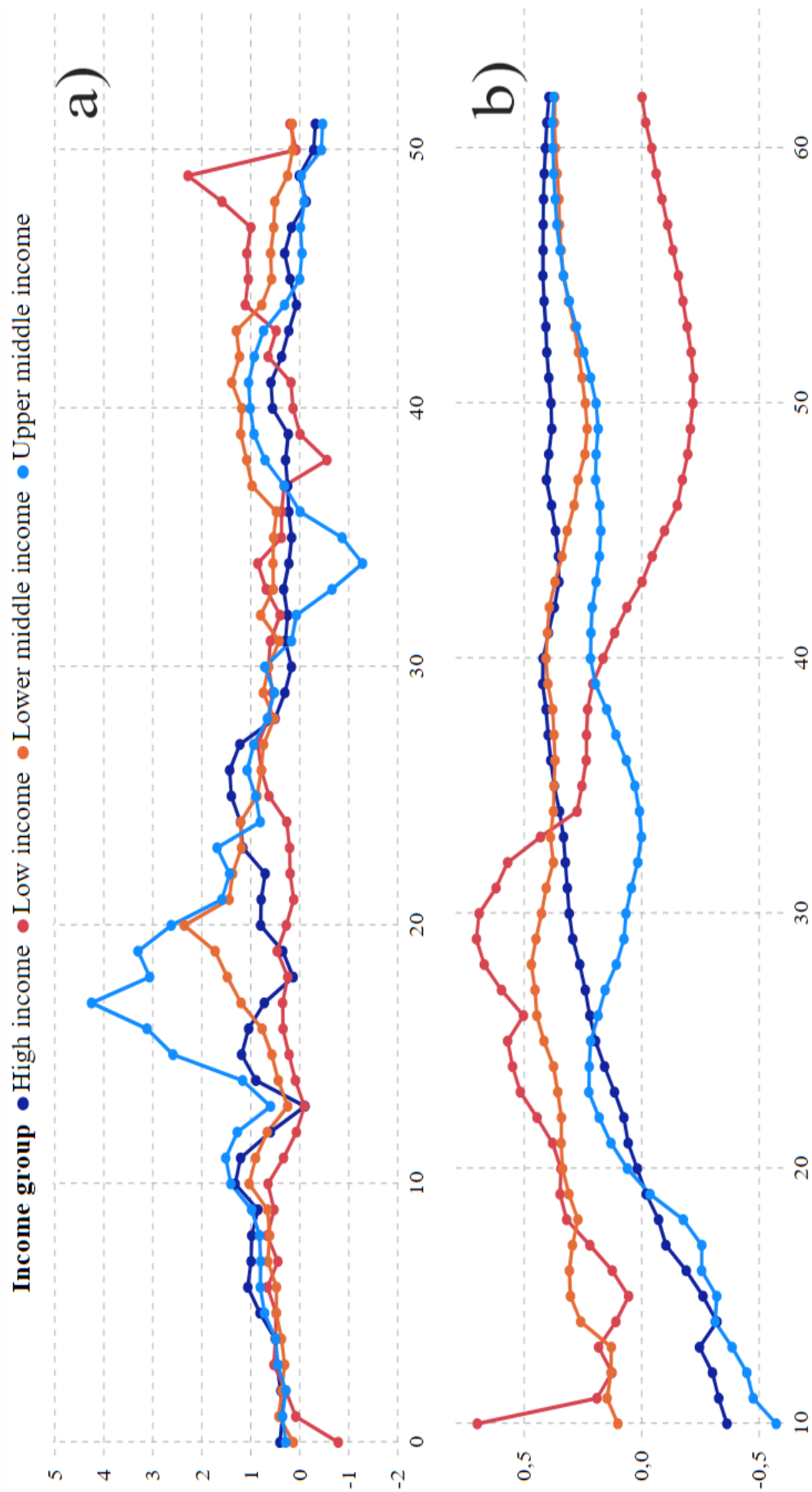


Рис 2.36 Усереднений параметр β за часом (a) та за тривалістю періоду (b).

Джерело: складено автором

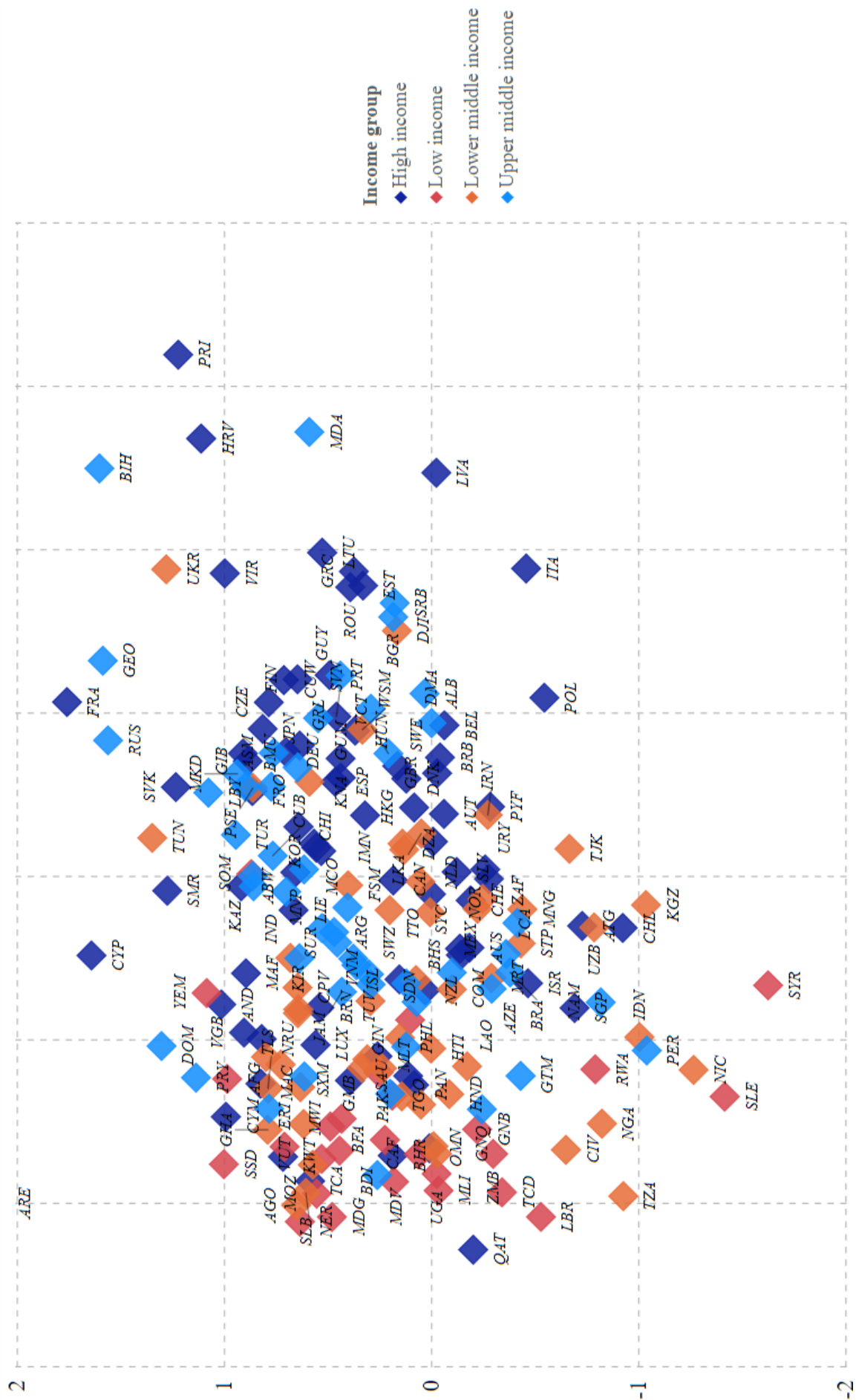


Рис 2.37 Залежність параметру γ до темпів зростання людського капіталу на одиницю праці.

Джерело: складено автором

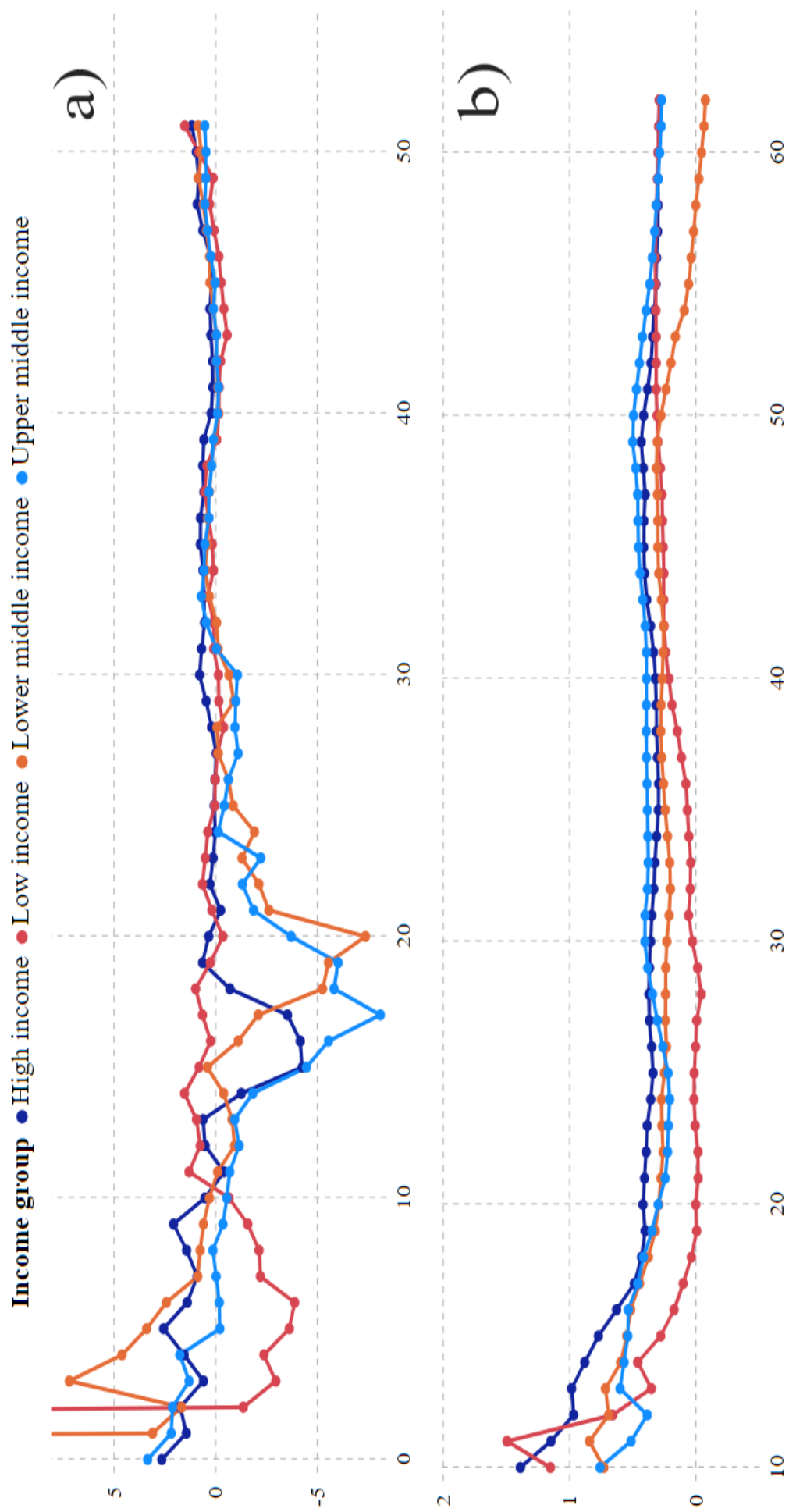


Рис 2.38 Усереднений параметр γ за часом (a) та за тривалістю періоду (b).

Джерело: складено автором

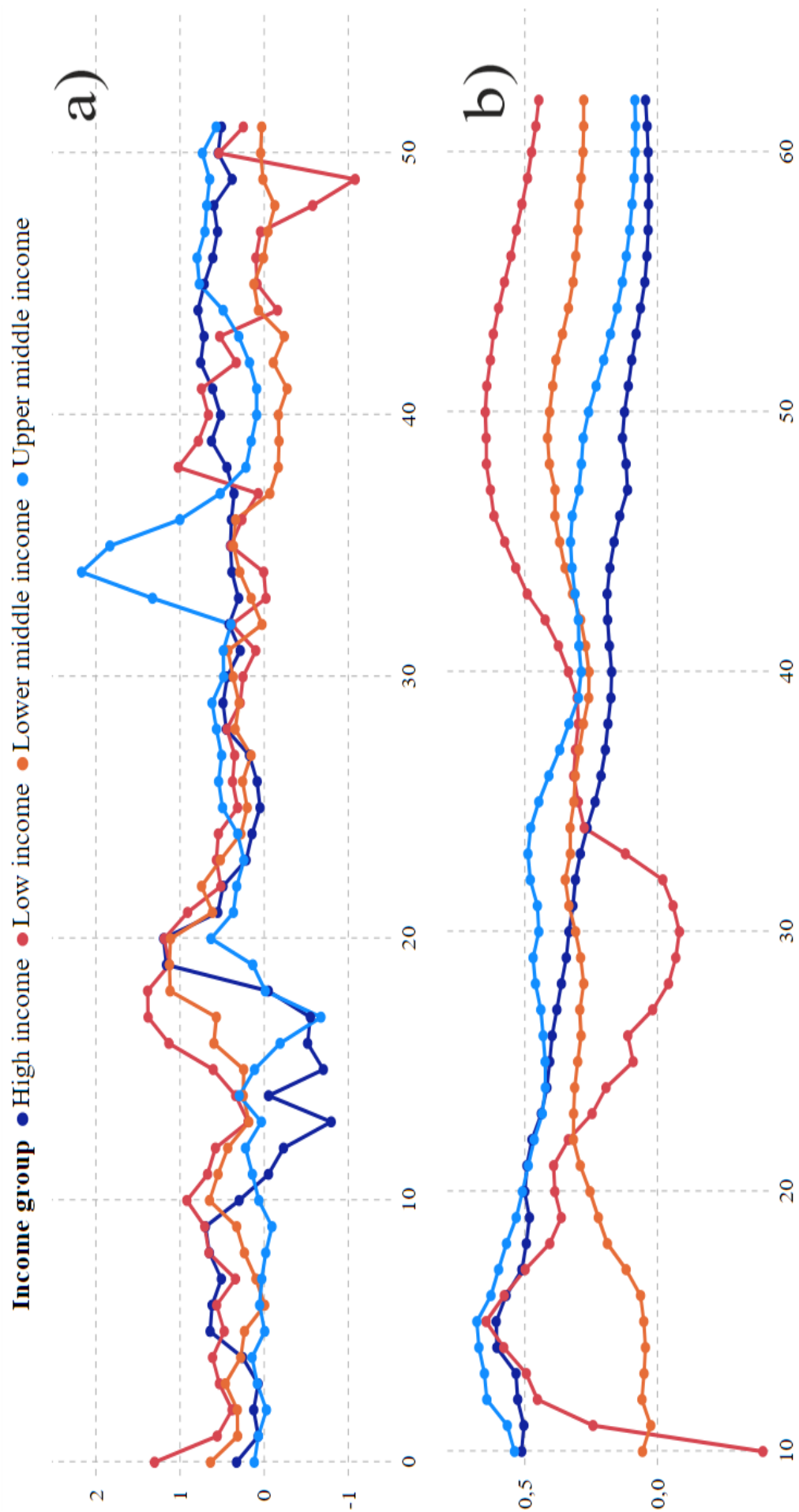


Рис 2.39 Усереднений параметр ϕ за часом (a) та за тривалістю періоду (b).

Джерело: складено автором

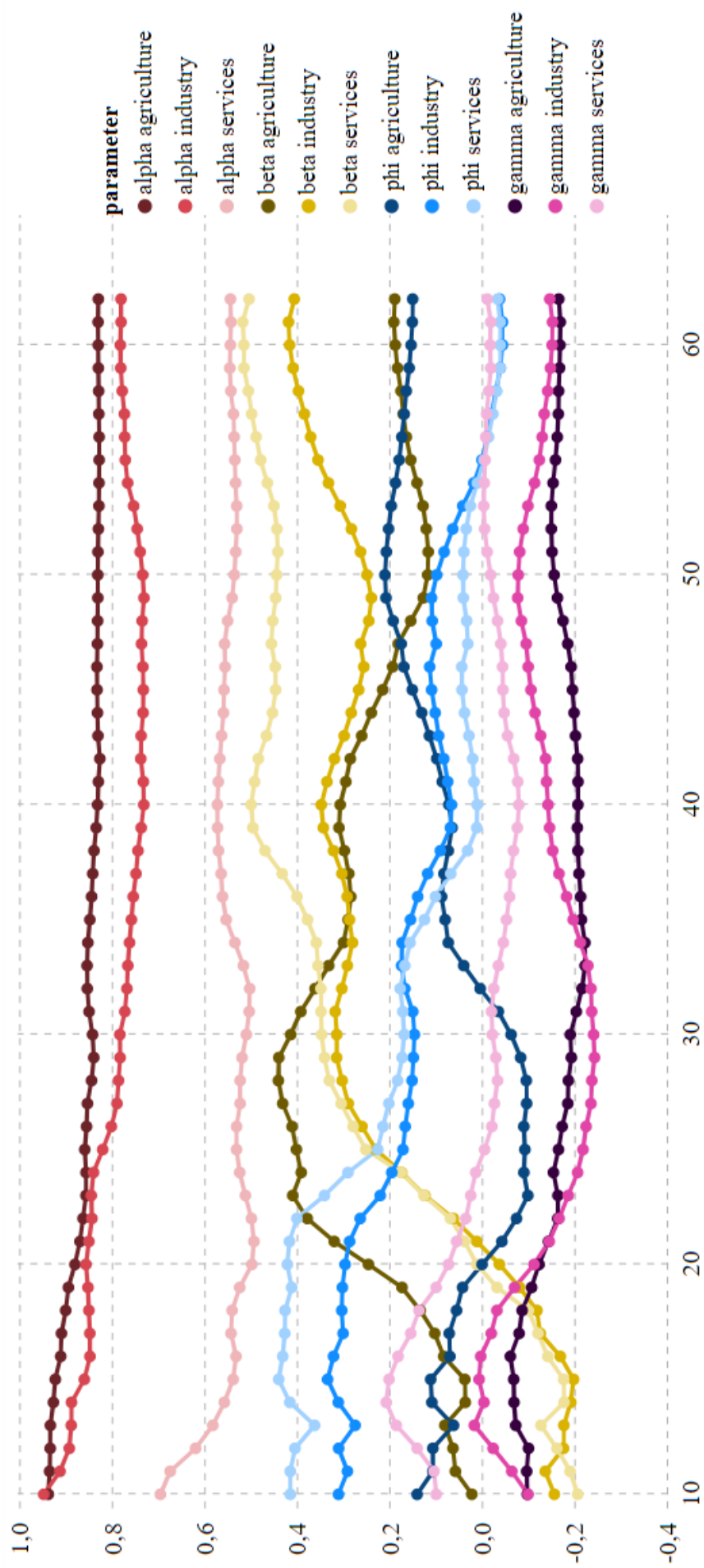


Рис 2.40 Усереднені параметри еластичності факторів виробництва у розрізі секторів економіки за тривалістю періоду.

Джерело: складено автором

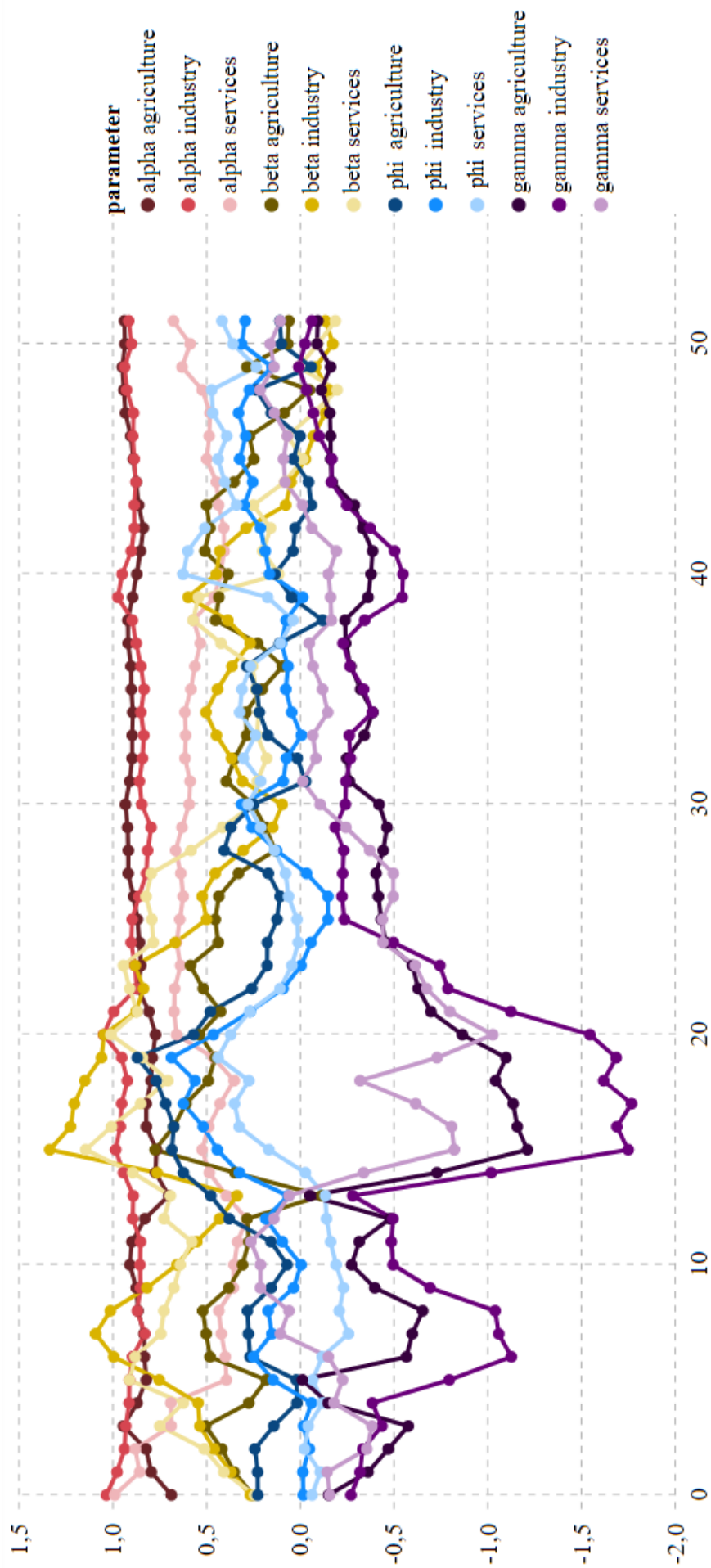


Рис 2.41 Усереднені параметри еластичності факторів виробництва у розрізі секторів економіки за часом.

Джерело: складено автором

У країнах із повільним зростанням знань спостерігається вища еластичність капіталу α (2.36) (рис. 2.34), оскільки економічний розвиток у таких умовах більше залежить від капіталовкладень, ніж від інновацій чи технологічного прогресу. У цих економіках інвестиції в інфраструктуру, обладнання чи виробничі потужності мають відчутніший вплив на продуктивність і випуск, адже впровадження нових знань відбувається повільніше. Відтак капітал виступає головним рушієм зростання, забезпечуючи більший економічний ефект, ніж у країнах, де провідну роль відіграють технології та інновації.

У період 1960-1990 рр. спостерігаються значні коливання еластичності капіталу (рис. 2.35a), що зумовлено післявоєнною індустріалізацією, нафтовими кризами 1970-х, коливаннями інвестицій та технологічними трансформаціями. Ці процеси підвищили волатильність капіталовіддачі. У подальші десятиліття, зі стабілізацією глобальних ринків і переходом до постіндустріальної економіки, коливання зменшилися завдяки передбачуванішим інвестиціям і поступовому технологічному розвитку.

Слаборозвинені країни демонструють вищу еластичність капіталу у середньо- та довгостроковій перспективі (рис. 2.35b), оскільки мають значний потенціал зростання продуктивності через інвестиції. Навіть невеликі капіталовкладення в інфраструктуру чи технології забезпечують суттєвий ефект завдяки низькому стартовому рівню капіталу. У довгостроковому вимірі такі економіки зберігають високу еластичність завдяки швидкому накопиченню капіталу та впровадженню ефективніших технологій.

У 1980-1990-х роках у середньорозвинених країнах спостерігалось зростання еластичності публічного капіталу β (2.36) (рис. 2.36a), зумовлене активними інвестиціями в інфраструктуру, енергетику та освіту, які стали основою їхнього економічного розвитку. Державні капіталовкладення сприяли модернізації економіки та підвищенню продуктивності, що підсилювало ефект від публічних інвестицій.

У слаборозвинених країнах аналогічна тенденція проявилася пізніше – у 2000-2010-х роках (рис. 2.36), коли внаслідок глобальних програм допомоги та міжнародних інвестицій почали активно розвиватися інфраструктура, система охорони здоров'я та освіта, що стимулювало зростання ефективності публічного капіталу.

Вища швидкість зростання людського капіталу γ (2.36) зумовлює більшу його еластичність (рис. 2.37), оскільки швидке накопичення знань і навичок підвищує адаптивність економіки до нових викликів і можливостей. За умов інтенсивного розвитку людського капіталу інвестиції в освіту, професійну підготовку та інновації забезпечують суттєвіший економічний ефект, підвищуючи продуктивність праці й сприяючи впровадженню технологій. У результаті висококваліфікована робоча сила ефективніше використовує ресурси, генерує інновації та підтримує стаке економічне зростання.

Еластичність людського капіталу є вищою у високорозвинених країнах незалежно від тривалості періоду моделювання (рис. 2.38b), що зумовлено розвиненими системами освіти, охорони здоров'я та підвищення кваліфікації, які забезпечують ефективне використання людських ресурсів. Інвестиції в освіту й інновації швидко трансформуються у зростання продуктивності та технологічний прогрес, підтримуючи стабільну конкурентоспроможність економіки.

Зниження еластичності людського капіталу у 1980-1990-х роках (рис. 2.38a) пов'язане з економічними кризами, структурними перебудовами та переходом до постіндустріальної моделі розвитку. Автоматизація, скорочення бюджетних витрат і зменшення інвестицій у освіту уповільнили накопичення знань і навичок, що знизило віддачу від людського капіталу у цей період.

Еластичність фактора землі та природних ресурсів ϕ (2.36) є вищою у слаборозвинених країнах у довгостроковій перспективі (рис. 2.39b), що пояснюється наявністю значних невикористаних ресурсів, здатних забезпечити приріст за умов ефективного управління. Проте в останні десятиліття вона знизилася через вичерпання ресурсів та екологічні обмеження.

Натомість високорозвинені країни, які впроваджують інноваційні технології та сучасні методи управління ресурсами, демонструють стабільніше й ефективніше використання природних ресурсів, що зумовлює нижчу, але більш стійку еластичність (рис. 2.39a). У підсумку, сучасна еластичність цього фактора у слаборозвинених країнах є нижчою, ніж у розвинених економіках.

Еластичність приватного капіталу є вищою у сільському господарстві та промисловості, ніж у сфері послуг (рис. 2.40), оскільки ці галузі потребують значних

інвестицій у модернізацію обладнання, інфраструктури та технологій. Такі вкладення суттєво підвищують продуктивність, тоді як у сфері послуг, де залежність від матеріальних ресурсів менша, ефект від капіталовкладень є обмеженим.

Еластичність публічного капіталу у довгостроковому періоді найвища саме у сфері послуг, адже інвестиції в інфраструктуру, освіту та охорону здоров'я забезпечують стійке зростання ефективності. Водночас у короткостроковому вимірі її вплив є слабшим через повільну реалізацію результатів державних програм.

Еластичність людського капіталу також вища у сфері послуг, де освіта та професійна підготовка безпосередньо визначають продуктивність праці й інноваційний потенціал, роблячи людський капітал ключовим чинником розвитку цього сектору.

З часом зростає еластичність приватного та людського капіталу (рис. 2.41), що зумовлено накопиченням досвіду, технологічним прогресом і підвищенням ефективності використання ресурсів. Приватний капітал стає адаптивнішим завдяки інвестиціям у модернізацію виробництва, тоді як людський капітал зміцнює свою роль через розвиток освіти та професійної підготовки, що підвищує продуктивність праці.

Водночас еластичність публічного капіталу поступово зменшується, оскільки первинні інвестиції в інфраструктуру та державні послуги досягають насичення. Після базового етапу розвитку додаткові витрати приносять менший ефект, знижуючи вплив публічних інвестицій на економічне зростання.

Далі розглянемо параметри зростання робочої сили n , амортизації d та норми накопичення s з виразу (2.44) (рис. 2.42-рис. 2.46).

У слаборозвинених країнах спостерігається швидке зростання населення, що посилює від'ємну кореляцію між приростом населення та людським капіталом на особу (рис. 2.42). Обмежені ресурси освітніх систем не дозволяють забезпечити належну якість навчання при зростаючому навантаженні, що призводить до уповільнення розвитку людського капіталу.

У результаті ресурси розподіляються між більшою кількістю людей, знижуючи рівень освіти й професійної підготовки. Це формує замкнене коло, у якому демографічне зростання стримує розвиток людського капіталу, що, своєю чергою, гальмує економічний прогрес і підвищення якості життя.

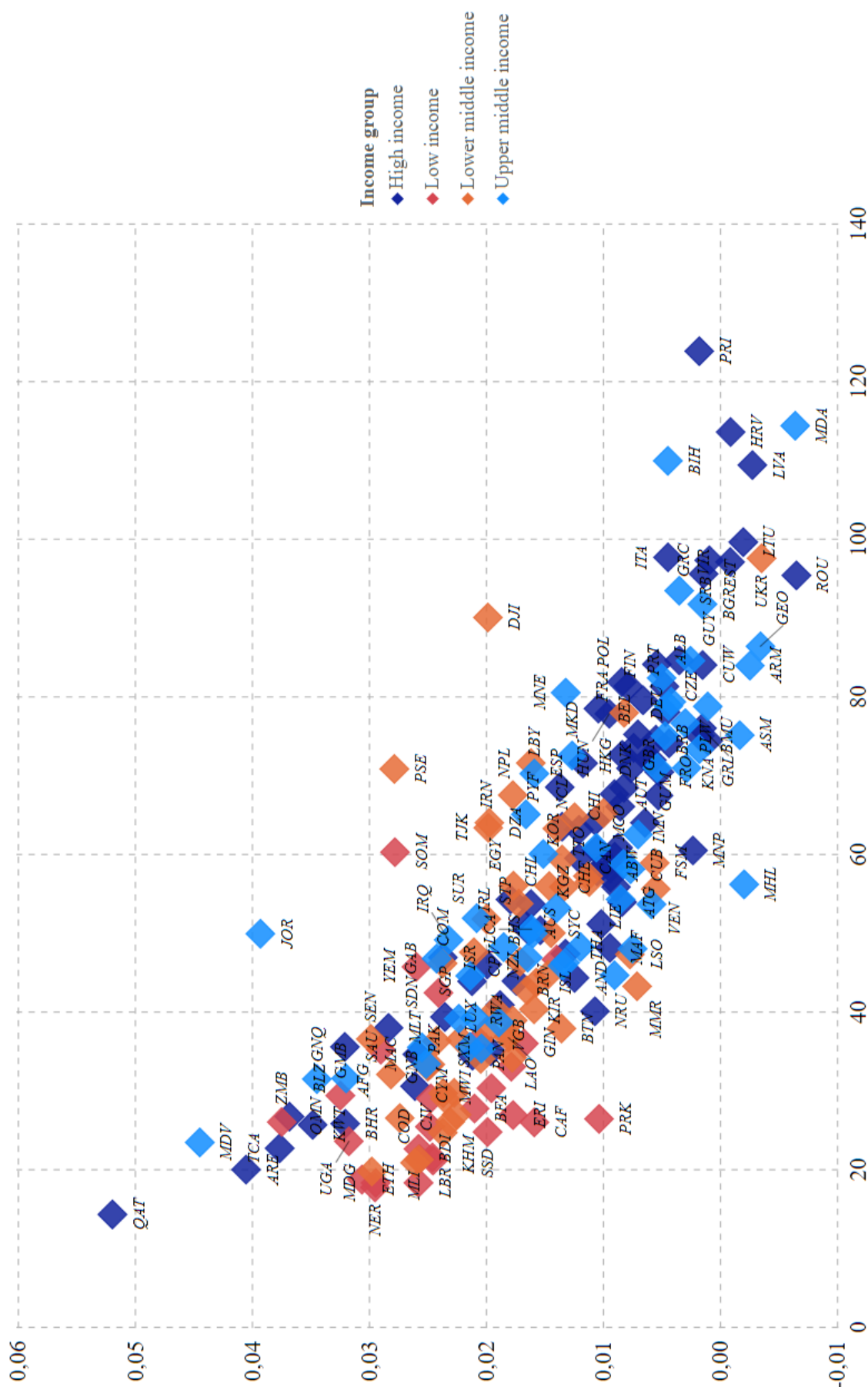


Рис 2.42 Залежність параметру n до темпів зростання людського капіталу на одиницю праці.

Джерело: складено автором

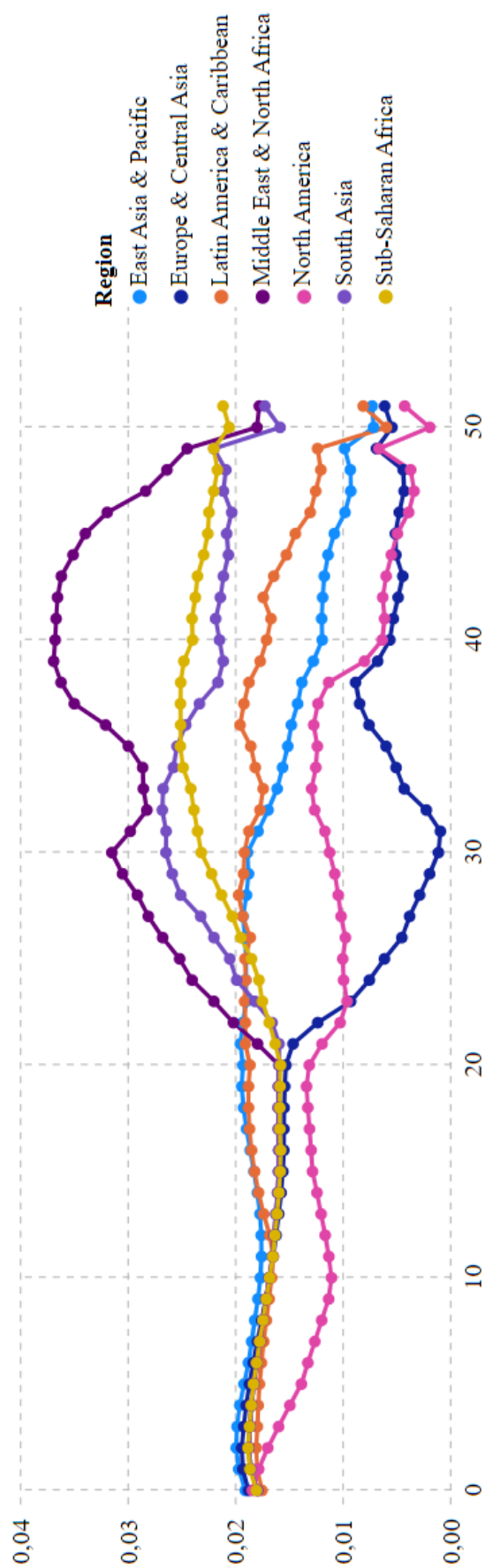


Рис 2.43 Усереднений параметр n у розрізі регіонів за часом.

Джерело: складено автором

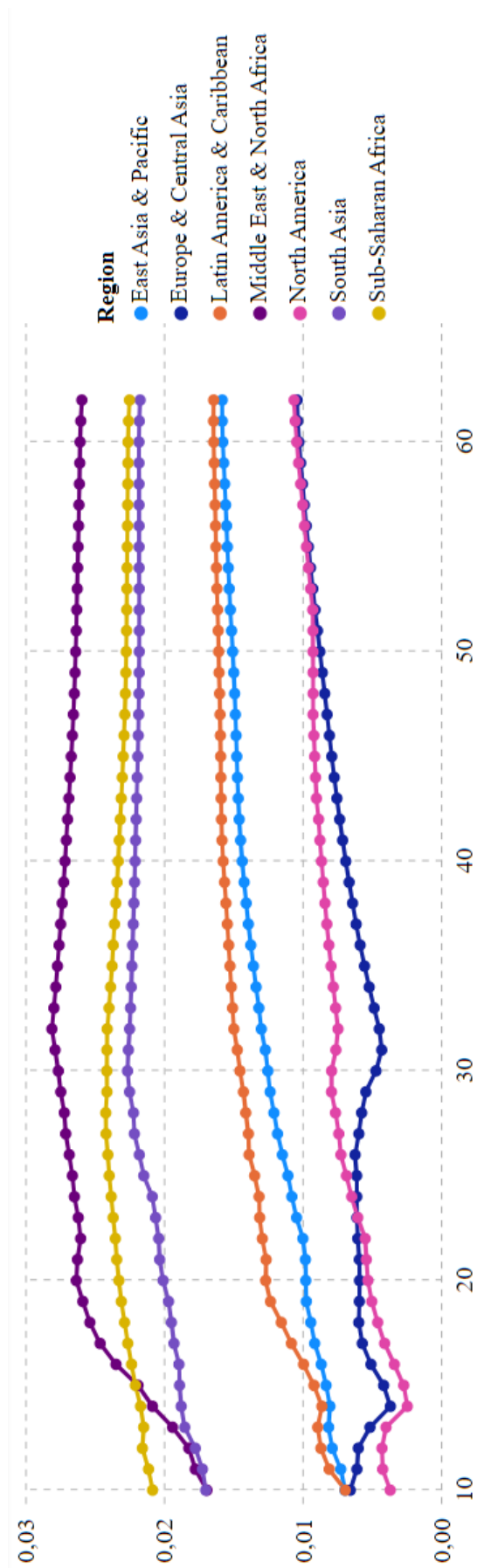


Рис 2.44 Усереднений параметр n у розрізі регіонів за тривалістю періоду.

Джерело: складено автором

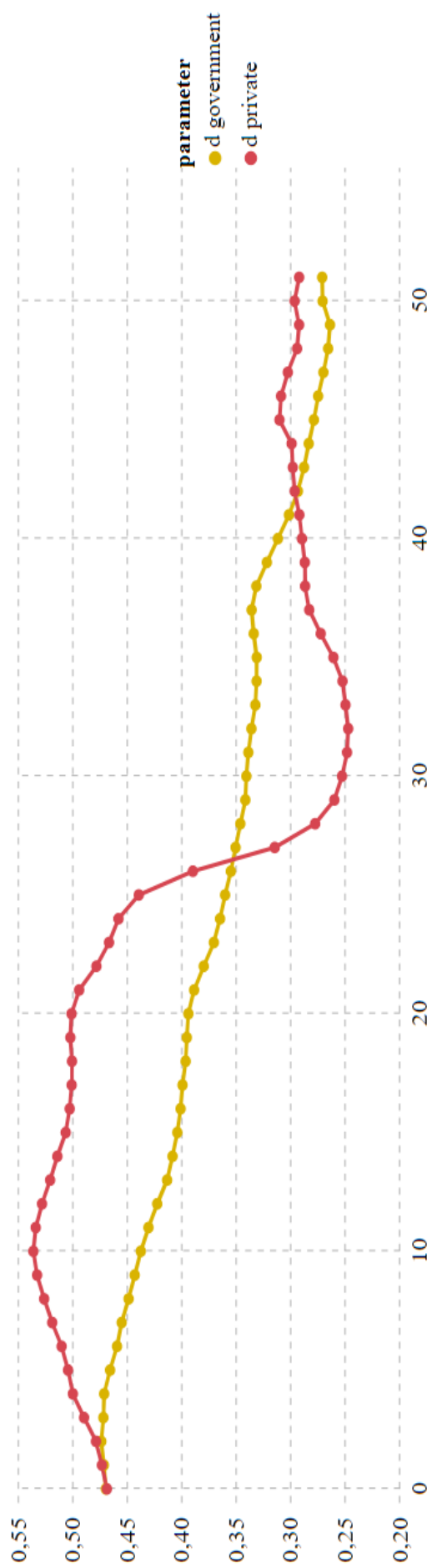


Рис 2.45 Усереднений параметр d у розрізі регіонів за часом.

Джерело: складено автором

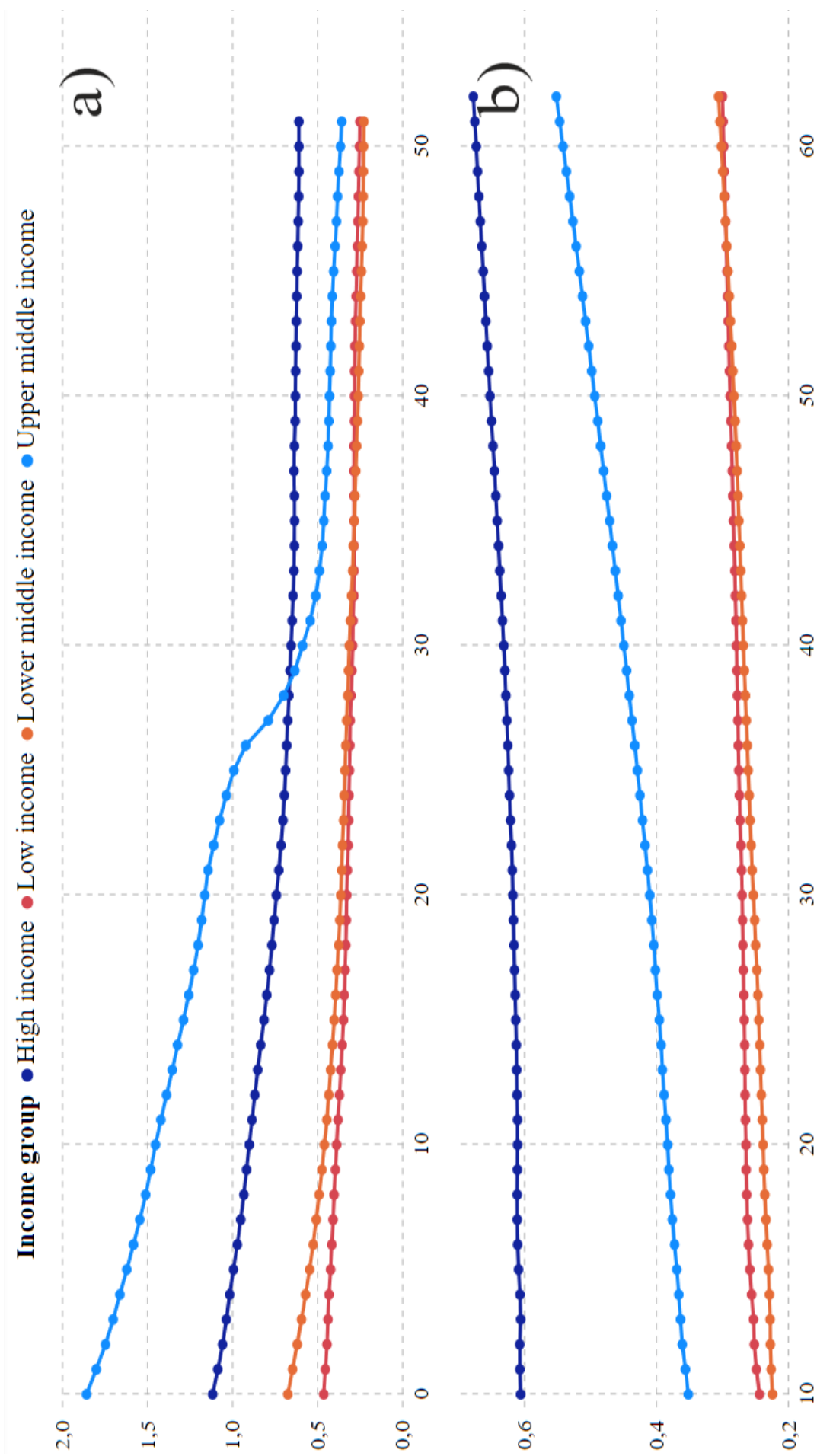


Рис 2.46 Усереднений параметр n у розрізі регіонів за тривалістю періоду.

Джерело: складено автором

Демографічна динаміка залежить від низки ключових факторів, таких як рівень урбанізації та якість життя, що відображає стан економіки, доступність та рівень медичного обслуговування, рівень освіти, соціальне і пенсійне забезпечення, а також культурні особливості.

Слаборозвинені країни, переважно в Африці та частині Азії, стикаються з високими темпами зростання населення, часто понад 2% на рік, що зумовлено високою народжуваністю та зниженням рівня смертності. Для порівняння, розвинені країни Європи та Північної Америки мають значно нижчі темпи зростання населення або навіть його стагнацію, що пояснюється низькою народжуваністю та процесами старіння населення. У Центральній та Південній Америці, а також у деяких регіонах Азії, спостерігається помірне зростання населення, яке поступово зменшується завдяки покращенню умов життя та зниженню рівня народжуваності (рис. 2.43).

Темпи зростання населення у всіх регіонах світу демонструють тенденцію до зниження, що відображає глобальні демографічні зміни. У розвинених країнах цей процес особливо помітний: низька народжуваність та старіння населення призводять до стабілізації або навіть скорочення чисельності населення.

Водночас у слаборозвинених країнах темпи зростання населення також поступово знижуються, що пояснюється покращенням рівня життя, доступу до медичних послуг та освіти, які сприяють зменшенню народжуваності (рис. 2.44).

Рівень амортизації капіталу поступово знижується (рис. 2.45) під впливом технологічного прогресу та структурних змін економіки. Сучасні технології забезпечують довговічність і ефективність капітальних активів, зменшуючи їхнє фізичне зношування. Крім того, зростання частки нематеріальних активів – ІТ, патентів, інновацій – сприяє подальшому зниженню середнього рівня амортизації, оскільки такі активи піддаються меншому фізичному старінню. Переорієнтація економіки на технологічно-інтенсивні сектори лише посилює цю тенденцію.

Водночас спостерігаються циклічні коливання: у періоди підйому приватний сектор активніше оновлює обладнання, що підвищує амортизаційні витрати, тоді як під час спадів – скорочує інвестиції, знижуючи рівень амортизації. Такі зміни зумовлені економічними циклами, державною політикою та коливаннями інвестиційної

активності. Норма заощаджень у високорозвинених країнах суттєво перевищує показники слаборозвинених економік (рис. 2.46), що зумовлено вищими доходами, економічною стабільністю та розвинутою фінансовою інфраструктурою. У таких країнах заощадження стимулюються доступом до фінансових інструментів і культурними нормами накопичення капіталу.

Натомість у слаборозвинених країнах низькі доходи, економічна нестабільність та обмежений доступ до фінансових послуг стримують накопичення. Високі споживчі витрати та дефіцит ресурсів знижують здатність до заощаджень, що обмежує інвестиційний потенціал і сповільнює економічний розвиток.

Розрахунок економічного ризику. За останні роки економічний ризик у контексті економічного зростання в різній площині розглядали [149-158]. Розглянемо ризик еволюції економічної системи у часовому вимірі на основі використаних моделей (рис. 2.47a). Розрахунки показали істотні відмінності рівня ризику залежно від типу моделі. Найнижчі значення спостерігаються для приватного капіталу в багатовимірній адаптивній моделі, що зумовлено відсутністю надмірно жорстких припущень і ширшою інтеграцією економічних факторів. Такий підхід знижує структурну вразливість оцінок і підвищує достовірність аналізу ризику розвитку приватного капіталу.

У моделі Солоу-Свана ризик виявився підвищеним через спрощену структуру та екзогенність темпів зростання населення і технологічного прогресу, що обмежує врахування внутрішніх шоків. Найбільше зростання ризику відбулося наприкінці 1980-х – на початку 1990-х років у період структурних трансформацій і переходу до ринкових систем. Модель Менк'ю-Ромера-Вейла показала подібний рівень ризику, оскільки зберігає припущення Солоу, доповнюючи їх людським капіталом; зростання ризику зафіксовано на початку 2010-х років унаслідок глобальних змін на ринку праці та цифровізації. Найвищий ризик притаманний моделі Ремсея-Касса-Купманса, де заощадження визначаються як різниця між випуском і споживанням, що не враховує інституційні обмеження сучасних економік. Його зростання особливо проявилось наприкінці 1990-х – 2000-х років, досягнувши максимуму під час фінансової кризи 2008 року.

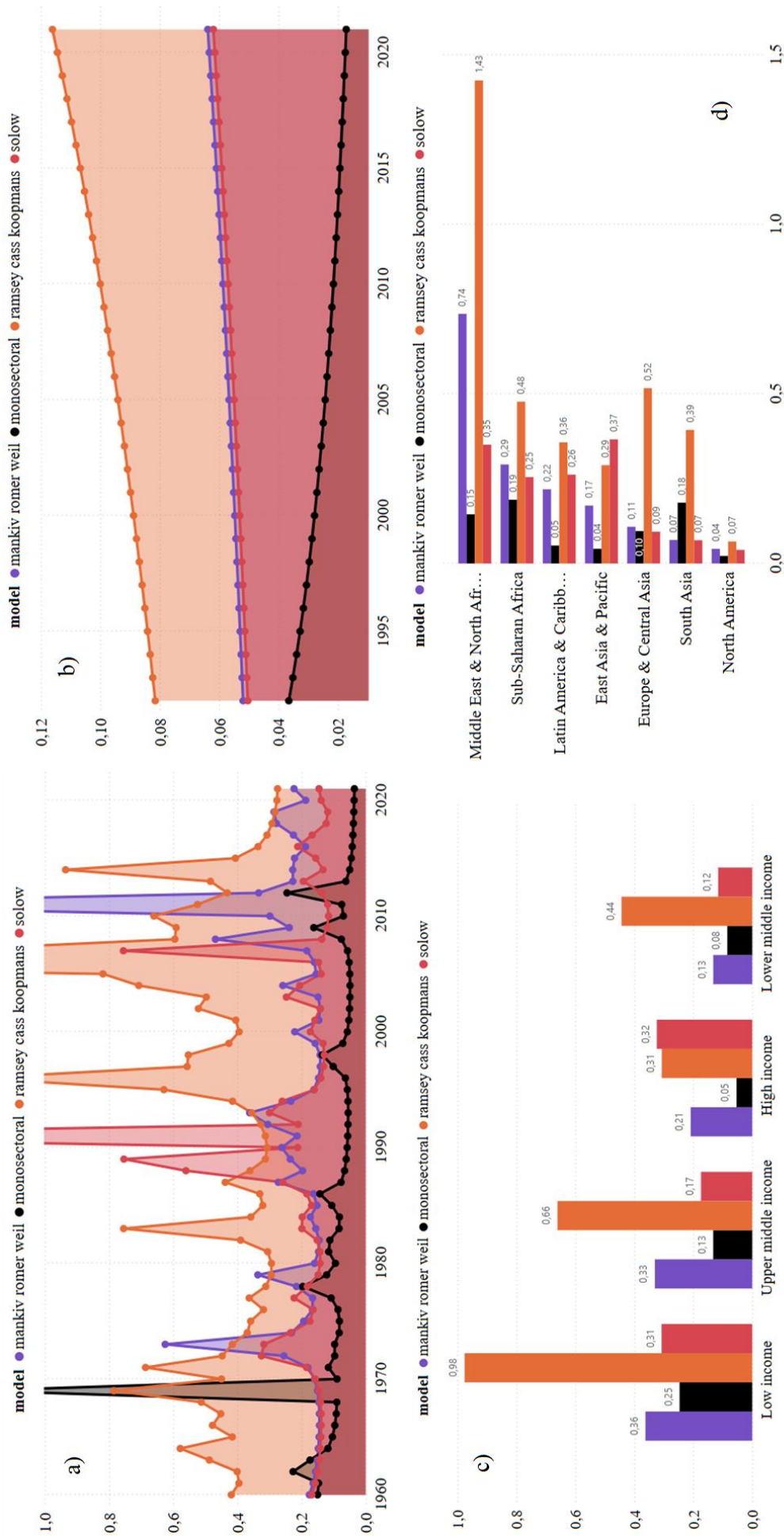


Рис 2.47 Середній ризик у розрізі моделей економічного зростання у часовому вимірі (a), для економіки України (b), за групами країн по доходу (c) та за географічним положенням (d).

Джерело: складено автором

Практично аналогічні результати були отримані для економіки України щодо ранжування моделей за ризиком (рис. 2.47b). Розрахунки ризику економічного зростання для України показали тенденцію до його підвищення за моделями Солоу, Менк'ю-Ромера-Вейла та Ремсея-Касса-Купманса. У моделі Солоу це зумовлено нестабільністю демографічних і технологічних факторів, у моделі Менк'ю-Ромера-Вейла – чутливістю до скорочення людського капіталу через міграцію, а в моделі Ремсея-Касса-Купманса – невідповідністю припущень про заощадження реальним економічним умовам України.

Натомість багатовимірна адаптивна модель демонструє нижчий та спадний рівень ризику завдяки врахуванню широкого кола макроекономічних індикаторів і відсутності жорстких екзогенних припущень. Це забезпечує більш адекватне відображення адаптаційних можливостей української економіки.

Загалом висока нестабільність економічного та політичного середовища, воєнні ризики й валютні коливання призводять до переоцінки ризику у класичних моделях, які не враховують інституційних і поведінкових особливостей економічних агентів в Україні.

Далі доцільно розглянути середній рівень ризику за групами країн відповідно до розміру доходу (рис. 2.47c).

Найвищий рівень ризику (до 0,98 у країнах із низьким доходом) спостерігається в моделі Ремсея-Касса-Купманса, що зумовлено її припущенням про стабільну міжчасову поведінку домогосподарств, яке не відповідає реаліям економік із високою бідністю та нестабільними доходами. У високодохідних країнах ризик нижчий (0,31) завдяки розвиненим ринкам капіталу, хоча модель залишається чутливою до споживчих коливань під час криз.

Модель Менк'ю-Ромера-Вейла демонструє помірні ризики (0,36 у країнах із низьким доходом, 0,13-0,33 – у середніх і високих), оскільки врахування людського капіталу частково стабілізує результати. Проте слабкий розвиток освіти й відтік кадрів у бідних країнах підвищують невизначеність параметрів.

У моделі Солоу ризик схожий або трохи нижчий (0,31-0,17), але через ігнорування людського капіталу вона втрачає чутливість до структурних змін економіки.

Найнижчі значення (до 0,05 у високорозвинених країнах) зафіксовано в багатовимірній адаптивній моделі, яка враховує широкий набір макроекономічних, інституційних і продуктивних чинників без жорстких припущень, що забезпечує її гнучкість і реалістичність.

Географічний аналіз підтверджує (рис. 2.47d): найвищі ризики властиві регіонам із низьким доходом (Африка, частина Азії), помірні – країнам із середнім рівнем доходу (Латинська Америка, Азія), а найнижчі – високорозвиненим регіонам (Північна Америка, Західна Європа, Східна Азія), де стабільність ринків і високий людський капітал мінімізують вплив шоків.

Північна Африка та Близький Схід характеризуються підвищеним рівнем ризику економічного зростання через високу залежність від сировинного сектору, насамперед нафтогазової галузі. Концентрація виробництва й доходів у вузькій сфері зумовлює вразливість економік до коливань світових цін на енергоресурси, особливо під час глобальних криз чи геополітичної напруги. Значна частка державних доходів формується з експорту ресурсів, тому зниження цін, скорочення видобутку або санкційний тиск безпосередньо підвищують фіскальні ризики та дестабілізують економічну динаміку. Сукупність цих чинників пояснює високі середні значення ризику в регіоні та його чутливість до зовнішніх і внутрішніх шоків.

Результати моделювання для України засвідчують спільні тенденції для всіх моделей: поступове зниження капіталомісткості та зростання людського капіталу на одиницю праці. Зниження капіталомісткості зумовлене інвестиційною стагнацією, девальвацією та обмеженим доступом до зовнішнього фінансування, що стримує оновлення виробничих потужностей. Натомість підвищення людського капіталу пов'язане зі скороченням зайнятості через демографічні та міграційні процеси та зростанням рівня освіти й кваліфікації працівників.

У багатовимірній адаптивній моделі додатково зафіксовано зростання публічної капіталомісткості внаслідок активізації державних інвестицій у інфраструктуру, оборону та безпеку, тоді як приватна капіталомісткість продовжує знижуватися через високі ризики та дефіцит фінансування. Заощадження на одиницю праці демонструють зростання завдяки фіскальній консолідації та зовнішній підтримці, що частково

компенсує нестачу приватних ресурсів. Таким чином, багатовимірна модель точніше відображає взаємодію приватних і публічних чинників розвитку та структурні трансформації української економіки.

Порівняння ризику економічного зростання України з країнами Східної Європи (рис. 2.48а) показує, що Україна має вищий середній рівень ризику за всіма розглянутими моделями. Це пояснюється рядом чинників:

- Висока політична та економічна нестабільність, зокрема військові дії та часті зміни урядових політик, що підвищують непередбачуваність макроекономічних процесів.
- Обмеженість внутрішніх фінансових ресурсів та низька капіталомісткість приватного сектору, що зменшує здатність економіки швидко адаптуватися до зовнішніх та внутрішніх шоків.
- Висока залежність від зовнішньої допомоги та імпорту енергоресурсів, що робить економіку більш чутливою до коливань зовнішніх ринків і валютного курсу.

У порівнянні з іншими країнами Східної Європи, які в цілому характеризуються стабільнішими макроекономічними умовами та нижчим рівнем структурної вразливості, ризик для України залишається суттєво вищим, особливо у класичних моделях Солоу та Рамсея-Касса-Купманса. Натомість багатовимірна адаптивна модель показує менший і більш стабільний ризик, відображаючи здатність економіки адаптуватися до зовнішніх та внутрішніх факторів завдяки включенню широкого спектра макроекономічних індикаторів, державних і публічних інвестицій та динаміки людського капіталу.

У 1990-х роках рівень ризику економічного зростання в Україні був нижчим, ніж у Польщі, Румунії, Угорщині та Словаччині (рис. 2.48а). Це пояснюється інерційністю економіки, збереженням радянських виробничих зв'язків і низьким рівнем ринкової відкритості, що тимчасово зменшувало вплив шоків у моделях. Натомість країни Центральної Європи, які активно впроваджували реформи, зіткнулися з короткостроковим підвищенням ризику. У подальшому ситуація змінилася: в Україні ризик зростає через відсутність глибоких реформ і політичну нестабільність, тоді як у країнах ЄС системні трансформації забезпечили макроекономічну стабільність і суттєве зниження ризиків.

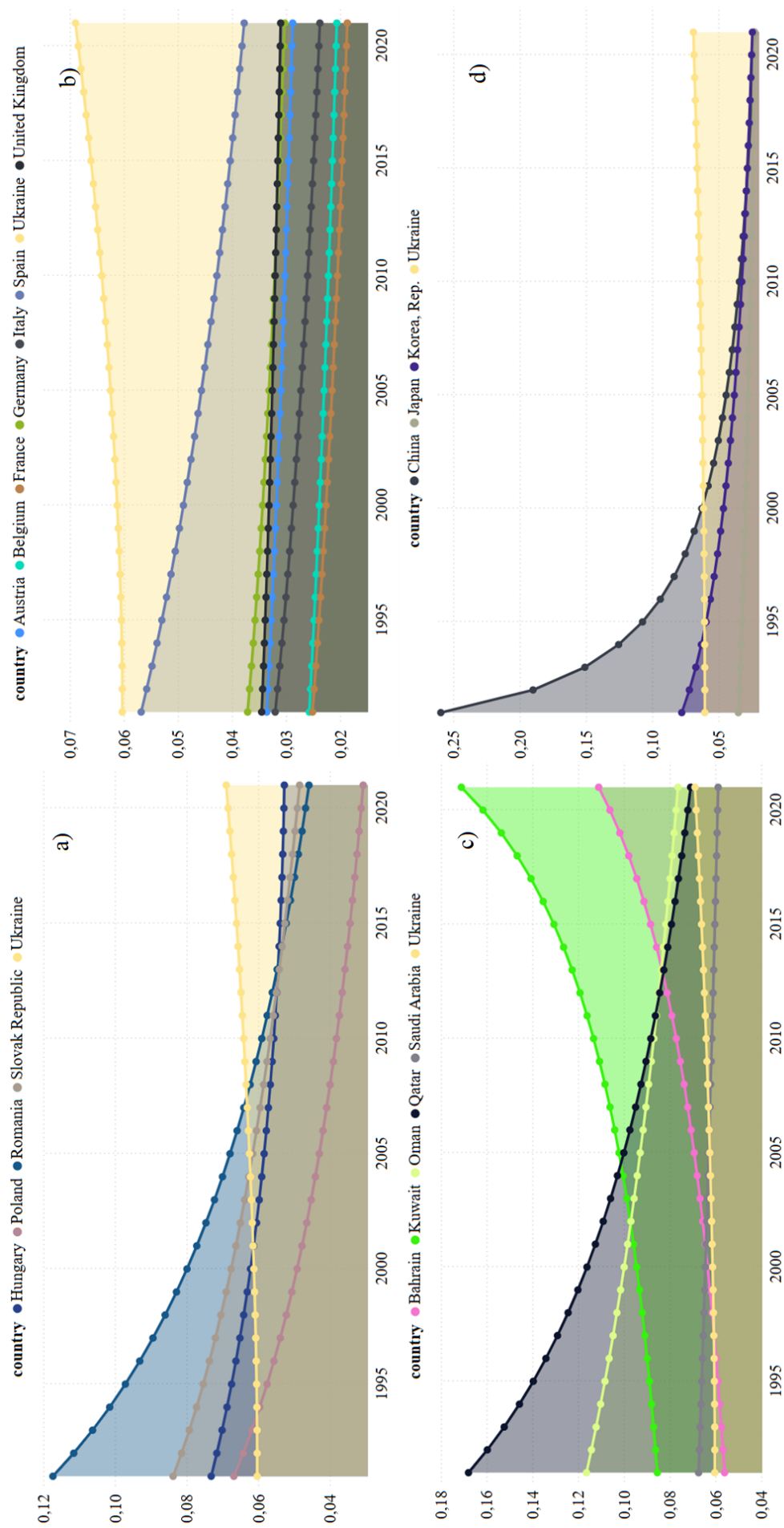


Рис 2.48 Середній нормалізований ризик у розрізі вибірки країн Східної Європи (a), Західної Європи (b), нафтовидобувних країн (c) та розвинених країн Азії (d).

Джерело: складено автором

Країни Західної Європи (рис. 2.48b) характеризуються значно нижчим ризиком економічного зростання порівняно з Україною завдяки стабільним політичним інститутам, розвиненій інфраструктурі, високій якості людського капіталу та ефективному фінансовому регулюванню. Високий рівень диверсифікації економіки й соціальних гарантій забезпечує стійкість до зовнішніх шоків, тоді як в Україні вузька спеціалізація підвищує вразливість до коливань.

Водночас у межах регіону зберігаються відмінності: Іспанія демонструє підвищений ризик через структурні проблеми ринку праці, залежність від туризму та високий державний борг, хоча поступові реформи й інституційне зміцнення сприяють його зниженню.

Порівняння з нафтовидобувними країнами (рис. 2.48c) свідчить, що в середньому вони мають вищий рівень ризику економічного зростання, ніж Україна, через значну залежність від коливань світових цін на нафту, чутливих до геополітичних факторів. У державах на кшталт Кувейту та Бахрейну ризик посилюється через скорочення запасів нафти, потребу економічної диверсифікації та зниження глобального попиту на викопне паливо. Додатковим чинником виступають фінансові та політичні труднощі управління великими нафтовими доходами, що підвищують нестабільність порівняно з більш диверсифікованою українською економікою. Водночас лише Саудівська Аравія демонструє нижчий рівень ризику завдяки масштабності економіки, значним запасам ресурсів і ефективній системі управління, яка забезпечує стабільність бюджетних надходжень і помірну ризиковість розвитку.

Рівень ризиків для економіки Японії (рис. 2.48d) відповідає показникам країн Західної Європи, що свідчить про високу стабільність і передбачуваність розвитку, зумовлені ефективними інституціями, технологічним прогресом, диверсифікацією та зваженим фінансовим управлінням.

У 1990-х роках ризики китайської економіки перевищували українські більш ніж у п'ять разів через перехідний характер, нерівномірне зростання та інституційну нестабільність (рис. 2.48d). Однак за останні десятиліття Китай зміцнив промислову й фінансову базу, розширив внутрішній ринок і вдосконалив інституційну систему.

Унаслідок цього нинішній рівень ризику майже зрівнявся з японським, що відображає ефективність проведених реформ і підвищення економічної стійкості країни.

Висновки до розділу 2

У ході дослідження було встановлено, що моделі економічного зростання мають низку важливих переваг та недоліків.

Серед сильних сторін розглянутих моделей можна відзначити: врахування у структурі не лише праці та фізичного капіталу, але й людського капіталу, публічного капіталу та землі; поділ загальної економічної системи на кілька простіших підсистем (виробничі сектори та сектор інновацій); урахування ролі міжнародної торгівлі у формуванні динаміки капіталомісткості; відображення змінності факторів виробництва та показників; відносну простоту внесення модифікацій у наявні моделі.

Водночас ці моделі мають низку обмежень. Зокрема, передумова закритої економіки є недостатньо реалістичною в умовах глобалізації та міжнародного поділу праці; одновимірний підхід не дозволяє адекватно пояснити складні економічні процеси, які краще описуються багатовимірними моделями; у певний момент часу заощадження не дорівнюють інвестиціям навіть у замкненій економіці; відсутнє врахування іноземних інвестицій, державних і міжнародних трансфертів; ігнорується вплив тіньової економіки; циклічні коливання, що безпосередньо впливають на обсяг капіталу, залишаються поза увагою; оподаткування використовується формально, без математичного відображення його впливу на публічний капітал; тип ринку, який визначає попит і пропозицію, майже не береться до уваги.

Таким чином, попри наявність низки переваг, практичне застосування цих моделей обмежене через значний рівень похибки та нереалістичні припущення. Водночас аналіз залучених факторів дає змогу краще розкрити складні взаємозв'язки, що визначають економічний розвиток, підвищуючи практичну корисність моделей. Подальший розвиток досліджень потребує усунення надмірно спрощених передумов і створення системних моделей з чітким математичним підґрунтям та перевіркою їхньої ефективності у практичних умовах.

Врахувавши усі переваги та недоліки було запропоновано модифікувати адаптивну модель наступним чином.

Передусім модель було трансформовано з одновимірної у багатовимірну. Серед нових передумов передбачено, що економіка є відкритою для руху капіталів, робочої сили, товарів і послуг у взаємодії з іншими країнами. Вона поділена на виробничий та інноваційний сектори, а споживання й заощадження формуються з різних джерел, включаючи імпорт і експорт. Ключовим чинником економічного зростання визначено інвестиції, які можуть мати внутрішнє, зовнішнє чи іноземне походження, а їх надходження залежить від умов і може супроводжуватися часовими затримками.

Виробнича функція розширена й охоплює приватний капітал, публічний капітал, людський капітал, землю (або випуск певного сектору економіки) та працю.

Основна модель описується системою з чотирьох взаємопов'язаних компонентів: динаміка приватної капіталомісткості, зростання капіталомісткості публічного сектору, зміни в сукупних заощадженнях та розвиток людського капіталу (знань).

Приватний сектор нарощує капітал за рахунок внутрішніх та іноземних інвестицій, втрачаючи його внаслідок амортизації. Публічний капітал збільшується через податкові надходження до державного бюджету й зменшується внаслідок вибуття. Державні та міжнародні трансферти можуть як підсилювати, так і знижувати загальну капіталомісткість. Сукупні заощадження зростають завдяки виробничій діяльності, проте скорочуються у випадку інвестицій у основний капітал, відпливу ресурсів в інші економіки або через податкові вилучення.

Згідно результатів числового експерименту, що був проведений на реальних даних більше 150 країн світу, адаптивна модель показувала кращі результати у 95% випадків. Результати аналізу підтверджують, що гіпотези про нереалістичність передумов закритої економіки, рівності інвестицій та заощаджень у кожному періоді та відсутності інвестиційного лагу є обґрунтованими. Модифіковані моделі демонструють вищу якість, зокрема за показником RMSLE, хоча для окремих економік, переважно слаборозвинених країн Африки та Азії, ускладнення моделі збільшує розрив між теоретичними й фактичними даними через соціально-економічні чи політичні чинники та проблеми зі збором статистики.

Точність адаптивних моделей вища у короткостроковому горизонті, де умови є більш стабільними, тоді як у середньо- та довгостроковій перспективі її знижує вплив технологічних змін, демографічних процесів і глобальних подій. Багатосекторні моделі особливо ефективні за наявності структурних змін у економіці, оскільки враховують взаємодію секторів і дозволяють точніше прогнозувати вплив цих змін на продуктивність, інвестиційні потоки та загальні тенденції економічного зростання.

При більш детальному розгляді параметрів адаптивної моделі, можна зробити ряд висновків. Технологічний прогрес (A) найбільш виражений у сфері послуг, нижчий у промисловості та найменший у сільському господарстві. Еластичність приватного капіталу (α) вища у сільському господарстві та промисловості, тоді як публічного капіталу (β) – у сфері послуг, особливо в довгостроковій перспективі. Еластичність людського капіталу (γ) є вищою у високорозвинених країнах і найбільшою у секторі послуг. З часом α та γ зростають, тоді як β знижується; амортизація (d) поступово скорочується завдяки технологічному прогресу. Норма заощаджень (s) суттєво вища у розвинених країнах порівняно зі слаборозвиненими.

Основні результати розділу опубліковано в наукових працях автора: [159-166]

РОЗДІЛ 3

СЦЕНАРІЇ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ НА ПІДСТАВІ РЕАЛЬНИХ ДАНИХ

3.1. Модифікації адаптивної моделі з довгостроковим демографічним впливом

Вплив демографічного фактора на економічне зростання детально висвітлено в [167-176]. Фактор праці, тобто чисельність робочої сили, є ключовим компонентом економічного зростання. Вона забезпечує виробництво товарів і послуг у всіх секторах економіки – від промисловості до високотехнологічних галузей. Збільшення кількості працівників розширює виробничі потужності, стимулює зростання ВВП і підвищує ефективність економіки.

Чисельність робочої сили формується під впливом демографічних і соціальних чинників – народжуваності, смертності та міграції. Висока народжуваність забезпечує майбутнє поповнення робочої сили, а низька смертність підтримує її стабільність. Міграція може як компенсувати дефіцит кадрів через імміграцію, так і посилювати його внаслідок еміграції, особливо у країнах зі старіючим населенням.

Взаємодія цих процесів визначає динаміку робочої сили. Додатково на її ефективність впливають освіта, стан здоров'я, рівень зайнятості, доступність робочих місць і державна політика у сфері праці. Тому аналіз чисельності та структури робочої сили є необхідним для прогнозування економічного зростання, оцінювання виробничого потенціалу та визначення стратегічних напрямів розвитку країни.

У розглянутій моделі (2.44) фактор праці окрім виробничої функції присутній в основній системі рівнянь під виглядом коефіцієнту n , який відповідає середньому темпу зростанню праці L . У вигляді формули це можна записати як:

$$n = \frac{dL/dt}{L}, \quad (3.1)$$

де dL/dt – зростання обсягу праці (кількості робочої сили) у період t .

При умові, коли рівень безробіття буде постійним, тобто $e = \text{const}$, тоді цей коефіцієнт можна записати за допомогою показника населення P як:

$$n = \frac{dP/dt}{P}. \quad (3.2)$$

Для моделювання динаміки населення у країні доцільно застосувати модель Ферхюльста [177], відому також як логістичне рівняння. Ця модель має ряд переваг для аналізу демографічних процесів, оскільки враховує обмеженість природних і соціально-економічних ресурсів, демонструючи, як чисельність населення поступово наближається до максимальної допустимої величини, або ємності середовища.

На відміну від експоненційних моделей, що передбачають необмежене зростання населення, логістична модель Ферхюльста реалістично відображає уповільнення темпів у міру посилення конкуренції за ресурси – продовольство, воду, житло чи робочі місця. Це дозволяє оцінювати наслідки перенаселення, прогнозувати обмеження економічної активності та аналізувати вплив демографічних процесів на розвиток економіки.

Модель вирізняється простотою реалізації та інтерпретації, що робить її ефективним інструментом для довгострокового планування й аналізу демографічних сценаріїв. Вона також легко адаптується до врахування додаткових факторів – міграції, змін народжуваності чи смертності – підвищуючи гнучкість і практичну цінність у економічних дослідженнях.

У загальному вигляді модель Ферхюльста має вигляд:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K_e}\right), \quad (3.3)$$

де r – коефіцієнт зростання населення,

K_e – питома ємність екологічної ніші.

Враховуючи, що зростання населення залежить від народжуваності та смертності, а також факт того, що модель не враховує міграційні процеси, тому пропонується модифікувати вираз (3.3) наступним чином:

$$\frac{dP}{dt} = (r_b - r_d)P\left(1 - \frac{P}{K_e}\right) + \frac{(a-b)P^2}{K_e}, \quad (3.4)$$

де a – коефіцієнт імміграції,

b – коефіцієнт еміграції.

$Q = \frac{(a-b)P^2}{K_e}$ – зростання населення внаслідок міграційних процесів,

r_b – коефіцієнт народжуваності,

r_d – коефіцієнт смертності.

Інтегрувавши рівняння (3.4), можна отримати розв'язок логістичного рівняння з міграційним фактором, яке має вигляд:

$$P = \frac{e^{(r_b-r_d)t} P_0 K_e}{\frac{-P_0((r_b - r_d) - (a - b))(1 - e^{(r_b-r_d)t})}{(r_b - r_d)} + K_e}, \quad (3.5)$$

де P_0 – початкове значення величини кількості населення.

У моделі (2.44) використаємо рівняння:

$$n = (r_b - r_d) \left(1 - \frac{P}{K_e}\right) + \frac{(a-b)P}{K_e}. \quad (3.6)$$

Безробіття – це стан, коли частина працездатного населення не може знайти роботу попри активні пошуки. Воно є ключовим показником економічного стану країни, відображаючи ефективність використання трудових ресурсів і стабільність ринку праці. Високе безробіття знижує доходи населення, скорочує споживчий попит і призводить до втрат виробничого потенціалу.

Причини безробіття зумовлені структурними й циклічними особливостями економіки: технологічними змінами, кризами, сезонними коливаннями чи дисбалансом попиту на робочу силу. Відповідно розрізняють його типи: фрикційне – тимчасове, пов'язане зі зміною роботи чи першим працевлаштуванням; структурне – спричинене невідповідністю навичок вимогам ринку; сезонне – характерне для галузей із періодичною зайнятістю (сільське господарство, туризм, будівництво); циклічне – результат економічних спадів, коли скорочуються виробництво й зайнятість.

Особливу увагу варто приділити циклічному безробіттю, яке безпосередньо пов'язане з фазами економічного циклу: під час рецесії воно зростає, а під час підйому – знижується. Тому держава має регулювати ринок праці за допомогою монетарної та фіскальної політики, пом'якшуючи наслідки криз і підтримуючи зайнятість.

Для врахування складних циклів використаємо модифіковану модель Тейла-Вейджа вигляду (2.46). Щоб врахувати цикли ми повинні відкоригувати величину n на отриману складену сезонну компоненту s_t та трендову компоненту b_t :

$$n = b_t s_t \left[(r_b - r_d) \left(1 - \frac{P}{K_e} \right) + \frac{(a - b)P}{K_e} \right]. \quad (3.7)$$

Для порівняння аналогічно модифікуємо моделі Солоу-Свана (1.14), Ремсея-Касса-Купманса (1.17) та Менк'ю-Ромера-Вейла (1.21).

Спершу здійснюється аналіз загальних тенденцій, що дає змогу оцінити, як змінюється статистична якість моделей залежно від вибору змінних, тривалості спостережень та методу оцінювання. Такий підхід дозволяє виявити закономірності у поведінці моделей і перевірити стійкість результатів. На наступному етапі проводиться детальніший аналіз окремих випадків, порівняння прогнозів для різних груп країн та визначення причин відхилень між прогнозованими і фактичними значеннями.

Особлива увага приділяється динаміці показників якості моделей – їхній точності залежно від вибірки, періоду спостереження та параметрів моделювання. Аналізується відносний коефіцієнт помилки R (табл. 2.5), що характеризує пояснювальну здатність моделей, а також метрики MAE, MSE, RMSE, MRE, MSLE та RMSLE (табл. 2.5), які комплексно відображають точність і надійність прогнозів (рис. 3.1).

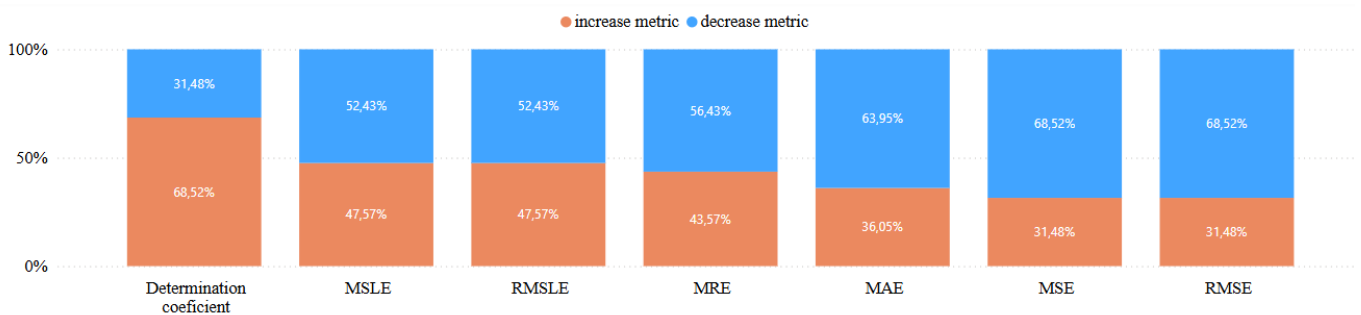


Рис 3.1 Зміна метрик якості модифікованих моделей економічного зростання у порівнянні з не модифікованими.

Джерело: складено автором

Аналіз показав, що врахування динамічних показників демографічного розвитку – структури населення та його приросту в часі – суттєво підвищує якість моделей.

Коефіцієнт R (табл. 2.5) зріс у 68% випадків порівняно з моделями зі статичним показником зростання, що свідчить про зростання їх пояснювальної здатності (рис. 3.1).

Інші метрики точності (MAE, MSE, RMSE тощо) знизилися у 52-68% випадків, що вказує на менші середні похибки прогнозів. Отже, включення динамічних демографічних змінних підвищує точність і надійність моделей економічного зростання, роблячи їх адекватнішими до реальних процесів розвитку.

У наступному етапі дослідження буде проведено аналіз результатів у розрізі різних моделей економічного зростання та оцінено, як врахування динаміки населення впливає на прогнозні показники для окремих груп країн (рис. 3.2).

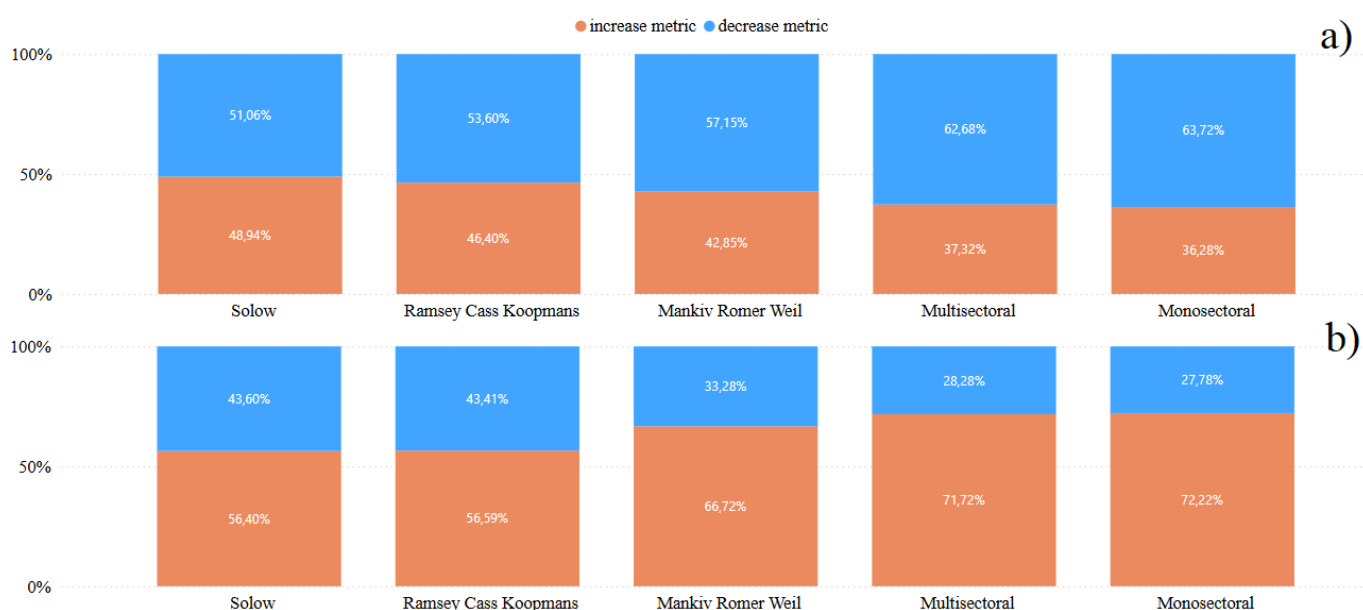


Рис 3.2 Зміна метрик на основі MAE (a) та коефіцієнту R (b) у розрізі моделей економічного зростання для модифікованих моделей у порівнянні з не модифікованими.

Джерело: складено автором

Аналіз засвідчив, що врахування динамічного зростання населення істотно підвищує якість моделей економічного зростання. Точність класичних одновимірних моделей з динамічним коефіцієнтом n (Солоу та Ремсея-Касса-Купманса) зросла у 52% випадків у порівнянні з статичним коефіцієнтом n (рис. 3.2), що свідчить про підвищення їх пояснювальної здатності навіть у базовій специфікації.

Більш складна двовимірна модель Менк'ю-Ромера-Вейла, яка враховує людський капітал поряд із фізичним, показала ще вищий приріст – у 57% випадків. Це підтверджує,

що розширення моделей додатковими факторами підвищує точність і відображає реальні економічні процеси.

Найкращі результати отримано для багатовимірних моделей, що включають демографічні, соціальні та економічні змінні: заміна статичного коефіцієнта зростання населення на динамічний підвищила якість у 63% випадків (рис. 3.2). Отже, комплексний підхід до моделювання, який враховує взаємодію демографічних і економічних чинників, забезпечує більш реалістичне відтворення процесів зростання.

Покращення якості моделей економічного зростання найбільш виражене у короткостроковій перспективі – протягом останніх 10-20 років, коли у 73% випадків моделі з динамічним коефіцієнтом зростання населення перевищують точність статичних (рис. 3.3a). Це зумовлено тим, що у короткому періоді демографічні процеси – урбанізація, освітні реформи, міграція – мають швидкий і безпосередній вплив на економічну активність.

У довгостроковому періоді (до 60 років) ефект поступово зменшується: покращення спостерігається у 64% випадків. З часом економічне зростання визначається ширшим колом факторів – технологічними змінами, політичними трансформаціями, кризами чи війнами, що знижує помітність демографічного впливу.

Найбільше підвищення точності моделей спостерігається у малорозвинених країнах – у 73% випадків (рис. 3.3b, рис. 3.3c). Тут демографічні процеси – висока народжуваність, молоде населення, швидкі зміни структури праці – безпосередньо впливають на споживання, інвестиції та формування людського капіталу. Через низьку диверсифікацію економік і залежність від базових макропоказників динамічні моделі забезпечують суттєве зростання точності прогнозів.

У розвинених країнах покращення також спостерігається, але менше – у 67% випадків. Економіки цих держав більш стабільні й менш чутливі до демографічних коливань; приріст населення низький або від’ємний, а зростання зумовлюють інновації, технологічний прогрес та інституційна якість. Тому демографічний вплив менш значний, хоча динамічні моделі й тут підвищують точність прогнозів, особливо у коротко- та середньостроковій перспективі.

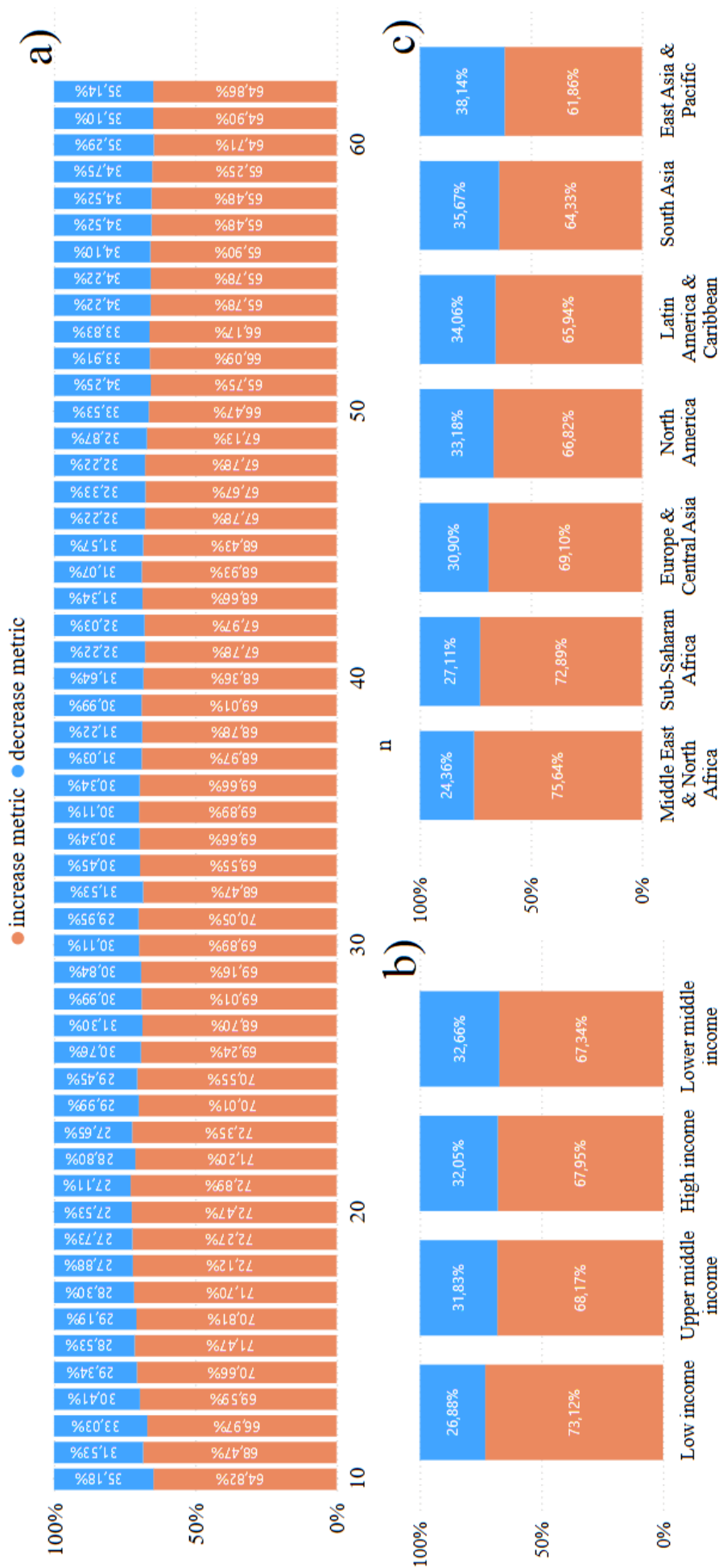


Рис 3.3 Динаміка коефіцієнту R у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c).

Джерело: складено автором

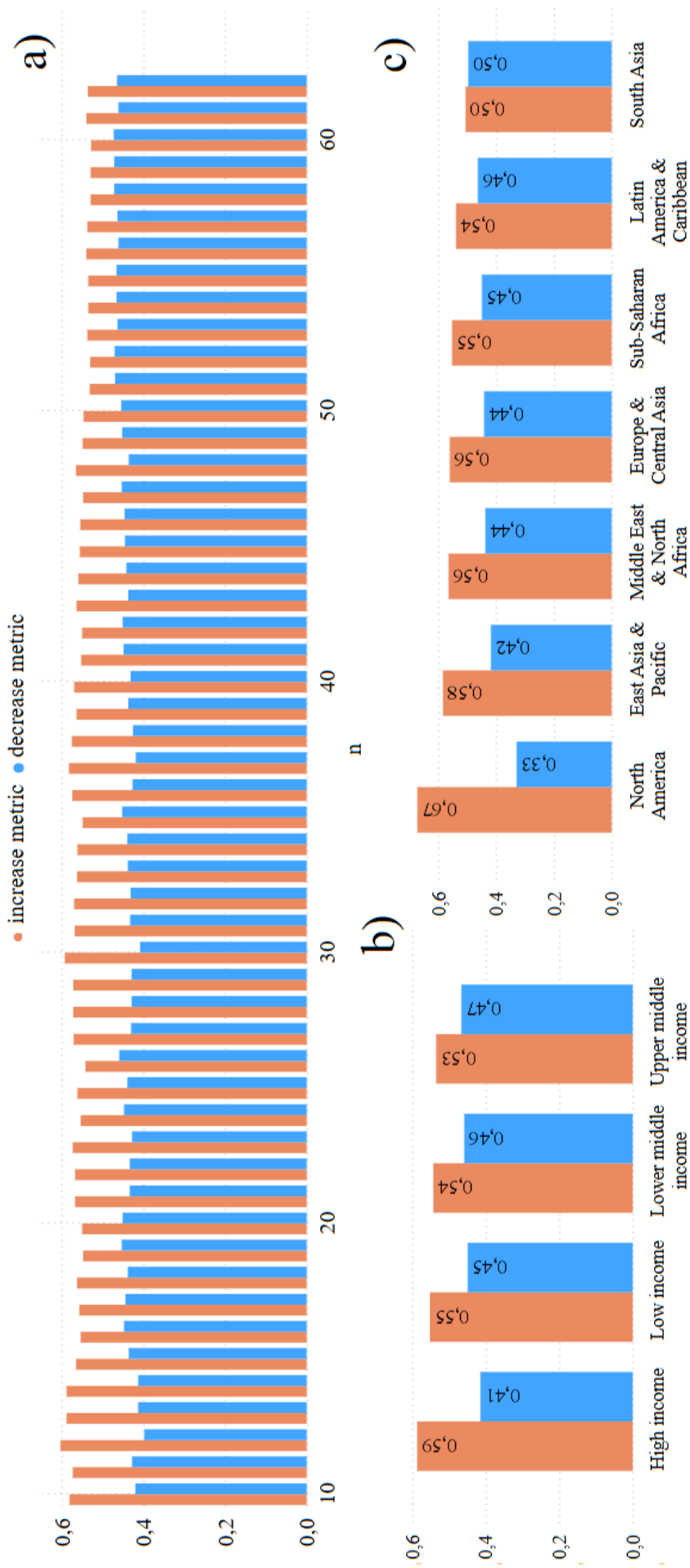


Рис 3.4 Динаміка метрики RMSLE у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c).

Джерело: складено автором

Аналіз динаміки RMSLE (табл. 2.5) підтверджує позитивний вплив динамічного коефіцієнта зростання населення на якість моделей економічного зростання (рис. 3.4). У 55% випадків моделі з динамічним коефіцієнтом демонструють вищу точність, особливо в коротко- та середньостроковій перспективі, коли демографічні зміни мають більш передбачуваний вплив на економічну динаміку.

У високорозвинених країнах ефект ще відчутніший – точність моделей підвищується у 59% випадків (рис. 3.4b, рис. 3.4c). Навіть незначні зміни чисельності населення чи вікової структури впливають на ринок праці, споживчий попит і інвестиції, що робить динамічні моделі ефективнішими для прогнозування. У малорозвинених країнах покращення спостерігається у 55% випадків (рис. 3.4b, рис. 3.4c). Попри вагому роль демографічних чинників, точність прогнозів визначається також іншими факторами – рівнем інвестицій, станом інфраструктури та політичними умовами, що зменшує відносну перевагу динамічного підходу.

Наступним кроком буде порівняння абсолютних величин показників якості моделей, зокрема метрики RMSLE, що дозволить оцінити ефективність динамічних і статичних підходів у різних групах країн (рис. 3.5).

На інтервалі 20-40 років моделі Солоу-Свана, Рамсея-Касса-Купманса та Менк'ю-Ромера-Вейла зі статичним коефіцієнтом демонструють нижчі значення RMSLE (рис. 3.5a), ніж у періоди понад 40 років, коли ситуація змінюється. Це свідчить, що за стабільних демографічних умов і помірних змін народжуваності та смертності статичні моделі точніше прогнозують економічну динаміку, тоді як додаткові обчислення ускладнюють структуру моделей і знижують їхню стабільність. У довгостроковому періоді похибки зростають через накопичення нереалістичних обмежень, властивих цим моделям.

Натомість багатовимірні моделі, які враховують демографічні, економічні та інституційні чинники, забезпечують стабільно нижчі помилки на всіх часових інтервалах (рис. 3.6). Їхня гнучкість дозволяє точніше відображати взаємозв'язки між змінними та динаміку економічного зростання. Використання динамічних коефіцієнтів підвищує точність прогнозів у коротко-, середньо- та довгостроковій перспективі.

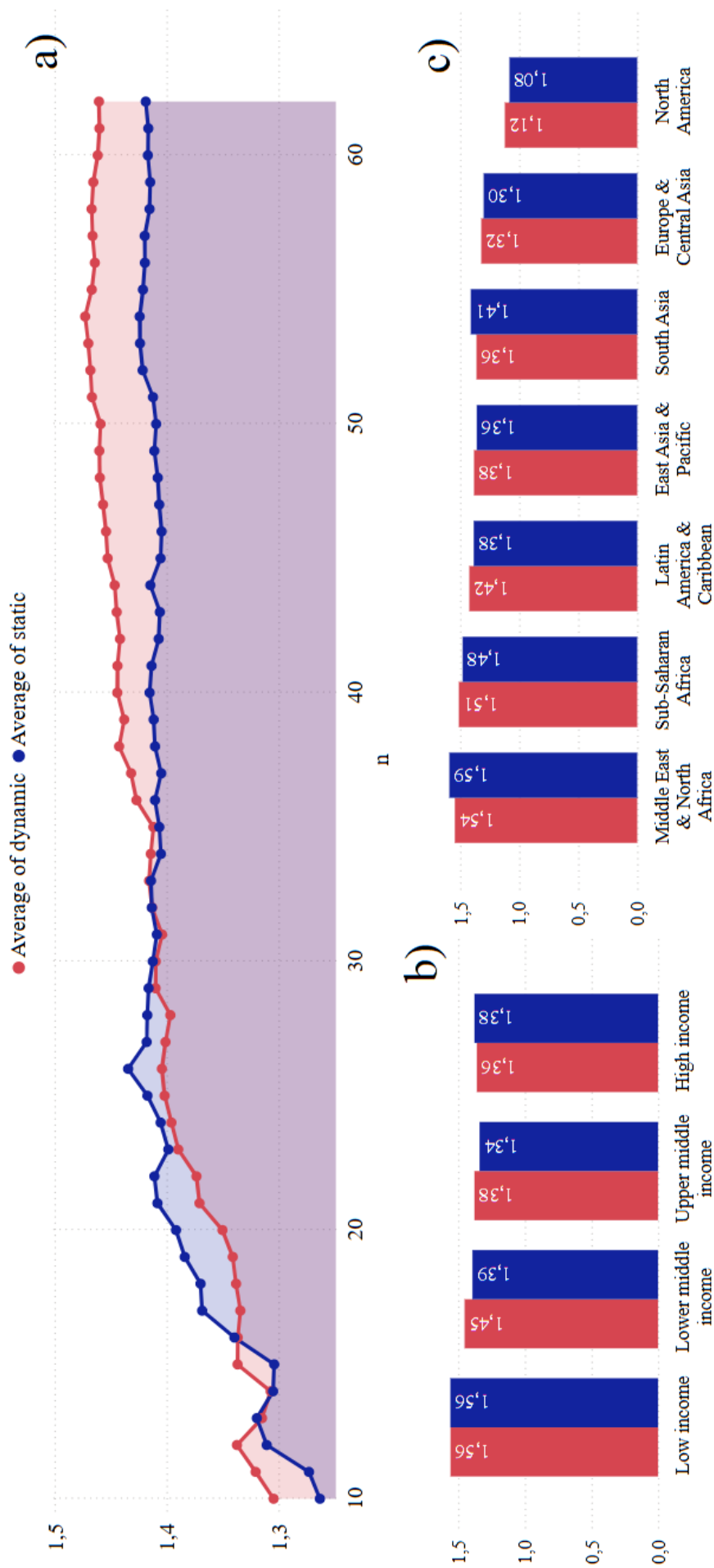


Рис 3.5 RMSLE у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для одновимірних/двовимірних моделей.

Джерело: складено автором

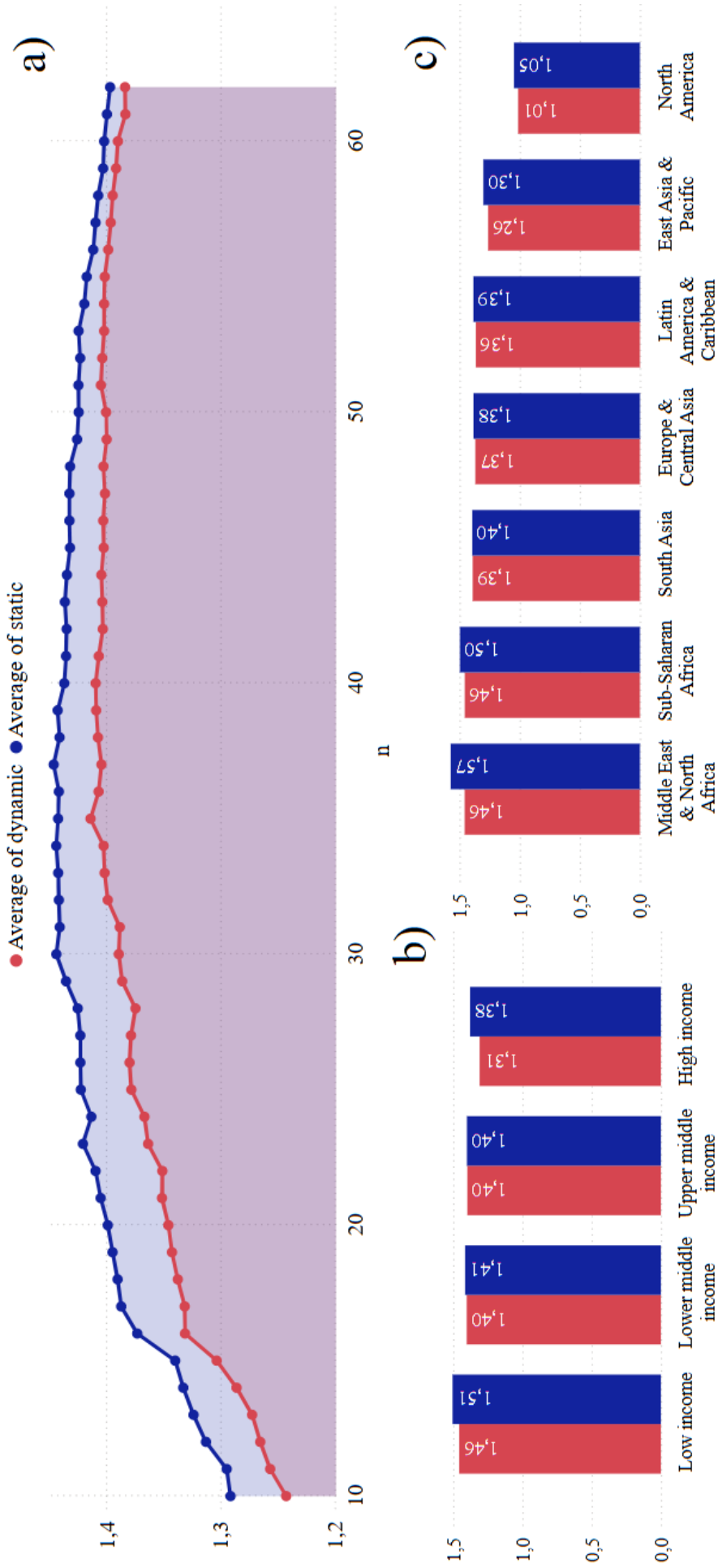


Рис 3.6 RMSLE у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірних моделей.

Джерело: складено автором

Таким чином, основну проблему, показану на рис. 3.6, становлять не динамічні параметри, а структурні обмеження класичних моделей. Багатовимірні підходи демонструють більшу стійкість і точність, підтверджуючи доцільність комплексного врахування демографічних і економічних чинників.

Для багатовимірних моделей спостерігається суттєве підвищення якості після введення динамічного коефіцієнта зростання населення, що відображається у покращенні показників R , MSE , MAE та $RMSE$ (табл. 2.5) (рис. 3.7, рис. 3.8). Це зумовлено точнішим урахуванням загальних заощаджень і людського капіталу.

Загальні заощадження відображають інвестиційний потенціал і формування фізичного капіталу, що визначає довгострокове зростання. Людський капітал формує продуктивність і рівень інновацій, а його динаміка дозволяє точніше відтворювати зміни на ринку праці. Поєднання цих факторів із динамічним коефіцієнтом забезпечує комплексне моделювання взаємозв'язків між демографічними та економічними процесами, підвищуючи точність прогнозів у різних часових горизонтах.

Проведено порівняння моделей зі статичним і динамічним коефіцієнтом зростання населення n на прикладі економіки України за 1991-2021 роки (рис. 3.9, рис. 3.10). Цей період є показовим, оскільки охоплює значні економічні та демографічні трансформації.

Аналіз моделі Солоу із використанням статичного та динамічного коефіцієнта зростання населення показав загальну подібність результатів, проте виявив різницю в точності (рис. 3.9). Модель із динамічним коефіцієнтом демонструє нижчу MAE , що свідчить про вищу адаптивність до змін демографічних умов і коливань темпів зростання населення. Завдяки цьому вона точніше відображає вплив демографічних процесів на економічне зростання та є гнучкішою у прогнозуванні для різних етапів розвитку економіки.

У багатовимірній моделі, що аналізує капіталомісткість публічного та приватного секторів, обидві моделі мають подібну структуру, однак варіант із динамічним коефіцієнтом зростання населення показує вищу адаптивність до реальної динаміки людського капіталу та сукупних заощаджень (рис. 3.10). Ключовим фактором гнучкості такої моделі є те, що вона враховує не лише постійне зростання чисельності населення, а й зміни у рівнях народжуваності, смертності та міграційних потоках.

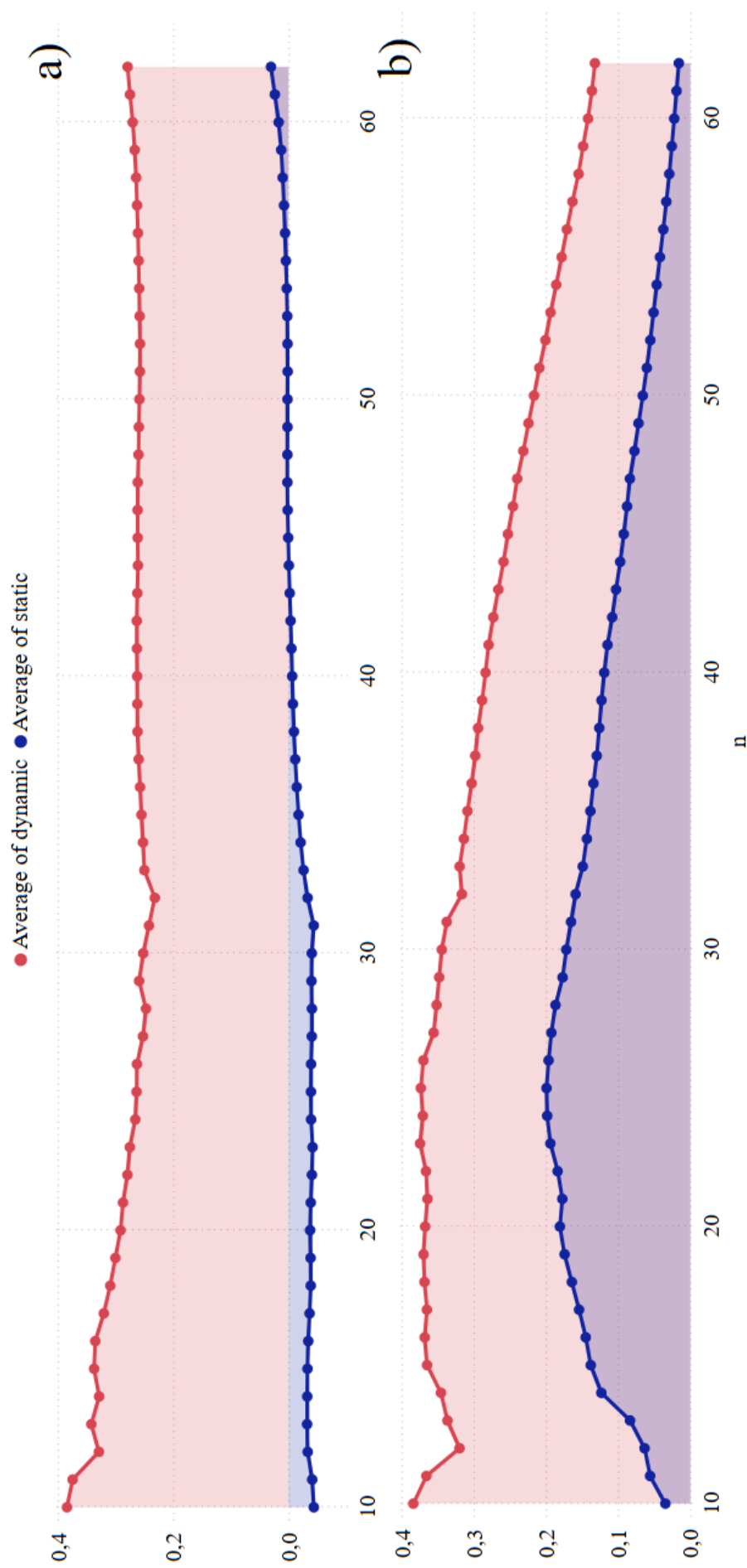


Рис 3.7 Коефіцієнт R у розрізі тривалості періоду моделювання для рівняння людського капіталу (а), сукупних заощаджень (б).

Джерело: складено автором

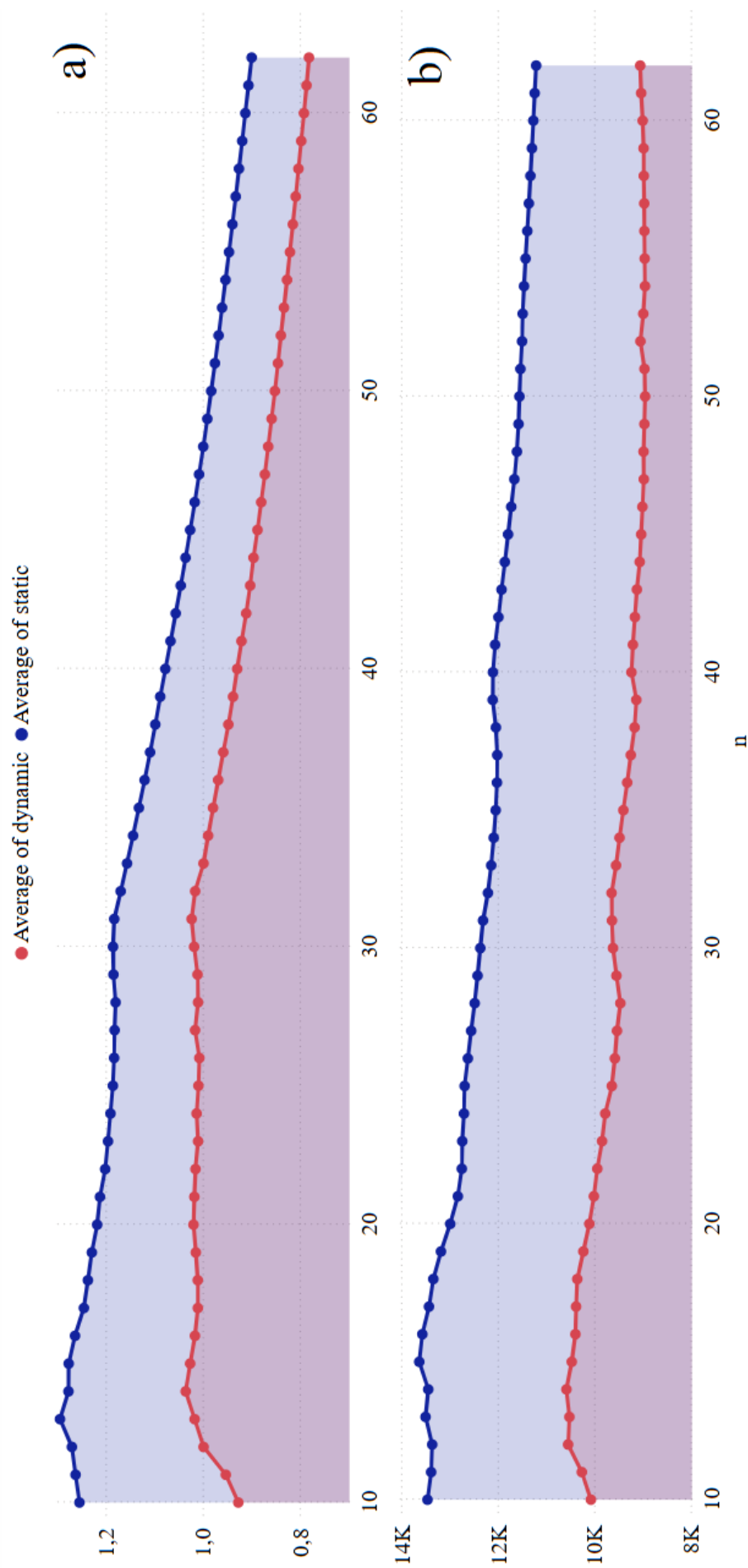


Рис 3.8 RMSE у розрізі тривалості періоду моделювання для рівняння людського капіталу (a), сукупних заощаджень (b).

Джерело: складено автором

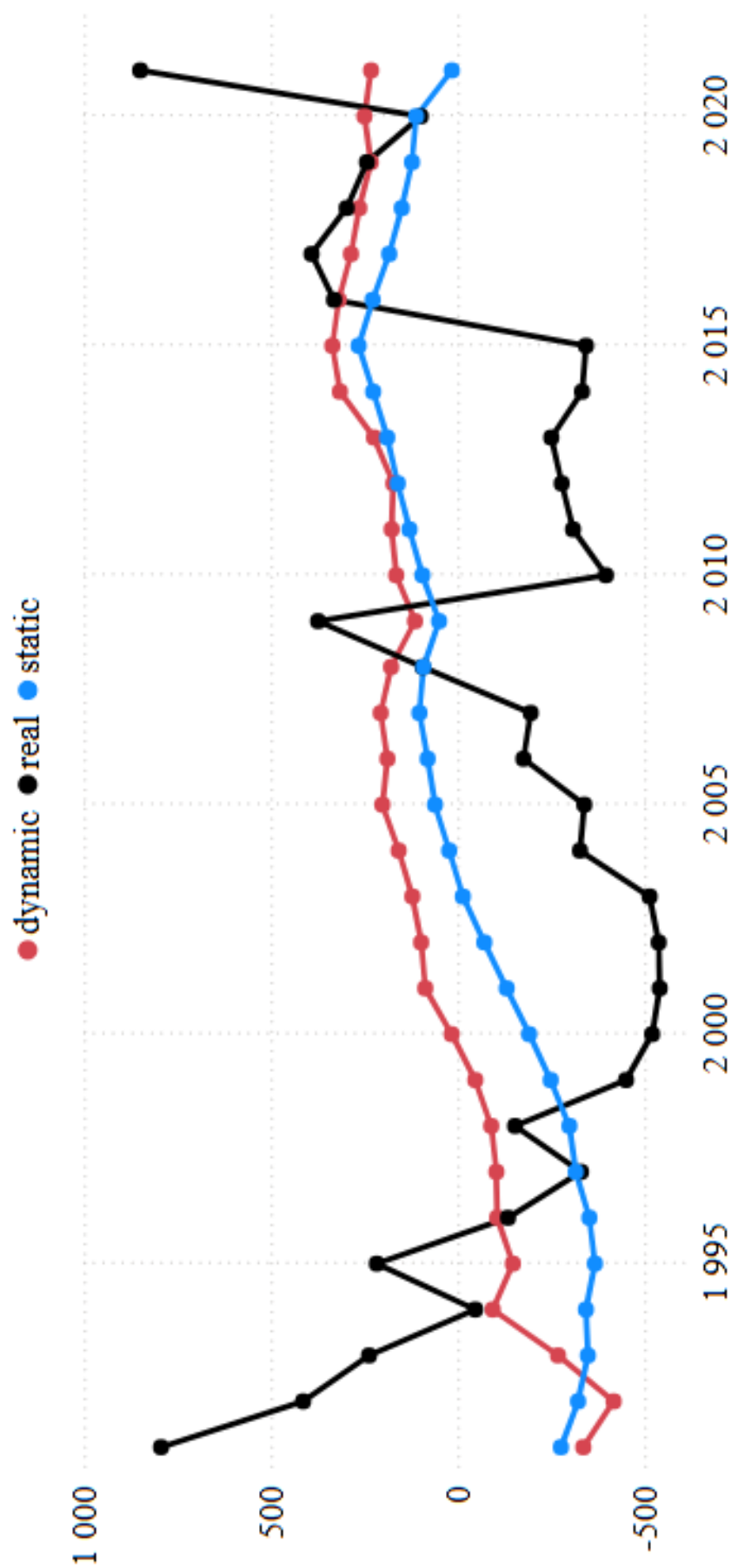


Рис 3.9 Результати моделювання капіталомісткості для економіки України згідно з моделлю Солоу зі статичним коефіцієнтом n (блакитний графік) та динамічним коефіцієнтом (червоний графік).

Джерело: складено автором

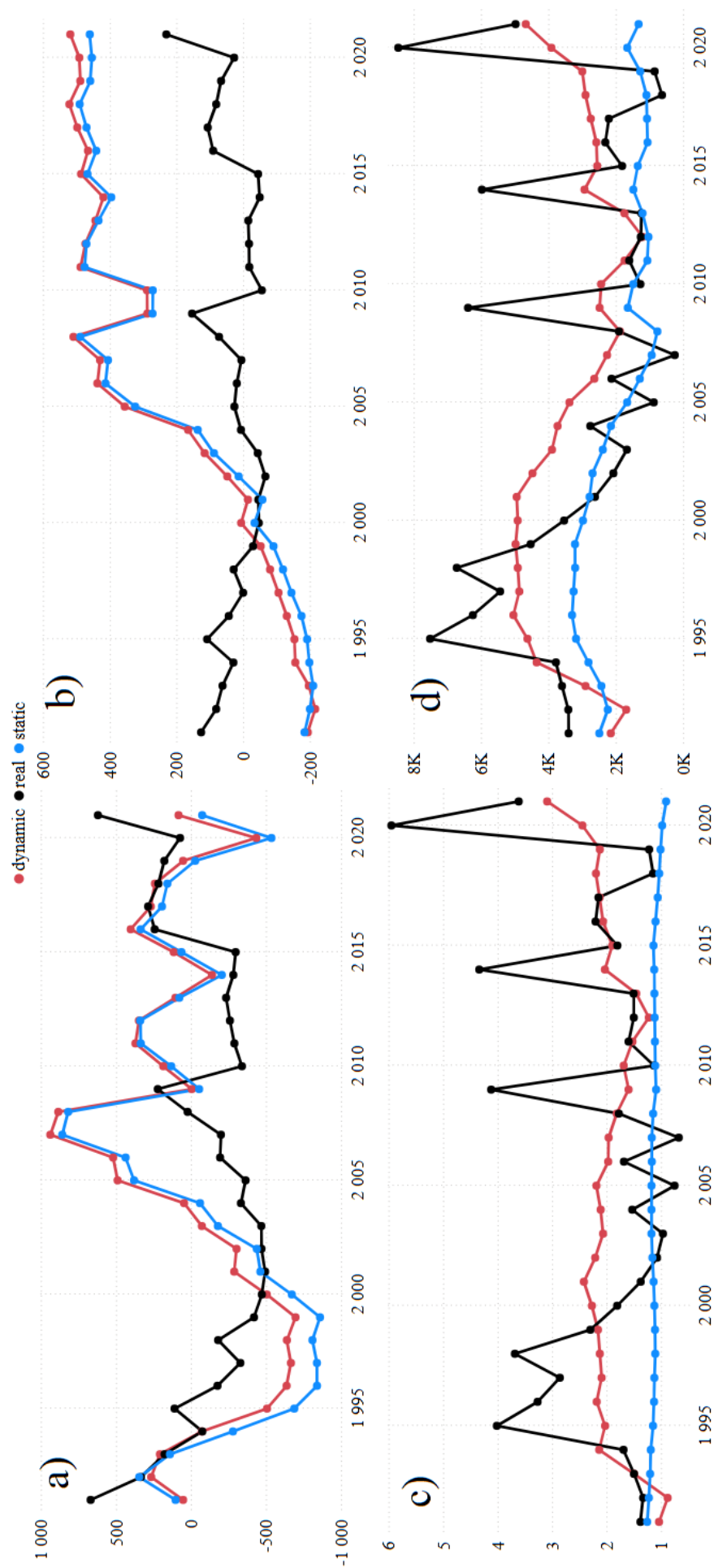


Рис 3.10 Результати моделювання капіталомісткості приватного сектору (a), публічного сектору (b), людського капіталу (c), сукупних заощаджень (d) для економіки України згідно з односекторною багатовимірною моделлю зі статичним коефіцієнтом n (блакитний графік) та динамічним коефіцієнтом (червний графік).

3.2. Особливості включення ринкової типології у адаптивну модель економічного зростання

У межах аналізу економічних моделей важливо враховувати структуру ринку [178-187], оскільки вона суттєво впливає на поведінку фірм, ефективність використання ресурсів, рівень інвестицій, інновацій та державного регулювання. Дослідження ринкової структури дає змогу точніше оцінити механізми взаємодії учасників, бар'єри входу та виходу й конкурентні переваги компаній.

Основними критеріями класифікації ринків є рівень конкуренції, кількість учасників, доступність інформації та вплив суб'єктів на ціноутворення. За рівнем конкуренції виділяють чотири типи ринків (рис. 3.11):

- Досконала конкуренція – багато малих фірм, стандартизований продукт, відсутність впливу на ціну;
- Монополістична конкуренція – численні виробники з диференційованими товарами, що дозволяє певний контроль над ціною;
- Олігополія – кілька великих компаній, чиї взаємодії визначають ціни й обсяги виробництва;
- Монополія – єдиний виробник контролює ринок і встановлює ціну, що потребує державного регулювання.

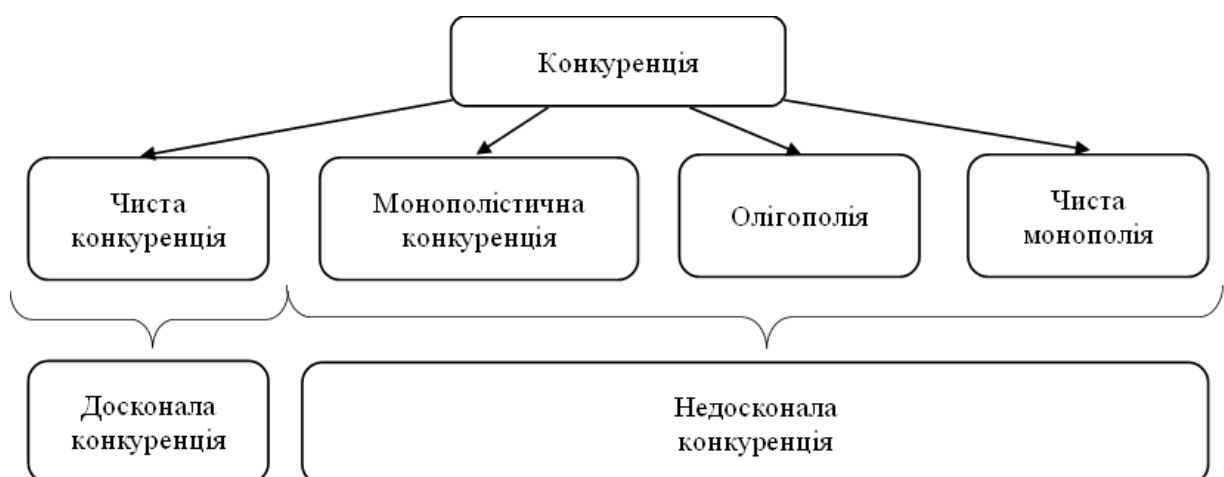


Рис. 3.11 Основні типи ринку за конкуренцією

Джерело: побудовано автором

Оскільки більшість класичних моделей економічного зростання передбачають ринок, що функціонує в умовах досконалої конкуренції, доцільно спочатку розглянути саме цей тип ринкової структури.

Досконала конкуренція передбачає велику кількість дрібних фірм, які продають однорідні товари та не впливають на ринкову ціну. Її основні ознаки – вільний вхід і вихід, повна поінформованість учасників і відсутність бар'єрів. У реальності повністю конкурентні ринки трапляються рідко, однак їх наближеними прикладами є ринок сільськогосподарської продукції, біржові товари (золото, нафта) та валютний ринок, де ціни визначаються глобальним попитом і пропозицією.

Переваги такої структури полягають у високій ефективності розподілу ресурсів: фірми змушені мінімізувати витрати, а ціни відображають граничні витрати, що вигідно споживачам. Це стимулює інновації, спрямовані на підвищення продуктивності та якості.

Водночас досконала конкуренція має обмеження: фірми не можуть впливати на ціни, що зменшує прибутки та стримує інвестиції у високотехнологічні галузі. Відсутність економії на масштабі робить дрібні компанії менш ефективними, а ігнорування зовнішніх ефектів (екологічних чи соціальних) потребує державного регулювання для усунення ринкових дисбалансів.

Для моделювання ринку досконалої конкуренції будемо застосовувати модель (2.44) у повному обсязі, оскільки вона відображає всі характерні особливості цього типу ринкової структури.

Чиста монополія – це ринкова структура, у якій єдиний виробник контролює пропозицію товару чи послуги, що не має близьких замінників, самостійно визначаючи ціну. Типовими прикладами є природні монополії – енергетика, водопостачання, транспорт і залізниця, де ефективність забезпечується лише за участю одного виробника.

На відміну від досконалої конкуренції, монополістичні ціни перевищують суспільно оптимальний рівень, а високі бар'єри входу унеможливають появу конкурентів.

До переваг монополії належать можливість значних інвестицій у довгострокові проекти, економія на масштабах, зниження середніх витрат і стабільність постачання.

Така структура полегшує планування виробництва й розвиток великих інфраструктурних систем.

Серед недоліків – зловживання ринковою владою, завищення цін, зниження якості, відсутність стимулів до інновацій і ризик уповільнення технологічного прогресу. Тому державне регулювання є необхідним для контролю цінової політики та гарантування доступу до базових послуг.

Підсумовуючи зазначене, основна відмінність монополії від досконалої конкуренції в контексті економічного зростання полягає у тому, що завдяки вищим цінам на товари прибутки монополії зазвичай перевищують рівень прибутків у конкурентному середовищі. Теоретично це має стимулювати збільшення заощаджень і обсягів інвестицій. Проте на практиці спостерігається зворотний ефект: незважаючи на високі прибутки, рівень інвестування в умовах монополії часто залишається нижчим, ніж у умовах досконалої конкуренції. Це пояснюється відсутністю конкуренції та стимулів для розширення виробництва та інноваційної діяльності. Це пов'язано з додатковими витратами, які назвемо, як витрати забезпечення монопольної влади. Для врахування даних витрат у моделі введемо коефіцієнт θ рівний:

$$\theta = \frac{Y_m}{Y_p}, \quad (3.8)$$

де Y_m – випуск при монополії,

Y_p – аналогічний випуск при досконалій конкуренції, при чому $0 < \theta < 1$, оскільки обсяг випуску при монополії завжди менший.

Тоді модель (2.44) зростання для монополії набуде вигляду:

$$\begin{cases} k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^{\bullet} = s\theta A k_{pr}^{\alpha} k_{gov}^{\beta} h^{\gamma} n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \\ h^{\bullet} = B k_{rd}^{\nu} l - nh. \end{cases} \quad (3.9)$$

Згідно виразу (3.9) витрати на забезпечення монопольної влади будуть зменшувати загальні заощадження, які в свою чергу сильніше обмежуватимуть можливості щодо інвестування та призводитимуть до менших темпів економічного зростання.

Розглянемо коефіцієнт θ детальніше. Умовою рівноваги при досконалій конкуренції є рівність ціни та граничних витрат, або $P=MC$, тоді як умовою рівноваги монополії є рівність граничних витрат та граничних доходів, або $MC=MR$. Розглянемо найпростішу лінійну функцію попиту:

$$P(Y) = a - bY. \quad (3.10)$$

Тоді для досконалої конкуренції рівноважний обсяг випуску буде дорівнювати:

$$Y_p = \frac{a - MC}{b}, \quad (3.11)$$

а для монополії:

$$Y_m = \frac{a - MC}{2b}, \quad (3.12)$$

оскільки $MR = \frac{d}{dY}(P(Y)Y) = a - 2bY$. Тому у результаті ми отримаємо, що $\theta = 0,5$, тобто темпи зростання заощаджень при монополії вдвічі менші, ніж при чистій конкуренції, якщо функція попиту є лінійною і виконується умова рівноваги.

Олігополія є ринковою структурою, де кілька великих компаній контролюють більшу частину ринку та взаємозалежно формують цінову й виробничу політику. Вона характеризується високою концентрацією, бар'єрами входу і можливістю координації дій, що обмежує конкуренцію. Типові приклади – авіаційна, автомобільна, телекомунікаційна галузі та нафтопереробка.

На відміну від досконалої конкуренції, фірми в олігополії можуть впливати на ціни, але, на відміну від монополії, змушені враховувати дії конкурентів. Така структура сприяє інвестиціям, технологічному розвитку й стабільності ринку, проте обмежує доступ нових учасників.

Серед переваг – економія на масштабі, зниження витрат, високі ресурси для R&D, впровадження інновацій і стабільність цінової політики. Великі корпорації можуть інвестувати в інфраструктуру та міжнародну експансію, стимулюючи зростання.

Водночас недоліки полягають у ризику змови, завищенні цін, створенні бар'єрів для нових фірм і зниженні конкуренції. Надмірна концентрація ринку може стримувати

інновації й уповільнювати економічний розвиток, особливо у високотехнологічних галузях.

Олігополія займає проміжне положення між досконалою конкуренцією та монополією. Вона поєднує можливість отримання високих прибутків, характерних для монополії, з певним рівнем конкуренції, що стимулює компанії до впровадження інновацій і підвищення ефективності виробництва. У цій ринковій структурі також виникають витрати на підтримку ринкової влади, проте їхній обсяг, як правило, менший, ніж у випадку чистої монополії. У моделі це можна формалізувати наступним чином:

$$\begin{cases} k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^{\bullet} = s\theta^{\frac{1}{N}}Ak_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \\ h^{\bullet} = Bk_{rd}^{\nu}l - nh, \end{cases} \quad (3.13)$$

де N – кількість олігополістів.

Таким чином, при монополії вираз $\theta^{\frac{1}{N}} = \theta^{\frac{1}{1}} = \theta$, а при досконалій конкуренції $\theta^{\frac{1}{N}} = \theta^{\frac{1}{\infty}} \approx \theta^0 = 1$, що повністю відповідає обмеженням типів ринку.

Монополістична конкуренція – це ринкова структура, що поєднує риси конкуренції та монополії. Вона характеризується великою кількістю фірм, які пропонують диференційовані товари з унікальними характеристиками чи брендами, а також низькими бар'єрами входу, що забезпечує оновлення учасників. Прикладами є ринок одягу, косметики, ресторанів і туризму.

На відміну від досконалої конкуренції, фірми можуть встановлювати вищі ціни завдяки диференціації продукту, а від монополії – відрізняються чисельністю конкурентів. Така структура сприяє інноваціям, різноманітності товарів і динамічному розвитку ринку.

Перевагами є гнучкість і адаптивність, стимулювання інновацій, розширення асортименту та створення нових робочих місць через легкий доступ на ринок.

Недоліки полягають у зростанні витрат на маркетинг і рекламу, можливого перенасиченні схожими товарами та нестабільності прибутків через високий рівень конкуренції й мінливість споживчих вподобань.

При монополістичній конкуренції, з'являється новий тип витрат – витрати на диференціацію продукту, які врахуємо у моделі за допомогою коефіцієнта q :

$$\begin{cases} k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^{\bullet} = sq\theta^{\frac{1}{N}}Ak_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \\ h^{\bullet} = Bk_{rd}^{\nu}l - nh. \end{cases} \quad (3.14)$$

Витрати на диференціацію продукту в умовах монополістичної конкуренції – це додаткові витрати, які фірми несуть для створення унікальних характеристик своїх товарів або послуг з метою виділення їх серед конкурентів. До таких витрат належать витрати на маркетинг і рекламу, розробку нових дизайнів, покращення якості продукції, впровадження інновацій, брендинг та упаковку — тобто витрати, що не впливають на обсяг виробництва чи споживання товару.

Ці витрати впливають на загальні витрати фірми та можуть знижувати ефективність ринку, оскільки призводять до зростання цін для споживачів. У моделі їх можна оцінити за формулою:

$$q = \frac{Y - C_d}{Y}, \quad (3.15)$$

де C_d – витрати на диференціацію,

Y – обсяг випуску.

При монополії, олігополії або чистій конкуренції, дані витрати будуть наближатися до 0, а коефіцієнт у свою чергу наближатиметься до 1, тому він не впливатиме.

Первинний, вторинний і третинний сектори економіки функціонують у різних ринкових структурах, що визначається характером виробництва, рівнем конкуренції та бар'єрами входу.

Первинний сектор (сільське господарство, видобуток ресурсів) переважно наближений до олігополії чи монополії, оскільки видобувні галузі контролюються великими компаніями або державою. Водночас окремі напрями сільського господарства мають риси досконалої конкуренції через велику кількість дрібних виробників і стандартизовану продукцію.

Вторинний сектор (промисловість, виробництво) зазвичай функціонує в умовах олігополії або монополістичної конкуренції. У капіталомістких галузях (автомобілебудування, електроніка) домінують великі корпорації, тоді як менш капіталомісткі напрями включають численні дрібні фірми.

Третинний сектор (послуги, торгівля) переважно відповідає монополістичній конкуренції: численні компанії пропонують схожі послуги, відрізняючись брендом, якістю чи сервісом. Прикладами є ресторани, туризм, фінансові та консалтингові послуги.

Аналогічно модифікуємо моделі Солоу (1.14), Рамсея-Касса-Купманса (1.17) та Менк'ю-Ромера-Вейла (1.21).

Остаточна модифікована рівняння Солоу приймає вигляд:

$$k^* = sq\theta^{\frac{1}{N}}Ak^\alpha - (d+n)k, \quad k_0 = k(t_0). \quad (3.16)$$

Модель Рамсея-Касса-Купманса набуває вигляду:

$$k^* = sq\theta^{\frac{1}{N}}Ak^\alpha - (d+n)k, \quad k_0 = k(t_0). \quad (3.17)$$

Модель Менк'ю-Ромера-Вейла модифікується до вигляду:

$$\begin{aligned} k^* &= s_k q\theta^{\frac{1}{N}}Ak^\alpha h^\beta - (d+n)k, \quad k_0 = k(t_0), \\ h^* &= s_h q\theta^{\frac{1}{N}}Ak^\alpha h^\beta - (d+n)h, \quad h_0 = h(t_0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Урахування типу ринку в моделях економічного зростання підвищує коефіцієнт R приблизно у 14% випадків (рис. 3.12), тоді як у решті випадків зміни є незначними. Це свідчить, що чиста конкуренція залишається найбільш ефективною структурою для пояснення економічних процесів. Класичні моделі зростання спираються саме на передумови вільного ринку – велику кількість учасників, мобільність ресурсів і відсутність бар'єрів входу, що забезпечує оптимальний розподіл капіталу й технологій.

У випадку монополії чи олігополії відбувається перерозподіл прибутків на користь обмеженої групи виробників, що знижує стимули до інновацій та інвестицій. Монополістична конкуренція, попри наявність диференціації продукції, не завжди забезпечує довгострокову ефективність, характерну для умов чистої конкуренції.

Врахування типології ринку вплинуло на якість моделей економічного зростання з різною ефективністю: для моделі Солоу – покращення у 29% випадків, Рамсея-Касса-Купманса – у 33%, а Менк'ю-Ромера-Вейла – у 19% (рис. 3.12). Найвищий ефект спостерігається у міжчасовій моделі Рамсея-Касса-Купманса, де поведінка споживачів і інвесторів більш чутлива до структури ринку. Модель Солоу також демонструє позитивний ефект, оскільки факторні доходи та рівень заощаджень залежать від ступеня конкуренції. Менший вплив у моделі Менк'ю-Ромера-Вейла пояснюється тим, що людський капітал уже частково компенсує вплив ринкових умов.

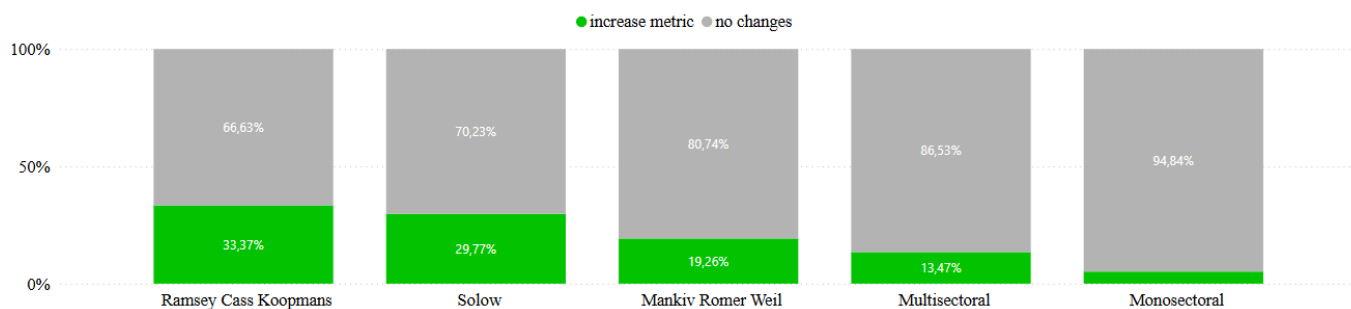


Рис 3.12 Динаміка коефіцієнту R у розрізі моделей економічного зростання.

Джерело: складено автором

Для адаптивної односекторної моделі покращення якості зафіксовано лише у 9% випадків, тоді як у решті – змін не спостерігалось, що свідчить про обмежений вплив ринкової структури на загальну динаміку макроекономічних показників. Натомість у багатосекторній модифікації, де виділено первинний, вторинний і третинний сектори, покращення спостерігалось у 13% випадків. Це пояснюється різною чутливістю секторів: у первинному переважають монополії та олігополії, у вторинному – змішані структури, а у третинному – монополістична конкуренція, що зумовлює неоднорідний вплив на економічне зростання.

Далі детально розглянемо вплив ринкових структур на економічне зростання у розрізі конкретних моделей, почавши з моделі Солоу (рис. 3.13). Для моделі Солоу врахування типології ринку підвищує точність прогнозування у 19-20% випадків у короткостроковому періоді та у 38-40% – у довгостроковому (рис. 3.13). У короткостроковій перспективі ринкова структура впливає обмежено, оскільки інвестиції, заощадження та продуктивність ще не адаптувалися до змін. У довгостроковому ж періоді вона визначає розподіл ресурсів, рівень конкуренції, інноваційну активність та

ефективність капіталу. Конкурентні ринки сприяють стійкому зростанню, тоді як монополізовані створюють спотворення, що уповільнюють розвиток. Тому кумулятивний ефект ринкових структур із часом підвищує точність моделі.

Для країн, що розвиваються, врахування ринкової структури покращує точність прогнозів у 33% випадків, а для розвинених – у 26% (рис. 3.13). У перших це пояснюється нерозвиненими фінансовими ринками, високими бар'єрами входу та домінуванням монополій, які обмежують інвестиції й технологічний розвиток. У розвинених країнах вплив типології ринку частково нівелюється завдяки диверсифікації, ефективному регулюванню та мобільності капіталу. Отже, ринкова структура впливає на точність моделі в обох групах, але сильніше – у малорозвинених економіках.

Модель Рамсея-Касса-Купманса демонструє схожу динаміку: коефіцієнт R зростає у 25% випадків у короткостроковому періоді та до 45% у довгостроковому (40-50 років), після чого поступово знижується (рис. 3.14).

У коротко- та середньостроковому періодах ринкова структура істотно впливає на динаміку заощаджень, інвестицій і розподіл ресурсів, що підвищує точність моделей. У довгостроковій перспективі (до 50 років) ефекти накопичення капіталу та оптимізаційна поведінка агентів проявляються найповніше, зумовлюючи пік точності прогнозів.

Після цього періоду точність знижується через структурні зрушення – технологічні зміни, демографічні трансформації та еволюцію фінансових ринків, які починають переважати вплив початкових ринкових умов. Крім того, припущення міжчасової оптимізації не завжди узгоджується з реальною поведінкою агентів через невизначеність, шоки та зміну політики, що знижує надійність прогнозів у наддовгостроковому горизонті. Як і у моделі Солоу, ефект покращення точності частіше спостерігається у малорозвинених країнах.

Для моделі Менк'ю-Ромера-Вейла характерне стабільне зростання точності зі збільшенням періоду моделювання: у короткостроковому періоді покращення спостерігається менш ніж у 10% випадків, тоді як у довгостроковому – до 32%, що перевищує динаміку моделей Солоу та Рамсея-Касса-Купманса (рис. 3.15).

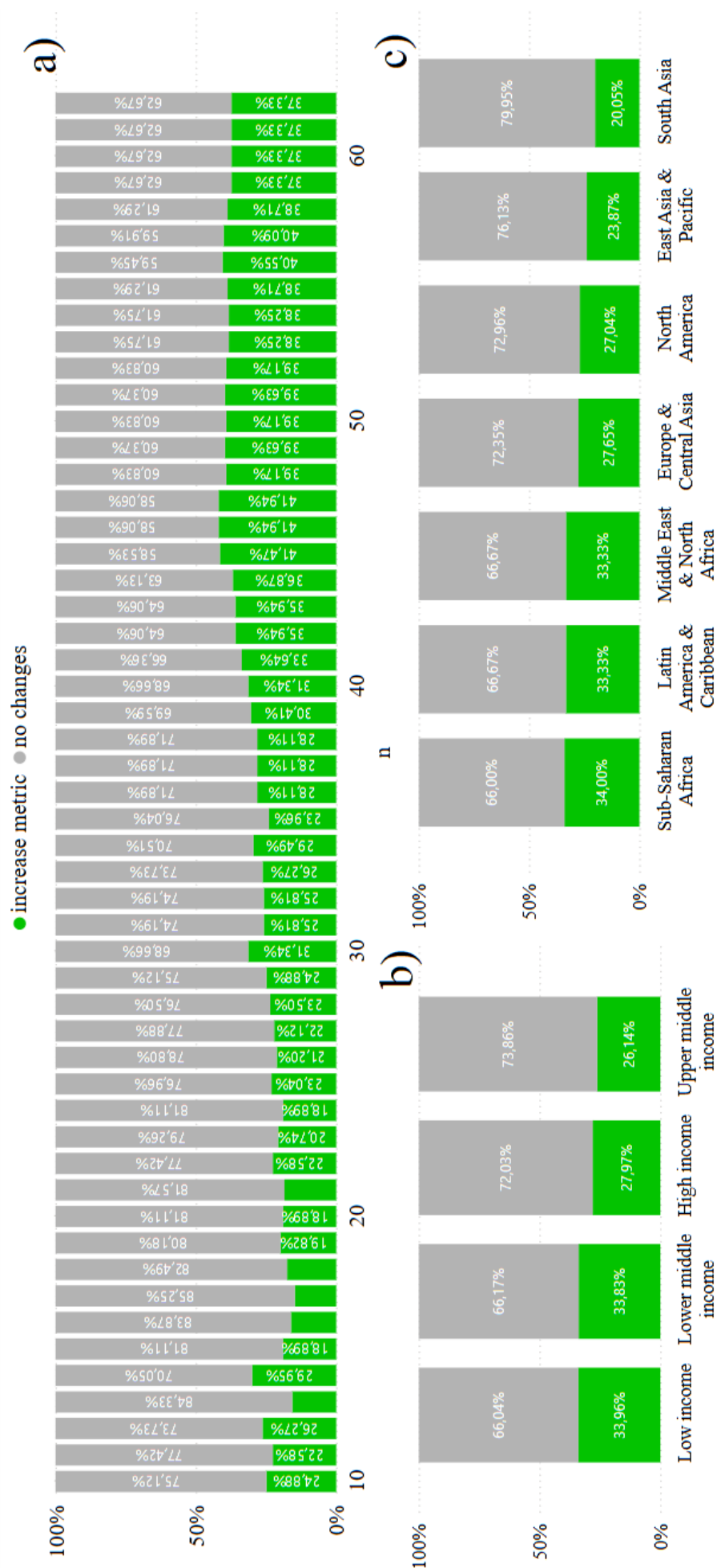


Рис 3.13 Динаміка коефіцієнту R у розрізі тривалості періоду моделювання (а), груп країн за рівнем доходу (б) та географічного розташування (с) для моделі Солоу.

Джерело: складено автором

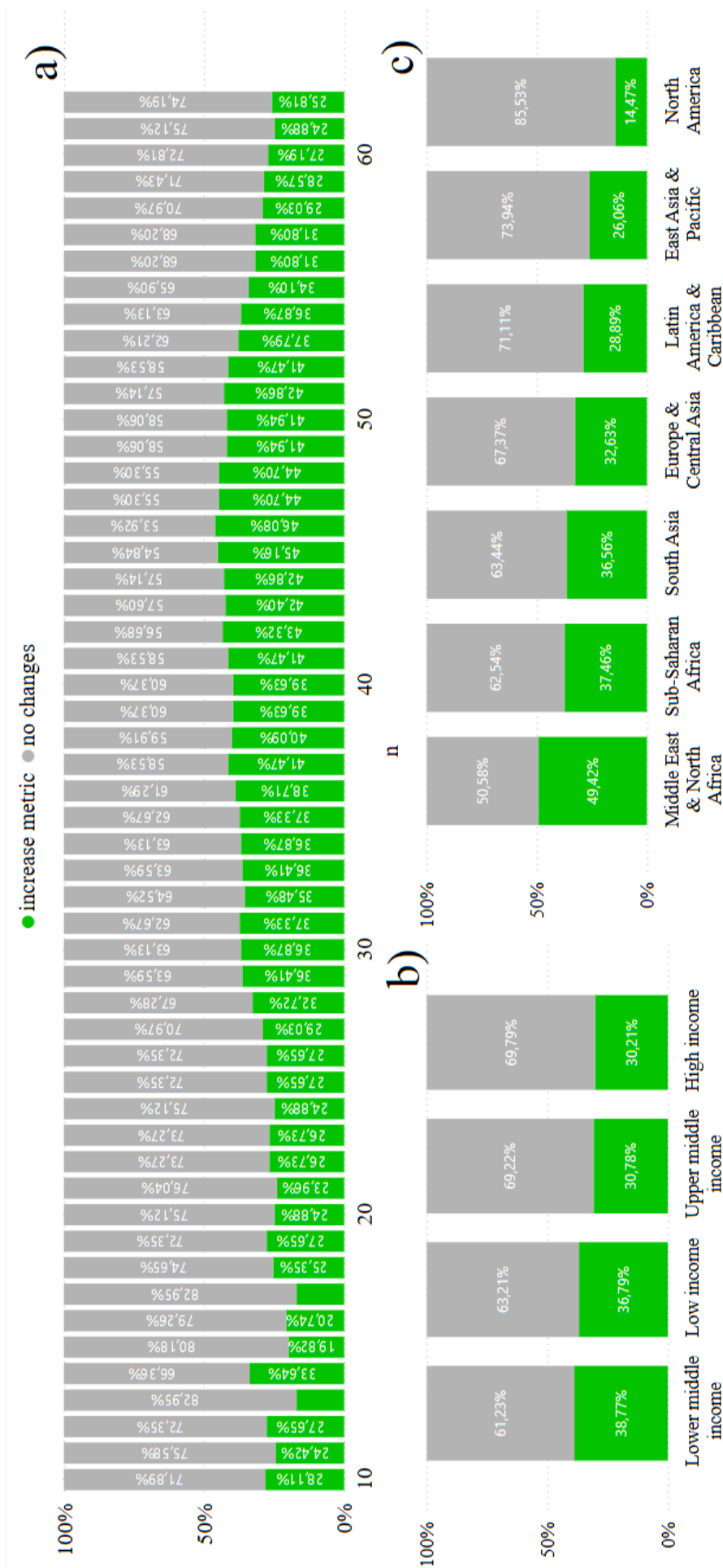


Рис 3.14 Динаміка коефіцієнту R у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для моделі Рамсея-Касса-Купманса.

Джерело: складено автором

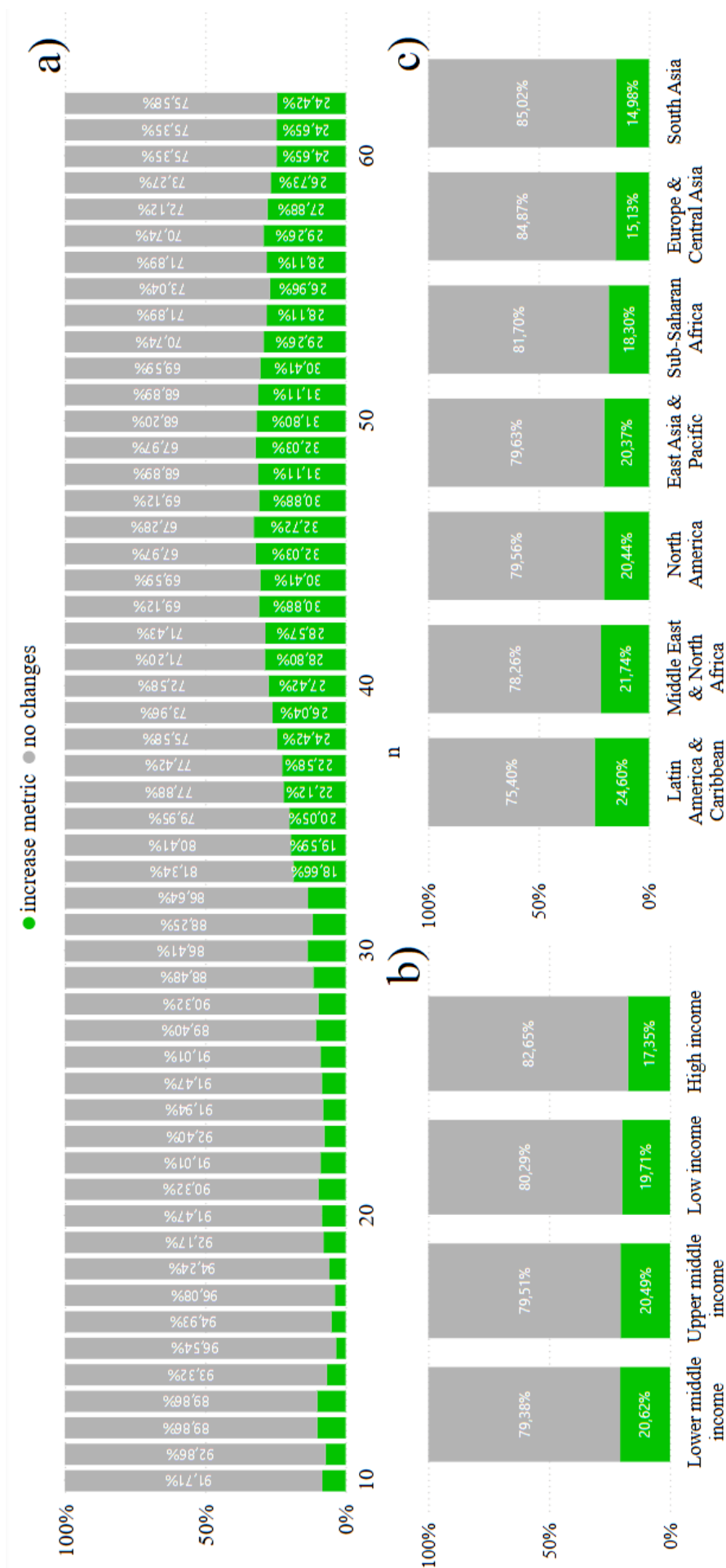


Рис 3.15 Динаміка коефіцієнту R у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для моделі Менк'ю-Ромера-Вейла.

Джерело: складено автором

Покращення точності у моделі Менк'ю-Ромера-Вейла пояснюється ключовою роллю людського капіталу, який виступає додатковим фактором зростання. У короткостроковому періоді вплив ринкової структури на нього мінімальний, адже освіта, знання та навички накопичуються повільно, і їхній ефект проявляється лише з часом.

У довгостроковій перспективі типологія ринку стає вирішальною, оскільки визначає стимули до інвестування в освіту, рівень конкуренції на ринку праці та ефективність використання людського капіталу. У конкурентних ринках праця використовується продуктивніше, тоді як у монополізованих галузях обмеження у професійному розвитку знижують мотивацію до навчання. Відтак, у тривалому періоді ринкова структура істотно впливає на економічне зростання через накопичений людський капітал, що пояснює більший розрив у точності прогнозів порівняно з моделями без цього фактора.

Для адаптивної багатовимірної односекторної моделі приріст точності прогнозів становить лише 9% (рис. 3.16) і залишається стабільним незалежно від рівня розвитку країни чи тривалості періоду. Це зумовлено складністю моделі, яка враховує численні взаємозв'язки, що зменшує маржинальний вплив окремих чинників, зокрема ринкової структури. Основний ефект реалізується через компонент заощаджень, який визначає рівень капіталовкладень і темпи накопичення виробничих ресурсів.

Попри відносно невеликий приріст загальної точності моделі, зміни основних макроекономічних показників – інвестицій, ВВП та продуктивності – можуть бути суттєвими через довгострокову взаємодію заощаджень з іншими компонентами зростання. Це свідчить, що навіть за помірної кореляції між ринковою структурою та точністю прогнозів, вплив ринкових умов на економічну динаміку залишається відчутним, особливо при оцінюванні перспективних змін ключових параметрів.

Зосередження на динаміці заощаджень у модифікованій адаптивній багатовимірній моделі суттєво підвищує точність прогнозів: за коефіцієнтом R спостерігається покращення у 40% випадків із часом (рис. 3.17).

Якщо застосовувати метрику RMSLE, результати виявляються цілком аналогічними попередньому аналізу за коефіцієнтом R (рис. 3.18, рис. 3.19).



Рис 3.16 Динаміка коефіцієнту R у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної односекторної моделі.

Джерело: складено автором

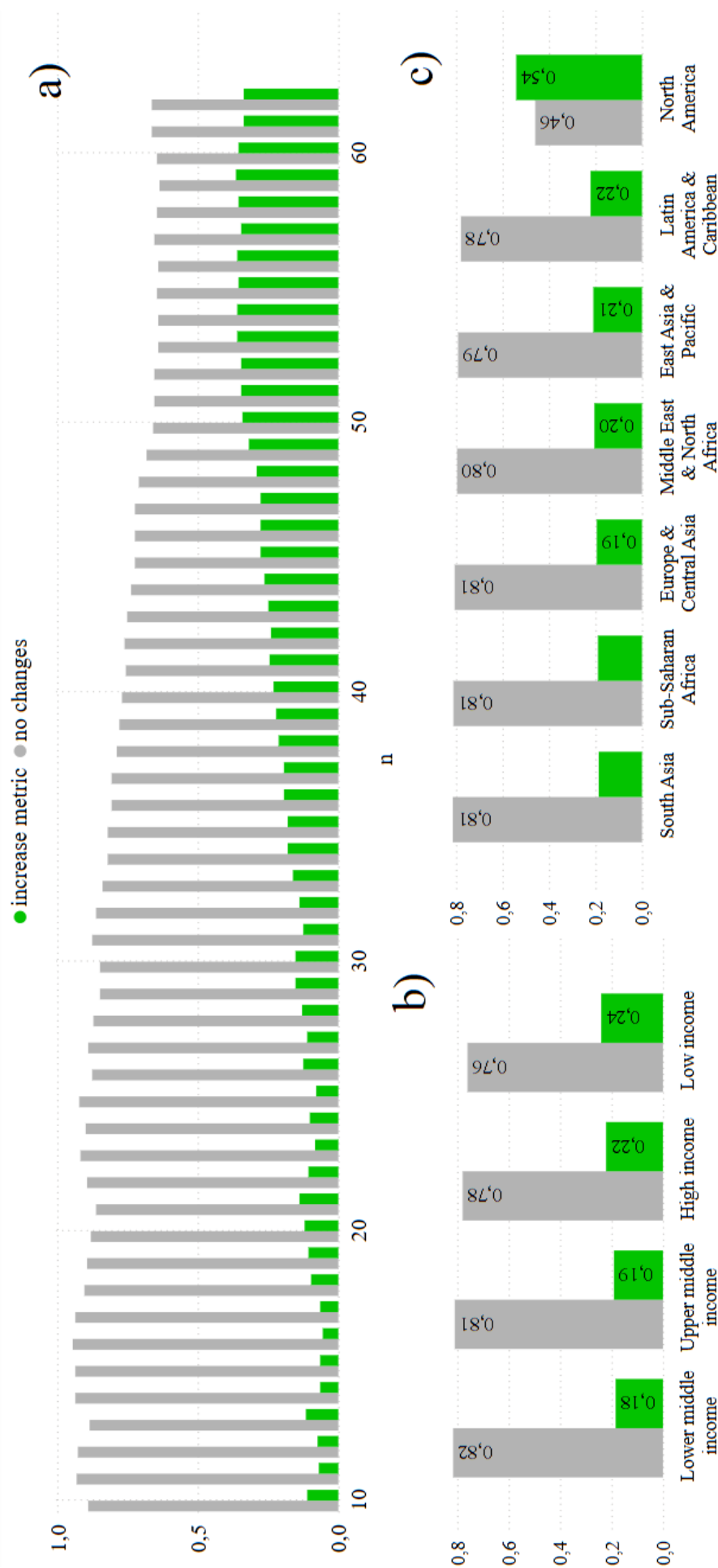


Рис 3.17 Динаміка коефіцієнту R компоненти заощаджень у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної односекторної моделі.

Джерело: складено автором

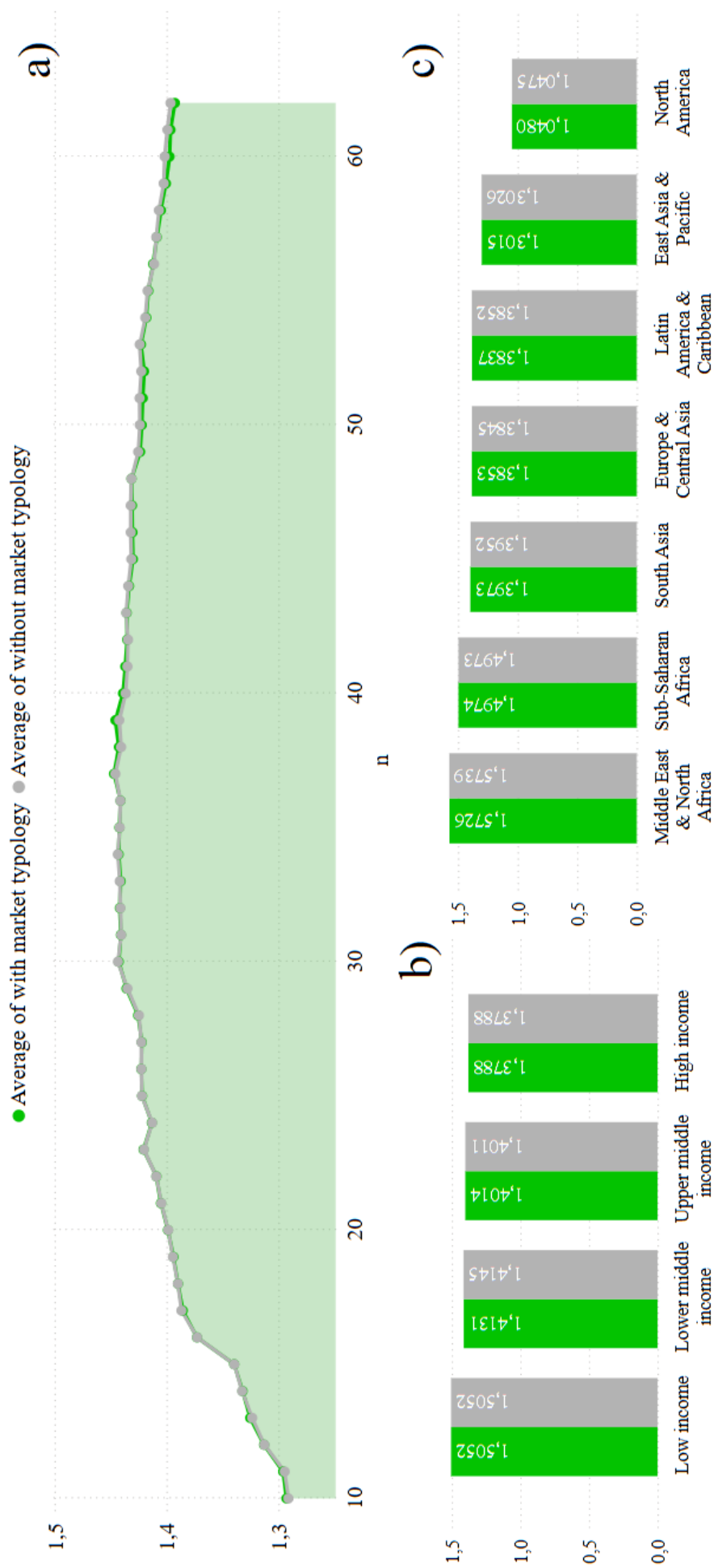


Рис 3.18 RMSLE у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної односекторної моделі.

Джерело: складено автором

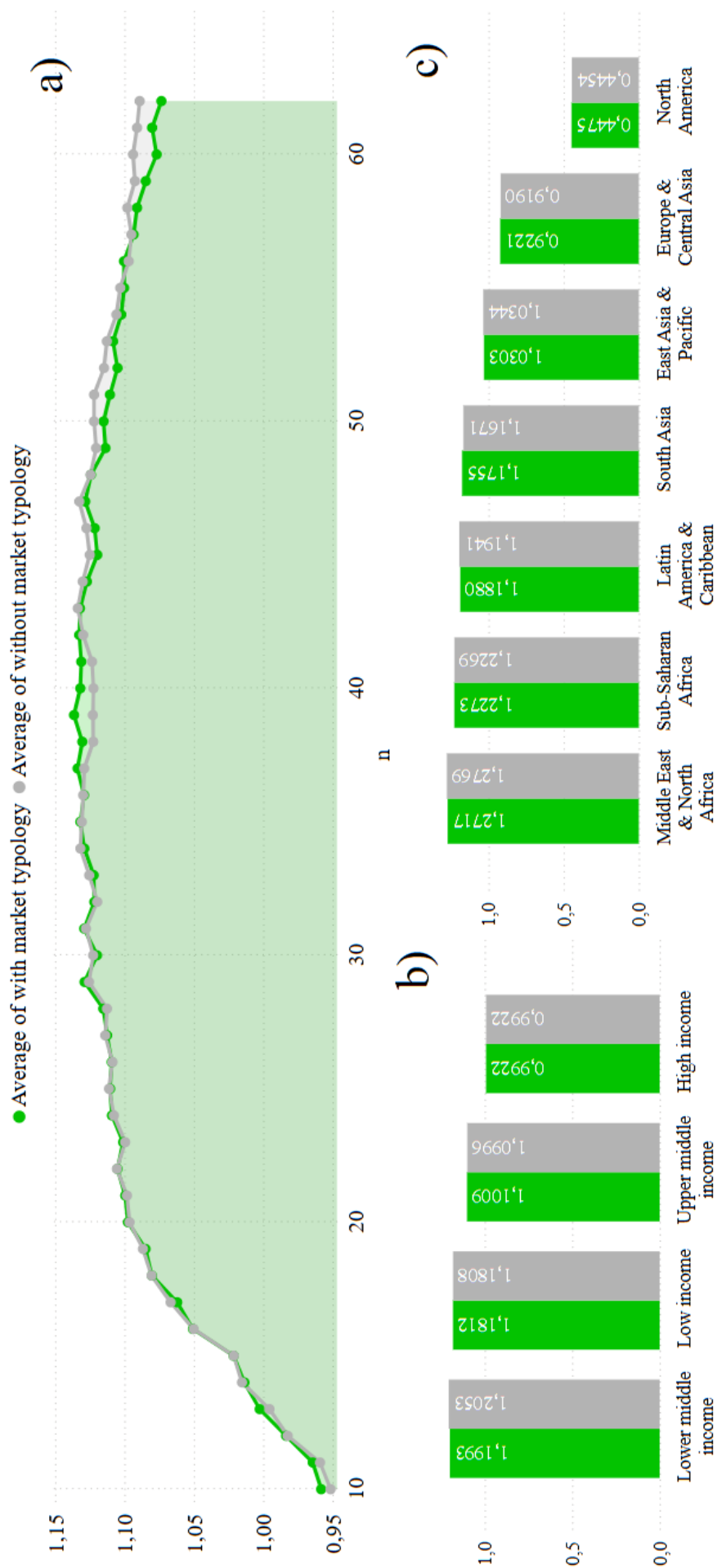


Рис 3.19 RMSLE компоненти заощаджень у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної односекторної моделі.

Джерело: складено автором

У багатовимірній трисекторній моделі, модифікованій з урахуванням типології ринків, точність прогнозування підвищується у 14% випадків, що перевищує 9% для односекторної (рис. 3.20). Це зумовлено тим, що багатосекторний підхід точніше відображає специфіку економічних процесів у первинному, вторинному та третинному секторах, дозволяючи ринковій структурі впливати на зростання комплексніше.

Відмінності ринкових умов у секторах по-різному впливають на заощадження та інвестиції: кожен сектор має власну чутливість до монополії, олігополії чи конкуренції, що формує різну економічну динаміку та темпи зростання.

Зростання якості прогнозування у понад 60% випадків (рис. 3.21) під час аналізу компоненти заощаджень у багатовимірній трисекторній моделі з урахуванням типології ринків у середньо- та довгостроковому періодах пояснюється низкою ключових чинників, що відрізняють багатовимірний підхід від односекторної моделі. По-перше, багатовимірні моделі враховують різні ринкові структури у первинному, вторинному й третинному секторах, що істотно впливає на рівень заощаджень та інвестицій. У конкурентних секторах ресурси розподіляються ефективніше, стимулюючи заощадження, тоді як у монополізованих – вони знижуються через бар'єри входу та слабку інвестиційну мотивацію. По-друге, у середньо- та довгостроковому періодах накопичення капіталу стає більш чутливим до змін ринкових умов, оскільки ефекти інвестицій реалізуються поступово. У цей час ринкові структури визначають не лише обсяг, а й ефективність інвестицій через інновації, технологічний прогрес і доступ до фінансів.

Крім того, багатовимірні моделі точніше відображають взаємозв'язки між секторами, що підвищує точність прогнозів заощаджень. Саме тому їх модифікація з урахуванням ринкової типології забезпечує суттєвіше покращення прогнозів порівняно з односекторними моделями, відображаючи складні механізми впливу ринку на економічну динаміку.

У середньому, за показником RMSLE, якість моделі зростає незалежно від тривалості періоду моделювання (рис. 3.22, рис. 3.23).

На завершення проведемо прогноз економічного зростання для України з використанням багатовимірної трисекторної моделі (рис. 3.24).



Рис 3.20 Динаміка коефіцієнту R у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної трисекторної моделі.

Джерело: складено автором

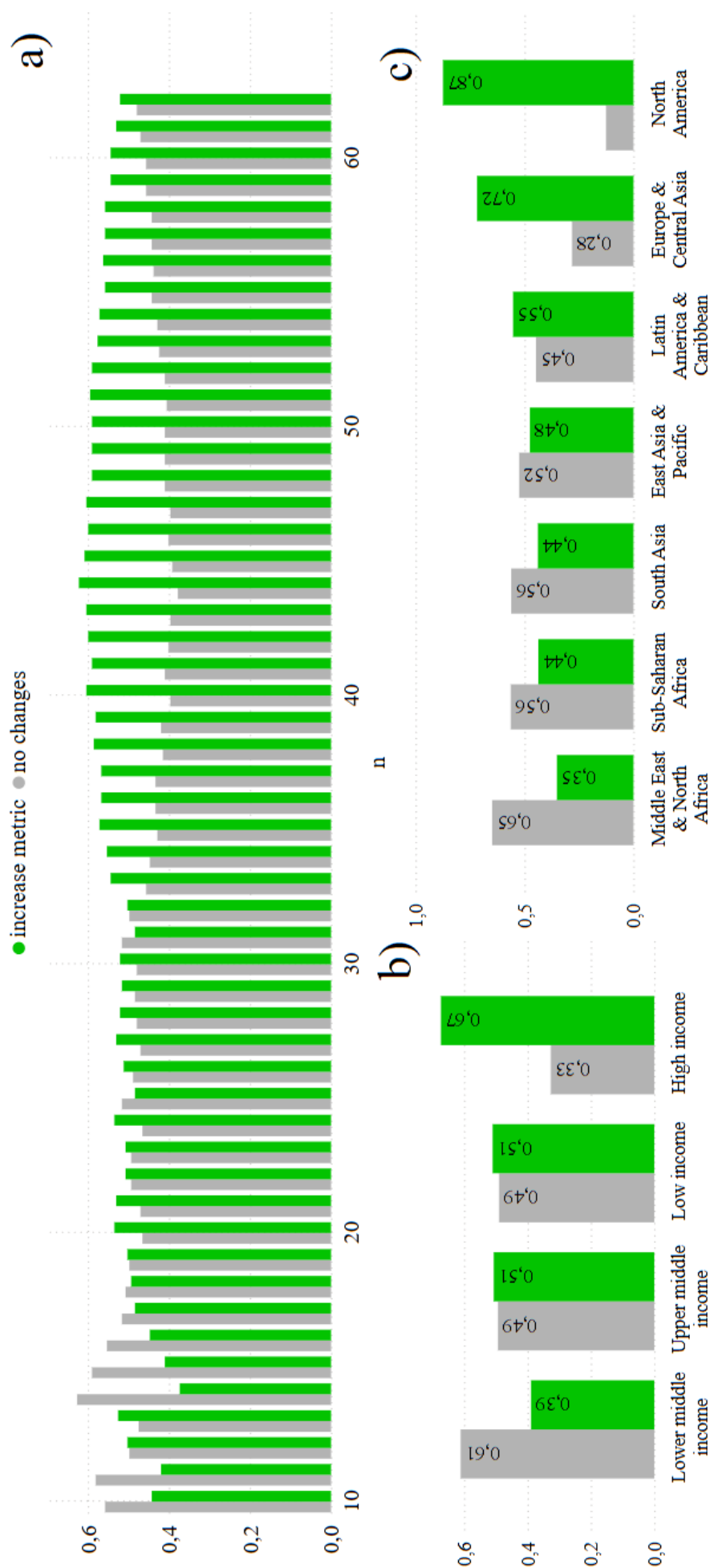


Рис 3.21 Динаміка коефіцієнту R компоненти заощаджень у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної трисекторної моделі.

Джерело: складено автором

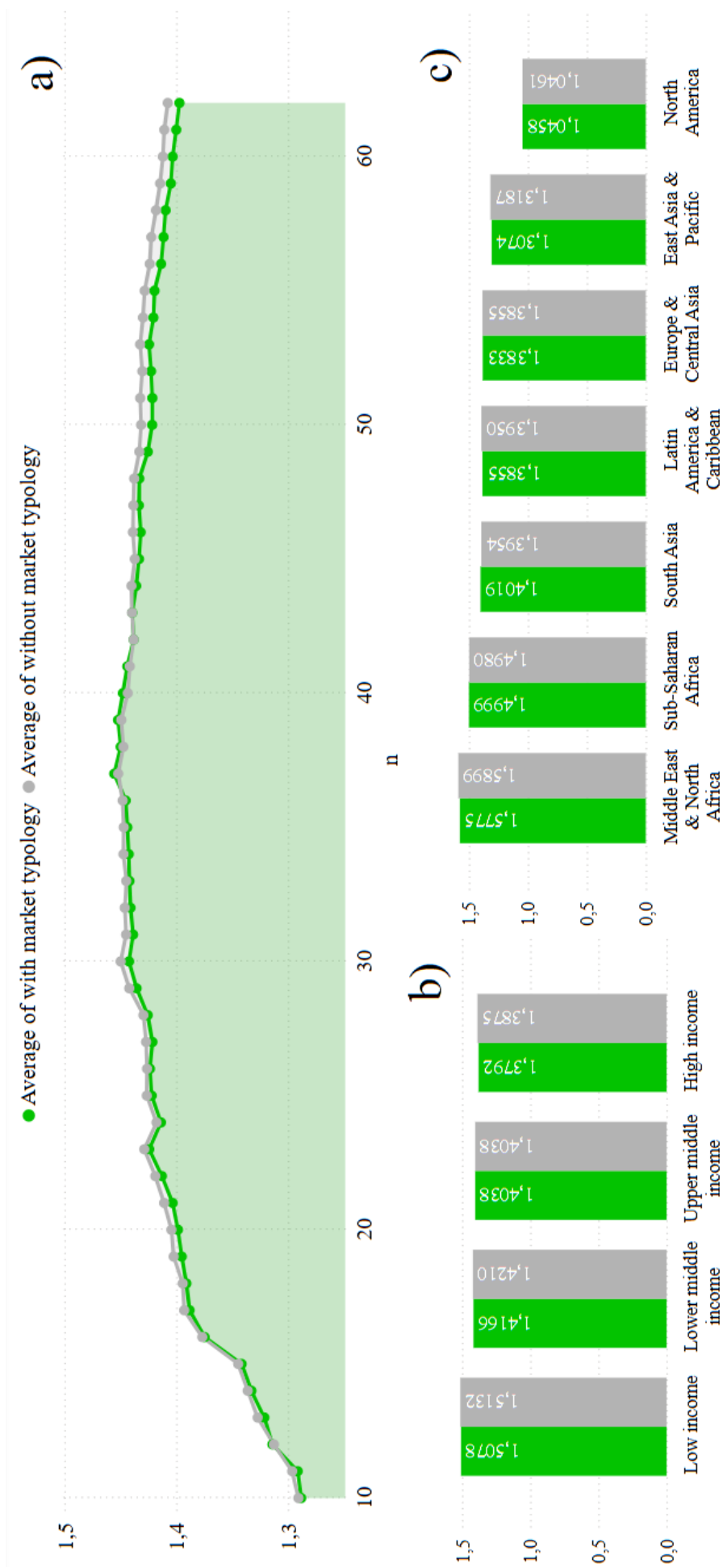


Рис 3.22 RMSLE у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної трисекторної моделі.

Джерело: складено автором

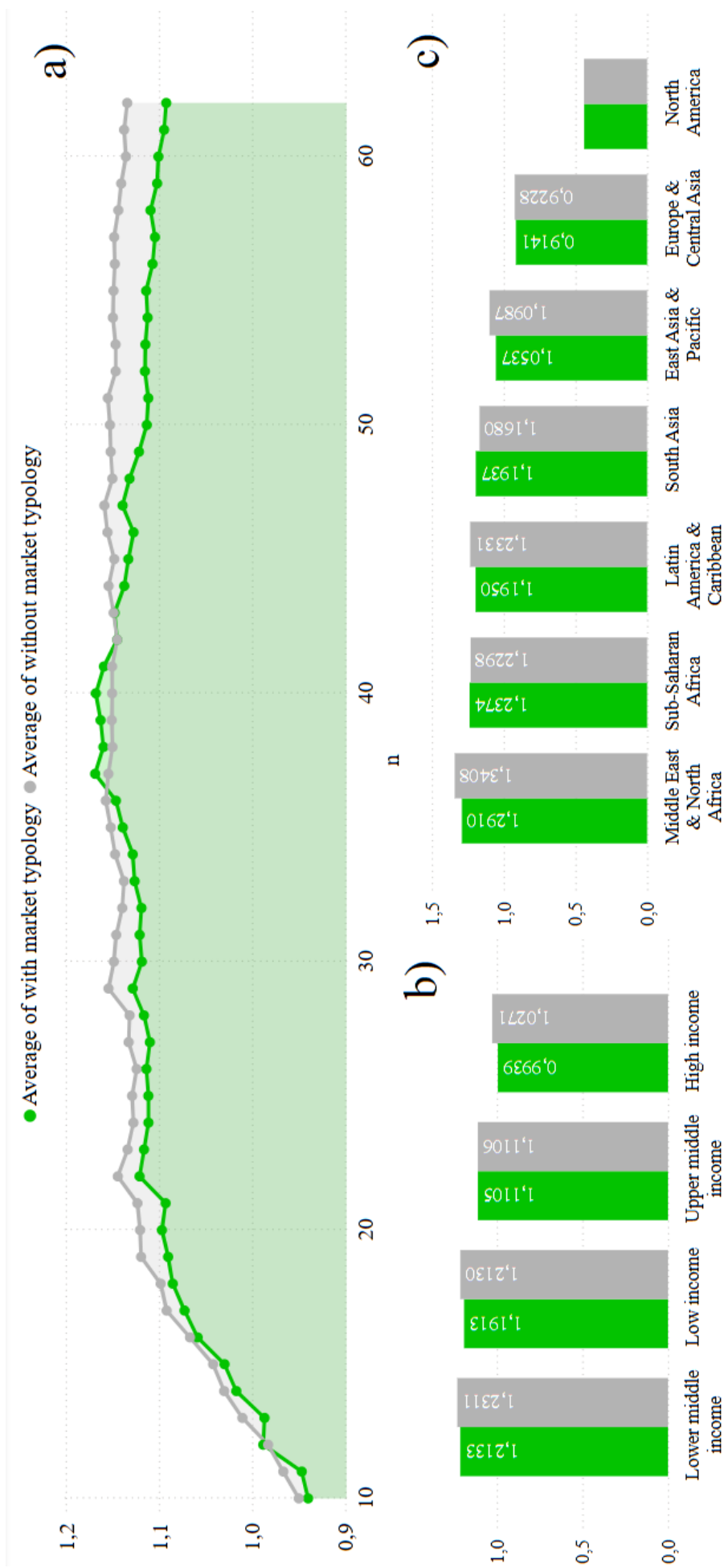


Рис 3.23 RMSLE компоненти заощаджень у розрізі тривалості періоду моделювання (a), груп країн за рівнем доходу (b) та географічного розташування (c) для багатовимірної трисекторної моделі.

Джерело: складено автором

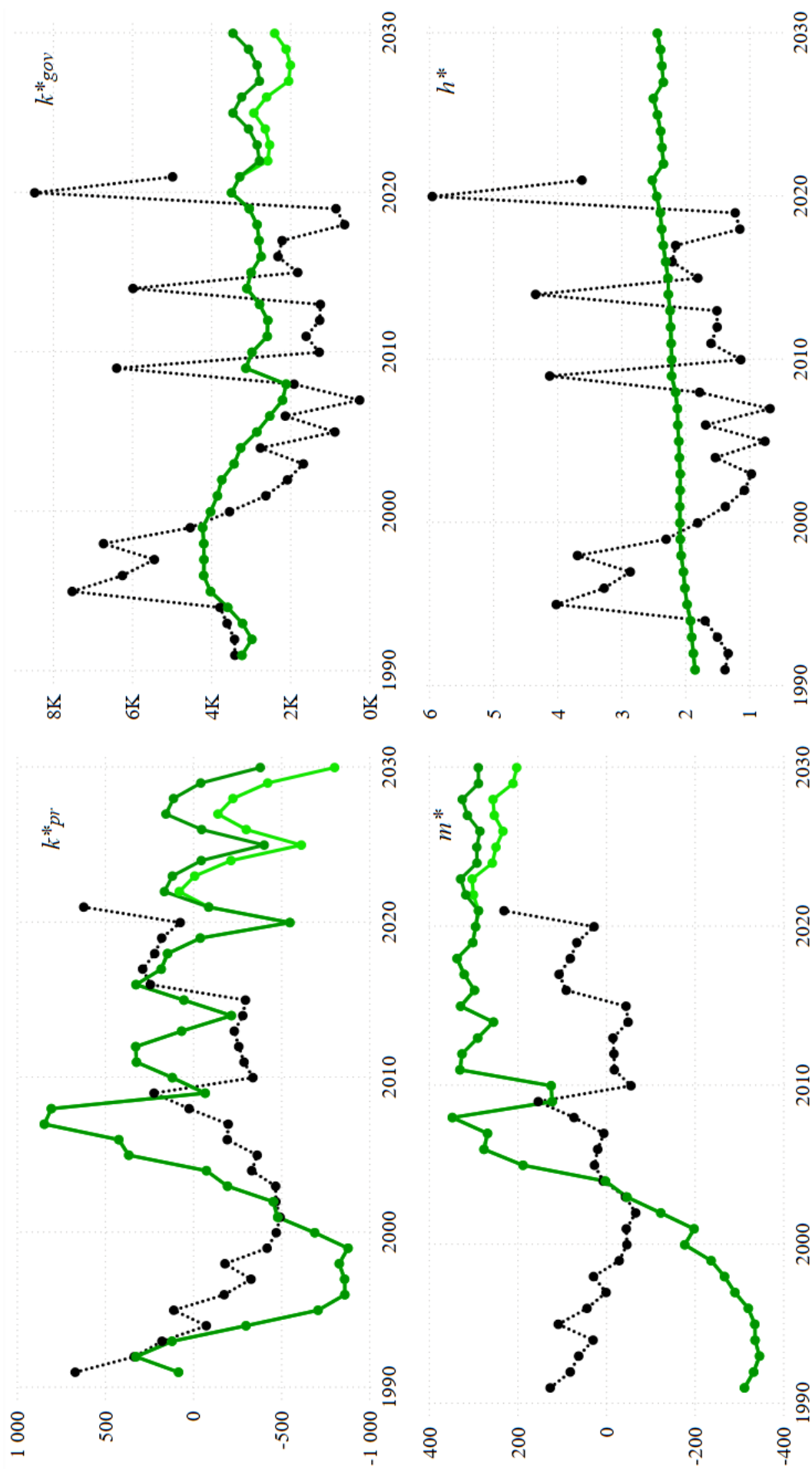


Рис 3.24 Прогноз для економіки України на основі чистої конкуренції (темно-зелений графік) та на основі монополії (світло-зелений графік).

Джерело: складено автором

Результати моделювання показують, що домінування монополій замість умов чистої конкуренції призводить до помітного зниження темпів основних компонентів економічного зростання. Це підтверджує негативний вплив монополізації на економічну динаміку: сповільнюється впровадження інновацій, знижується ефективність виробництва та погіршується розподіл ресурсів порівняно з конкурентними ринками.

3.3. Інші модифікації адаптивної моделі, зокрема з урахуванням тіньової економіки та інвестиційного лагу

Модифікація з тіньовою економікою. Економічна система будь-якої країни поділяється на три сектори: офіційний («білий»), неформальний («сірий») та нелегальний («тіньовий»). Така класифікація відображає рівень прозорості господарської діяльності, її відповідність законодавству та ступінь державного контролю [188-197].

Біла економіка охоплює всі легальні види діяльності, що здійснюються відповідно до законодавства, обліковуються у національній статистиці та забезпечують формування державного бюджету через сплату податків. До неї належать виробництво товарів і послуг, підприємництво, банківська діяльність. Саме цей сектор формує економічну стійкість держави, забезпечує зайнятість, зростання доходів, інвестиції, інновації та інтеграцію у світову економіку. Сіра економіка включає діяльність, що не є незаконною, але здійснюється з порушенням звітності й обліку – виплата зарплат «у конвертах», приховування доходів, подвійна бухгалтерія. Вона знижує податкові надходження та спотворює реальні показники розвитку, створюючи виклики для фіскальної системи. Тіньова економіка охоплює криміналізовану діяльність – контрабанду, відмивання коштів, ухилення від податків, корупційні схеми. Вона завдає шкоди бюджету, підриває конкуренцію, створює соціальні ризики та формує тіньові центри економічного впливу. Далі розглянемо кожен із секторів більш детально.

Біла економіка охоплює всі легальні та відкриті форми господарської діяльності, що здійснюються відповідно до чинного законодавства, підлягають державному регулюванню й офіційному обліку. Її основу становить виробництво товарів і послуг,

відображене у статистичних звітах та оподаткуванні, із дотриманням трудових, екологічних, фінансових і соціальних норм.

Функціонування офіційної економіки забезпечує економічну стійкість держави, спираючись на прозорі ринкові механізми та здорову конкуренцію. Завдяки їй створюються робочі місця, зростають зайнятість і доходи, розвиваються підприємництво, інновації та міжнародна інтеграція. Важливою функцією білої економіки є формування державного бюджету через податки й збори, які фінансують соціальні програми, інфраструктуру, освіту, охорону здоров'я та безпеку.

Основними ознаками білої економіки виступають правова регламентованість, прозорість, офіційний облік і належна податкова система.

- Правова регламентованість означає, що всі економічні операції здійснюються відповідно до нормативно-правових актів, які визначають правила ведення бізнесу та гарантують захист прав усіх учасників ринку.
- Прозорість передбачає відкритість інформації про суб'єктів господарювання, фінансові результати їхньої діяльності та умови ведення бізнесу, що підвищує довіру інвесторів і партнерів.
- Офіційний облік реалізується через ведення бухгалтерської та податкової звітності, що дозволяє державі, фінансовим установам і міжнародним організаціям об'єктивно оцінювати економічні процеси.
- Оподаткування є невід'ємним інструментом перерозподілу доходів та формування бюджету, забезпечуючи ресурсну базу для реалізації державної соціально-економічної політики.

Сукупність цих характеристик забезпечує стабільність економічної системи та формує цивілізовані взаємини між державою, бізнесом і суспільством. Біла економіка підвищує довіру між учасниками ринку, стимулює законне й прозоре економічне зростання та є ключовою передумовою інтеграції країни у світову економіку.

Білу економіку будемо оцінювати за допомогою моделі (2.44).

Сіра економіка охоплює діяльність, що формально не порушує закон, але уникає повного державного контролю, обліку та оподаткування. Вона діє «на межі дозволеного», використовуючи правові прогалини й слабкий нагляд. Типові прояви –

виплата зарплат «у конвертах», приховування частини доходів, неофіційна оренда, заниження обсягів продажів.

Найпоширеніша вона у роздрібній торгівлі, будівництві, транспорті, сфері послуг і малому бізнесі. Для дрібних підприємців у країнах із високими податками чи бюрократією сірий сектор часто є способом виживання, адже витрати на дотримання формальностей перевищують можливості бізнесу. Водночас він виконує адаптивну функцію, підтримуючи зайнятість у періоди економічної нестабільності.

Основними ознаками сірої економіки виступають:

- неповний або вибірковий облік господарських операцій, що унеможливорює об'єктивне відображення економічної активності в офіційній статистиці;
- часткове ухилення від сплати податків і зборів, яке дозволяє бізнесу зменшувати витрати, але водночас скорочує доходи державного бюджету;
- неофіційна зайнятість, коли трудові відносини не оформлюються офіційно, а отже, працівники залишаються поза системою соціального страхування та пенсійного забезпечення;
- недостатня прозорість фінансових потоків, що ускладнює контроль із боку регуляторних органів.

Для найманих працівників сіра економіка має подвійний ефект: з одного боку, забезпечує вищий «чистий» дохід через відсутність податкових відрахувань, з іншого – позбавляє соціальних гарантій (пенсій, страхування, лікарняних), створюючи довгострокові ризики добробуту.

Основна відмінність між білою та сірою економікою полягає у ступені дотримання законодавства. Біла економіка діє прозоро, підлягає оподаткуванню й гарантує стабільність ринку, тоді як сіра – використовує прогалини в законах і слабкість інституцій, уникаючи повного виконання зобов'язань.

Вплив сірої економіки на економічне зростання є подвійним. За помірного рівня вона може мати компенсаторну роль, підтримуючи малий бізнес, зайнятість і економічну активність в умовах надмірного регулювання. Однак із розширенням масштабів сіра економіка стає бар'єром розвитку: знижує податкові надходження, підриває довіру до

офіційного бізнесу, посилює соціальні ризики та викривлює ринкову конкуренцію, гальмуючи легалізацію підприємницької діяльності.

Рівень сірої економіки значною мірою визначається якістю інституційного середовища. Факторами її поширення є:

- надмірне податкове навантаження;
- складність і бюрократизованість процедур реєстрації та ведення бізнесу;
- інституційна слабкість і неефективність державних органів;
- високий рівень корупції;
- низький рівень правової культури та довіри до державних інститутів.

У країнах із високим податковим тиском та складними адміністративними процедурами підприємці часто уникають офіційної реєстрації або приховують доходи. Натомість у державах із прозорим регулюванням, помірними податками та зручними умовами ведення бізнесу масштаби сірої економіки істотно зменшуються.

Розширення сірої економіки спричиняє дисбаланс між приватними та публічними інвестиціями. Прибутки, отримані в цьому секторі, переважно спрямовуються на приватне споживання або реінвестуються у власний бізнес, але не формують бюджетні ресурси. Унаслідок цього держава втрачає фінансову базу для інфраструктурних, соціальних та освітніх програм, що обмежує можливості державної політики розвитку.

У довгостроковій перспективі надмірна частка сірої економіки призводить до деградації соціальної інфраструктури, зниження якості державних послуг і зростання нерівності. Це послаблює людський капітал, інноваційний потенціал і конкурентоспроможність економіки, створюючи загрозу для сталого розвитку й добробуту населення.

Оскільки сіра економіка працює на основних засобах офіційної, тому пропонується ввести до моделі наступне рівняння:

$$m_g = s_g A k_{pr}^{\alpha} k_{gov}^{\beta} h^{\gamma} n_N^{\varphi}, \quad (3.19)$$

де m_g – заощадження, що отримані з сірого сектору економіки,

s_g – норма накопичення сірого сектору економіки (становить частину загальної норми накопичення: $s_f = s_g + s$).

Це означає, що та частина капіталу, яка в умовах повної легальності мала б надходити до офіційного сектора через податкову систему та механізми державного перерозподілу, фактично накопичується поза межами регульованої економіки. При цьому виробнича функція у «сірому» секторі залишається подібною до офіційного, що свідчить про збереження його продуктивних характеристик. Однак відсутність податкових відрахувань із цих ресурсів значно обмежує фінансові можливості держави та знижує обсяг коштів, доступних для фінансування суспільних потреб і стратегічних проєктів.

Виходячи з цього, з урахуванням виразу (3.19), рівняння сукупних заощаджень можна представити в модифікованому вигляді наступним чином:

$$m^* = sAk_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}) + m_g, \quad (3.20)$$

або:

$$m^* = (s + s_g)Ak_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}). \quad (3.21)$$

У загальному вигляді:

$$\begin{cases} k_{pr}^* = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^* = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^* = (s + s_g)Ak_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} - (g + nm + i_{in} + i_{out}), \\ h^* = Bk_{rd}^{\nu}l - nh. \end{cases} \quad (3.22)$$

Тіньова економіка – це сегмент господарської діяльності, що повністю або частково виходить за межі державного контролю, охоплюючи як приховані від оподаткування операції, так і протизаконну діяльність. До неї належать нелегальна зайнятість, контрабанда, корупційні схеми, виробництво контрафакту, тіньові фінансові операції, відмивання коштів та інші дії без офіційного обліку.

Її ключові риси – ухилення від податків і звітності, використання незаконної робочої сили, непрозорість фінансових потоків. Така діяльність підриває чесну конкуренцію, створює нерівні умови для легального бізнесу та загрожує економічній безпеці, особливо через тісні зв'язки з кримінальними структурами. Відмінність тіньового сектору від білої та сірої економіки полягає у повній протиправності. Якщо білий сектор діє законно, а сірий – напівлегально, то тіньовий функціонує у прямій суперечності з законом.

Вплив тіньової економіки є суперечливим. У помірних масштабах вона може мати компенсаторну роль – забезпечувати доходи та зайнятість у кризових умовах. Проте її розширення призводить до фінансової дестабілізації, зростання корупції, втрати державного контролю над економічними потоками та зниження конкурентоспроможності.

Розвиток тіньового сектору зумовлюють високе податкове навантаження, корупція, неефективність правової системи, низька довіра до інститутів і слабе державне управління. У таких умовах бізнес і домогосподарства прагнуть уникнути надмірного регуляторного тиску, що стимулює подальше зростання тіньової економіки.

Припустимо, що тіньова економіка функціонує окремо від інших типів і працює згідно аналогічної виробничої функції:

$$Y_{sh} = CK_{sh}^{\alpha_s} K_{gov}^{\beta_s} H^{\gamma_s} N^{\varphi_s} L^{1-\alpha_s-\beta_s-\gamma_s-\varphi_s}, \quad (3.23)$$

де Y_{sh} – випуск тіньового сектору економіки,

K_{sh} – капітал тіньового сектору економіки,

C – коефіцієнт технологічного прогресу,

$\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \varphi_s$ – параметри виробничої функції, коефіцієнти еластичності тіньового капіталу, публічного капіталу, людського капіталу, землі відповідно.

Оскільки тіньова економіка функціонує в межах тієї ж системи, що й офіційний сектор, її учасники використовують ті самі виробничі фактори – публічний і людський капітал, працю, землю, інфраструктуру. Тіньові контрагенти фактично користуються спільними ресурсами держави, включно з транспортною, фінансовою та комунікаційною мережею. Тому інституційні, правові й економічні умови, що визначають ефективність офіційного сектору, впливають і на тіньовий. Рівень освіти та кваліфікації працівників формує продуктивність у обох секторах, а якість інфраструктури підвищує ефективність як легальних, так і нелегальних бізнесів. Водночас тіньовий сектор адаптується до державних стимулів і обмежень: високі податки чи надмірна регламентація сприяють відтоку ресурсів у неформальну сферу, тоді як ефективна правова система й державний контроль – стримують її розвиток.

Динаміка тіньового сектору виводитиметься аналогічно:

$$k_{sh}^{\bullet} = i_{sh} - (d_{sh} + n)k_{sh}, \quad (3.24)$$

де i_{sh} - інвестиції в тіньовий сектор,

d_{sh} - коефіцієнт амортизації тіньового капіталу.

Врахувавши додаткове рівняння до моделі ми отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{pr}^{\bullet} = i_{in} + i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^{\bullet} = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ k_{sh}^{\bullet} = i_{sh} - (d_{sh} + n)k_{sh} \\ m^{\bullet} = (s + s_g)Ak_{pr}^{\alpha}k_{gov}^{\beta}h^{\gamma}n_N^{\varphi} + s_{sh}Ck_{sh}^{\alpha_s}k_{gov}^{\beta_s}h^{\gamma_s}n_N^{\varphi_s} - (g + nm + i_{in} + i_{out} + i_{sh}), \\ h^{\bullet} = Bk_{rd}^{\nu}l - nh, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

де s_{sh} - норма накопичення для тіньового сектору.

Накопичення капіталу в тіньовому секторі суттєво впливає на формування сукупних заощаджень. Попри неофіційний характер операцій, фінансові потоки тіньової економіки залишаються частиною господарського обігу, акумулюючи ресурси, що зрештою інтегруються у систему національних заощаджень та інвестицій, впливаючи на динаміку капіталу.

У структурі накопичень виділяють три напрями:

- Офіційні внутрішні інвестиції – ресурси, спрямовані на розвиток легального бізнесу, модернізацію виробництва та реалізацію державних проєктів, які підтримують публічний капітал і стабільність економіки.
- Внутрішні тіньові інвестиції – фінансування нелегальної або напівлегальної діяльності, що зберігає зайнятість і продуктивність, але не формує податкових надходжень і звужує можливості державної політики.
- Офіційні зовнішні інвестиції, куди частково перетікають кошти тіньового сектору через високі податки чи регуляторні обмеження, що веде до відтоку капіталу та зменшення ресурсів для внутрішніх інвестицій.

Таким чином, тіньовий сектор одночасно впливає на обсяг, структуру та ефективність національних накопичень, створюючи потенційні дисбаланси у фінансовій системі.

Модифікація з інвестиційним лагом. Інвестиційна діяльність є ключовим драйвером економічного зростання, визначаючи рух фінансових ресурсів, розвиток

підприємництва, конкурентоспроможність та стійкість економіки до зовнішніх шоків. Важливо оцінювати не лише обсяг інвестицій, а й їх структуру, пріоритети та ефективність, адже саме якість вкладень визначає довгострокові результати розвитку.

Важливим показником є інвестиційний лаг – час між накопиченням заощаджень і реальним вкладенням у виробництво. Він істотно впливає на темпи зростання та ефективність підприємств, оскільки своєчасність інвестицій визначає масштаб розширення виробництва. Врахування лагу в динамічних моделях підвищує точність прогнозів і реалістичність оцінок, сприяє стратегічному плануванню та оптимізації розподілу капіталу між секторами, забезпечуючи збалансоване зростання.

Для оцінки впливу інвестиційного лагу на макроекономічну динаміку доцільно використовувати моделі економічного зростання. Попри спрощення, вони залишаються ефективним аналітичним інструментом завдяки невисоким ресурсним вимогам і гнучкості порівняно з новими кейнсіанськими моделями.

У фізиці широко застосовуються концепти інерційних та дискретних запізнень між вхідними та вихідними процесами. Відомо, що інерційні запізнення можуть призводити до нескінченно тривалих перехідних процесів, що не завжди адекватно відображає реальну динаміку економічних систем. Для більш точного моделювання часових затримок пропонується запозичити підходи, де лаг між вхідним та вихідним сигналами описується за допомогою лінійних диференціальних рівнянь:

$$Ty'(t) + y([t/T]T) = x(t), t \geq 0, \quad (3.26)$$

де величина T визначає тривалість перехідного процесу;

$[t/T]$ - ціла частина числа t/T ;

$x(t)$ представляє вхідний сигнал;

$y(t)$ – вихідний або результуючий процес.

Для спрощення припускається, що всі функції визначені при $t \geq 0$. У випадку $x(t) = 1$ та $y(0) = 0$ розв'язок рівняння (1) може бути виражене як $y(t) = t/T$ / при $0 \leq t \leq T$ та $y(t) = 1$ при $t \geq T$. Таким чином, перехід від стану 0 до стану 1 відбувається за лінійною залежністю протягом часу T . Такий підхід дозволяє більш точно враховувати динаміку

економічної системи, надаючи зручніші і адекватні динамічні моделі для аналізу та передбачення економічних явищ.

Такий метод дозволяє відтворити ефекти запізнень у виробничих та інвестиційних процесах більш реалістично, враховуючи їх динамічну природу. Опис лагів через диференціальні рівняння відкриває можливість застосування чисельних методів для прогнозування реакції економіки на зміни інвестиційних потоків, оцінки стабільності макроекономічної системи та аналізу впливу різних сценаріїв інвестування на темпи економічного зростання.

Для прикладу модель Солоу-Свана має вигляд:

$$\begin{aligned} K_t^* + dK_t &= V_t, K_t = K(t), \\ \tau V_t^* + V_{[t/\tau]\tau} &= sF(K_t, L_t), \end{aligned} \quad (3.27)$$

де $L_t = L_0 e^{nt}$ – рівень трудових ресурсів у момент часу t ,

d – норма амортизації капіталу,

V_t – обсяг інвестицій у момент часу t ,

τ – лаг інвестування,

$F(K_t, L_t)$ – неокласична виробнича двофакторна функція Кобба-Дугласа виду $Y = AK^\alpha L^\beta$, де α та β є коефіцієнтами еластичності зміни капіталу та праці відповідно, а коефіцієнт A відповідає за технічний прогрес.

Запишемо модель у відносних показниках: $k_t = K_t/L_t$ – капіталомісткість; $v_t = V_t/L_t$ – інвестиції на працівника $f(k_t) = F(K_t, L_t)/L_t$ – ефективність праці. За допомогою перетворення (2.1) виражаємо:

$$\begin{aligned} k_t^* + (d + n)k_t &= v_t, k_t = k(t), \\ \tau v_t^* + \tau n v_t + V_{[t/\tau]\tau}/L_t &= s f(k_t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

при чому $V_{[t/\tau]\tau}/L_t = v_{[t/\tau]\tau} e^{-n\tau\{t/\tau\}}$, де $\{t/\tau\}$ – дробова частина числа t/τ .

Модифікована модель Солоу приймає вигляд:

$$\begin{aligned} k_t^* + (d + n)k_t &= v_t, k_t = k(t), \\ \tau v_t^* + \tau n v_t + v_{[t/\tau]\tau} e^{-n\tau\{t/\tau\}} &= s f(k_t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Слід зауважити, що у моделі часових затримок введення інвестицій такі затримки можуть бути двох типів: інерційними або дискретними. У разі дискретної затримки з лагом τ модель набирає наступного формального вигляду:

$$k_t^* + (d + n)k_t = sf(k_{t-\tau})e^{-n\tau}. \quad (3.30)$$

Фінальна версія моделі Солоу-Свана набуде вигляду:

$$k_t^* = sAk_{t-\tau}^\alpha e^{-n\tau} - (d + n)k_t. \quad (3.31)$$

Схожим чином перетворюємо моделі Рамсея-Касса-Купманса та Менк'ю-Ромера-Вейла:

$$k_t^* = Ak_{t-\tau}^\alpha e^{-n\tau} - c_{t-\tau} - (d + n)k_t \quad (3.32)$$

та:

$$k_t^* = s_k Ak_{t-\tau}^\alpha h_{t-\tau}^\beta e^{-n\tau} - (d + n)k_t \quad (3.33)$$

Адаптивна модель набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{pr}^* = \frac{s_t \omega_{in} m}{(1 + r)} + s_t i_f - (d_{pr} + n)k_{pr}, \\ k_{gov}^* = g - (d_{gov} + n)k_{gov} + tx, \\ m^* = sAk_{pr-\tau}^\alpha k_{gov-\tau}^\beta h_{-\tau}^\gamma n_{N-\tau}^\varphi e^{-n\tau} - \left(g + nm + \frac{s_t \omega_{in} m}{(1 + r)} + s_t i_{out} \right) \\ h^* = Bk_{rd}^v l - nh. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Напрями подальшої модифікації моделі. Подальше дослідження спрямоване на вдосконалення моделей економічного зростання шляхом інтеграції не лише приватного та публічного капіталу, а й фінансових показників – інвестиційних потоків, резервів, прибутковості та даних банківського сектору. Мета – створення динамічної системи, що точно відображає взаємозв'язки між фінансовою стійкістю секторів і реальним зростанням. Важливим аспектом є інвестиційний лаг – затримка між капіталовкладеннями та їхнім впливом на продуктивність, що дає змогу оцінювати ефективність політики стимулювання інвестицій у середньо- та довгостроковій перспективі.

Окрему увагу буде приділено тіньовій економіці та її взаємодії з офіційним сектором. Аналіз масштабів тіньових потоків допоможе оцінити їхній вплив на

інвестиційні ресурси та сукупні накопичення. Також розроблятимуться моделі ризику для фінансових і виробничих секторів, що дозволить прогнозувати втрати, оцінювати стійкість банків, ефективність резервів і взаємозв'язок між капіталом і прибутковістю.

Другий напрямок охоплює демографічні фактори та людський капітал. Інтеграція показників вікової структури, освіти, професійної підготовки та міграції дозволить прогнозувати довгострокові тенденції, потребу в соціальних інвестиціях і розвиток ринку праці. Моделювання людського капіталу на одиницю праці дасть змогу оцінювати ефективність освітньої політики, продуктивність праці та потенціал інноваційного розвитку.

Третій напрямок присвячено взаємодії технологічного прогресу, інновацій і ринкових структур. Аналіз впливу високотехнологічних галузей, інвестицій в інновації та типів ринкової конкуренції допоможе визначити оптимальні умови для розвитку інноваційного сектору. Плануються числові експерименти з різними сценаріями інвестиційної та податкової політики, а також урахування регіональних відмінностей у доступі до технологій.

У сукупності це забезпечить створення комплексних, адаптивних і практично застосовних моделей економічного зростання, здатних враховувати структурні та динамічні чинники розвитку.

Висновки до розділу 3

Для удосконалення економічної моделі, ґрунтуючись на результатах проведеного аналізу, доцільно розширити перелік факторів, які враховуються у процесі моделювання. Включення додаткових змінних сприятиме підвищенню точності прогнозних оцінок, а також дозволить більш комплексно відобразити вплив внутрішніх і зовнішніх чинників на економічну динаміку.

Зокрема, перспективним напрямом подальшої модифікації моделі є врахування демографічного динамічного чинника, оскільки зміни чисельності населення, його вікової структури, рівня зайнятості та міграційних процесів безпосередньо впливають на обсяги виробництва, споживання та інвестиційної активності.

Використання динамічного коефіцієнта замість статичного підвищує точність моделей економічного зростання, особливо у відображенні людського капіталу та сукупних заощаджень. Це забезпечує більш адекватне врахування демографічних змін, що визначають продуктивність праці, інвестиційний потенціал і темпи розвитку. Багатовимірні моделі, які інтегрують додаткові фактори, демонструють істотне підвищення якості прогнозування, підтверджене кращими метриками в умовах змінної чисельності населення. Найбільший ефект від застосування таких підходів спостерігається у країнах із низьким рівнем розвитку, де демографічні зрушення найбільше впливають на економіку. Отже, динамічні моделі з урахуванням демографічних факторів є перспективним інструментом для більш точного аналізу та прогнозування економічного зростання.

Ще одним напрямком модифікації є включення типології ринку, що дозволить диференціювати особливості функціонування економічної системи залежно від рівня конкуренції, ступеня монополізації та специфіки ринкових механізмів.

За результатами моделювання економічного зростання з ринковою структурою шляхом модифікації багатовимірної адаптивної моделі з урахуванням додаткових коефіцієнтів для різних типів ринку. Для монополістичної конкуренції введено коефіцієнт витрат на диференціацію продукту, для монополії – коефіцієнт зниження обсягів із корекцією на кількість учасників, аналогічний до олігополії. Модель досконалої конкуренції залишено без змін, що забезпечило можливість порівняння результатів. Порівняння модифікованої та базової моделей засвідчило підвищення точності прогнозування майже у 60% випадків, особливо щодо довгострокового зростання та малорозвинених країн, зокрема в межах трисекторної моделі. Це підтверджує доцільність інтеграції ринкових характеристик у макроекономічні моделі, що підвищує їхню гнучкість, здатність відображати сучасні економічні реалії та ефективніше оцінювати економічну політику.

Врахування масштабів тіньової економіки, яка в багатьох країнах суттєво впливає на реальні макроекономічні показники, рівень податкових надходжень, інвестиційну привабливість та ефективність державного регулювання.

Сіра та тіньова економіка по-різному впливають на економічне зростання. Сіра

економіка охоплює напівлегальні практики, що частково уникають державного контролю та оподаткування. Вона може стимулювати приватний сектор, проте знижує податкові надходження й створює нерівність у конкурентному середовищі. Тіньова економіка, навпаки, включає повністю нелегальну діяльність, яка сприяє корупції, криміналізації та підриває фінансову стабільність держави. Вплив цих явищ залежить від масштабів: помірна сіра економіка іноді компенсує недоліки регулювання, тоді як її надмірний розвиток послаблює державні фінанси; високий рівень тіньового сектору становить критичну загрозу для сталого розвитку. Визначальними факторами їх поширення є податкова політика, бюрократичні бар'єри, якість управління та рівень корупції. У моделях економічного зростання сіру економіку доцільно враховувати як модифікований параметр у функції заощаджень, тоді як для тіньового сектору потрібне окреме рівняння, що описує його власну капіталомісткість та процес накопичень. Такий підхід забезпечує більш адекватне відображення впливу нелегальних і напівлегальних практик на макроекономічну динаміку.

Інвестиційна діяльність є ключовим чинником економічного зростання, що визначає ефективність використання ресурсів, розвиток виробництва та стійкість економіки. Важливим є врахування інвестиційного лагу, який відображає часову затримку між формуванням заощаджень і їх реальним використанням у виробництві. У роботі показано, що включення інерційних і дискретних запізнень у класичні моделі економічного зростання, а також їх узагальнення в адаптивній моделі, дозволяє більш реалістично описувати динаміку економічних процесів.

Основні результати розділу опубліковано в наукових працях автора: [198-205].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено теоретичні та прикладні аспекти економічного зростання шляхом розробки та реалізації нового науково-методичного підходу до моделювання економічного зростання, який поєднує напрацювання сучасної теорії економічного розвитку та враховує вплив нових чинників, що визначають соціально-економічну динаміку в умовах глобалізаційних і технологічних трансформацій. Запропонований підхід забезпечує кількісну оцінку впливу ключових факторів – приватного та державного капіталу, людського потенціалу, праці, земельних ресурсів, внутрішніх і зовнішніх інвестицій, заощаджень та міжнародних трансфертів – на економічне зростання, а також враховує часові лаги, циклічні коливання, особливості ринкової структури та вплив тіньового сектору, що дозволяє підвищити точність прогнозування та оцінювання економічних ризиків.

У результаті проведення дослідження було отримано наступні результати:

1. Аналіз теоретичних підходів засвідчив еволюцію від класичних уявлень про зростання як нагромадження ресурсів до сучасних концепцій, що враховують технологічний прогрес, інституційні фактори, людський капітал та інноваційний потенціал. Неокласичні та ендогенні моделі дозволили поєднати макроекономічні закономірності з мікроекономічними механізмами, тоді як інституційні, еволюційні та посткейнсіанські підходи висвітлили історичну обумовленість та нерівномірність економічного розвитку, підкреслюючи роль адаптації економічних систем до структурних і технологічних змін. У ході дослідження визначено та узагальнено широкий спектр економіко-математичних моделей економічного зростання, які охоплюють як класичні, так і ендогенні моделі та їх сучасні модифікації. Базові моделі забезпечують формалізований опис взаємозв'язку між капіталом, працею та технологічним прогресом, а модифіковані підходи суттєво розширюють аналітичні можливості моделей шляхом включення людського, публічного та природного капіталу, інвестицій у інноваційний сектор, державного сектору, міжнародної торгівлі, податкових механізмів, часових лагів, а також багатосекторної структури економіки. Це дозволяє більш повно відображати реальні процеси економічної динаміки. Всього

було обрано для кількісного аналізу 20 моделей економічного зростання та їх модифікацій.

2. Аналіз існуючих моделей економічного зростання дозволив систематизувати їхні ключові переваги та обмеження з позицій адекватності відображення реальних економічних процесів. До сильних сторін розглянутих підходів належить розширення факторного простору моделювання, зокрема врахування людського та публічного капіталу, що дозволяє краще описувати довгострокові джерела економічного зростання. Важливим досягненням є також інтеграція міжнародної торгівлі у структуру моделей, що забезпечує відображення впливу зовнішньоекономічних зв'язків на динаміку капіталу та виробництва. Окрім того, позитивною характеристикою є декомпозиція економічної системи на окремі підсистеми, а також врахування змінності факторів виробництва, що підвищує аналітичну гнучкість моделей. Водночас встановлено низку суттєвих обмежень, які знижують практичну ефективність існуючих моделей. Зокрема, поширеним є припущення про закриту економіку, що не відповідає умовам сучасної глобалізованої економічної системи. Додатковими спрощеннями виступають гіпотези про рівність інвестицій і заощаджень у кожному періоді, відсутність інвестиційних лагів, а також ігнорування ролі тіньової економіки, циклічних коливань та особливостей ринкових структур. Сукупність цих обмежень призводить до зниження точності та пояснювальної здатності моделей, особливо при аналізі економік, що перебувають у стані структурної трансформації або функціонують в умовах високої невизначеності.

3. У межах виконання задачі розроблено методику апостеріорного оцінювання економічного ризику як кількісної міри невизначеності траєкторії економічного зростання, що відображає ймовірність відхилення фактичної динаміки розвитку від прогнозованої під впливом внутрішніх (структурні дисбаланси, інституційні слабкості, макроекономічна нестабільність) та зовнішніх чинників (глобальні кризи, коливання ринкової кон'юнктури, геополітичні ризики). Встановлено, що економічний ризик має багатофакторну природу та проявляється не лише через коливання макропоказників, а й через зміни інвестиційної активності, продуктивності, структурних пропорцій та якості економічного розвитку, що

зумовлює необхідність його формалізації через інтервальний підхід до ключових змінних моделі. Запропонована методика базується на визначенні верхньої та нижньої меж капіталомісткості в межах аналітичного розв'язку моделі економічного зростання, що дозволяє інтерпретувати оптимістичний і песимістичний сценарії розвитку економіки залежно від рівня заощаджень, технологічного прогресу, амортизації капіталу, демографічних змін та інституційних обмежень. Ризик економічного зростання визначено як відносний розкид між цими граничними значеннями, що забезпечує його кількісне вимірювання як функції невизначеності ключового параметра моделі. Показано, що розширення інтервалу між максимальною та мінімальною оцінками капіталомісткості означає зростання економічного ризику, тоді як його звуження відображає підвищення стабільності та передбачуваності економічної динаміки.

4. На основі проведеного аналізу розроблено багатовимірну адаптивну математичну модель економічного зростання, яка інтегрує ключові положення сучасних теорій економічної динаміки та розширює класичні підходи шляхом врахування відкритості економіки, міжсекторальних взаємозв'язків і багатоканальної структури формування інвестиційних ресурсів. Запропонована модель поєднує взаємодію виробничого та інноваційного секторів, що дозволяє відобразити як процеси створення доданої вартості, так і механізми генерації та поширення технологічних змін. Особливістю моделі є врахування різних джерел інвестицій, зокрема внутрішніх заощаджень, зовнішніх фінансових потоків та іноземного капіталу, що забезпечує більш реалістичне відображення умов функціонування відкритої економіки. У структурі моделі окремо виділено приватний, публічний та людський капітал, що дозволяє комплексно оцінювати їхній внесок у довгострокове економічне зростання та продуктивність економічної системи. Формально модель описується системою чотирьох взаємопов'язаних динамічних компонентів, а саме: динамікою приватної капіталомісткості, процесами нагромадження публічного капіталу, змінами у сукупних заощадженнях економіки та еволюцією людського капіталу. Така структура забезпечує можливість одночасного врахування виробничих, інституційних та соціальних факторів, що визначають траєкторію економічного

розвитку. Взаємозв'язок між компонентами моделі дозволяє відображати ефекти взаємного підсилення або стримування, що виникають у процесі економічної динаміки. Прогнозування за розробленою адаптивною моделлю здійснюється за допомогою коефіцієнтів тренду та циклічності з різним періодом, які оцінюються для однотипної групи країн за результатами кластерного аналізу. Для оцінювання результатів кластеризації застосовано комплексний підхід, що базується на використанні нормалізованих показників якості кластеризації, зокрема коефіцієнта силуету, індексу Девіса-Болдіна та індексу Калінського-Харабаша, що забезпечило підвищення обґрунтованості вибору кількості кластерів, достовірності сформованих кластерних структур та порівнюваності результатів оцінювання.

5. Згідно результатів числового експерименту, проведеного на даних понад 150 країн світу, адаптивна модель у 95% випадків демонструє кращі результати порівняно з базовими підходами, що підтверджує її вищу прогностичну ефективність. Отримані результати свідчать про обґрунтованість гіпотез щодо нереалістичності передумов закритої економіки, рівності інвестицій і заощаджень у кожному періоді та відсутності інвестиційного лагу, оскільки їх врахування підвищує якість прогнозів, зокрема за показником RMSLE. Водночас для окремих слаборозвинених країн Африки та Азії ускладнення моделі може збільшувати похибку через обмеженість статистичних даних і вплив інституційних та політичних чинників. Встановлено, що адаптивні моделі є точнішими у короткостроковому періоді, тоді як у середньо- та довгостроковій перспективі їх точність знижується під впливом технологічних, демографічних і глобальних змін. Багатосекторні моделі виявляються особливо ефективними за умов структурних зрушень, оскільки краще відображають взаємодію секторів і вплив на продуктивність та інвестиції. Додатковий аналіз параметрів показав, що технологічний прогрес найвищий у сфері послуг, еластичність приватного капіталу переважає у сільському господарстві та промисловості, а людського капіталу – у високорозвинених країнах і секторі послуг; при цьому з часом еластичності капіталу та людського капіталу зростають, еластичність праці знижується, амортизація скорочується, а норма заощаджень значно вища у розвинених країнах.

6. Розширення базової моделі шляхом інтеграції демографічної динаміки, типології ринку, а також компонентів сірої та тіньової економіки суттєво підвищує її аналітичну глибину та прогностичну здатність. Включення демографічних коефіцієнтів дозволяє більш адекватно відображати вплив чисельності населення, його вікової структури, зайнятості та міграційних процесів на формування людського капіталу і сукупних заощаджень, що є критично важливим для точного моделювання довгострокової економічної динаміки. Врахування ринкової структури забезпечує диференціацію механізмів функціонування економіки залежно від рівня конкуренції та ступеня монополізації, що підвищує точність прогнозування, особливо в контексті довгострокового зростання та для економік із низьким рівнем розвитку. Інтеграція сірої та тіньової економіки дозволяє більш повно враховувати реальні макроекономічні процеси, пов'язані з нелегальною та напівлегальною діяльністю, яка впливає на податкові надходження, інвестиційну активність та загальну фінансову стабільність. Особливо важливим удосконаленням моделі є врахування інвестиційного лагу, який відображає часову затримку між прийняттям інвестиційних рішень, формуванням заощаджень та їх фактичним перетворенням у виробничий капітал. Включення інерційних і дискретних запізнень дозволяє більш реалістично описати динаміку економічних процесів, оскільки в реальній економіці інвестиції не миттєво впливають на обсяг виробництва та капіталізацію. У сукупності ці розширення забезпечують істотне підвищення адекватності моделі та її наближення до реальних умов функціонування економічних систем.

7. Практичне значення проведеного дослідження полягає у можливості застосування запропонованої багатовимірної економіко-математичної моделі для комплексного аналізу, оцінювання та прогнозування економічного зростання в умовах структурних трансформацій і високої динамічності сучасних економічних систем. На відміну від класичних моделей, запропонований підхід дозволяє враховувати широкий спектр факторів, зокрема структурні, інституційні, демографічні, інноваційні та зовнішньоекономічні чинники, що суттєво підвищує адекватність отриманих результатів і точність прогнозних оцінок. Розроблена модель може бути використана у системі державного управління для оцінювання ефективності

державної економічної політики, аналізу інвестиційних процесів, визначення впливу внутрішніх і зовнішніх інвестицій на темпи економічного розвитку, а також дослідження ролі людського та публічного капіталу у формуванні довгострокових конкурентних переваг економіки. Крім того, модель дозволяє прогнозувати наслідки структурних реформ, змін ринкового середовища, демографічних трансформацій та інноваційної активності у різних секторах економіки, що створює підґрунтя для прийняття більш обґрунтованих управлінських і стратегічних рішень на макроекономічному рівні. Додатковим практичним напрямом застосування моделі є використання методів кластеризації для групування економічних систем, регіонів або часових періодів за подібністю характеристик економічного розвитку, що дозволяє ідентифікувати типові траєкторії зростання та формувати диференційовані управлінські рішення.

Подальший розвиток моделі передбачає інтеграцію додаткових соціально-економічних, екологічних та фінансових параметрів, підвищення її адаптивності до глобальних шоків та вдосконалення методології числових експериментів для перевірки у середньо- та довгостроковому горизонті. Використання моделі у поєднанні з сучасними методами машинного навчання може значно підвищити її прогностичну точність і практичну цінність для різних типів економік.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Smith, A. (1776). *An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations*.
<https://ota.bodleian.ox.ac.uk/repository/xmlui/handle/20.500.12024/2007>
2. Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94. <https://doi.org/10.2307/1884513>
3. Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320. <https://doi.org/10.2307/1926047>
4. Kuznets, S. (1960). Economic growth of small nations. In E. A. G. Robinson (Ed.), *Economic consequences of the size of nations* (pp. 14–32). Palgrave Macmillan.
https://doi.org/10.1007/978-1-349-15210-0_2
5. Romer, P. M. (1989). *Human capital and growth: Theory and evidence* (NBER Working Paper No. 3173). National Bureau of Economic Research.
<https://doi.org/10.3386/w3173>
6. Romer, P. M. (1989). *Endogenous technological change* (NBER Working Paper No. 3210). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w3210>
7. North, D. C. (1955). Location theory and regional economic growth. *Journal of Political Economy*, 63(3), 243–258. <https://doi.org/10.1086/257668>
8. World Bank Group. (2025). *World Bank Group: International development, poverty & sustainability*. <https://www.worldbank.org/en/home>
9. Ricardo, D. (1817). *On the principles of political economy and taxation*.
<https://www.econlib.org/library/Ricardo/ricP.html>
10. Malthus, T. R. (1798). *An essay on the principle of population*.
<https://www.econlib.org/library/Malthus/malPop.html>
11. Mill, J. S. (1848). *Principles of political economy*.
<https://www.econlib.org/library/Mill/mlP.html>
12. Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *The Economic Record*, 32(2), 334–361. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>
13. Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(152), 543–559. <https://doi.org/10.2307/2224098>

14. Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *The Review of Economic Studies*, 32(3), 233–240. <https://doi.org/10.2307/2295827>
15. Koopmans, T. C. (1963). On the concept of optimal economic growth. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University. <https://elischolar.library.yale.edu/cowles-discussion-paper-series/392>
16. Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1), 3–42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7)
17. Uzawa, H. (1965). Optimal technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*, 6(1), 18–31. <https://doi.org/10.2307/2525621>
18. Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (1995). *Technological diffusion, convergence, and growth* (NBER Working Paper No. 5151). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w5151>
19. Howitt, P. (1993). Money and growth revisited. In *Monetary theory and thought* (pp. 260–283). Palgrave Macmillan UK. https://doi.org/10.1007/978-1-349-12535-7_12
20. Aghion, P., & Howitt, P. (1992). A model of growth through creative destruction. *Econometrica*, 60(2), 323–351. <https://doi.org/10.2307/2951599>
21. Chang, H.-J. (2010). Institutions and economic development: Theory, policy and history. *Journal of Institutional Economics*, 7(4), 473–498. <https://doi.org/10.1017/s1744137410000378>
22. Nelson, R. R. (2001). Evolutionary perspectives on economic growth. In *Evolutionary economics: Program and scope* (pp. 165–194). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0648-4_5
23. Setterfield, M. (2011). Anticipations of the crisis: On the similarities between post-Keynesian economics and regulation theory. *Revue de la Régulation*, (10). <https://doi.org/10.4000/regulation.9366>
24. North, D. C. (1991). Institutions. *Journal of Economic Perspectives*, 5(1), 97–112. <https://doi.org/10.1257/jep.5.1.97>
25. Acemoglu, D., Johnson, S., & Robinson, J. A. (2001). The colonial origins of comparative development: An empirical investigation. *American Economic Review*, 91(5), 1369–1401. <https://doi.org/10.1257/aer.91.5.1369>

26. Schumpeter, J. A. (1934). *Theory of economic development: An inquiry into profits, capital, credit, interest and the business cycle*.
<https://cruel.org/books/hy/shortschumpeter/SchumpeterTheoryofEconDev.pdf>
27. Nelson, R. R., & Winter, S. G. (2002). Evolutionary theorizing in economics. *Journal of Economic Perspectives*, 16(2), 23–46. <https://doi.org/10.1257/0895330027247>
28. Rostow, E. V., Keynes, J. M., & Meade, J. E. (1938). The general theory of employment, interest and money. *The Yale Law Journal*, 47(3), 498–508.
<https://doi.org/10.2307/791960>
29. Kaldor, N. (1957). A model of economic growth. *The Economic Journal*, 67(268), 591–624. <https://doi.org/10.2307/2227704>
30. Pasinetti, L. L. (1962). Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth. *The Review of Economic Studies*, 29(4), 267–279.
<https://doi.org/10.2307/2296303>
31. Nordhaus, W. D. (1992). An optimal transition path for controlling greenhouse gases. *Science*, 258(5086), 1315–1317. <https://doi.org/10.1126/science.258.5086.1315>
32. Piketty, T., & Saez, E. (2006). The evolution of top incomes: A historical and international perspective. *American Economic Review*, 96(2), 200–205.
<https://doi.org/10.1257/000282806777212116>
33. Milanovic, B. (2014). The return of “patrimonial capitalism”: A review of Thomas Piketty’s *Capital in the Twenty-First Century*. *Journal of Economic Literature*, 52(2), 519–534. <http://dx.doi.org/10.1257/jel.52.2.519>
34. Guerrieri, V., Lorenzoni, G., Straub, L., & Werning, I. (2022). Macroeconomic implications of COVID-19: Can negative supply shocks cause demand shortages? *American Economic Review*, 112(5), 1437–1474. <https://doi.org/10.1257/aer.20201063>
35. Battiston, S., Mandel, A., Monasterolo, I., Schütze, F., & Visentin, G. (2017). A climate stress-test of the financial system. *Nature Climate Change*, 7(4), 283–288.
<https://doi.org/10.1038/nclimate3255>
36. Laghari, F., Ahmed, F., Memon, R. U. R., & Haluza, D. (2026). Natural resource rents and capital formation nexus: Empirical evidence on foreign direct investment as a moderator from the BRICS economies. *Sustainability*, 18(1), 547. <https://doi.org/10.3390/su18010547>

37. OECD. (2024). *OECD economic outlook, volume 2024 issue 1: An unfolding recovery*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/69a0c310-en>
38. OECD. (2024). *OECD economic outlook, volume 2024 issue 2: Resilience in uncertain times*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/d8814e8b-en>
39. Van der Ploeg, F., & Poelhekke, S. (2009). Volatility and the natural resource curse. *Oxford Economic Papers*, 61(4), 727–760. <https://doi.org/10.1093/oep/gpp027>
40. Kholoshyn, I., Mantulenko, S., Accola, S. J., Sherick, D., Uvaliev, T., & Vedmitska, V. (2021). Geography of agricultural exports from Ukraine. *E3S Web of Conferences*, 280, 11009. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128011009>
41. Cammeraat, E., Samek, L., & Squicciarini, M. (2021). The role of innovation and human capital for the productivity of industries. *OECD Science, Technology and Industry Policy Papers*, 103. <https://doi.org/10.1787/197c6ae9-en>
42. Brunello, G., & Wruuck, P. (2021). Skill shortages and skill mismatch in Europe: A review of the literature. *IZA Discussion Paper*, 12346. <https://ssrn.com/abstract=3390340>
43. Acemoglu, D., & Johnson, S. (2005). Unbundling institutions. *Journal of Political Economy*, 113(5), 949–995. <https://doi.org/10.1086/432166>
44. Blanchard, O., Dell’Ariccia, G., & Mauro, P. (2010). Rethinking macroeconomic policy. *Journal of Money, Credit and Banking*, 42(1), 199–215. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4616.2010.00334.x>
45. United Nations Development Programme. (2023). *Human development report 2023/2024*. <https://hdr.undp.org/content/human-development-report-2023-24>
46. World Economic Forum. (2019). *The global competitiveness report 2019*. https://www3.weforum.org/docs/WEF_TheGlobalCompetitivenessReport2019.pdf
47. Nelson, R. R., & Winter, S. G. (1982). *An evolutionary theory of economic change*. Harvard University Press. <https://www.hup.harvard.edu/books/9780674272286>
48. Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), 263–292. <https://doi.org/10.2307/1914185>
49. Carmichael, T., Collins, A. J., & Hadžikadić, M. (2019). *Complex adaptive systems*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-20309-2>

50. Beckerman, W., & Denison, E. F. (1962). The sources of economic growth in the United States and the alternatives before us. *The Economic Journal*, 72(288), 935–962. <https://doi.org/10.2307/2228363>
51. Jorgenson, D. W., & Griliches, Z. (1967). The explanation of productivity change. *The Review of Economic Studies*, 34(3), 249–283. <https://doi.org/10.2307/2296675>
52. International Monetary Fund. (2015). *Where are we headed? Perspectives on potential output* (World Economic Outlook, Chapter 3). <https://www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2015/01/index.htm>
53. Dieppe, A., Çelik, S. K., & Kindberg-Hanlon, G. (2021). Global productivity trends. In *Global productivity: Trends, drivers, and policies* (pp. 1–38). World Bank. https://doi.org/10.1596/978-1-4648-1608-6_ch1
54. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2021). *Education at a glance 2021*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/en/publications/education-at-a-glance-2021_b35a14e5-en.html
55. Samuelson, P. A. (1939). Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *The Review of Economics and Statistics*, 21(2), 75–78. <https://doi.org/10.2307/1927758>
56. Claessens, S., Kose, M. A., Laeven, L., & Valencia, F. (2013). Understanding financial crises: Causes, consequences, and policy responses. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2295199>
57. Bluhm, R., von Cramon-Taubadel, D., & Szirmai, A. (2014). Do weak institutions prolong crises? On the identification, characteristics, and duration of declines during economic slumps. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2393931>
58. Friedman, M. (1968). The role of monetary policy. *American Economic Review*, 58(1), 1–17. <https://www.aeaweb.org/aer/top20/58.1.1-17.pdf>
59. Minsky, H. P. (1988). *Stabilizing an unstable economy*. Yale University Press. <http://digamo.free.fr/minsky86.pdf>
60. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014). *All on board: Making inclusive growth happen*. OECD Publishing.

https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2015/05/all-on-board_g1g46adc/9789264218512-en.pdf

61. United Nations. (2015). *Transforming our world: The 2030 agenda for sustainable development*. <https://sdgs.un.org/2030agenda>

62. Cornell University, INSEAD, & World Intellectual Property Organization. (2023). *Global innovation index 2023*. World Intellectual Property Organization. <https://www.wipo.int/publications/en/series/index.jsp?id=129>

63. Demirgüç-Kunt, A., Klapper, L., Singer, D., Ansar, S., & Hess, J. (2017). The Global Findex Database 2017: Measuring financial inclusion and the fintech revolution. World Bank. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-1259-0>

64. Conrad, E., & Cassar, L. F. (2018). The Environmental Performance Index. In *Routledge handbook of sustainability indicators* (pp. 294–307). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315561103-19>

65. World Bank. (2011). *The changing wealth of nations: Measuring sustainable development in the new millennium*. World Bank. <https://documents.worldbank.org/en/publication/documents-reports/documentdetail/630181468339656734>

66. Linstone, H. A., & Turoff, M. (Eds.). (1975). *The Delphi method: Techniques and applications*. Addison-Wesley. https://www.foresight.pl/assets/downloads/publications/Turoff_Linstone.pdf

67. Laspeyres, E. (1981). Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 196(3), 218–238. <https://doi.org/10.1515/jbnst-1981-0303>

68. Paasche, H. (1874). *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 23(1), 1–... <https://doi.org/10.1515/jbnst-1874-0113>

69. Fisher, I. (1923). The making of index numbers. *Journal of the Royal Statistical Society*, 86(3), 424–451. <https://doi.org/10.2307/2341626>

70. Zellner, A., & Theil, H. (1962). Three-stage least squares: Simultaneous estimation of simultaneous equations. *Econometrica*, 30(1), 54–78. <https://doi.org/10.2307/1911287>

71. Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50(4), 1029–1054. <https://doi.org/10.2307/1912775>
72. Arellano, M., & Bond, S. (1991). Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *The Review of Economic Studies*, 58(2), 277–297. <https://doi.org/10.2307/2297968>
73. Bernanke, B. S., Boivin, J., & Elias, P. (2005). Measuring the effects of monetary policy: A factor-augmented vector autoregressive (FAVAR) approach. *The Quarterly Journal of Economics*, 120(1), 387–422. <https://doi.org/10.1162/0033553053327452>
74. Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
75. Aigner, D., Lovell, C. A. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21–37. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(77\)90052-5](https://doi.org/10.1016/0304-4076(77)90052-5)
76. Farrar, D. E., & Glauber, R. R. (1967). Multicollinearity in regression analysis: The problem revisited. *The Review of Economics and Statistics*, 49(1), 92–107. <https://doi.org/10.2307/1937887>
77. O'Brien, R. M. (2007). A caution regarding rules of thumb for variance inflation factors. *Quality & Quantity*, 41(5), 673–690. <https://doi.org/10.1007/s11135-006-9018-6>
78. Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24(6), 417–441. <https://doi.org/10.1037/h0071325>
79. Hoerl, A. E., & Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 55–67. <https://doi.org/10.1080/00401706.1970.10488634>
80. Tibshirani, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 58(1), 267–288. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x>

81. Goldfeld, S. M., & Quandt, R. E. (1965). Some tests for homoscedasticity. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310), 539–547. <https://doi.org/10.1080/01621459.1965.10480811>
82. Breusch, T. S., & Pagan, A. R. (1979). A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica*, 47(5), 1287–1294. <https://doi.org/10.2307/1911963>
83. White, H. (1980). A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4), 817–838. <https://doi.org/10.2307/1912934>
84. Aitken, A. C. (1936). On least squares and linear combination of observations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 55, 42–48. <https://doi.org/10.1017/s0370164600014346>
85. Durbin, J., & Watson, G. S. (1950). Testing for serial correlation in least squares regression. I. *Biometrika*, 37(3–4), 409–428. <https://doi.org/10.1093/biomet/37.3-4.409>
86. von Neumann, J. (1941). Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. *The Annals of Mathematical Statistics*, 12(4), 367–395. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177731677>
87. Breusch, T. S. (1978). Testing for autocorrelation in dynamic linear models. *Australian Economic Papers*, 17(31), 334–355. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8454.1978.tb00635.x>
88. Wilson, G. T. (2016). Time series analysis: Forecasting and control. *Journal of Time Series Analysis*, 37(5), 709–711. <https://doi.org/10.1111/jtsa.12194>
89. Koyck, L. M. (1954). *Distributed lags and investment analysis*. North-Holland. https://ia801404.us.archive.org/19/items/in.ernet.dli.2015.220824/2015.220824.Distributed-Lags_text.pdf
90. Pesaran, M. H., Shin, Y., & Smith, R. J. (2001). Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *Journal of Applied Econometrics*, 16(3), 289–326. <https://doi.org/10.1002/jae.616>
91. Newey, W. K., & West, K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708. <https://doi.org/10.2307/1913610>

92. Cochrane, D., & Orcutt, G. H. (1949). Application of least squares regression to relationships containing autocorrelated error terms. *Journal of the American Statistical Association*, 44(245), 32–61. <https://doi.org/10.2307/2280349>
93. Hildreth, C., & Lu, J. Y. (1960). Demand relations with autocorrelated residuals. *Technical Bulletin*, 276. Michigan State University.
94. Driscoll, J. C., & Kraay, A. C. (1998). Consistent covariance matrix estimation with spatially dependent panel data. *The Review of Economics and Statistics*, 80(4), 549–560. <https://doi.org/10.1162/003465398557825>
95. Cobb, C. W., & Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *American Economic Review*, 18(1), 139–165. <https://www.aeaweb.org/aer/top20/18.1.139-165.pdf>
96. Leontief, W. (1941). *The structure of American economy, 1919–1929: An empirical application of equilibrium analysis*. Harvard University Press.
97. Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S., & Solow, R. M. (1961). Capital–labor substitution and economic efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, 43(3), 225–250. <https://doi.org/10.2307/1927286>
98. Harrod, R. F. (1939). An essay in dynamic theory. *The Economic Journal*, 49(193), 14–33. <https://doi.org/10.2307/2225181>
99. Domar, E. D. (1946). Capital expansion, rate of growth, and employment. *Econometrica*, 14(2), 137–147. <https://doi.org/10.2307/1905364>
100. Diamond, P. A. (1964). National debt in a neoclassical growth model. *The American Economic Review*, 55(5), 1126–1150. <https://www.aeaweb.org/aer/top20/55.5.1126-1150.pdf>
101. Samuelson, P. A. (1975). Optimum social security in a life-cycle growth model. *International Economic Review*, 16(3), 539–544. <https://doi.org/10.2307/2525994>
102. Mankiw, N. G., Romer, D., & Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2), 407–437. <https://doi.org/10.2307/2118477>
103. Arrow, K. J. (1962). The economic implications of learning by doing. *The Review of Economic Studies*, 29(3), 155–173. <https://doi.org/10.2307/2295952>

104. Romer, P. M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94(5), 1002–1037. <https://doi.org/10.1086/261420>
105. Rebelo, S. (1991). Long-run policy analysis and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 99(3), 500–521. <https://doi.org/10.1086/261764>
106. Dixit, A. K., & Stiglitz, J. E. (2001). Monopolistic competition and optimum product diversity. In *The monopolistic competition revolution in retrospect* (pp. 70–88). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511492273.004>
107. Kolyada, Y., Poznyak, S., Ramskyi, A., & Shevchenko, S. (2024). Adaptation applying of economic growth theoretical models. *CEUR Workshop Proceedings*, 22–35. <https://ceur-ws.org/Vol-3665/paper3.pdf>
108. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2020). Forecasting the potential of the economic system on the basis of the exogenous growth model. In *Integration of traditional and innovation processes of development of modern science*, 138–155. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-021-6-20>
109. Poznyak, S. P., & Kolyada, Y. V. (2021). Tryssektorna model potentsialu ekonomichnoi evoliutsii. In *Proceedings of the II International Student Scientific Conference: Modern aspects and perspectives of science development*, 77–80. <https://doi.org/10.36074/liga-inter-03.12.2021>
110. Poznyak, S. P., & Kolyada, Y. V. (2023). Aprobatsiia ortodoksalnykh modelei makroekonomichnoho zrostantia. In *Modern aspects of science XXX*, 199–231. <http://perspectives.pp.ua/public/site/mono/mono-30.pdf>
111. World Bank. (2023). *World development indicators (WDI)*. <https://data.worldbank.org/>
112. International Monetary Fund. (2023). *International financial statistics (IFS)*. <https://www.imf.org/en/data>
113. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023). *OECD.Stat — economic and social indicators*. <https://data-explorer.oecd.org/>
114. United Nations. (2023). *UN data: A world of information*. <https://data.un.org/>

115. Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models* (11th ed.). Elsevier.
<https://essaywritinglebanon.com/wp-content/uploads/2021/05/introduction-to-prob-models-11th-edition.pdf>
116. Metropolis, N., & Ulam, S. (2007). The Monte Carlo method. In *Quantum Monte Carlo* (pp. 2–19). Oxford University Press.
<https://doi.org/10.1093/oso/9780195310108.003.0002>
117. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
118. Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis* (3rd ed.). CRC Press.
<https://sites.stat.columbia.edu/gelman/book/BDA3.pdf>
119. Kitchin, J. (1923). Cycles and trends in economic factors. *The Review of Economics and Statistics*, 5(1), 10–16. <https://doi.org/10.2307/1927031>
120. Juglar, C. (1893). *A brief history of panics and their periodical occurrence in the United States*. T. Y. Crowell.
https://fraser.stlouisfed.org/files/docs/publications/books/jugular_briefhistoryofpanicsandtheirperil.pdf
121. Kondratieff, N. D., & Stolper, W. F. (1935). The long waves in economic life. *The Review of Economics and Statistics*, 17(6), 105–115. <https://doi.org/10.2307/1928486>
122. Holt, C. C. (1957). Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted averages. Carnegie Institute of Technology.
123. Winters, P. R. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, 6(3), 324–342. <https://doi.org/10.1287/mnsc.6.3.324>
124. Theil, H., & Wage, S. (1964). Some observations on adaptive forecasting. *Management Science*, 10(2), 198–206. <https://doi.org/10.1287/mnsc.10.2.198>
125. Jolliffe, I. (2002). *Principal component analysis* (2nd ed.). Springer.
<https://doi.org/10.1007/b98835>
126. DeAngelis, G. C., Ohzawa, I., & Freeman, R. D. (1995). Receptive-field dynamics in the central visual pathways. *Trends in Neurosciences*, 18(10), 451–458.
[https://doi.org/10.1016/0166-2236\(95\)94496-R](https://doi.org/10.1016/0166-2236(95)94496-R)

127. Bingham, E., & Mannila, H. (2001). Random projection in dimensionality reduction: Applications to image and text data. In *Proceedings of the Seventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 245–250). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/502512.502546>
128. Hyvärinen, A. (2013). Independent component analysis: Recent advances. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 371(1984), 20110534. <https://doi.org/10.1098/rsta.2011.0534>
129. Tenenbaum, J. B., de Silva, V., & Langford, J. C. (2000). A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290(5500), 2319–2323. <https://doi.org/10.1126/science.290.5500.2319>
130. Mead, A. (1992). Review of the development of multidimensional scaling methods. *The Statistician*, 41(1), 27–39. <https://doi.org/10.2307/2348634>
131. Roweis, S. T., & Saul, L. K. (2000). Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding. *Science*, 290(5500), 2323–2326. <https://doi.org/10.1126/science.290.5500.2323>
132. Linderman, G. C., & Steinerberger, S. (2017). Clustering with t-SNE, provably. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.02582>
133. Kriegel, H.-P., Schubert, E., & Zimek, A. (2017). The (black) art of runtime evaluation: Are we comparing algorithms or implementations? *Knowledge and Information Systems*, 52(2), 341–378. <https://doi.org/10.1007/s10115-016-1004-2>
134. Zare, H., Shooshtari, P., Gupta, A., & Brinkman, R. R. (2010). Data reduction for spectral clustering to analyze high-throughput flow cytometry data. *BMC Bioinformatics*, 11, Article 403. <https://doi.org/10.1186/1471-2105-11-403>
135. Ward, J. H. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, 58(301), 236–244. <https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500845>
136. Zhang, T., Ramakrishnan, R., & Livny, M. (1996). BIRCH: An efficient data clustering method for very large databases. *ACM SIGMOD Record*, 25(2), 103–114. <https://doi.org/10.1145/233269.233324>

137. Nielsen, F. (2016). Hierarchical clustering. In *Introduction to HPC with MPI for data science* (pp. 195–211). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21903-5_8
138. Reynolds, D. A., & Rose, R. C. (1995). Robust text-independent speaker identification using Gaussian mixture speaker models. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 3(1), 72–83. <https://doi.org/10.1109/89.365379>
139. Frey, B. J., & Dueck, D. (2007). Clustering by passing messages between data points. *Science*, 315(5814), 972–976. <https://doi.org/10.1126/science.1136800>
140. Cheng, Y. (1995). Mean shift, mode seeking, and clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(8), 790–799. <https://doi.org/10.1109/34.400568>
141. Ester, M., Kriegel, H.-P., Sander, J., & Xu, X. (1996). A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 226–231). AAAI. <https://aaai.org/papers/kdd96-037-a-density-based-algorithm-for-discovering-clusters-in-large-spatial-databases-with-noise/>
142. Campello, R. J. G. B., Moulavi, D., Zimek, A., & Sander, J. (2015). Hierarchical density estimates for data clustering, visualization, and outlier detection. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, 10(1), Article 5. <https://doi.org/10.1145/2733381>
143. Ankerst, M., Breunig, M. M., Kriegel, H.-P., & Sander, J. (1999). OPTICS: Ordering points to identify the clustering structure. *ACM SIGMOD Record*, 28(2), 49–60. <https://doi.org/10.1145/304181.304187>
144. Davies, D. L., & Bouldin, D. W. (1979). A cluster separation measure. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-1(2), 224–227. <https://doi.org/10.1109/tpami.1979.4766909>
145. Calinski, T., & Harabasz, J. (1974). A dendrite method for cluster analysis. *Communications in Statistics*, 3(1), 1–27. <https://doi.org/10.1080/03610927408827101>
146. Rousseeuw, P. J. (1987). Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 20, 53–65. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(87\)90125-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7)

147. Scikit-learn. (2023). *Clustering*. <https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html>
148. Martínez, L. R. (2022). How much should we trust the dictator's GDP growth estimates? *Journal of Political Economy*, 130(10), 2731–2769. <https://doi.org/10.1086/720458>
149. Mawuli Gomado, K. (2024). Impact of uncertainty on economic growth: The role of pro-market institutions in developing countries. *Kyklos*. <https://doi.org/10.1111/kykl.12408>
150. Islam, H. (2025). Dynamic effects of uncertainty, risks, R&D, and innovation on global economic growth. *Innovation and Green Development*, 4(2), 100225. <https://doi.org/10.1016/j.igd.2025.100225>
151. Bannigidadmth, D., Ridhwan, M., & Indawan, F. (2023). Global uncertainty and economic growth: Evidence from pandemic periods. *Emerging Markets Finance and Trade*, 1–13. <https://doi.org/10.1080/1540496X.2023.2213377>
152. Buthelezi, E. M. (2023). Dynamics of macroeconomic uncertainty on economic growth in the presence of fiscal consolidation in South Africa from 1994 to 2022. *Economies*, 11(4), 119. <https://doi.org/10.3390/economies11040119>
153. Hansika, S., Navamohan, P., Gamage, D., Madurawala, R., & Jayathilaka, R. (2025). Economic uncertainty: A worldwide concern, a causal and cointegrating analysis among high uncertainty countries. *Humanities and Social Sciences Communications*, 12(1). <https://doi.org/10.1057/s41599-025-05762-3>
154. Aydin, H. İ., Bălăcescu, A., & Căruntu, G. A. (2025). The effects of geopolitical uncertainties on growth: Econometric analysis on selected Turkic republican countries and neighboring states. *Economies*, 13(3), 83. <https://doi.org/10.3390/economies13030083>
155. Liu, P., Peng, Y., Shi, Y., & Yang, J. (2021). Financial structures, political risk and economic growth. *The European Journal of Finance*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/1351847X.2021.1879888>
156. Meyer, D. F., & Mothibi, L. (2021). The effect of risk rating agencies' decisions on economic growth and investment in a developing country: The case of South Africa.

Journal of Risk and Financial Management, 14(7), 288.
<https://doi.org/10.3390/jrfm14070288>

157. Suarez, J. (2022). Growth-at-risk and macroprudential policy design. *Journal of Financial Stability*, Article 101008. <https://doi.org/10.1016/j.jfs.2022.101008>

158. Tawiah, V., & Alessa, N. (2024). Even climate change is not fair: The impact of climate change on economic outcomes. *International Journal of Climate Change Strategies and Management*. <https://doi.org/10.1108/IJCCSM-01-2024-0008>

159. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2023). Comparative analysis of the effectiveness of dimensionality reduction algorithms and clustering methods on the problem of modelling economic growth. In *Neuro-fuzzy modeling techniques in economics* (Vol. 12, pp. 67–110). <https://doi.org/10.33111/nfmte.2023.067>

160. Kolyada, Y., Poznyak, S., Babii, N., & Zhurakovskiy, B. (2025). Adaptive model of economic development with an open market. *CEUR Workshop Proceedings*, 28–50. <https://ceur-ws.org/Vol-4029/paper3.pdf>

161. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2024). Adaptivna model ekonomichnoho zrostannia dlia vidkrytoi ekonomiky. *Natsionalni interesy Ukrainy*, 2(2), 267–286. [https://doi.org/10.52058/3041-1793-2024-2\(2\)-267-286](https://doi.org/10.52058/3041-1793-2024-2(2)-267-286)

162. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2025). Economic growth risks based on dynamic models. *Business Inform*, 7, 131–148. <https://doi.org/10.32983/2222-4459-2025-7-131-148>

163. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2025). Interval analysis of economic growth dynamics. *Grail of Science*, 57, 196–207. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.17.10.2025.019>

164. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2025). Pokooradynatnyi ekonomichniy ryzyk na osnovi modelei ekonomichnoho zrostannia. *Ekonomichni horyzonty*, 4(33), 57–84. [https://doi.org/10.31499/2616-5236.4\(33\).2025.342888](https://doi.org/10.31499/2616-5236.4(33).2025.342888)

165. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2024). Scalar parameters behavior dynamics of economic growth model. In *Modeling and forecasting of economic processes: Proceedings of the 18th International Scientific and Practical Conference* (pp. 105–112). National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. https://ecocyber.fmm.kpi.ua/wp-content/uploads/2025/05/mpep_XVIII_2024.pdf

166. Pozniak, S., & Koliada, Y. (2024). Adaptyvna model zrostannia vidkrytoi ekonomiky. In *Teoriia modernizatsii v konteksti suchasnoi svitovoi nauky: Proceedings of the III International Scientific Conference* (pp. 87–92). <https://doi.org/10.62731/mcnd-02.08.2024.001>
167. Hu, Q., Lei, X., & Zhao, B. (2020). Demographic changes and economic growth: Impact and mechanisms. *China Economic Journal*, 14(3), 223–242. <https://doi.org/10.1080/17538963.2020.1865647>
168. Gao, W., Chen, Y., Xu, S., Lyulyov, O., & Pimonenko, T. (2023). The role of population aging in high-quality economic development: Mediating role of technological innovation. *SAGE Open*, 13(4). <https://doi.org/10.1177/21582440231202385>
169. Thanh Trong, N., Thi Dong, N., & Thi Ly, P. (2024). Population aging and economic growth: Evidence from ASEAN countries. *Cogent Business & Management*, 11(1). <https://doi.org/10.1080/23311975.2023.2298055>
170. Temsumrit, N. (2023). Can aging population affect economic growth through the channel of government spending? *Heliyon*, 9(9), e19521. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e19521>
171. Liu, Y., Chen, L., Lv, L., & Failler, P. (2023). The impact of population aging on economic growth: A case study on China. *AIMS Mathematics*, 8(5), 10468–10485. <https://doi.org/10.3934/math.2023531>
172. Brida, J. G., Alvarez, E., Cayssials, G., & Mednik, M. (2024). How does population growth affect economic growth and vice versa? An empirical analysis. *Review of Economics and Political Science*, 9(3), 265–297. <https://doi.org/10.1108/REPS-11-2022-0093>
173. Oyedepo, E. O., Obayelu, A. E., & Owuru, J. E. (2023). Effects of population dynamics on economic growth among the world's most populous countries. *AgEcon Search*. <https://doi.org/10.22004/AG.ECON.339640>
174. Zélity, B. (2025). Estimating the growth effect of the demographic dividend. *Macroeconomic Dynamics*, 29. <https://doi.org/10.1017/S1365100525100394>

175. Srdelić, L., & Dávila-Fernández, M. J. (2025). Demographic transition and economic growth: Insights from the dynamic trade-multiplier. *Cambridge Journal of Economics*, 49(4), 755–795. <https://doi.org/10.1093/cje/beaf014>
176. Sugiharti, L., Akter, S., Das, M. K., Pattak, D. C., Esquivias, M. A., & Akter, S. (2025). Population dynamics, economic growth, energy mix, and environmental pollution in ASEAN: Exploring the role of renewable, nuclear, and nonrenewable energy using the CCEMG approach. *Environmental and Sustainability Indicators*, 26, 100598. <https://doi.org/10.1016/j.indic.2025.100598>
177. Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10, 113–121. https://neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/verhulst_-_law_of_population.pdf
178. Willner, J., & Grönblom, S. (2025). Innovation and industry growth under private and public ownership: Non-creative destruction versus welfare maximisation. *Structural Change and Economic Dynamics*, 75, 513–525. <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2025.08.010>
179. Rajic, I. (2024). Oligopolistic power and regional development disparities: A conceptual framework and implications for the UK Levelling Up agenda. *Contemporary Social Science*, 19(4), 424–446. <https://doi.org/10.1080/21582041.2024.2438242>
180. Singh, S. (2024). Investments in innovations and market structure: A semi-parametric approach. *South Asia Economic Journal*, 25(1), 26–44. <https://doi.org/10.1177/13915614241233888>
181. Zhou, Z. (2024). Market competition and monopoly power: Insights from oligopoly structure. *Highlights in Business, Economics and Management*, 24, 188–195. <https://doi.org/10.54097/vvg6pr04>
182. Wang, Y., & Li, S. (2021). Market concentration, market power, and firm growth of construction companies. *Advances in Civil Engineering*, 2021, Article 9990846. <https://doi.org/10.1155/2021/9990846>
183. Kumar, R. R., & Stauvermann, P. J. (2021). Revisited: Monopoly and long-run capital accumulation in a two-sector overlapping generations model. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(7), 304. <https://doi.org/10.3390/jrfm14070304>

184. Chang, C., & Lai, C. (2021). Optimal fiscal policies and market structures with monopolistic competition. *International Tax and Public Finance*, 28(6), 1385–1411. <https://doi.org/10.1007/s10797-020-09645-y>
185. Branger, N., Flacke, R. M., & Gräber, N. (2020). Monopoly power in the oil market and the macroeconomy. *Energy Economics*, 85, 104597. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2019.104597>
186. Ahn, J., Duval, R., & Sever, C. (2020). Macroeconomic policy, product market competition, and growth. *IMF Working Papers*, 20(25). <https://doi.org/10.5089/9781513528571.001>
187. Thakoor, V. (2020). Market power, growth, and inclusion. *IMF Working Papers*, 20(206). <https://doi.org/10.5089/9781513557731.001>
188. Etim, E., & Daramola, O. (2020). The informal sector and economic growth of South Africa and Nigeria: A comparative systematic review. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 6(4), 134. <https://doi.org/10.3390/joitmc6040134>
189. Khuong, N. V., Shabbir, M. S., Sial, M. S., & Khanh, T. H. T. (2020). Does informal economy impede economic growth? Evidence from an emerging economy. *Journal of Sustainable Finance & Investment*, 11(2), 103–122. <https://doi.org/10.1080/20430795.2020.1711501>
190. Sultana, N., Rahman, M. M., & Khanam, R. (2022). Informal sector employment and economic growth: Evidence from developing countries in SDG perspective. *Sustainability*, 14(19), 11989. <https://doi.org/10.3390/su141911989>
191. Hallunovi, A., & Vangjel, R. (2023). Shadow economy and its impact on economic growth. *Corporate and Business Strategy Review*, 4(4), 186–194. <https://doi.org/10.22495/cbsrv4i4art17>
192. Bermúdez, P., Verástegui, L., Nolzco, J. L., & Urbina, D. A. (2024). Effects of corruption and informality on economic growth through productivity. *Economies*, 12(10), 268. <https://doi.org/10.3390/economies12100268>
193. Waqar, A., Babar, H., Khalid, M. W., Lambarraa-Lehnhardt, F., & Umair, M. (2024). Shadow economy and economic growth nexus in developing countries: What is the

role of financial inclusion? *Preprints (Springer Nature)*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-5277155/v1>

194. Fu, J., Ahmad, W., Hussain, B., Khalid, M. W., Lambarraa-Lehnhardt, F., & Umair, M. (2025). Shadow economy, financial inclusion and economic growth nexus: Evidence from developing countries. *Humanities and Social Sciences Communications*, 12(1). <https://doi.org/10.1057/s41599-025-05995-2>

195. Torres-Favela, M., & Luna, E. M. (2025). The role of informality in economic growth, employment, and inflation during the COVID-19 crisis. *Latin American Journal of Central Banking*, 6(1), 100150. <https://doi.org/10.1016/j.latecb.2024.100150>

196. Gharleghi, B., & Jahanshahi, A. A. (2020). The shadow economy and sustainable development: The role of financial development. *Journal of Public Affairs*, 20(3). <https://doi.org/10.1002/pa.2099>

197. Dell'Anno, R., Davidescu, A. A., & Manta, E. M. (2024). The role of the informal economy in achieving the Sustainable Development Goals in Europe. *Amfiteatru Economic*, 26(18), 1108. <https://doi.org/10.24818/EA/2024/S18/1108>

198. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2024). The role of investment lag in economic system development trajectory. *Grail of Science*, 38, 181–184. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.12.04.2024.030>

199. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2024). Investment lag and the trajectory of evolution of a nonlinear economy. *Grail of Science*, 42, 93–104. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.02.08.2024.012>

200. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2024). Virtual scenarios of demographic impact on economic growth. *Ekonomichnyi visnyk Donbasu*, 4(78), 173–182. [https://doi.org/10.12958/1817-3772-2024-4\(78\)-173-182](https://doi.org/10.12958/1817-3772-2024-4(78)-173-182)

201. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2025). Market typology and economic growth dynamics. *Herald of Economic Sciences of Ukraine*, 1(48), 140–154. [https://doi.org/10.37405/1729-7206.2025.1\(48\).140-152](https://doi.org/10.37405/1729-7206.2025.1(48).140-152)

202. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2025). The conceptual role of the shadow economy in economic growth. *Economy and Society*, 73. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-73-7>

203. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2025). Improving the generalization ability of economic growth models. *Ukrainian Journal of Applied Economics and Technology*, 2025(2), 55–63. <https://doi.org/10.36887/2415-8453-2025-2-9>
204. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2025). Market typology and dynamics of economic growth. *The Problems of Economy*, 3(65), 321–343. <https://doi.org/10.32983/2222-0712-2025-3-321-343>
205. Koliada, Y., & Pozniak, S. (2025). Market typology in economic growth dynamics modelling. In *Digital Economy: Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference* (pp. 749–753). <https://doi.org/10.33111/978-966-926-559-3>
206. Libanova, E. M. (2014). *Human development in Ukraine: Historical dimension of transformation of state social policy*. Institute for Demography and Social Studies of the National Academy of Sciences of Ukraine.
207. Geiets, V. M. (2015). *Structural transformations in the global economy: Challenges for Ukraine*. Institute for Economics and Forecasting of the National Academy of Sciences of Ukraine.
208. Halchynskyi, A. (2012). Economic development: Methodology of a renewed paradigm. *Economy of Ukraine*, (5), 4–17.
209. Lukianenko, D., Lukianenko, L., & Matvychuk, A. (2024). Revival of Ukraine in the paradigm of the intellectual economy: A new mission of universities. *International Economic Policy*, 2(41), 21–32, <https://doi.org/10.33111/iep.eng.2024.41.02>
210. Ivashchenko, K., & Matviychuk, A. (2023). Cluster Modelling of Labour Resources Employment in the Context of Globalisation. *International Economic Policy*, (39), 164–192. <https://doi.org/10.33111/iep.eng.2023.39.08>
211. Danylyshyn, B. M. (2008). *The regional economy of Ukraine: Problems and development prospects*. Council for the Study of Productive Forces of Ukraine of the National Academy of Sciences of Ukraine.
212. Kmytiuk, T., Shabelian, M. (2024). *Analysis and forecasting the level of poverty in Ukraine*. *Efektivna ekonomika*, 8, Article 87. <https://doi.org/10.32702/2307-2105.2024.8.87>

213. Kachan, O., Kmytiuk, T., & Datsenko, N. (2025). Econometric modeling of economic growth factors based on panel data. *Modeling the Development of the Economic Systems*, 4, 430–438. <https://doi.org/10.31891/mdes/2025-18-54>
214. Chaliuk, Y. (2025). Digitalization as a socio-economic phenomenon and a driver of sustainable development. *Sustainable Development of Economy*, (4(55)), 122–128. <https://doi.org/10.32782/2308-1988/2025-55-17>
215. Hurianova, L. S., Pushkar, O. I., Panasenko, O. V., & Orlova, A. O. (2025). Modeling market dynamics in the digital economy. *Business Inform*, 2(565), 284–294. <https://doi.org/10.32983/2222-4459-2025-2-284-294>
216. Hurianova, L. S., Kahanovskyi, O. S., Serhiienko, O. A., & Myronenko, A. Yu. (2023). Modeling the level of socio-economic development of regions based on proxy variables. *Business Inform*, (11(550)), 187–194. <https://doi.org/10.32983/2222-4459-2023-11-187-194>
217. Pashchenko, M., & Zomchak, L. (2025). Foreign economic activity and investment potential of Ukrainian regions: Identifying a stable core and territorial asymmetry with multivariate cluster analysis. *Customs Scientific Journal*, (2), 25–32. <https://doi.org/10.32782/2308-6971/2025.2.3>

Додаток А

Програмна реалізація односекторної адаптивної моделі економічного зростання для відкритої економіки

```

rm(list=ls())

#завантаження необхідних бібліотек
library(dplyr)
library(data.table)
library(readxl)
library(writexl)
library(purrr)

#-----
# Створення функцій для обчислення метрик якості
#-----

# Функція для створення tibble з реальних і модельних даних
prepare_tibble <- function(real_data, model_data) {
  tibble(
    real_data = as.numeric(real_data),
    model_data = as.numeric(model_data)
  )
}

#коефіцієнт R
calculation_determination <- function(real_data, model_data) {
  df <- prepare_tibble(real_data, model_data) %>%
    mutate(
      sq_error = (real_data - model_data)^2,
      avg_sq_error = (real_data - mean(real_data))^2
    )
  1 - (sum(df$sq_error) / sum(df$avg_sq_error))
}

#середня абсолютна помилка (MAE)
calculation_mae <- function(real_data, model_data) {
  df <- prepare_tibble(real_data, model_data) %>%
    mutate(abs_error = abs(real_data - model_data))
  mean(df$abs_error)
}

#середня відносна помилка (MRE)
calculation_mre <- function(real_data, model_data) {
  df <- prepare_tibble(real_data, model_data) %>%
    mutate(
      abs_error = abs(real_data - model_data),
      abs_real = abs(real_data),
      mre = abs_error / abs_real
    )
}

```

```

    mean(df$mre, na.rm = TRUE)
}
#середній квадрат помилки (MSE)
calculation_mse <- function(real_data, model_data) {
  df <- prepare_tibble(real_data, model_data) %>%
    mutate(sq_error = (real_data - model_data)^2)
  mean(df$sq_error)
}
#середньоквадратична помилка (RMSE)
calculation_rmse <- function(real_data, model_data) {
  sqrt(calculation_mse(real_data, model_data))
}
#лог-середній квадрат помилки (MSLE)
calculation_msle <- function(real_data, model_data) {
  df <- prepare_tibble(real_data, model_data) %>%
    mutate(log_sq_error = (log1p(abs(real_data)) - log1p(abs(model_data)))^2)
  mean(df$log_sq_error)
}
#лог-середньоквадратична помилка (RMSLE)
calculation_rmsle <- function(real_data, model_data) {
  sqrt(calculation_msle(real_data, model_data))
}

#-----
# Функція тестування наявності усіх необхідних колонок з даними
#-----
check_df_columns <- function(df) {
  required_columns <- c(
    "year", "amortization", "amortization_private", "amortization_public",
    "capital", "capital_private", "capital_public",
    "consumption_full", "consumption_inner",
    "export", "gdp", "human_capital", "import", "investment",
    "investment_inner", "investment_outer_in", "investment_outer_out",
    "labour", "population", "saved_resources",
    "savings_full", "savings_inner", "taxation"
  )
  missing_columns <- setdiff(required_columns, colnames(df))
  if (length(missing_columns) == 0) {
    message(" Усі необхідні колонки присутні у df")
    return(TRUE)
  } else {
    # Якщо щось відсутнє – попередження
    warning(paste0(
      " Відсутні наступні колонки у df: ",
      paste(missing_columns, collapse = ", ")
    ))
    return(FALSE)
  }
}

#-----

```

```

# Побудова виробничої функції
#-----
estimate_production_function <- function(df) {
  df <- df %>%
    mutate(
      value_y = gdp / labour,
      value_k_priv = capital_private / labour,
      value_k_gov = capital_public / labour,
      value_h = human_capital / labour,
      value_ln_y = log(value_y),
      value_ln_k_priv = log(value_k_priv),
      value_ln_k_gov = log(value_k_gov),
      value_ln_h = log(value_h)
    )

  model <- lm(value_ln_y ~ value_ln_k_priv + value_ln_h + value_ln_k_gov, data = df)
  coefs <- coef(model)

  coef_A <- exp(ifelse(is.na(coefs[1]), 0, coefs[1]))
  coef_alpha <- ifelse(is.na(coefs[2]), 0, coefs[2])
  coef_beta <- ifelse(is.na(coefs[3]), 0, coefs[3])
  coef_gamma <- ifelse(is.na(coefs[4]), 0, coefs[4])
  coef_epsilon <- 1 - coef_alpha - coef_beta - coef_gamma

  list(df = df, A = coef_A, alpha = coef_alpha, beta = coef_beta, gamma = coef_gamma,
  eps = coef_epsilon)
}

#-----
# Модель інноваційного сектору
#-----
estimate_innovation_function <- function(df) {
  j_last <- nrow(df)
  df$value_h_rising <- c(diff(df$human_capital), 0) / df$labour
  df$value_ln_h_rising <- log(df$value_h_rising + 1e-9) # уникаємо log(0)

  model <- lm(value_ln_h_rising ~ value_ln_k_priv + value_ln_k_gov, data = df)
  coefs <- coef(model)

  coef_Ah <- exp(ifelse(is.na(coefs[1]), 0, coefs[1]))
  coef_alpha_h <- ifelse(is.na(coefs[2]), 0, coefs[2])
  coef_beta_h <- ifelse(is.na(coefs[3]), 0, coefs[3])
  coef_gamma_h <- 1 - coef_alpha_h - coef_beta_h

  list(df = df, Ah = coef_Ah, alpha_h = coef_alpha_h, beta_h = coef_beta_h, gamma_h =
  coef_gamma_h)
}

#-----
# Розрахунок реальних та модельних похідних
#-----

```

```

calculate_derivatives <- function(df, coefs, coefs_h) {
  j_last <- nrow(df)

  df <- df %>%
    mutate(
      value_m = saved_resources / labour,
      value_g = taxation / labour,
      value_z = capital / labour,
      value_i_inner = investment_inner / labour,
      value_i_outer_in = investment_outer_in / labour,
      value_i_outer_out = investment_outer_out / labour,
      value_k_priv = capital_private / labour,
      value_k_gov = capital_public / labour,
      value_h = human_capital / labour
    )

  coef_n <- ((df$labour[j_last] - df$labour[1]) / j_last) / mean(df$labour)
  coef_s <- mean(df$savings_full) / mean(df$gdp)
  coef_d_priv <- -mean(df$amortization_private) / mean(df$capital_private)
  coef_d_gov <- -mean(df$amortization_public) / mean(df$capital_public)

  df <- df %>%
    mutate(
      real_dk_dt = c(diff(value_k_priv), 0),
      real_dm_dt = c(diff(value_m), 0),
      real_dh_dt = c(diff(value_h), 0),
      real_dr_dt = c(diff(value_k_gov), 0),
      model_dk_dt = value_i_inner + value_i_outer_in - (coef_n + coef_d_priv) *
value_k_priv,
      model_dm_dt = coef_s * coefs$A * (value_k_priv^coefs$alpha) *
(value_h^coefs$beta) * (value_k_gov^coefs$gamma)
      - value_g - (value_i_inner + value_i_outer_out) - coef_n * value_m + value_z,
      model_dh_dt = coefs_h$Ah * (value_k_priv^coefs_h$alpha_h) *
(value_k_gov^coefs_h$beta_h) - coef_n * value_h,
      model_dr_dt = value_g - (coef_n + coef_d_gov) * value_k_gov
    )

  return(df)
}

#-----
# Основна функція моделювання
#-----
run_modeling <- function(df) {

  if (!check_processing_columns(df)) {
    stop(" Зупинка виконання: у вхідних даних відсутні необхідні колонки для
моделювання.")
  }

  coefs <- estimate_production_function(df)

```

```

coefs_h <- estimate_innovation_function(coefs$df)
processed <- calculate_derivatives(coefs_h$df, coefs, coefs_h)

return(processed)
}

#-----
# Приклад ініціалізації програми
#-----

#шлях до директорії та список усіх файлів з даними
data_path <- "C:/Users/username/Desktop/data/"
file_names <- c(
  "data_amortization",
  "data_amortization_private",
  "data_amortization_public",
  "data_capital",
  "data_capital_private",
  "data_capital_public",
  "data_consumption_full",
  "data_consumption_inner",
  "data_export",
  "data_gdp",
  "data_human_capital",
  "data_import",
  "data_investment",
  "data_investment_inner",
  "data_investment_outer_in",
  "data_investment_outer_out",
  "data_labour",
  "data_population",
  "data_saved_resources",
  "data_savings_full",
  "data_savings_inner",
  "data_taxation"
)

#завантаження і попередня обробка файлів
load_data_file <- function(file_name) {
  read_excel(
    paste0(data_path, file_name, ".xlsx"),
    sheet = "Sheet1"
  ) %>%
  as_tibble() %>%
  mutate(across(3:last_col(), as.numeric))
}
data_list <- map(file_names, ~ load_data_file(.x)) %>%
  set_names(file_names)

#створення об'єднаної таблиці з даними
build_df <- function(data_list) {

```

```

vars <- c(
  "amortization", "amortization_private", "amortization_public",
  "capital", "capital_private", "capital_public",
  "consumption_full", "consumption_inner",
  "export", "gdp", "human_capital", "import",
  "investment", "investment_inner", "investment_outer_in", "investment_outer_out",
  "labour", "population", "saved_resources",
  "savings_full", "savings_inner", "taxation"
)

missing_vars <- setdiff(vars, names(data_list))
if (length(missing_vars) > 0) {
  stop(paste(" Відсутні таблиці у data_list:", paste(missing_vars, collapse = ",
"))))
}

completeness <- sapply(data_list[vars], function(df) {
  sum(!is.na(as.matrix(df[, 3:ncol(df)])))
})
base_var <- names(which.max(completeness))
message(paste0(" Використано базовий датасет: ", base_var))
base_df <- data_list[[base_var]]

long_tables <- lapply(vars, function(v) {
  df <- data_list[[v]]
  id_cols <- intersect(c("country", "iso"), colnames(df))
  df_long <- df %>%
    pivot_longer(cols = setdiff(colnames(df), id_cols),
                  names_to = "year",
                  values_to = v)
  if ("country" %in% id_cols) df_long <- df_long %>% relocate(country)
  if ("iso" %in% id_cols) df_long <- df_long %>% relocate(iso)
  return(df_long)
}) %>%
  set_names(vars)

base_long <- long_tables[[base_var]]
join_by <- intersect(c("year", "country"), colnames(base_long))
df <- reduce(long_tables, left_join, by = join_by)
df <- df %>%
  mutate(year = as.numeric(gsub("\\D", "", year))) %>%
  relocate(year)

return(df)
}
df <- build_df(data_list)
ukraine_df <- df %>%
  filter(country == "Ukraine", year >= 1991, year <= 2021)

#запуск функції для моделювання

```

```
example <- run_modeling(ukraine_df)
example_r_value <- calculation_determination(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
example_mae_value <- calculation_mae(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
example_mre_value <- calculation_mre(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
example_mse_value <- calculation_mse(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
example_rmse_value <- calculation_rmse(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
example_msle_value <- calculation_msle(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
example_rmsle_value <- calculation_rmsle(example$real_dk_dt,example$model_dk_dt)
```

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

У періодичних наукових виданнях, проіндексованих у наукометричній базі Scopus

1. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2023). Comparative analysis of the effectiveness of dimensionality reduction algorithms and clustering methods on the problem of modelling economic growth. *Neuro-fuzzy modeling techniques in economics*, 12, 67-110. <http://doi.org/10.33111/nfmte.2023.067> (Scopus) (2,26 д.а., особисто автору – 1,13 д.а.: описано методику проведення кластерного аналізу країн в контексті економічного зростання та проведено сам кластерний аналіз).
2. Kolyada, Y., Poznyak, S., Ramskyi, A., & Shevchenko, S. (2024) Adaptation applying of economic growth theoretical models. *CEUR Workshop Proceedings*, 3665, 22-35. <https://ceur-ws.org/Vol-3665/paper3.pdf> (Scopus) (1,14 д.а., особисто автору – 0,29 д.а.: відпрацьовано методику апробації моделей економічного зростання).
3. Kolyada, Y., Poznyak, S., Babii, N., & Zhurakovskiy, B. (2025) Adaptive model of economic development with an open market. *CEUR Workshop Proceedings*, 4029, 28-50. <https://ceur-ws.org/Vol-4029/paper3.pdf> (Scopus) (1,43 д.а., особисто автору – 0,36 д.а.: описано адаптивну модель економічного зростання, логіку її роботи, апробовано на розширеному наборі реальних даних, досліджено динаміку та залежності параметрів моделі).

У наукових фахових виданнях України:

4. Коляда, Ю., & Позняк, С. (2024). Адаптивна модель економічного зростання для відкритої економіки. *Національні інтереси України*, 2(2), 267-286. [https://doi.org/10.52058/3041-1793-2024-2\(2\)-267-286](https://doi.org/10.52058/3041-1793-2024-2(2)-267-286) (1,06 д.а., особисто автору – 0,53 д.а.: описано адаптивну модель економічного зростання, логіку її роботи та апробовано її на реальних даних).
5. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2024). The role of investment lag in economic system development trajectory. *Grail of Science*, 38, 181-184. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.12.04.2024.030> (0,27 д.а., особисто автору – 0,13 д.а.: описано роль інвестиційного лагу в економічному зростанні та модифіковано деякі моделі економічного зростання з урахуванням інвестиційного лагу).

6. Позняк, С., & Коляда, Ю. (2024). Інвестиційний лаг і траєкторія еволюції нелінійної економіки. *Grail of Science*, 42, 93-104. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.02.08.2024.012> (0,71 д.а., особисто автору – 0,35 д.а.: модифіковано деякі моделі економічного зростання з урахуванням інвестиційного лагу та апробовано модифікації на реальних даних).

7. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2024). Virtual scenarios of demographic impact on economic growth. *Економічний вісник Донбасу*, 4(78), 173-182. [https://doi.org/10.12958/1817-3772-2024-4\(78\)-173-182](https://doi.org/10.12958/1817-3772-2024-4(78)-173-182) (0,89 д.а., особисто автору – 0,45 д.а.: розглянуто вплив демографічної динаміки на економічне зростання, модифіковано адаптивну модель, яка враховує як природній так і механічний рух населення, апробовано модифікацію на реальних даних).

8. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). Market typology and economic growth dynamics. *Herald of the economic sciences of Ukraine*, 1(48), 140-154. [https://doi.org/10.37405/1729-7206.2025.1\(48\).140-152](https://doi.org/10.37405/1729-7206.2025.1(48).140-152) (1,17 д.а., особисто автору – 0,59 д.а.: описано залежність між основними типами ринку та економічним зростанням, модифіковано адаптивну модель економічного зростання відповідним чином, апробовано її на реальних даних)

9. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). The conceptual role of the shadow economy in economic growth. *Economy and Society*, 73. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-73-7> (0,82 д.а., особисто автору – 0,41 д.а.: описано вплив тіньової економіки на економічне зростання та відповідно модифіковано адаптивну модель економічного зростання).

10. Коляда, Ю., & Позняк, С. (2025). Підвищення узагальнюючої здатності моделей економічного зростання. *Український журнал прикладної економіки та техніки*, 2025(2), 55-63. <https://doi.org/10.36887/2415-8453-2025-2-9> (1,48 д.а., особисто автору – 0,74 д.а.: описано методику модифікації адаптивної моделі економічного зростання в врахуванням демографічної динаміки, типології ринку та тіньової економіки).

11. Poznyak, S., and Kolyada, Y. (2025) Economic growth risks based on dynamic models. *Business Inform*, 7, 131-148. <https://doi.org/10.32983/2222-4459-2025-7-131-148>

(1,67 д.а., особисто автору – 0,83 д.а.: описано методику розрахунку покоординатного економічного ризику для зростання економіки).

12. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2025). Interval analysis of economic growth dynamics. *Grail of Science*, 57, 196-207. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.17.10.2025.019> (0,76 д.а., особисто автору – 0,38 д.а.: застосовано методику інтервального аналізу до моделей економічного зростання).

13. Коляда, Ю., & Позняк, С. (2025). Покоординатний економічний ризик на основі моделей економічного зростання. *Економічні горизонти*, 4(33), 57-84. [https://doi.org/10.31499/2616-5236.4\(33\).2025.342888](https://doi.org/10.31499/2616-5236.4(33).2025.342888) (1,40 д.а., особисто автору – 0,71 д.а.: застосовано покоординатний економічний ризик до моделей економічного зростання).

14. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). Market typology and dynamics of economic growth. *The problems of economy*, 3(65), 321-343. <https://doi.org/10.32983/2222-0712-2025-3-321-343> (1,72 д.а., особисто автору – 0,86 д.а.: глибше досліджено питання впливу типологій ринку на економічне зростання та апробовано на реальних даних).

Інші публікації апробаційного характеру:

15. Poznyak, S., & Kolyada, Y. (2020). Forecasting the potential of the economic system on the basis of the exogenic growth model. In *Integration of traditional and innovation processes of development of modern science* (pp. 138-155). Baltija Publishing (Литва). <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-021-6-20> (0,37 д.а., особисто автору – 0,19 д.а.: описано методику визначення максимальної межі потенціалу економічного зростання економіки та апробовано її на реальних даних).

16. Позняк, С. П., & Коляда, Ю. В. (2021). Трисекторна модель потенціалу економічної еволюції. In *Матеріали II міжнародної студентської наукової конференції «Сучасні аспекти та перспективні напрямки розвитку науки»* (pp. 77-80). Молодіжна наукова ліга. <https://doi.org/10.36074/liga-inter-03.12.2021> (0,14 д.а., особисто автору – 0,07 д.а.: описано підхід до визначення максимальної межі потенціалу економічного зростання економіки)

17. Позняк, С. П., & Коляда, Ю. В. (2023). Апробація ортодоксальних моделей макроекономічного зростання. In *Сучасні аспекти науки XXX* (pp. 199-231). Publishing Group “Scientific Perspectives” (Чехія), <http://perspectives.pp.ua/public/site/mono/mono-30.pdf> (21,61 д.а., особисто автору – 0,59 д.а.: апробовано моделі економічного зростання, які найчастіше зустрічаються в економічній літературі).

18. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2024). Scalar parameters behavior dynamics of economic growth model. In *Modeling and forecasting of economic processes: Proceedings of the 18th International scientific and practical conference* (pp. 105-112). National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. https://ecocyber.fmm.kpi.ua/wp-content/uploads/2025/05/mpep_XVIII_2024.pdf (0,56 д.а., особисто автору – 0,28 д.а.: описано динаміку поведінки основних параметрів адаптивної моделі економічного зростання).

19. Позняк, С., & Коляда, Ю. (2024). Адаптивна модель зростання відкритої економіки. In *Матеріали III Міжнародної наукової конференції «Теорія модернізації в контексті сучасної світової науки»* (pp. 87-92). International Center of Scientific Research. <https://doi.org/10.62731/mcnd-02.08.2024.001> (0,36 д.а., особисто автору – 0,18 д.а.: описано адаптивну модель економічного зростання).

20. Kolyada, Y., & Poznyak, S. (2025). Market typology in economic growth dynamics modelling. In *Collection of materials of the III International Scientific and Practical Conference "Digital Economy"* (pp. 749-753). KNEU. <https://doi.org/10.33111/978-966-926-559-3> (0,24 д.а., особисто автору – 0,12 д.а.: описано методику модифікації адаптивної моделі економічного зростання з урахуванням типів ринкової структури).

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
 Проректор з науково-педагогічної
 роботи Київського національного
 економічного університету імені
 Володимира Гетьмана
 «19» Серпень 2019 р.



«ЗАТВЕРДЖУЮ»
 Проректор з науково-педагогічної
 роботи Київського національного
 економічного університету імені
 Володимира Гетьмана
 «19» Березень 2019 р.



ДОВІДКА

про використання у навчальному процесі результатів дисертації

Позняка Сергія Петровича

на тему «Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки»

Теоретичні та методичні розробки, отримані за результатами підготовки дисертаційної роботи Позняка Сергія Петровича на тему «Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки» використовуються при викладанні навчальних дисциплін: «Прикладне моделювання», «Економічна кібернетика», «Прогнозування часових рядів», «Імітаційне моделювання економічних систем», «Методи та моделі інтелектуального аналізу даних», «Ризикологія», Прогнозування в економіці та управлінні», тренінг-курс «Машинне навчання та надвеликі дані».

Найбільш вагомі положенні дослідження, що знайшли своє використання у навчальному процесі, стосуються:

- отримання математично багатовимірних (на відміну від класичних одновимірних) динамічних моделей функціонування відкритої економіки;
- побудови систему взаємопов'язаних складових нелінійної динамічної моделі відкритої економіки, внаслідок чого отримуються віртуальні сценарії її еволюції;
- розробки методики апостеріорного оцінювання величини економічного ризику;
- удосконалення існуючих підходів до оцінювання економічного зростання у контексті багатовимірності моделі;
- механізмів взаємодії факторів виробництва у виробничій функції шляхом розширення кількості факторів, у тому числі за рахунок поділу фізичного капіталу на приватний та публічний;
- механізму формування інвестицій та їх впливу на економічне зростання, а також роль імпорту та експорту у споживанні та заощадженнях економічної системи;
- підходів до аналізу впливу людського капіталу на довгострокові темпи зростання, що дало змогу глибше врахувати інноваційний компонент розвитку.

Завідувач кафедри штучного інтелекту,
 моделювання та статистики,
 кандидат фізико-математичних наук, професор



Галина ВЕЛИКОІВАНЕНКО

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ
ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
«ФІНАНСОВА КОМПАНІЯ «ФЕНІКС»
(ТОВ «ФК «ФЕНІКС»)



Код ЄДРПОУ: 35075436
провулок Новопечерський, будинок 5,
місто Київ, 01042
Телефон: +38 (067) 555 88 96
+38 (067) 322 55 93
fkfeniks@ukr.net

Вих. № 20/Ф
від «18» березня 2026 року

ДОВІДКА

Про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Позняка Сергія Петровича на тему:

«Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки»

Товариство з обмеженою відповідальністю «ФІНАНСОВА КОМПАНІЯ «ФЕНІКС» засвідчує, що результати дисертаційної роботи на тему «Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки», що представлена на здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD), виконаної здобувачем кафедри штучного інтелекту, моделювання та статистики **Позняком Сергієм Петровичем** були впроваджені у внутрішні процеси компанії.

Результати дисертаційного дослідження полягають у використанні розроблених моделей та методів адаптивного моделювання економічного зростання для аналізу та прогнозування макроекономічних показників відкритої економіки. Запропоновані підходи можуть застосовуватися у процесі стратегічного планування, формування економічної політики, а також для оцінювання ефективності інвестиційних рішень у довгостроковому періоді.

2. Наукова новизна одержаних результатів здійснюється шляхом розробленні принципово нової адаптивної моделі економічного зростання відкритої економіки, яка інтегрує вплив зовнішньоторговельних потоків, інвестиційних лагів та динаміки людського капіталу. Модель забезпечує можливість урахування змін зовнішнього середовища та коригування параметрів економічної політики в режимі наближеного реального часу.

3. Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання запропонованої адаптивної моделі для оцінювання темпів економічного зростання, аналізу впливу зовнішніх шоків і структурних змін, а також для оптимізації інструментів макроекономічної політики у відкритій економіці. Розроблені методичні підходи можуть бути впроваджені в органах державного управління, аналітичних центрах і наукових установах для підвищення обґрунтованості стратегічних рішень щодо довгострокового розвитку національної економіки.

4. Значущість результатів дисертаційної роботи пов'язана з удосконаленням теоретико-методологічних засад аналізу економічного зростання в умовах глобальної відкритості, посилення взаємозалежності національних економік та зростання волатильності зовнішнього середовища. Запропонована адаптивна модель виступає інструментом підвищення якості економічного прогнозування й обґрунтування рішень, спрямованих на стабілізацію, структурну модернізацію та стимулювання сталого розвитку національної економіки.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота пов'язана з виконанням наукових програм і тем, присвячених моделюванню соціально-економічних процесів, підвищенню ефективності економічного розвитку та посиленню інтеграції національної економіки у світовий економічний простір. Дослідження виконано в межах комплексних наукових планів установи, орієнтованих на удосконалення методів прогнозування, аналізу та управління макроекономічною динамікою в умовах відкритої економіки.

Генеральний директор



Юлія ЖАРІКОВА

Ідентифікаційний код юридичної особи 35075436
Ліцензія Національного банку України на надання фінансових платіжних послуг
(послуги з переказу коштів без відкриття рахунку), відповідно до рішення від 30.04.2023 за №21/775-рх
Свідчення про узгодження правил внутрішньодержавної платіжної системи "City24" та змін до правил
№36 від 02.08.2017, №36/1 від 29.08.2019, №36/2 від 27.05.2020, №36/3 від 01.03.2021, №36/4 від 09.09.2021

Сторінка 1


СВІФТ ГАРАНТ
ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
«СВІФТ ГАРАНТ»
(ТОВ «СВІФТ ГАРАНТ»)

провулок Новопечерський, будинок 5, місто Київ, 01042

телефон: +38 067 104-90-53

Електронна пошта: info@swift-garant.com.ua

 № 19 /СГ

від «18» березня 2026 року

ДОВІДКА

Про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Позняка Сергія Петровича на тему:
«Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки»

Товариство з обмеженою відповідальністю «Свіфт Гарант» засвідчує, що результати дисертаційної роботи на тему **«Адаптивне моделювання економічного зростання для відкритої економіки»**, що представлена на здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD), виконаної здобувачем кафедри штучного інтелекту, моделювання та статистики **Позняком Сергієм Петровичем** були впроваджені у внутрішні процеси компанії.

1. Вид впроваджуваних результатів полягає у використанні розроблених моделей та методів адаптивного моделювання економічного зростання для аналізу та прогнозування макроекономічних показників відкритої економіки. Отримані результати можуть бути застосовані у процесі стратегічного планування, формування економічної політики та оцінювання ефективності інвестиційних рішень.

2. Новизна отриманих результатів у розробленні принципово нової адаптивної моделі економічного зростання, яка враховує відкритість економіки, вплив зовнішньоторговельних потоків, інвестиційних лагів та динаміку людського капіталу.

3. Практичне впровадження/використання результатів полягає у використанні запропонованої моделі для оцінювання темпів економічного зростання, аналізу впливу зовнішніх чинників та оптимізації макроекономічної політики у відкритій економіці. Розроблені методичні підходи можуть бути застосовані в органах державного управління, аналітичних центрах та наукових установах для обґрунтування стратегічних рішень щодо розвитку національної економіки.

4. Значущість отриманих результатів у тому, що вони сприяють удосконаленню теоретико-методологічних засад аналізу економічного зростання в умовах глобальної відкритості та динамічних змін зовнішнього середовища. Запропонована адаптивна модель може стати ефективним інструментом для підвищення обґрунтованості економічних рішень, спрямованих на стабілізацію та стимулювання розвитку національної економіки.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота пов'язана з виконанням наукових програм і тем, що стосуються моделювання соціально-економічних процесів, підвищення ефективності економічного розвитку та інтеграції національної економіки у світовий простір. Дослідження виконано в межах комплексних наукових планів установи, спрямованих на удосконалення методів прогнозування та управління макроекономічною динамікою в умовах відкритої економіки.

Директор


Вячеслав ШЕВЧЕНКО

Ідентифікаційний код юридичної особи 39859339

Ліцензія Національного банку України на надання фінансових платіжних послуг

(послуги з переказу коштів без відкриття рахунку), відповідно до рішення від 30.04.2023 за №21/776-рк

Сторінка 1