

Kanarskaya I. S., postgraduate,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

THE COMPLEXITY OF ALGORITHMS OF INTERSECTION, UNION, AND DIFFERENCE IN MULTITABLES

The algorithms implementing intersection, union and difference in the multitables are investigated. The modification of the most common algorithms reducing the quantity of computation is proposed. For each algorithm evaluated complexities in the worst case is found. Based on the program experimentally, the fastest algorithm for each operation is found.

Keywords: table algebra, database, multitable.

УДК 519.925

В. Р. Кулян, канд. техн. наук, доц.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
О. О. Юнькова, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ

АЛГОРИТМІЧНІ ПРОЦЕДУРИ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ

Розглядається проблема якісного аналізу математичних моделей динаміки інвестицій. Для розроблених математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій сформульовано задачі та побудовано алгоритмічні процедури для визначення оптимальних значень параметрів. Розглянуто широкий спектр прикладних задач, пов'язаних з математичним моделюванням та оптимізацією інвестиційних операцій з цінними паперами.

Ключові слова: математичне моделювання, ідентифікація параметрів, портфель інвестицій

Розглянемо математичні процедури пошуку та визначення оптимальних значень числових параметрів математичних моделей динаміки активів на фондовому ринку. Побудуємо такі процедури для математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Ці моделі описані детально у [2] і мають такий загальний вигляд

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t), \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

відповідно, i є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними за r_i та залежать від параметрів.

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \alpha_3 r_j(t), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

При різних постановках задачі параметричної ідентифікації за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, p_{ij})$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in A$, де A – обмежена замкнута множина. Скористаємось відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\bar{r}_i(t)$ і на основі цієї динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α . Для цього на початковому підінтервалі для i – тої акції і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, t_1).$$

З метою отримання оптимального значення параметра α_0^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha_0^* = \arg \min_{\alpha \in A} (r^0(r(t_0), t, \alpha) - \bar{r}_i(t))^2. \quad (3)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}), \quad r_i(t_{k-1}) = r_{i, k-1}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k).$$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^* . При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k .

3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_k^* = \arg \min_{\alpha \in A} (r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha) - \bar{r}_{k-1}(t))^2 \quad (4)$$

Розв'язок задачі (4) дозволяє оптимально перейти із точки r_{k-1} у точку r_k . Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі для моделювання поведінки та прогнозування очікуваної прибутковості акції r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Розглянемо деякі інші алгоритм побудови гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1) у просторі R^n параметрів α .

Алгоритм 1 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Вектор параметрів моделі запишемо у вигляді

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ за умови } x(t_0) = x_0 \text{ при } t \in [t_0, t_1].$$

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів математичної моделі

$$\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}).$$

І нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{01})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{02})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{01}, \alpha_{02})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 - \alpha_{k1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_2 - \alpha_{k2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_2 - \alpha_{k2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 - \alpha_{k1}).$$

Нові значення параметрів α , які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 - \alpha_{k1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})} + \alpha_{k2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k1}, \alpha_{k2})} + \alpha_{k2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де A – обмежена замкнута множина параметрів математичної моделі

$$\alpha_N = (\alpha_{N1}, \alpha_{N2}).$$

Серед критеріїв якості для перевірки належності параметра допустимій множині можемо розглянути такі:

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha) - x_{\text{exp}}(t_i))^2 < \varepsilon, \quad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha) - x_{\text{exp}}(t)) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв.

Алгоритм 2 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Після побудови та аналізу розв'язків задачі ідентифікації параметрів математичної моделі формування ринкової вартості акції або портфеля акцій) визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_i^c = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \alpha_i^j, \quad i = 1, 2.$$

Для цього розв'яжемо задачу одновимірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p, q)$ – функція відстані між точками p та q .

На границі кола $S(1, D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i . В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\bar{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмі 1.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $n_i, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати "гарантованою еліпсоїдальною оцінкою" параметрів моделі (1), побудованою на основі критеріїв (5) або (6).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B, d): \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \leq 1\}, \quad (7)$$

де B – симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α , $\alpha \in R^n$; d – геометричний центр еліпсоїда, $d \in R^n$. Множину (7) будемо називати "гарантованою множинною оцінкою", якщо кожне значення параметра α , отримане для довільних спостережень, належить $Q(B, d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0 = E$, а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \alpha_j,$$

де k – кількість точок.

На $k+1$ – кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{ (B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k) \},$$

$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{ (B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k) \},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar{j}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), \alpha_{\bar{j}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}))) <$$

$$(B^k(\alpha_{\bar{j}} - d^k), \alpha_{\bar{j}} - d^k),$$

де $\bar{i} = \arg \max_i (B(\alpha_i - d), \alpha_i - d)$.

$$(B^j(\alpha - d^j), \alpha - d^j) < 1.$$

На границі сфери $S(1, d^j)$ з центром у точці d^j , (j – номер кроку процедури такий, що

$$(B^j(p - d^j), p - d^j) < 1$$

сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_S}$ з вузлами y_i . У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і побудована за допомогою Алгоритму 1, забезпечує виконання обраних критеріїв якості.

Іншим підходом до розв'язання задачі параметричної ідентифікації є застосування функцій чутливості.

Для зручності перетворень праву частину позначимо через $f(t, r, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Вважатимемо також, що мають місце початкові умови $r(t_0) = r_0 = r_0(\alpha)$, $t_0 = t_0(\alpha)$, а також, що α є скаляром і $\alpha = \alpha_1$, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 є сталою. У такій постановці ρ_{jj} – коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r, α , а також за неперервної диференційованості функцій r_0, t_0 за α_1 існує неперервна похідна

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1}.$$

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial r} u + \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \quad (8)$$

при початковій умові

$$u(t_0) = \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r_0(\alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (9)$$

Рівняння (9) отримано прямим диференціюванням $u(t, \alpha_1)$ за α_1 , а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t, \alpha_1) = \int_{t_0(\alpha_1)}^t f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1) d\tau + r_0(t_0, \alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} =$$

$$\int_{t_0(\alpha_1)}^t \left[\frac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial r} u(\tau, \alpha_1) + \frac{\partial f(r(t, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \right] d\tau +$$

$$\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r(t_0(\alpha_1), \alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \quad (10)$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (10) $t = t_0$.

Застосуємо функцію чутливості до ідентифікації параметрів α_1, α_2 математичної моделі (1). Математична задача має такий вигляд

$$\min_{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}} (r_j(t, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}) - z_j(t))^2, \quad t \in [t_0, T].$$

Тут $z_j(t)$ – спостереження за поведінкою ціни акції на ринку.

Алгоритм 3 побудови параметрів математичної моделі (1).

Розглянемо рівняння формування динаміки ринкової вартості однієї акції у вигляді

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t) + \xi(t), \quad (11)$$

Тут α_1, α_2 – параметри моделі; ρ_{ij} – враховує кореляційні залежності між акціями, $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$; $\xi(t)$ – вектор збурень.

У випадку, якщо $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$, із (20) можемо отримати

$$(\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r(t) + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} r_j(t) = (\xi(t) - \frac{dr}{dt})r^{-1}(t), \quad (12)$$

У матричному вигляді

$$\alpha = (\xi - \dot{R})R^{-1}. \quad (13)$$

Якщо вектори $\dot{r}, r, \xi$ є доступними для визначення, то (13) можна розглядати як прямий алгоритм ідентифікації параметрів математичної моделі. Похибка ідентифікації лінійно залежить від похибок визначень $\dot{r}, \xi$. Аналіз (13) вказує на те, що вплив похибок визначень r на оцінювання параметрів збільшується, якщо рівняння системи погано обумовлені, тобто коли матриця R близька до особливої, а визначник цієї матриці $|R|$ близький до 0. Для того, щоб рівняння

$$\dot{R} - \alpha R = \xi$$

було добре обумовленим, необхідно, щоб вектори $r_i(t)$ були незалежними. Якщо ж процес є стохастичним, то ця умова зводиться до некорельованості значень $r(t_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Подальша процедура ідентифікації параметрів моделі зводиться до отримання розв'язку рівняння (13) для різних моментів часу $t \in [t_0, T]$.

Побудувавши розв'язки рівняння (13) для $k+2$ – моментів часу, отримаємо систему із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі.

Розглянувши $\sum_{i=1}^n \rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Висновки. Наведено обчислювальні процедури ідентифікації параметрів математичних моделей динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Розроблені алгоритми дозволяють розв'язувати широкий спектр задач оптимального управління портфельними інвестиціями. Сформульовані обчислювальні процедури можна застосовувати для побудови допустимих та ефективних множин, а також розв'язувати задачі оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів для моделей (1) і (2).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – 1027с.
2. Гаращенко Ф. Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Ф. Г. Гаращенко, В. Р. Кулян, В. В. Рутицкая // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. – с. 3–10.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.16

Кулян В. Р., канд. техн. наук, доц.,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев
Е. А. Юнькова, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана, Киев

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ

Рассматривается проблема качественного анализа математических моделей динамики инвестиций. Для построенных математических моделей формирования рыночной стоимости одной акции и портфеля акций сформулированы задачи и разработаны алгоритмы для определения оптимальных значений параметров. Рассмотрено широкий спектр прикладных задач, связанных с математическим моделированием и оптимизацией инвестиционных операций с ценными бумагами.

Ключевые слова: математическое моделирование, идентификация параметров, портфель инвестиций.

Kulian V. R., Ph.D
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Iunkova O. O., Ph.D
Vadim Getman National Economy University of Kyiv

ALGORITHMIC PROCEDURES FOR CALCULATING THE PARAMETERS OF MODELS

The problem of qualitative analysis of mathematical models of the dynamics of investment is considered. For a mathematical models of the market value of a share and the stock portfolio is formulated tasks and the algorithms for determining the optimal parameter values. We consider a wide range of applications related to mathematical modeling and optimization of investment securities transactions.

Keywords: mathematical modeling, parameter identification, investment portfolio.