7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М.: Наука, 1964. —576 с.
8. *Винер Н*. Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. — М.: ИЛ, 1960. — 160 с.
9. *Вольтер Я.* Стохастические модели в экономике / Я. Вольтер. — М.: Статистика, 1967. — 320 с.
10. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 612 с.
11. *Гихман И. И.* Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 567 с.
12. *Джалладова І. А*. Оптимізація стохастичних систем / И. А. Джалладова.— К.: КНЕУ, 2005. — 284 с.
13. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы / Дж. Дуб. — М. : Изд-во иностр. лит. 1956. — 605 с.
14. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М.: Физматгиз, 1963. — 659 с.
15. *Ито К.* Вероятностные процессы / К. Ито. — М.: ИЛ, 1960. — 133 с.
16. *Ито К.* О стохастических дифференциальных уравнениях / К. Ито // Математика: сб. переводов. — 1957. —Т. 1. — № 1. — С. 78—116.
17. *Казаков И. Е.* Оптимизация динамических систем случайной структуры / И. Е. Казаков, В. М. Артемьев. — М. : Наука, 1980. — 382 с.
18. *Квакернаак Х.* Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
19. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: [Сб. статей]/ А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1986. — 535 с.
20. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем / В. С. Королюк. — К.: Наук. думка, 1989. — 210 с.

Статтю подано до редакції 29.04.10 р.

УДК 303.732.4

О. І. Бабинюк, асистент кафедри вищої математики ФІСІТ, ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЇ І ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ЧУТЛИВАОСТІ

АНОТАЦІЯ. Досліджено модель популяції за допомогою традиційних методів, за допомогою функції чутливості першого порядку. А також запропоновано метод дослідження за допомогою функції чутливості другого порядку, проведено порівняння точності оцінок за традиційними методами та новими.

ANNOTATION. We researching the population models with help traditional methods and with help sensitivities functions first order. Also supposed the methods of investigating with help sensitivities functions second order and fulfill analyses accuracy of estimates as traditional and new methods.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Функція чутливості першого та другого порядків, матриця інформації Фішера, оцінки параметрів,

Вступ. Припустимо, що задано динамічну систему, яка є моделлю фізичного, соціального або біологічного явища, тобто:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \Theta), \quad \dot{x}(t) = x_0(\Theta),$$
$$\eta(t) = h(t, x(t), \Theta), \; t \in [0, T], \tag{1}$$

де $x(t) \in R^n$, $\eta(t) \in R^n$, $\Theta \in R^p$, $F : R^{1+n+p} \to R^n$, $\eta : R^{1+n+p} \to R$,

F і h — достатньо гладкі функції.

Розв'язок задачі (1) подамо у вигляді:

$$x = x(t, \Theta), \; 0 \le t \le T,$$
$$\eta = f(t, \Theta), \; 0 \le t \le T, \tag{2}$$

де f визначена як $f(t, \Theta) = h(t, x(t, \Theta), \Theta)$.

Звичайно, цікавим в контексті моделі (1) — (2) є питання:

1. Пряма задача, тобто знаходження η залежно від параметра Θ. Важливим є завдання ідентифікації цих параметрів, до яких модель більш (менш) чутлива.

2. Обернена задача, або задача оцінки параметрів, яка полягає в оцінці параметра Θ залежно від множини значень η.

Це дуже важливі задачі і вони раніше вивчалися за допомогою традиційної функції чутливості (ТФЧ) [1, 2].

У цій роботі ми розглядаємо задачу оцінки параметру Θ залежно від оптимального припущення на майбутнє.

Припускаємо, що інформація про параметр Θ може значно змінюватися від одного моменту вимірювання до іншого. Мета дослідження: отримати математичний інструмент, який дозволяв би отримувати більш точну оцінку, та сформулювати задачу оцінювання «істинного» значення Θ від номінального за аналогією метода найменших квадратів, шукають найменше значення від суми квадратів різниць $y(t) = \eta(t, \Theta_0)$ і $j(t, \Theta)$.

Традиційно, відповідь на це питання полягає в знаходженні розподілів для вимірювань, які оптимізують деякий критерій. Зазвичай, критерієм слугує матриця інформації Фішера. Але ця матриця залежить від параметра Θ_0, який на практиці не відомий. Ми розв'язуватимемо задачу використовуючи поняття узагальненої функції чутливості, яка вперше була введена Thomasehh and Cabelli [5]. Отримані результати будемо ілюструватимемо на логістичній моделі популяції Verhulst—Pearl. Ця модель широко застосовується в науково-дослідницькій літературі, має аналітичний розв'язок, кілька параметрів та добре відому динаміку [2]. Логістична модель, яка наближає розмір граничного насичення популяції залежно від часу, описується диференціальним рівнянням:

$$\dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

де k, r, x_0 — сталі, які, відповідно, описують: стан навколишнього середовища, коефіцієнт зростання популяції і початкове значення популяції.

Наша задача полягає в оцінці параметра $\Theta = (k, r.x_0) \in R^3$.

Аналітичний розв'язок задачі (3) подається у вигляді:

$$x(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{x_0} - 1\right) \cdot e^{-rt}} \tag{4}$$

і наближено дає стійкий стан $x \equiv k$ при $t \to \infty$ (рис. 1).

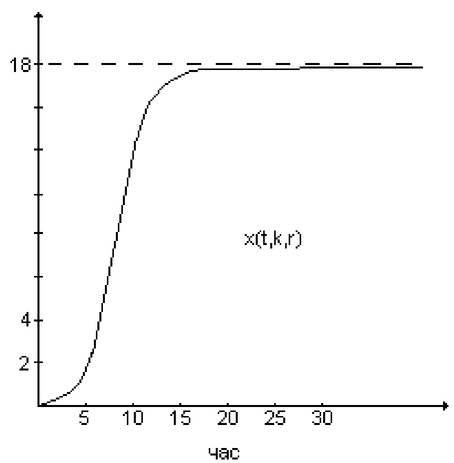

Рис. 1. Розв'язок логістичного рівняння при $\Theta_0 = (17{,}5; 0{,}7; 0{,}1)$

Порівнявши з (2), матимемо, що в цьому випадку функція визначається правою частиною рівняння (4).

1. Загальні постановки задачі оцінювання параметра

1.1. Процедура вимірювання

Припускаємо, що при заданому $T > 0$ ми можемо здійснити вимірювання $t \in [0, T]$. Виходячи з класичної статичної теорії, розглянемо

$$y(t) = f(t, \Theta) + \varepsilon(t)\,,\ \ t \in [0, T] \tag{5}$$

в якості реалізації моделі для процесу, який спостерігається, де Θ_0 — «істинний» або номінальний параметр, про який вже нам відомо із вступу; нелінійна функція f неперервна і двічі диференційована по Θ_0.

Функція y, яка задає вимірювання в будь-який час $t \in [0, T]$, реалізує стохастичний процес (статистична модель):

$$y(t) = f(t, \Theta_0) + w(t)\,,$$

який регулює процес вимірювання.

Звичайно $f(t, \Theta)$ — детермінована функція означає зовнішню модель відповідно y істинного значення Θ_0 і $w(t)$ — випадковий процес типу білого шуму для вимірювання похибки. Похибка $\varepsilon(t)$ в (5) це просто реалізація $w(t)$. Далі припускаємо, що

$$E(w(t)) = 0\,,\ \ t \in [0, T],$$

$$Var\ w(t) = \sigma^2(t)\,,\ \ t \in [0, T],$$

$$Cov(w(t)\ w(s)) = \sigma(t)\sigma(s)\delta(t - s)\,,\ \ t \in [0, T],$$

де $\delta(t)$ — функція Дірака.

Позначимо через $m(t)$ щільність вимірювань при $t \in [0, T]$, тобто $\int_s^t m(r)dr$ — кількість вимірювань на інтервалі $[s; t]$, $s < t$.

Визначимо, згідно з методом найменших квадратів, похибку вимірювань за формулою [1]:

$$J(y,\Theta)=\int_0^T \frac{m(t)}{\sigma^2(t)}(y(t)-f(t,\Theta))^2\,dt\,.$$

Інтеграл можна розглядати по відношенню до міри P на $\lfloor 0,T\rfloor$ зі щільністю $m(t)=\dfrac{dP(t)}{dt}$. Це мотивує нас розглядати більш загальний функціонал похибки у вигляді:

$$J(y,\Theta)=\int_0^T \frac{1}{\sigma^2(t)}(y(t)-f(t,\Theta))^2\,dP(t)\,,$$

де P — загальна міра на $\lfloor 0,T\rfloor$.

Якщо ми хочемо отримати оцінку параметру $\hat{\Theta}$ мінімізуючи $J(y,\Theta)$ по Θ в сусідньому Θ_0, ми можемо, не обмежуючи загальності, припустити, що P — ймовірнісна міра на $\lfloor 0,T\rfloor$.

У дискретному випадку (скінчене число вимірювань), беручи $P_d=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ti}$ отримуємо:

$$J_d(y,\Theta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma^2(t_i)}(y(t)-f(t_i,\Theta))^2\,.$$

1.2. Оцінки найменших квадратів

Для оцінки Θ_0 використовуємо процедуру найменших квадратів, тобто:

$$\hat{\Theta}=\arg\min_{\Theta} J(y,\Theta)\,. \tag{6}$$

Розглядаємо y як реалізацію стохастичного процесу Y, $\hat{\Theta}$ як реалізацію випадкової величини $\hat{\Theta}$, яку називають вагою оцінки найменших квадратів. Запишемо (6) у вигляді:

$$\hat{\Theta}=\arg\min_{\Theta} J(Y,\Theta)\,.$$

Використовуючи процедуру лінеаризації [5] ми отримаємо в першому наближенні результат

$$\hat{\Theta} \approx N_p(\Theta_0, \Sigma_0),$$

тобто $\hat{\Theta}$ наближено має нормальний розподіл з математичним сподіванням Θ_0 і дисперсією Σ_0, де Σ_0 — обернена до матриці інформації Фішера.

1.3. Традиційна функція чутливості

Розглянемо модель (2). Визначимо традиційну функцію чутливості парного порядку у вигляді:

$$s_k(t,\Theta) = \frac{\partial \eta}{\partial \Theta_k}(t,\Theta) \in R, \; k = \overline{1,p},$$

Тоді матриця розмірності $1 \times p$

$$s(t,\Theta) = \left(s_1(t,\Theta),\dots,s_p(t,\Theta)\right) \equiv \left(\nabla_\Theta \eta_1(t,\Theta)\right)$$

знаходиться за формулою:

$$s(t,\Theta) = \frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t,\Theta),\Theta)\frac{\partial x}{\partial \Theta}(t,\Theta) + \frac{\partial h}{\partial \Theta}(t, x(t,\Theta),\Theta),$$

де $\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_{j=\overline{1,n}}$; $\frac{\partial x}{\partial \Theta} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)_{j=\overline{1,n};k=\overline{1,p}}$; $\frac{\partial h}{\partial \Theta} = \left(\frac{\partial h}{\partial \Theta_k}\right)_{k=\overline{1,p}}$.

Добре відомо [2], що матриця $X(t,\Theta) := \left(\frac{\partial x}{\partial \Theta}\right)(t,\Theta)$, як функція по t, задовольняє систему звичайних лінійних рівнянь (рівняння чутливості):

$$\dot{x}(t,\Theta) = F_x(t, x(t,\Theta),\Theta)X(t,\Theta) + F_0(t, x(t,\Theta),\Theta); \qquad (7)$$

$$X(0,\Theta) = \frac{\partial x_0}{\partial \Theta}(\Theta).$$

Рівняння (7) широко застосовується на практиці, забезпечуючи швидкий та ефективний шлях обчислення матриці чутності s чисельно для загальної системи (1).

Хоча функція чутливості першого порядку є достатнім математичним інструментом, але ми пропонуємо ввести в розгляд ще функцію чутливості другого порядку:

$$s_{k,m}(t,\Theta) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \Theta_k \partial \Theta_m}(t,\Theta), \; k,m = \overline{1,p}.$$

Застосовуючи поняття функції чутливості, і враховуючи, що функція $f(t,\Theta)$ в (5) в околі точки Θ_0 має розклад у ряд Тейлора:

$$f(t,\Theta) = f(t,\Theta_0) + \nabla_\Theta f(t,\Theta_0)(\Theta - \Theta_0) +$$
$$\frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^T \nabla^2_{\Theta\Theta} f(t,\Theta_0)(\Theta - \Theta_0) + \ldots$$

Запишемо фунціонал $\widetilde{J}(y,\Theta)$ у вигляді:

$$\widetilde{J}(y,\Theta) = \int_0^T \frac{1}{\sigma^2(t)}(\varepsilon(t) - \nabla_\Theta f(t,\Theta)(\Theta - \Theta_0) +$$
$$+\frac{1}{2}(\Theta - \Theta_0)^T \nabla^2_{\Theta\Theta} f(t,\Theta)(\Theta - \Theta_0))^2 \, dP(t).$$

Поблизу Θ_0, $J(y,\Theta) \approx \widetilde{J}(y,\Theta)$ і значення, яке мінімізує $\widetilde{J}(y,\Theta)$, є наближенням для оцінки $\hat{\Theta}$ і дається формулою (7). Умовою оптимальності при $\widetilde{\Theta}$ є $\nabla_\Theta \widetilde{J}(y,\widetilde{\Theta}) = 0$, або

$$2\int_0^T \frac{1}{\sigma^2(t)}(\varepsilon(t) - \nabla_\Theta f(t,\Theta_0)(\widetilde{\Theta} - \Theta_0) - \frac{1}{2}(\widetilde{\Theta} - \Theta_0)^T \nabla^2_{\Theta\Theta} f(t,\Theta)(\widetilde{\Theta} - \Theta_0))(\nabla_\Theta f(t,\Theta 0 +$$
$$+(\widetilde{\Theta} - \Theta_0)^T \nabla^2_{\Theta\Theta} f(t,\Theta_0))^T \, dP(t) = 0_{p\times 1}.$$

Утримуючи лише члени першого порядку з $\widetilde{\Theta} - \Theta_0$ матимемо:

$$A(\widetilde{\Theta} - \Theta_0) \approx \int_0^T \frac{\varepsilon(t)}{\sigma^2(t)} \nabla^T_\Theta f(t,\Theta) dP(t),$$

де матриця A подається формулою:

$$A = \int_0^T \frac{1}{\sigma^2(t)} (\nabla_\Theta^T f(t,\Theta_0) \nabla_\Theta f(t,\Theta_0) - \varepsilon(t) \nabla_{\Theta\Theta}^2 f(t,\Theta_0) dP(t) .$$

На рис. 2 і 3 зображено для логістичної кривої функції чутливості першого і другого порядку для $\eta(t) = f(t,\Theta) = x(t,\Theta)$ із рівняння (4).

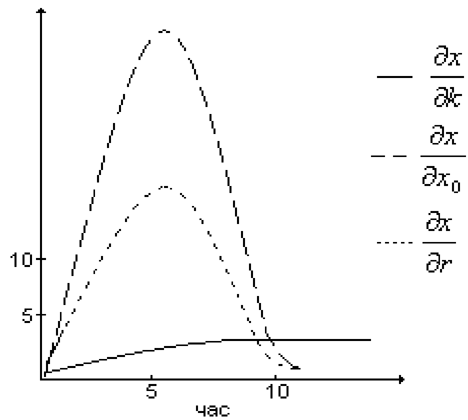

Рис. 2. Функція чутливості першого порядку

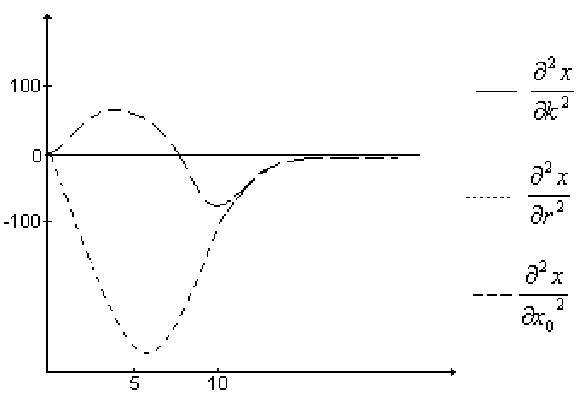

Рис. 3. Функція чутливості другого порядку

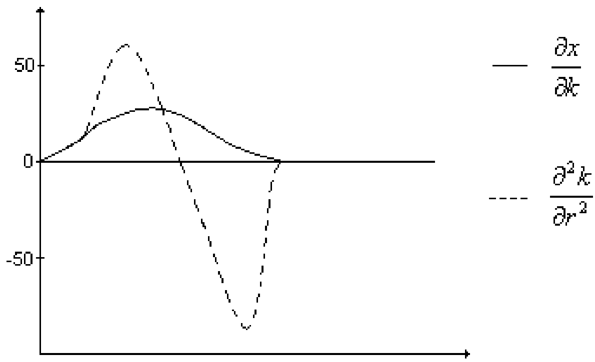

Рис. 4. Чутливість по відношенню до r

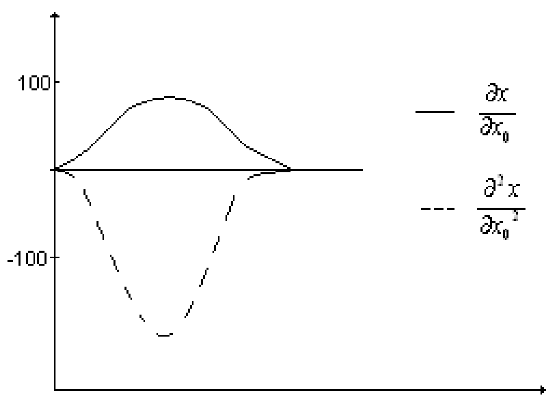

Рис. 5. Чутливість по відношенню до x_0

Величина функції чутливості другого порядку тим більша, чим більша функція чутливості першого порядку. Більш того, їх зв'язок декілька ширший, якщо подивитися на рис. 4 і 5. Цей факт підтверджує наше припущення про те, що функція чутливості другого порядку може відігравати важливу роль і буде використана разом з функцією чутливості першого порядку в задачах на знаходження оцінок параметрів.

Висновок. Наше інтуїтивне припущення що функція чутливості другого порядку покращує оцінку параметра Θ підтвердилося на прикладі аналізу логістичної моделі. Крім того, для покращення оцінок ми повинні ввести додаткові вимірювання в моменти часу, в які функція чутливості першого порядку більше і функція чутливості другого порядку менше (або де відношення цих величин порівняно). Виходячи з нашого аналізу за допомогою моделі популяції, ми пропонуємо використовувати функції чутливості першого та другого порядків як оптимальний інструмент конструювання оцінок.

Література

1. *Banks H. T. and Bihavi K. L.* Modeling and estimating uncertainly in parameter estimation. *Inverse Probl.* 17 (2001), 95—111.
2. *Banks H. T., S. Derin and Ngujen H. K.* Sensitivity of dynamical systems to parameters in a convex subset of a topological vector space, *Math. Biosci*. End. 4 (2007), 403—430.
3. *Fedorov V. V.* Theory of Optimal Experiments. *Academic Press,* New York, NY, 1978.
4. *Berger M. P. F., Wong W. K. (Eds.)* Applied Optimal Designs, John Wiby *& Sous,* Crichester, UK, 2005.
5. *Thomaseth K. and C. Cobelli*. Generalized sensitivity functions in physiological system identifications. *Ann. Biomed. Eng.* 27:5 (1999), 607—616.

Статтю подано до редакції 01.07.10 р.

УДК 519.7

Г. В. Шуклін, здобувач,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДИНАМІКИ ЦІН АКТИВІВ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ

АНОТАЦІЯ. Стаття присвячена побудові розв'язків диференціальних рівнянь, що описують закони розподілу ймовірностей зростання і падіння цін активів на фондовому ринку.

ANNOTATION. The article is devoted to constructing solutions of differential equations which obtaining dynamic assets in stocks market.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Запізнючий експоненціал, ймовірність, диференціальне рівняння.